

RHEOLOGIE DES SOLS

Chapitre 2

Lois de comportement élastique

(2^{ème} Partie : Comportement élastique non-linéaire)

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 Le tableau ci-après présente les résultats d'un essai triaxial de cisaillement drainé de type CID réalisé sur un sol sableux sous contrainte radiale $\sigma_r = 50 \text{ kPa}$, où σ_a désigne la contrainte axiale appliquée et ε_a la déformation axiale correspondante.

$\sigma_a \text{ (kPa)}$	50	95	120	150	165	175	180	190	195	200	204	205	206	207	208
$\varepsilon_a \text{ (%)}$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0

Si l'on admet pour ce sol une loi d'élasticité hyperbolique de type Kondner (1963), on demande de déterminer le module de Young tangent initial E_i et le déviateur de contraintes ultime $(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}$, puis de tracer les courbes de cisaillement expérimentale et simulée correspondantes. Commenter ensuite les résultats trouvés.

Rép. 1

La courbe de cisaillement $(\sigma_a - \sigma_r, \varepsilon_a)$ peut-être approximée par l'hyperbole d'équation :

$$\sigma_a - \sigma_r = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_a}{(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}}} \quad (\text{Kondner, 1963})$$

où E_i désigne le module de Young tangent initial et $(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime. D'où l'on peut déduire l'équation de la courbe transformée suivante :

$$\frac{\varepsilon_a}{\sigma_a - \sigma_r} = \frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_a}{(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}}$$

C'est l'équation d'une droite de pente $\frac{1}{(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{E_i}$.

La figure 1 présente les points expérimentaux et la droite moyenne correspondante d'équation :

$$\frac{\varepsilon_a}{\sigma_a - \sigma_r} = 0.0016 + 0.006\varepsilon_a$$

Tous calculs faits, on déduit :

$$\frac{1}{E_i} = 0.0016 \quad \Rightarrow \quad E_i = 625 \text{ kPa}$$

$$\frac{1}{(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}} = 0.006 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_a - \sigma_r)_{ult} = 167 \text{ kPa}$$

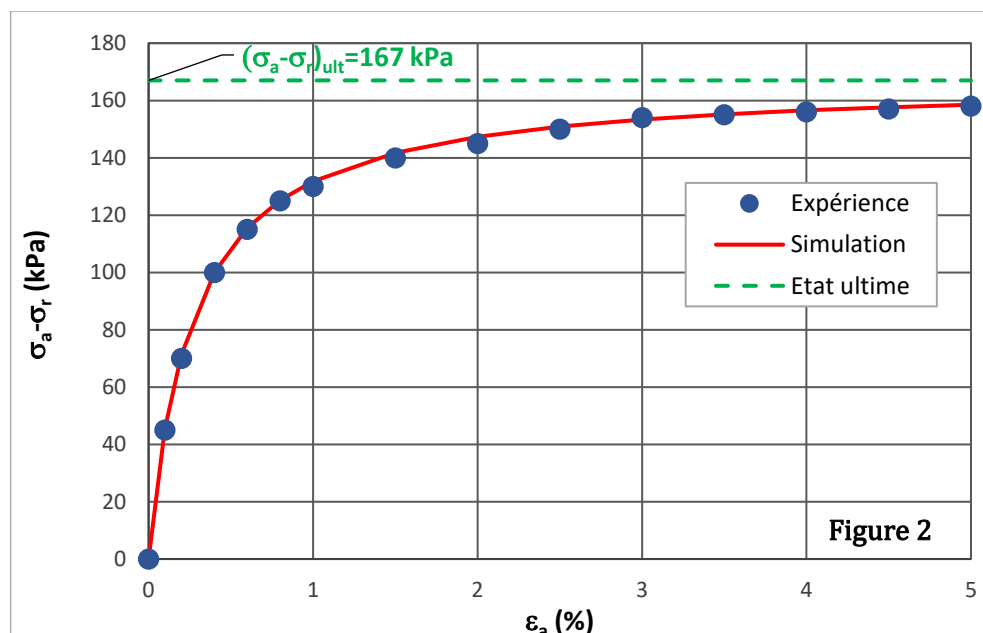
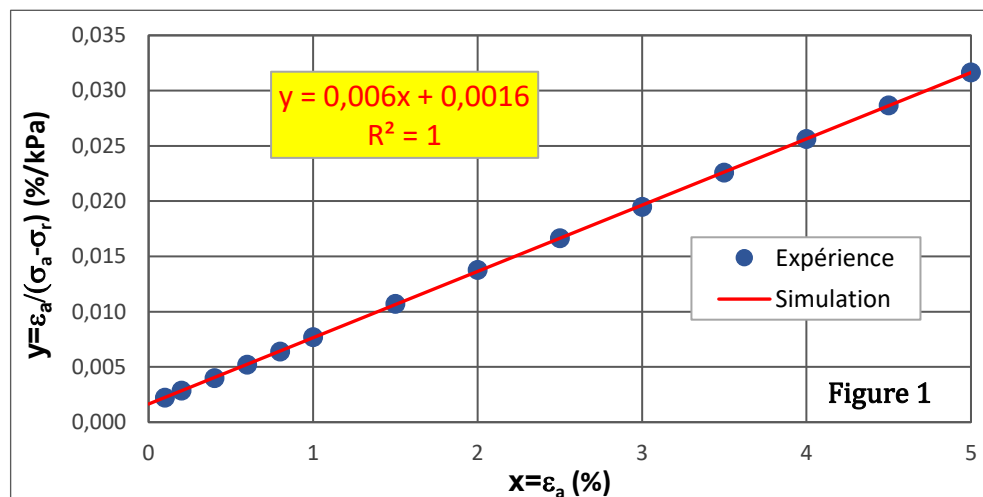
D'où l'équation de la courbe de cisaillement simulée :

$$(\sigma_a - \sigma_r)_{sim} = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_a}{(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}}} = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{625} + \frac{\varepsilon_a}{167}}$$

Le tableau ci-après présente les résultats des calculs correspondants.

Commentaire : La figure 2 montre une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux. La loi hyperbolique de Kondner (1963) constitue donc une parfaite approximation de la courbe de cisaillement (coefficient de corrélation : $R^2 = 1$).

σ_a (kPa)	ε_a (%)	$(\sigma_a - \sigma_r)_{exp}$ (kPa)	$\left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_a - \sigma_r}\right)_{exp}$	$(\sigma_a - \sigma_r)_{sim}$ (kPa)	$\left(\frac{\varepsilon_a}{\sigma_a - \sigma_r}\right)_{sim}$
50	0	0	-	0.000	-
95	0.1	45	0.002	45.479	0.002
120	0.2	70	0.003	71.490	0.003
150	0.4	100	0.004	100.120	0.004
165	0.6	115	0.005	115.544	0.005
175	0.8	125	0.006	125.187	0.006
180	1.0	130	0.008	131.787	0.008
190	1.5	140	0.011	141.750	0.011
195	2.0	145	0.014	147.318	0.014
200	2.5	150	0.017	150.875	0.017
204	3.0	154	0.019	153.342	0.020
205	3.5	155	0.023	155.155	0.023
206	4.0	156	0.026	156.543	0.026
207	4.5	157	0.029	157.640	0.029
208	5.0	158	0.032	158.528	0.032



Ex. 2 Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de cisaillement drainé de type CID réalisés sur un sable d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 30^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module de Young tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	σ_3 (kPa)	E_i (MPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)
1	50	25	110
2	100	100	220
3	200	400	440

- Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs des paramètres R_f correspondantes.
- Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre comme pression de référence $p_a = 100$ kPa.
- Représenter ensuite l'évolution du module de Young tangent initial E_i en fonction de la contrainte de confinement σ_3 , puis déduire la valeur de celui-ci pour une contrainte de confinement $\sigma_3 = 150$ kPa.

Rép. 2

- Déviateur de contraintes à la rupture satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb et valeurs de R_f correspondantes**

A1. Déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$

Le critère de Mohr-Coulomb est donné par l'équation suivante :

$$f(\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3) = (1 - \sin \varphi)\sigma_1 - (1 + \sin \varphi)\sigma_3 - 2c \cos \varphi \leq 0$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_1 \sin \varphi - \sigma_3 - \sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi &\leq 0 \\ \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_1 \sin \varphi + \sigma_3 \sin \varphi - 2\sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi &\leq 0 \\ \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi) - 2\sigma_3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi &\leq 0 \\ \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi) &\leq 2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi \\ \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 &\leq \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \end{aligned}$$

D'où l'on peut écrire :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Sachant que :

$$c = c' = 0 \text{ (Sable)}$$

$$\varphi = \varphi' = 30^\circ$$

D'où :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2 \times 0 \times \cos 30 + 2 \times \sigma_3 \times \sin 30}{1 - \sin 30} = 2\sigma_3$$

Soit donc :

Essai	σ_3 (kPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ (kPa)
1	50	100
2	100	200
3	200	400

A2. Valeurs de R_f correspondantes

Le paramètre R_f est défini par l'expression suivante :

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$$

D'où alors :

Essai	σ_3 (kPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ (kPa)	R_f
1	50	110	100	0.91
2	100	220	200	0.91
3	200	440	400	0.91

B. Paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970)

Le module de Young tangent initial est donné par la relation suivante :

$$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (\text{Janbu, 1963}) \quad | \quad p_a = 100 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \frac{E_i}{p_a} = K_h \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \Rightarrow \log \left(\frac{E_i}{p_a} \right) = \log K_h + n \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

Soit donc :

Essai	σ_3 (kPa)	E_i (kPa)	$\frac{\sigma_3}{p_a}$	$\frac{E_i}{p_a}$	$\log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$	$\log \left(\frac{E_i}{p_a} \right)$
1	50	25000	0.5	250	-0.301	2.398
2	100	100000	1.0	1000	0.000	3.000
3	200	400000	2.0	4000	0.301	3.602

D'après le tableau ci-dessus, on déduit :

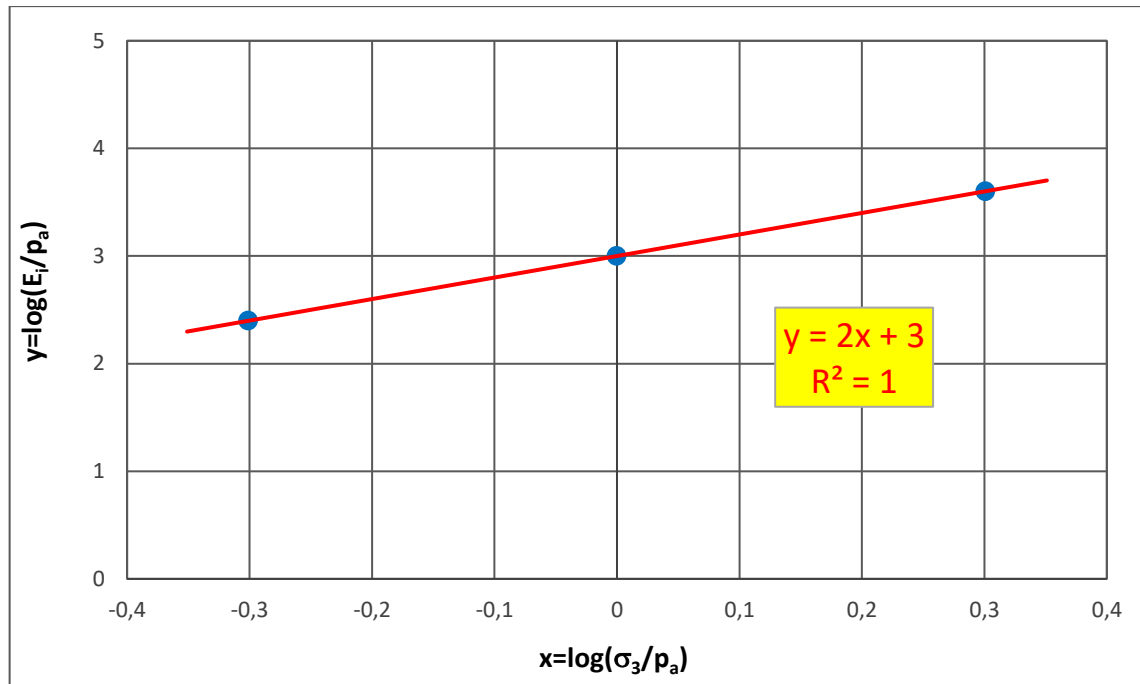
$$\log K_h = 3 \Rightarrow K_h = 10^3 = 1000$$

$$n = \frac{3.602 - 3.000}{0.301 - 0.000} = 2 \Rightarrow n = 2$$

La figure 1 présente les points expérimentaux et la droite moyenne correspondante d'équation :

$$\log \left(\frac{E_i}{p_a} \right) = 2 \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) + 3$$

D'où l'on peut déduire : $n = 2$ et $K_h = 10^3 = 1000$



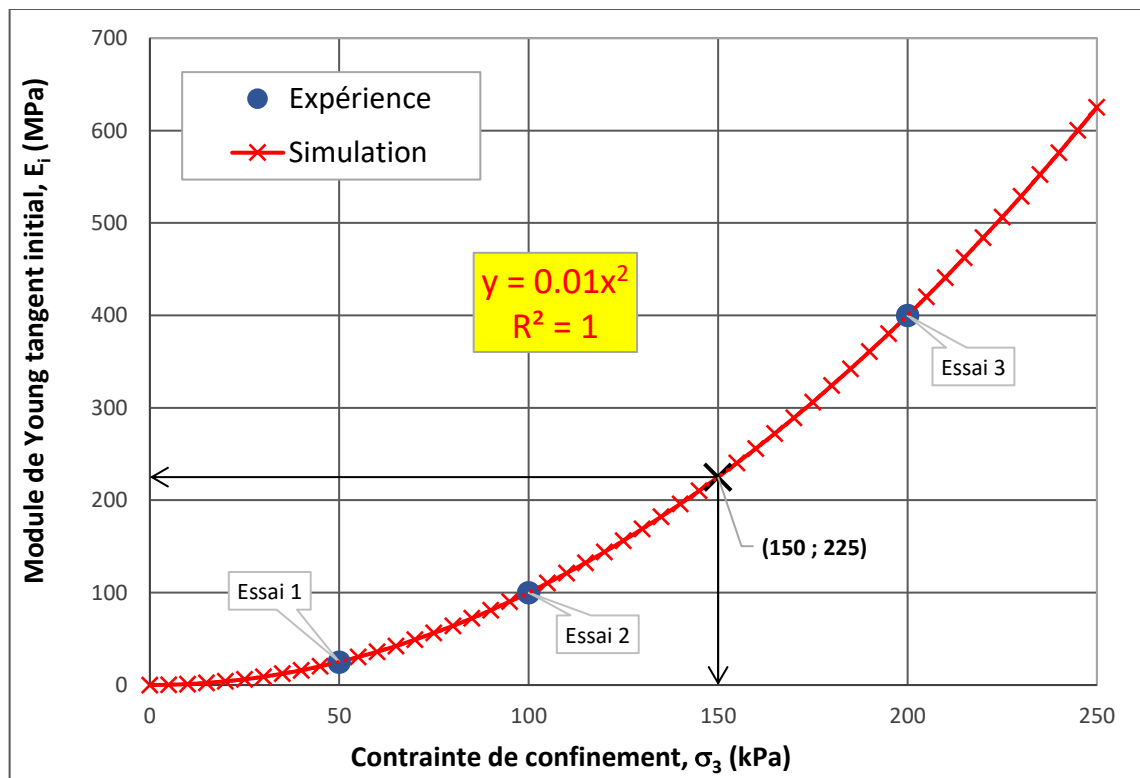
C. Evolution du module de Young tangent initial en fonction de la contrainte de confinement

Le module de Young tangent initial E_i varie en fonction de la contrainte de confinement σ_3 selon la relation suivante (Figure 2) :

$$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n = 1000 \times 100 \times \left(\frac{\sigma_3}{100} \right)^2 \text{ (kPa)} = 0.01 \times (\sigma_3)^2 \text{ (MPa)}$$

Module de Young tangent initial E_i correspondant à $\sigma_3 = 150 \text{ kPa}$:

$$E_i = 0.01 \times (150)^2 = 225 \text{ MPa}$$



Ex. 3 Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de cisaillement drainé de type CID réalisés sur un sable d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 35^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module de Young tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	1	2	3	4	5	6
σ_3 (kPa)	25	50	75	100	125	150
E_i (MPa)	1.250	10.000	33.750	80.000	156.250	270.000
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	110	220	330	440	550	660

- Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs des paramètres R_f correspondantes.
- Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre comme pression de référence $p_a = 100$ kPa.
- Représenter ensuite l'évolution du module de Young tangent initial E_i en fonction de la contrainte de confinement σ_3 , puis déduire la valeur de celui-ci pour une contrainte de confinement $\sigma_3 = 165$ kPa.

Rép. 3

Même démarche que pour l'exercice 2. Les résultats des calculs effectués sont rassemblés dans le tableau et les graphiques donnés ci-après.

Essai	1	2	3	4	5	6
σ_3 (kPa)	25	50	75	100	125	150
E_i (MPa)	1.250	10.000	33.750	80.000	156.250	270.000
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	110	220	330	440	550	660
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ (kPa)	67.254	134.509	201.763	269.017	336.272	403.526
R_f	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61	0.61
$\frac{\sigma_3}{p_a}$	0.250	0.500	0.750	1.000	1.250	1.500
$\frac{E_i}{p_a}$	12.5	100.0	337.5	800.0	1562.5	2700.0
$\log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)$	-0.6021	-0.3010	-0.1249	0.0000	0.0969	0.1761
$\log\left(\frac{E_i}{p_a}\right)$	1.0969	2.000	2.5283	2.9031	3.1937	3.4314

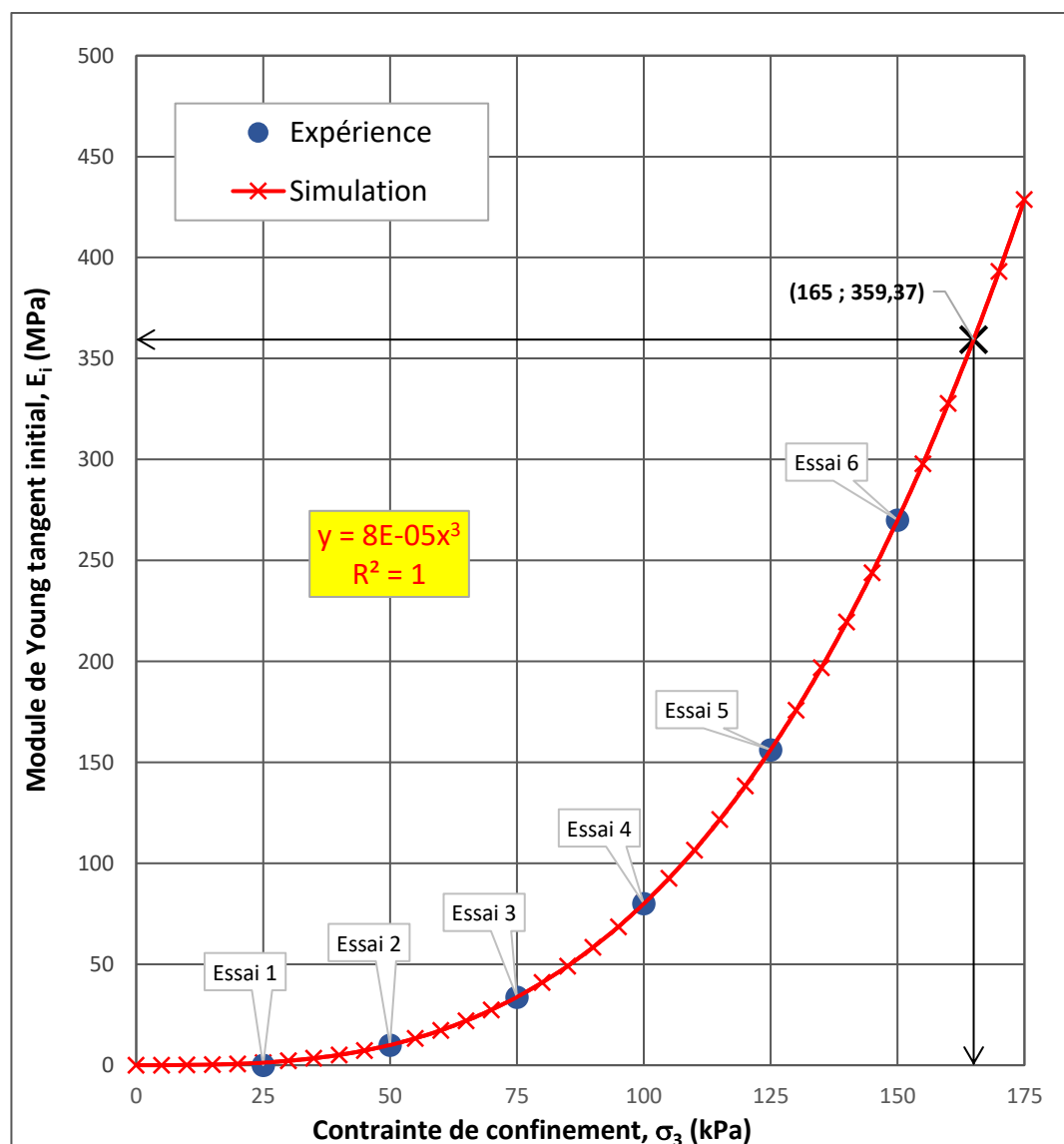
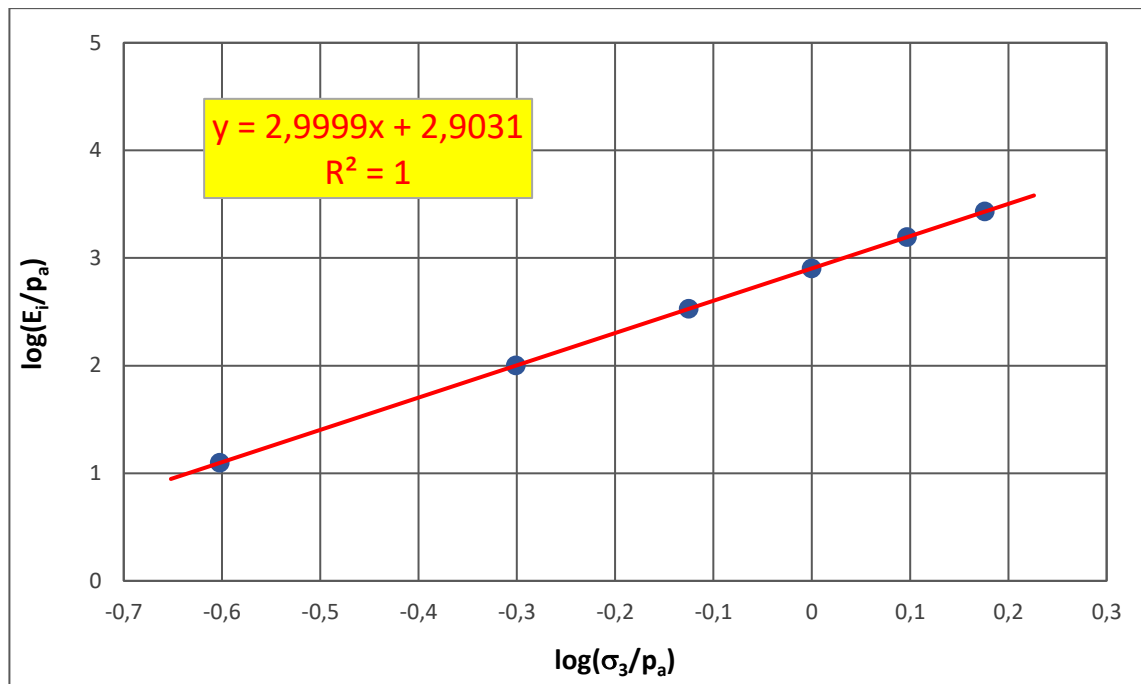
Tous calculs faits, on déduit :

$$K_h = 10^{2.9031} = 800$$

$$n = 2.9999 \approx 3$$

$$E_i = 800 \times 100 \times \left(\frac{\sigma_3}{100}\right)^3 = 0.00008 \times (\sigma_3)^3 \text{ (MPa)}$$

$$E_i(\sigma_3 = 165 \text{ kPa}) = 359.370 \text{ MPa}$$



Ex. 4 (Interro. du 16/05/2022). Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de type CID réalisés sur un sol sableux d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 30^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	1	2	3
σ_3 (kPa)	50	100	200
E_i (MPa)	10	80	640
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	125	250	500

- A. Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs du paramètre R_f correspondantes.
 B. Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre $p_a = 100$ kPa.

Rép. 4

A. Déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ et valeurs de R_f correspondantes

Le critère de Mohr-Coulomb est donné par l'équation suivante :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

avec :

$$c = c' = 0 \text{ (Sable)}$$

$$\varphi = \varphi' = 30^\circ$$

D'où :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2 \times 0 \times \cos 30 + 2 \times \sigma_3 \times \sin 30}{1 - \sin 30} = 2\sigma_3$$

Le paramètre R_f est défini par l'expression suivante : $R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$

D'où alors :

Essai	1	2	3
σ_3 (kPa)	50	100	200
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	125	250	500
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ (kPa)	100	200	400
R_f	0.8	0.8	0.8

B. Paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970)

Le module de Young tangent initial est donné par la relation suivante :

$$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

avec $p_a = 100$ kPa

$$\Rightarrow \frac{E_i}{p_a} = K_h \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \Rightarrow \log \left(\frac{E_i}{p_a} \right) = \log K_h + n \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

Soit donc :

N°	σ_3 (kPa)	E_i (kPa)	σ_3/p_a	E_i/p_a	$\log(\sigma_3/p_a)$	$\log(E_i/p_a)$
1	50	10000	0.50	100	-0.301	2.000
2	100	80000	1.00	800	0.000	2.903
3	200	640000	2.00	6400	+0.301	3.806

D'où finalement :

$$\log K_h = 2.903 \Rightarrow K_h = 10^{2.903} = 799.83 \equiv 800$$

$$n = \frac{3.806 - 2.903}{0.301 - 0.000} = 3 \Rightarrow n = 3$$