

RHEOLOGIE DES SOLS

Chapitre 2

Lois de comportement élastique (1^{ère} Partie : Comportement élastique linéaire)

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Tenseur des contraintes planes

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2 \quad \& \quad j = 1,2$$

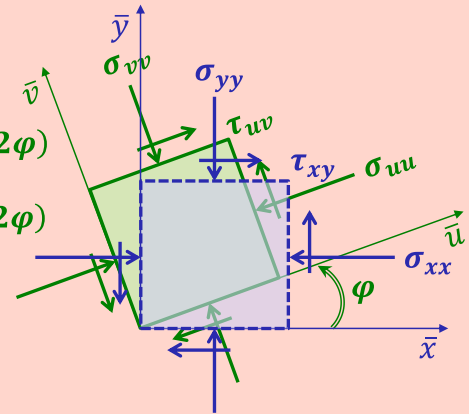
$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad / \quad (\bar{x}, \bar{y})$$

➤ Formules de transformation

$$\sigma_{uu} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

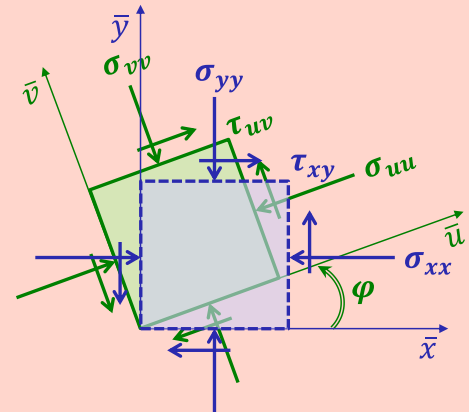
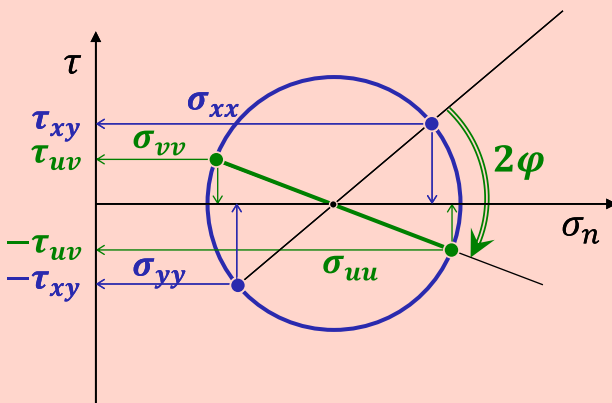
$$\sigma_{vv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) - \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$



Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes

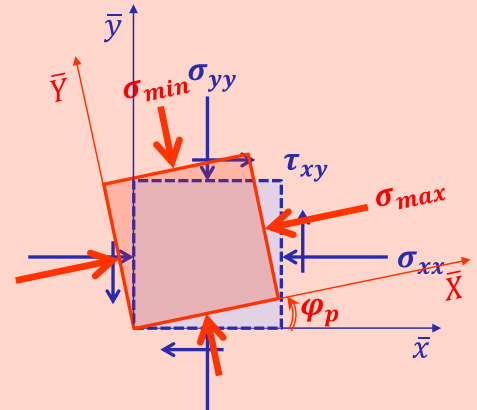
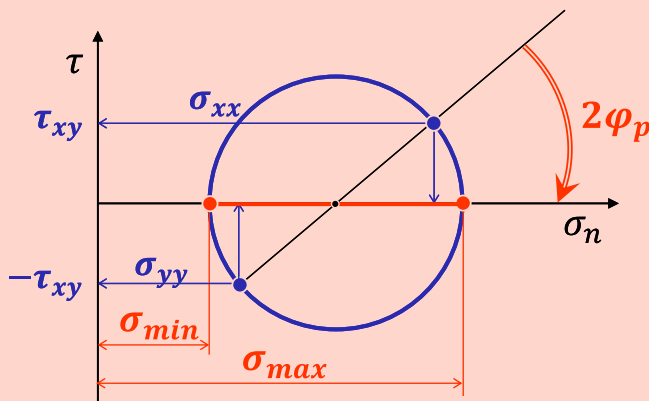


➤ Directions principales

$$\tau_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



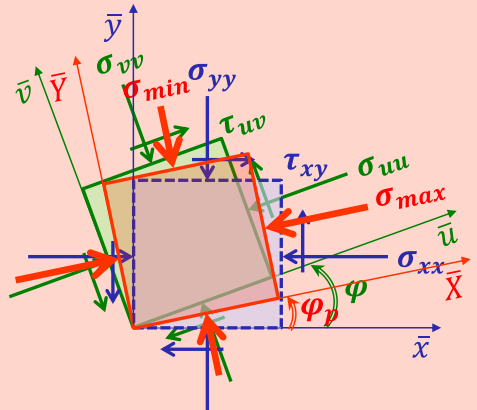
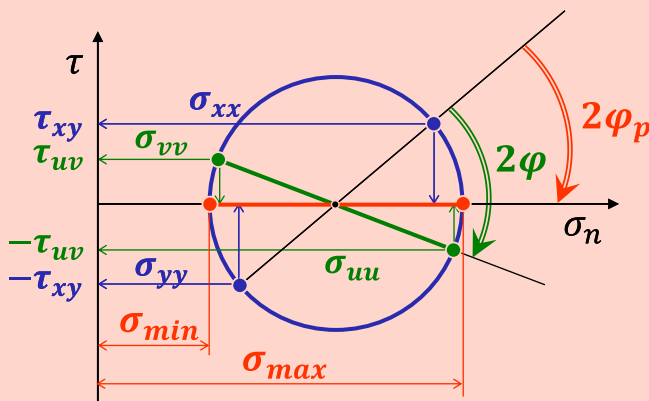
➤ Contraintes principales

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Contraintes principales

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$

Ex. 1 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ :

$$\bar{u} \begin{cases} u_1 = kx_2 \\ u_2 = kx_3 \\ u_3 = kx_1 \end{cases} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- A. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.
- B. Déterminer le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

Rép. 1

A1. Tenseur des déformations

Il est défini comme suit :

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overline{grad}(\bar{u}) + {}^t\overline{grad}(\bar{u})] \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \\ \bullet \quad \varepsilon_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \bullet \quad \varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \\ \bullet \quad \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{k}{2} \quad (= \varepsilon_{21}) \\ \bullet \quad \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (0 + k) = \frac{k}{2} \quad (= \varepsilon_{31}) \\ \bullet \quad \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{k}{2} \quad (= \varepsilon_{32}) \\ \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : $Tr(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow$ Tenseur déviatorique

A2. Déformations principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\varepsilon} \bar{\boldsymbol{\delta}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\boldsymbol{\delta}} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} - \boldsymbol{\varepsilon} \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \left| \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon} & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & -\boldsymbol{\varepsilon} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & -\boldsymbol{\varepsilon} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \begin{vmatrix} -\boldsymbol{\varepsilon} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & -\boldsymbol{\varepsilon} \end{vmatrix} - \frac{k}{2} \begin{vmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & -\boldsymbol{\varepsilon} \end{vmatrix} + \frac{k}{2} \begin{vmatrix} \frac{k}{2} & -\boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] - \frac{k}{2} \left[-\frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} - \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] + \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} \right)^2 + \frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] + \frac{k}{2} \left[\frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] + \frac{k}{2} \left[\left(\frac{k}{2} \right)^2 + \frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] + 2 \frac{k}{2} \left[\frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{k}{2} \right)^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow -\boldsymbol{\varepsilon} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{k}{2} \right) \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) + 2 \left(\frac{k}{2} \right)^2 \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) \left[-\boldsymbol{\varepsilon} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{k}{2} \right) + 2 \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) \left[\boldsymbol{\varepsilon} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{k}{2} \right) - 2 \left(\frac{k}{2} \right)^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) \left[\boldsymbol{\varepsilon}^2 - \frac{k}{2} \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{k^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) (\boldsymbol{\varepsilon} - k) \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{k}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +k \\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2}k \\ \varepsilon_3 = -\frac{1}{2}k \end{cases} \quad (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3)$$

Remarque :

$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \Rightarrow$ Etat cylindrique des déformations : Contraction cylindrique

A3. Directions principales des déformations

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = +k \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$$

$$\left[\frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

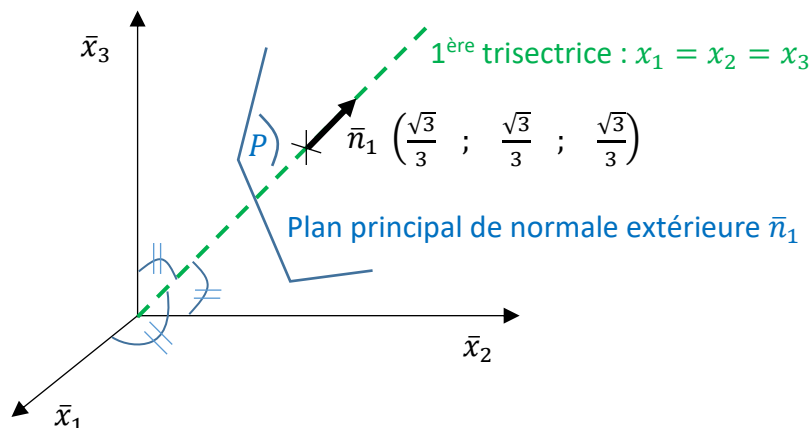
$$(b) - (c) \quad \Rightarrow \quad -3m_1 + 3n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = n_1$$

$$(b) - (a) \quad \Rightarrow \quad 3l_1 - 3m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1$$

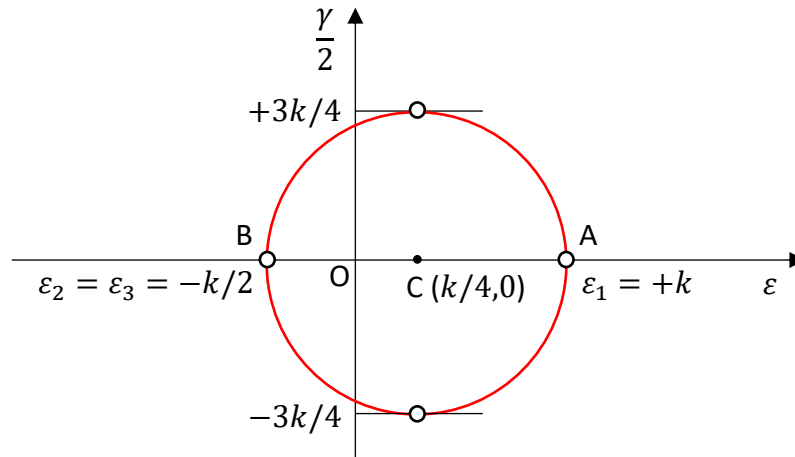
$$(d) \quad \Rightarrow \quad 3l_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \sqrt{3}/3 \quad (\varepsilon_1 = +k > 0)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

Remarque : L'état des déformations étant cylindrique, toute direction du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est donc une direction principale associée à la valeur double $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{k}{2}$.



A4. Tricercle de Mohr des déformations



L'état des déformations étant cylindrique, le tricercle de Mohr des déformations se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(k, 0)$ et $B(-k/2, 0)$; donc un cercle de centre $C(k/4, 0)$ et de rayon $R = 3k/4$.

A5. Distorsion maximale

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|}{2} = \frac{|k + k/2|}{2} = \pm \frac{3k}{4} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\max} = \pm \frac{3k}{2}$$

B1. Tenseur des contraintes

Sachant que :

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\varepsilon}) \bar{\delta} + 2\mu \bar{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

telle que : $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 + 0 + 0 = 0$

D'où :

- $\sigma_{11} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{11} + 2\mu \times \varepsilon_{11} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times 0 = 0$
- $\sigma_{22} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{22} + 2\mu \times \varepsilon_{22} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times 0 = 0$
- $\sigma_{33} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{33} + 2\mu \times \varepsilon_{33} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times 0 = 0$
- $\sigma_{12} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{12} + 2\mu \times \varepsilon_{12} = \lambda \times 0 \times 0 + 2\mu \times \left(\frac{k}{2}\right) = \mu k \quad (= \sigma_{21})$
- $\sigma_{13} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{13} + 2\mu \times \varepsilon_{13} = \lambda \times 0 \times 0 + 2\mu \times \left(\frac{k}{2}\right) = \mu k \quad (= \sigma_{31})$
- $\sigma_{23} = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{23} + 2\mu \times \varepsilon_{23} = \lambda \times 0 \times 0 + 2\mu \times \left(\frac{k}{2}\right) = \mu k \quad (= \sigma_{32})$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \mu k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}$$

Remarque : $\text{Tr}(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv 0 \Rightarrow$ Tenseur déviatorique

B2. Contraintes principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma \bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \left| \mu k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\sigma & \mu k & \mu k \\ \mu k & -\sigma & \mu k \\ \mu k & \mu k & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma \begin{vmatrix} -\sigma & \mu k \\ \mu k & -\sigma \end{vmatrix} - \mu k \begin{vmatrix} \mu k & \mu k \\ \mu k & -\sigma \end{vmatrix} + \mu k \begin{vmatrix} \mu k & -\sigma \\ \mu k & \mu k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma[\sigma^2 - (\mu k)^2] - \mu k[-\mu k \sigma - (\mu k)^2] + \mu k[(\mu k)^2 + \mu k \sigma] = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma[\sigma^2 - (\mu k)^2] + 2\mu k[\mu k \sigma + (\mu k)^2] = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma[\sigma^2 - (\mu k)^2] + 2(\mu k)^2(\sigma + \mu k) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(\sigma - \mu k)(\sigma + \mu k) - 2(\mu k)^2(\sigma + \mu k) = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma + \mu k)[\sigma(\sigma - \mu k) - 2(\mu k)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma + \mu k)[\sigma^2 - \mu k \sigma - 2(\mu k)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma + \mu k)(\sigma - 2\mu k)(\sigma + \mu k) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +2\mu k \\ \sigma_2 = -\mu k \\ \sigma_3 = -\mu k \end{cases} \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Remarque :

$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow$ Etat cylindrique des contraintes : Compression cylindrique

Nota : Les contraintes principales peuvent être calculées directement à partir des déformations principales :

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = +k \\ \varepsilon_2 = -k/2 \\ \varepsilon_3 = -k/2 \end{cases} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} +2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

D'où :

- $\sigma_1 = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{11} + 2\mu \times \varepsilon_{11} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times (+2) \times \left(\frac{k}{2}\right) = +2\mu k$
- $\sigma_2 = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{22} + 2\mu \times \varepsilon_{22} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times (-1) \times \left(\frac{k}{2}\right) = -\mu k$
- $\sigma_3 = \lambda \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{33} + 2\mu \times \varepsilon_{33} = \lambda \times 0 \times 1 + 2\mu \times (-1) \times \left(\frac{k}{2}\right) = -\mu k$

Ou bien directement :

- $\sigma_1 = 2\mu \varepsilon_1 = 2\mu \times (+k) = +2\mu k$

- $\sigma_2 = 2\mu\varepsilon_2 = 2\mu \times \left(-\frac{k}{2}\right) = -\mu k$
- $\sigma_3 = 2\mu\varepsilon_3 = 2\mu \times \left(-\frac{k}{2}\right) = -\mu k$

B3. Directions principales des contraintes

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

- $\sigma_1 = +2\mu k \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$

$$\left[\mu k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\mu k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

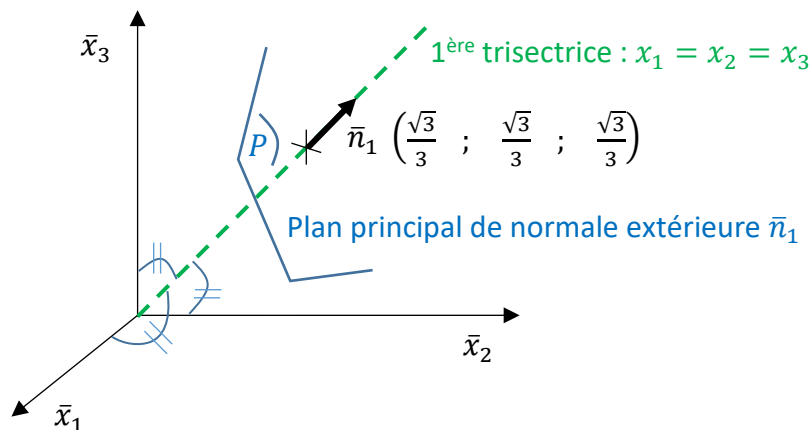
$$(b) - (c) \quad \Rightarrow \quad -3m_1 + 3n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = n_1$$

$$(b) - (a) \quad \Rightarrow \quad 3l_1 - 3m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1$$

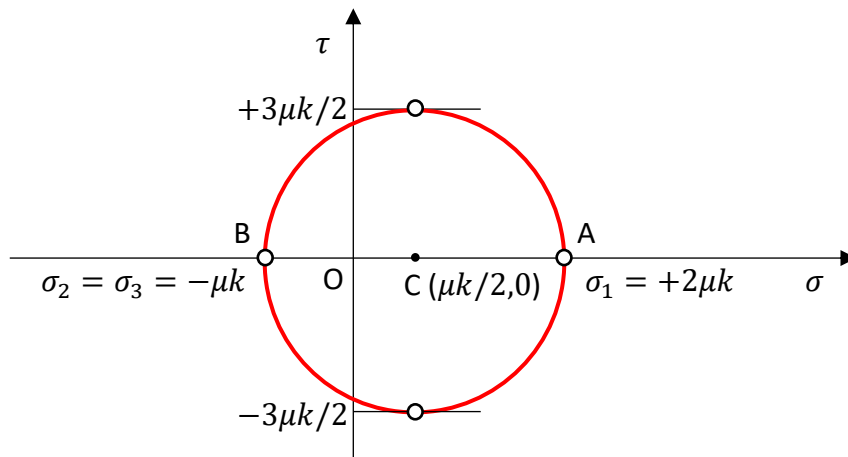
$$(d) \quad \Rightarrow \quad 3l_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \sqrt{3}/3 \quad (\varepsilon_1 = +k > 0)$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

Remarque : L'état des contraintes étant cylindrique, toute direction du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est donc une direction principale associée à la valeur double $\sigma_2 = \sigma_3 = -\mu k$.



Nota : Les contraintes principales et les déformations principales ont les mêmes directions.

B4. Tricercle de Mohr des contraintes

L'état des contraintes étant cylindrique, le tricercle de Mohr des contraintes se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(+2\mu k, 0)$ et $B(-\mu k, 0)$; donc un cercle de centre $C(\mu k/2, 0)$ et de rayon $R = 3\mu k/2$.

B5. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|2\mu k + \mu k|}{2} = \pm \frac{3}{2} \mu k$$

Ex. 2 Soit le tenseur des contraintes appliqué en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2),$$

où $k \geq 0$ désigne le paramètre de chargement.

- A. Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.
- B. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

Rép. 2

A1. Contraintes principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma \bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker)

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} k-1-\sigma & 0 & 0 \\ 0 & k-\sigma & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (k-1-\sigma) \left[(k-\sigma)(k+2-\sigma) - (\sqrt{3})^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (k-1-\sigma) [\sigma^2 - 2(k+1)\sigma + k^2 + 2k - 3] = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma - k + 1)(\sigma - k + 1)(\sigma - k - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k+3 \\ \sigma_2 = k-1 \\ \sigma_3 = k-1 \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Autre approche :

Sachant que : $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \Rightarrow$ La contrainte $\sigma_{11} = k-1$ est donc principale

$$\Rightarrow \sigma_I = k-1$$

$$\Rightarrow \sigma_{II,III} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + (\sigma_{23})^2} = \frac{k+k+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k-k-2}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = k+1 \pm 2$$

$$\Rightarrow \sigma_{II} = k+3 \quad \& \quad \sigma_{III} = k-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k + 3 \\ \sigma_2 = k - 1 \\ \sigma_3 = k - 1 \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad Ok.$$

Type de sollicitation :

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \text{Etat cylindrique des contraintes (Compression triaxiale)}$$

A2. Directions principales des contraintes

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

- $\sigma_1 = k + 3 \Rightarrow \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$

$$\left[\begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2 \end{bmatrix} - (k+3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k-1-k-3 & 0 & 0 \\ 0 & k-k-3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2-k-3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (a) \\ 0l_1 - 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0 & (b) \\ 0l_1 + \sqrt{3}m_1 - n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

$$(a) \Rightarrow l_1 = 0$$

$$(b) \text{ ou } (c) \Rightarrow m_1 = n_1/\sqrt{3} \Rightarrow n_1 = \sqrt{3}m_1$$

$$(d) \Rightarrow 4m_1^2 = 1 \Rightarrow m_1 = 1/2 \Rightarrow n_1 = \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = 0\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_1 = \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
- $\sigma_2 = k - 1 \Rightarrow \bar{n}_2 = l_2 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + n_2 \bar{x}_3 = \{l_2 ; m_2 ; n_2\}$

$$\left[\begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2 \end{bmatrix} - (k-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k-1-k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k-k+1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2-k+1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0l_2 + 0m_2 + 0n_2 = 0 & (a) \\ 0l_2 + m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0 & (b) \\ 0l_2 + \sqrt{3}m_2 + 3n_2 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (d)$$

(a) : Solution indéterminée

$$(b) \text{ ou } (c) \Rightarrow m_2 = -\sqrt{3}n_2 \Rightarrow n_2 = -m_2/\sqrt{3}$$

$$(b) \text{ et } (c) \Rightarrow l_2 = 0 \quad (\text{la plus grande valeur possible : } l_2 = \cos(\frac{\pi}{2}))$$

$$\text{Autrement : } m_2 \neq 0 \text{ et } n_2 \neq 0 \Rightarrow l_2 = 0$$

$$(d) \Rightarrow 4n_2^2 = 1 \Rightarrow n_2 = 1/2 \Rightarrow m_2 = -\sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = 0\bar{x}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = k - 1 \Rightarrow \bar{n}_3 = l_3\bar{x}_1 + m_3\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$$

$$\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \quad | \quad \bar{n}_1 = \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \& \quad \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{i} - \left(0 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{j} + \left(-0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \times \frac{1}{2}\right)\bar{k} \\ &= 1\bar{i} - 0\bar{j} + 0\bar{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = (1 ; 0 ; 0)$$

Autre approche :

$$\sigma_3 = k - 1 \Rightarrow \bar{n}_3 = l_3\bar{x}_1 + m_3\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$$

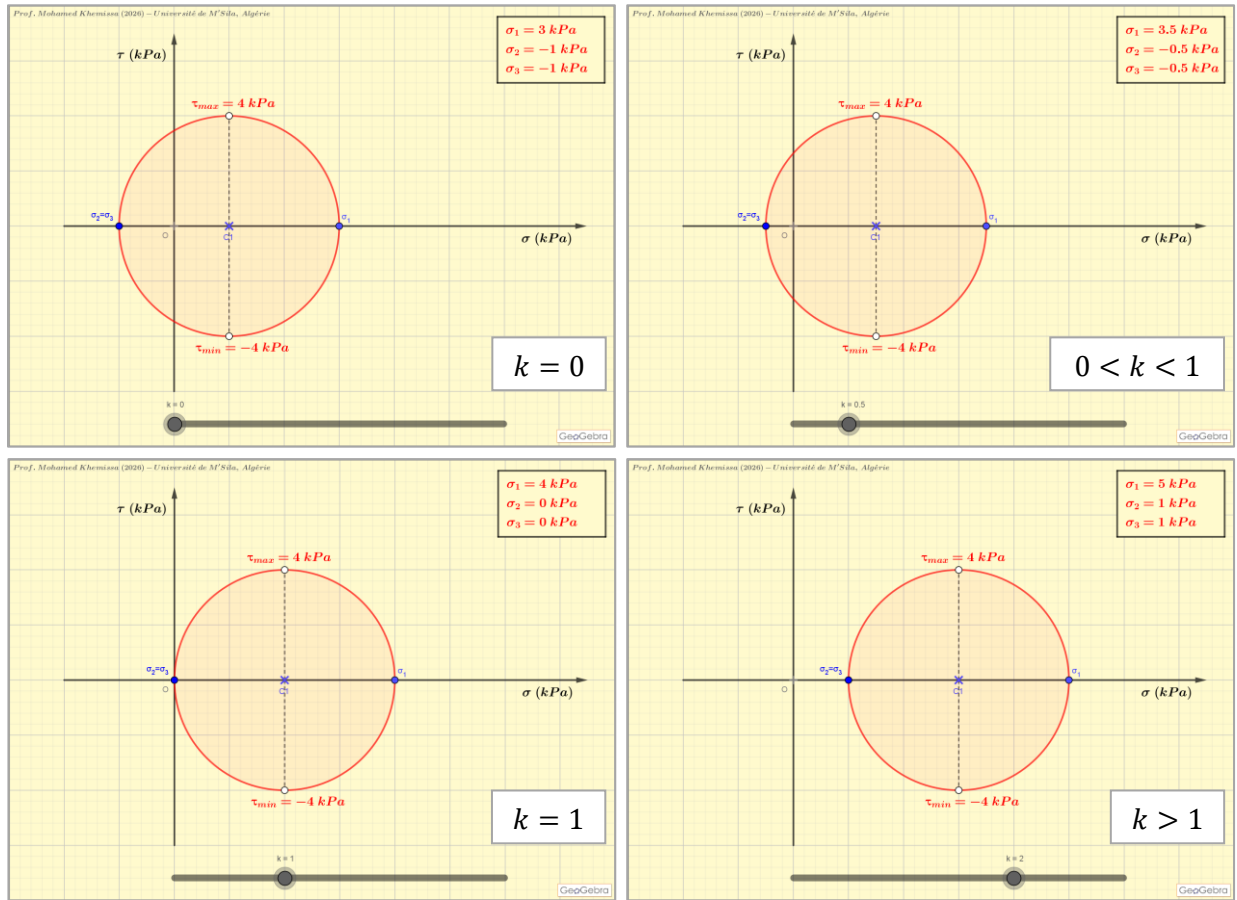
Sachant que :

$$\sigma_3 = \sigma_{11} \quad (\bar{n}_3 // \bar{x}_1) \Rightarrow \bar{n}_3 = (1 ; 0 ; 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{n}_2 = \bar{n}_3 \wedge \bar{n}_1 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \times \frac{1}{2}\right)\bar{i} - \left(1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \times 0\right)\bar{j} + \left(1 \times \frac{1}{2} - 0 \times 0\right)\bar{k} \\ &= 0\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right) \quad Ok$$

A3. Tricercle de Mohr des contraintes



L'état des contraintes étant cylindrique, le tricercle de Mohr des contraintes se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(k + 3, 0)$ et $B(k - 1, 0)$; donc un cercle de centre $C(k + 1, 0)$ et de rayon $R = k + 1$.

A4. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|2\mu k + \mu k|}{2} = \pm \frac{3}{2} \mu k$$

B1. Tenseur des déformations

Sachant que :

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} Tr(\bar{\sigma}) \bar{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

telle que : $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = k - 1 + k + k + 2 = 3k + 1$

D'où :

- $$\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{11} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (3k + 1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k - 1)$$

$$= \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E}$$
- $$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{22} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (3k + 1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k)$$

$$= \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E}$$

- $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{33} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (3k+1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k+2)$
 $= \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E}$
- $\varepsilon_{12} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{12} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{12} = -\frac{\nu}{E} \times (3k+1) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (0)$
 $= 0 \quad (= \varepsilon_{21})$
- $\varepsilon_{13} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{13} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{13} = -\frac{\nu}{E} \times (3k+1) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (0)$
 $= 0 \quad (= \varepsilon_{31})$
- $\varepsilon_{23} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{23} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{23} = -\frac{\nu}{E} \times (3k+1) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (\sqrt{3})$
 $= \frac{1+\nu}{E} \times (\sqrt{3}) \quad (= \varepsilon_{32})$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} \end{bmatrix}$$

Remarque : $Tr(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E}$
 $= \left(\frac{1-2\nu}{E}\right) (3k+1) = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right) \sigma_{ii}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ii} = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right) \sigma_{ii} \Rightarrow \varepsilon_v = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right) \times (3p) \quad | \quad \mathbf{p} = \mathbf{K} \varepsilon_v \Rightarrow \mathbf{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad Ok.$$

B2. Déformations principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} - \varepsilon & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} - \varepsilon \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} - \varepsilon\right) \left| \begin{bmatrix} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} - \varepsilon & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} - \varepsilon \end{bmatrix} \right| - 0 + 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(\frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} - \varepsilon \right) \left[\left(\frac{1-2\nu}{E}k - \frac{\nu}{E} - \varepsilon \right) \left(\frac{1-2\nu}{E}k + \frac{2+\nu}{E} - \varepsilon \right) - \left(\frac{1+\nu}{E}\sqrt{3} \right)^2 \right] = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} - \varepsilon \right) \left(\frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} - \varepsilon \right) \left(\frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E} - \varepsilon \right) = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E} \\ \varepsilon_2 = \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \\ \varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \end{cases} \quad (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3)
\end{aligned}$$

Remarque :

$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \Rightarrow$ Etat cylindrique des déformations : Contraction cylindrique

Autre approche :

Sachant que : $\begin{cases} \sigma_1 = k + 3 \\ \sigma_2 = k - 1 \\ \sigma_3 = k - 1 \end{cases} \quad (N/mm^2)$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2)$$

telles que : $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = k + 3 + k - 1 + k - 1 = 3k + 1$ & $\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \end{cases}$

D'où :

- $\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{11} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (3k + 1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k + 3)$
 $= \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E} \quad (= \varepsilon_1)$
- $\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{22} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (3k + 1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k - 1)$
 $= \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \quad (= \varepsilon_2)$
- $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{33} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (3k + 1) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (k - 1)$
 $= \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \quad (= \varepsilon_3)$

Remarque : $Tr(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} + \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \\
&= \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) (3k) + \frac{1+2\nu}{E} = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) (3k + 1) = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{ii}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{ii} = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_{ii} \Rightarrow \varepsilon_v = \left(\frac{1-2\nu}{E} \right) \times (3p) \quad | \quad \mathbf{p} = \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}_v \Rightarrow \mathbf{K} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad Ok$$

B3. Directions principales des déformations

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{3+2\nu}{E} \Rightarrow \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} \end{array} \right] - \left(\frac{1-2\nu}{E} k + \frac{3+2\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1+2\nu}{E} - \frac{3+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} - \frac{3+2\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & +\frac{2+\nu}{E} - \frac{3+2\nu}{E} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (a) \\ 0l_1 - 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0 & (b) \\ 0l_1 + \sqrt{3}m_1 - n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

$$(a) \Rightarrow l_1 = 0$$

$$(b) \text{ ou } (c) \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} n_1 \Rightarrow n_1 = \sqrt{3} m_1$$

$$(d) \Rightarrow 4m_1^2 = 1 \Rightarrow m_1 = 1/2 \Rightarrow n_1 = \sqrt{3}/2$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = 0\bar{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{x}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_1 = \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\bullet \quad \varepsilon_2 = \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} \Rightarrow \bar{n}_2 = l_2 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + n_2 \bar{x}_3 = \{l_2 ; m_2 ; n_2\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{E} k - \frac{\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & \frac{1-2\nu}{E} k + \frac{2+\nu}{E} \end{array} \right] - \left(\frac{1-2\nu}{E} k - \frac{1+2\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1+2\nu}{E} + \frac{1+2\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} + \frac{1+2\nu}{E} & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \sqrt{3} & +\frac{2+\nu}{E} + \frac{1+2\nu}{E} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0l_2 + 0m_2 + 0n_2 = 0 & (a) \\ 0l_2 + m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0 & (b) \\ 0l_2 + \sqrt{3}m_2 + 3n_2 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (d)$$

(a) : Solution indéterminée

(b) ou (c) : $\Rightarrow m_2 = -\sqrt{3}n_2 \Rightarrow n_2 = -m_2/\sqrt{3}$

(b) et (c) : $\Rightarrow l_2 = 0$ (la plus grande valeur possible : $l_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$)

Autrement : $m_2 \neq 0$ et $n_2 \neq 0 \Rightarrow l_2 = 0$

(d) $\Rightarrow 4n_2^2 = 1 \Rightarrow n_2 = 1/2 \Rightarrow m_2 = -\sqrt{3}/2$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = 0\bar{x}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

• $\varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \Rightarrow \bar{n}_3 = l_3\bar{x}_1 + m_3\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$

$$\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \quad | \quad \bar{n}_1 = \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \& \quad \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{i} - \left(0 \times \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\bar{j} + \left(-0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \times \frac{1}{2}\right)\bar{k}$$

$$= 1\bar{i} - 0\bar{j} + 0\bar{k}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = (1 ; 0 ; 0)$$

Autre approche :

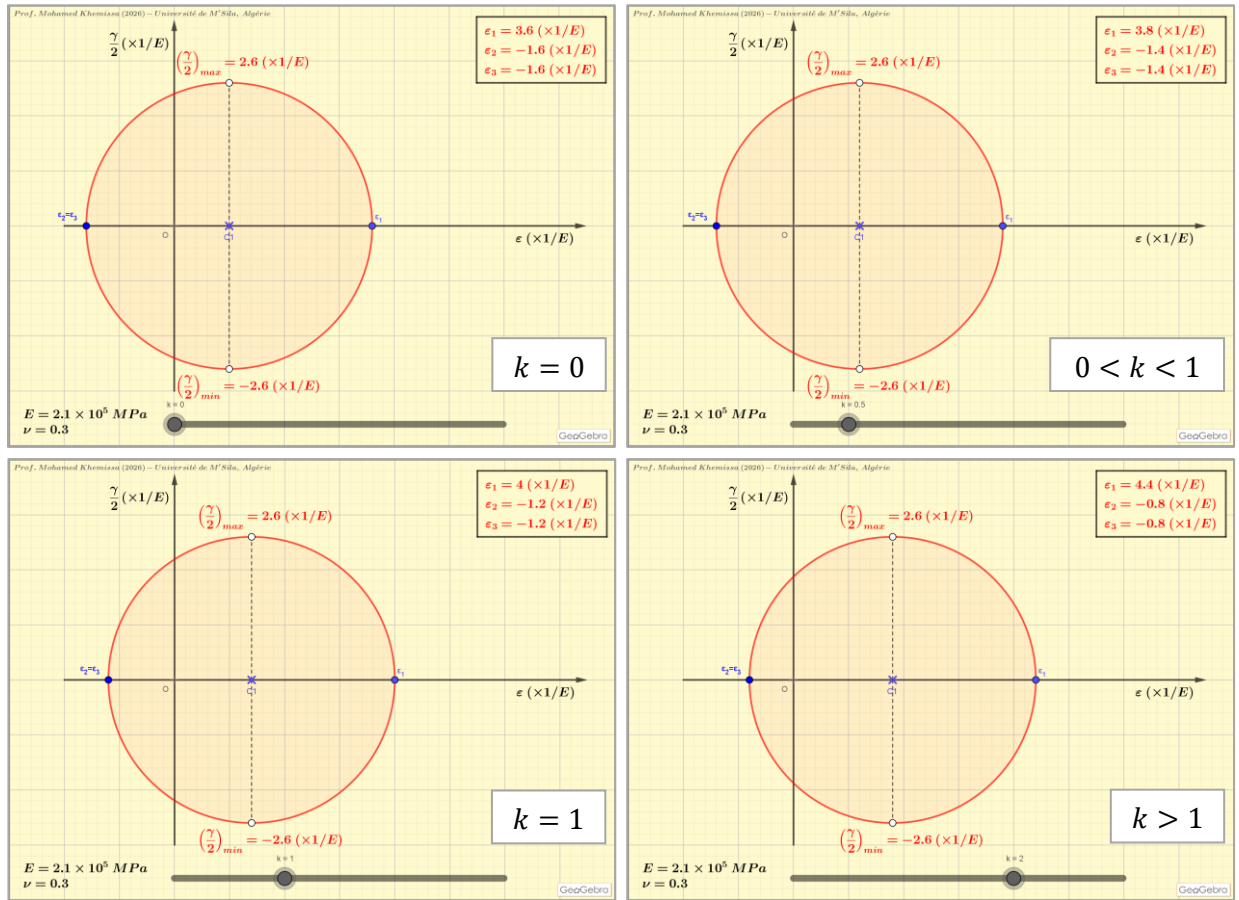
$$\varepsilon_3 = \frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E} \Rightarrow \bar{n}_3 = l_3\bar{x}_1 + m_3\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$$

Sachant que : $\varepsilon_3 = \varepsilon_{11} \quad (\bar{n}_3 // \bar{x}_1) \Rightarrow \bar{n}_3 = (1 ; 0 ; 0)$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \bar{n}_3 \wedge \bar{n}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = 0\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j} + \frac{1}{2}\bar{k}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \left(0 ; -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right) \quad Ok$$

B4. Tricercle de Mohr des déformations



L'état des déformations étant cylindrique, le tricercle de Mohr des déformations se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A\left(\frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E}, 0\right)$ et $B\left(\frac{1-2\nu}{E}k - \frac{1+2\nu}{E}, 0\right)$; donc un cercle de centre $C\left(\frac{1-2\nu}{E}k + \frac{1}{E}, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{1}{E}$.

B5. Distorsion maximale

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_3|}{2} = \frac{1}{2} \left| \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{3+2\nu}{E} - \frac{1-2\nu}{E}k + \frac{1+2\nu}{E} \right| = \left| \frac{2(1+\nu)}{E} \right| = \pm \frac{2(1+\nu)}{E}$$

$$\Rightarrow \gamma_{\max} = \pm \frac{4(1+\nu)}{E}$$

Ex. 3 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de compressibilité volumique K et le module de cisaillement G :

$$\bar{u} \begin{cases} u_1 = k(x_2 + x_3) \\ u_2 = k(x_3 + x_1) \\ u_3 = k(x_1 + x_2) \end{cases} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- A. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.
- B. Déterminer le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

Rép. 3

A1. Tenseur des déformations

Il est défini comme suit :

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

tel que :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overline{grad}(\bar{u}) + {}^t\overline{grad}(\bar{u})] \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

D'où :

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$
- $\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0$
- $\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$
- $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (k + k) = k \quad (= \varepsilon_{21})$
- $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} (k + k) = k \quad (= \varepsilon_{31})$
- $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} (k + k) = k \quad (= \varepsilon_{32})$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : $Tr(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 \Rightarrow$ Tenseur déviatorique

A2. Déformations principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\bar{\varepsilon}} - \varepsilon \bar{\bar{\delta}}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\bar{\delta}} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\varepsilon & k & k \\ k & -\varepsilon & k \\ k & k & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \begin{vmatrix} -\varepsilon & k \\ k & -\varepsilon \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} k & k \\ k & -\varepsilon \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} k & -\varepsilon \\ k & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(\varepsilon^2 - k^2) - k(-k\varepsilon - k^2) + k(k^2 + k\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\varepsilon - k)(\varepsilon + k) - 2k^2(\varepsilon + k) = 0$$

$$\Rightarrow (\varepsilon + k)(\varepsilon^2 - k\varepsilon - 2k^2) = 0$$

$$\Rightarrow (\varepsilon + k)(\varepsilon - 2k)(\varepsilon + k) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +2k \\ \varepsilon_2 = -k \\ \varepsilon_3 = -k \end{cases} \quad (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3)$$

Type de sollicitation :

$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \Rightarrow$ Etat cylindrique des déformations (Contraction triaxiale)

A3. Directions principales des déformations

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\bar{\varepsilon}} - \varepsilon_p \bar{\bar{\delta}}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij}) (n_p)_i = 0$$

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = +2k \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$$

$$\left[k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

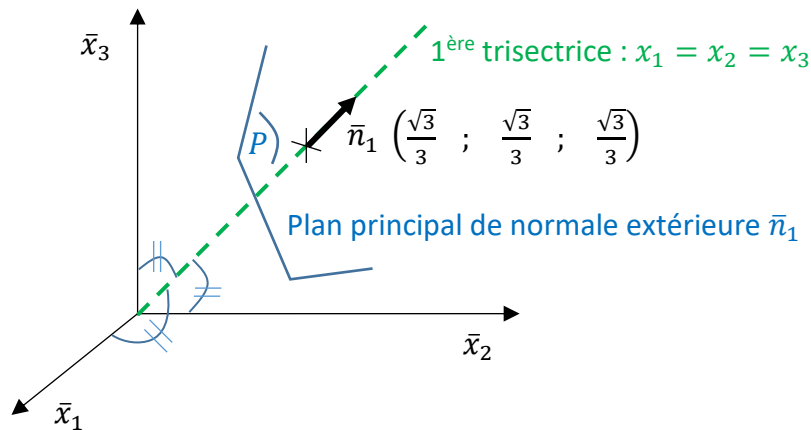
$$(b) - (c) \quad \Rightarrow \quad -3m_1 + 3n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = n_1$$

$$(b) - (a) \quad \Rightarrow \quad 3l_1 - 3m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1$$

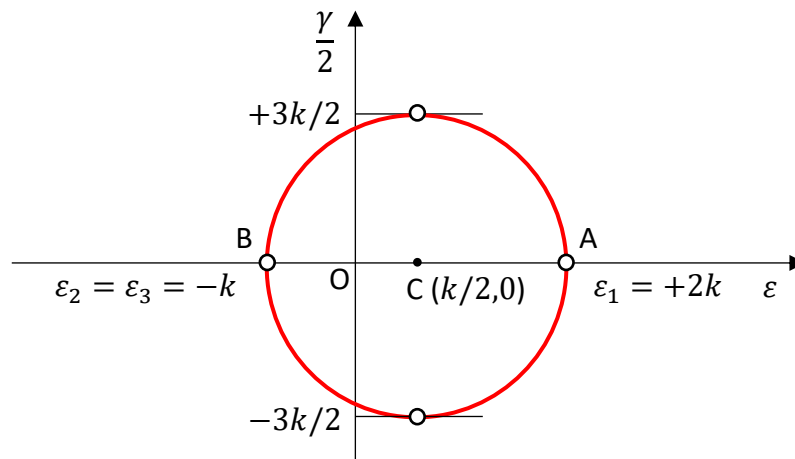
$$(d) \quad \Rightarrow \quad 3l_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \sqrt{3}/3 \quad (\varepsilon_1 = +k > 0)$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

Remarque : L'état des déformations étant cylindrique, toute direction du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est donc une direction principale associée à la valeur double $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -k$.



B6. Tricerle de Mohr des déformations

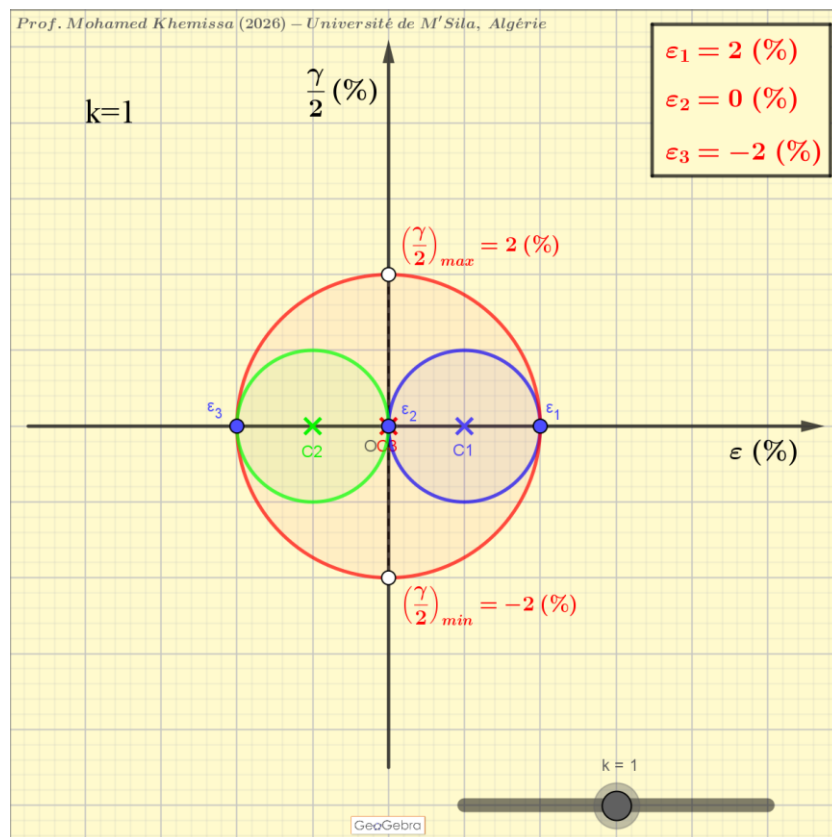
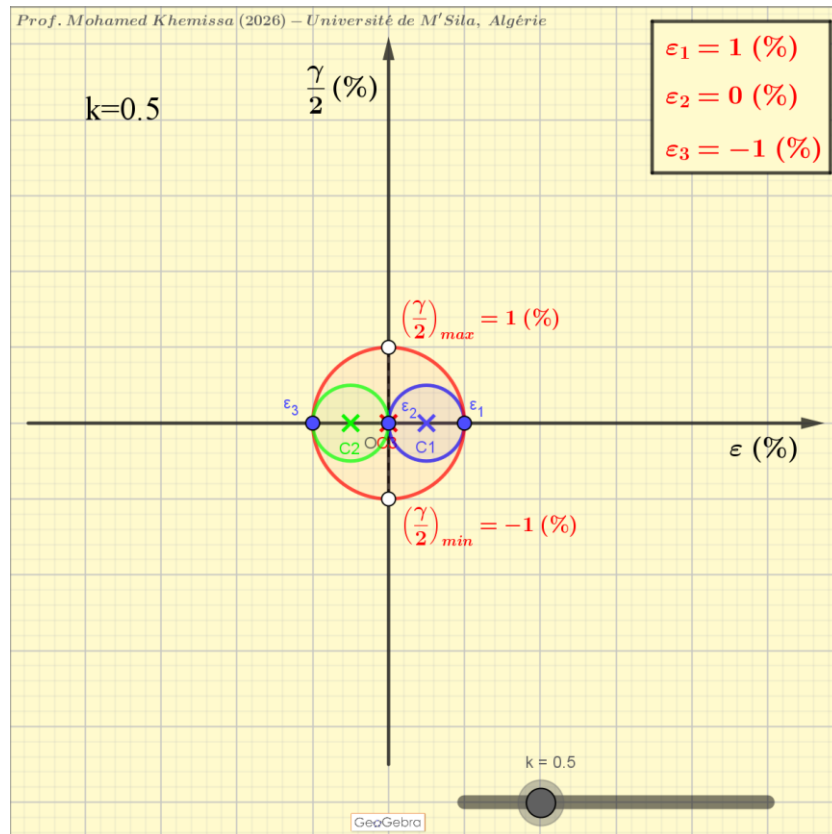


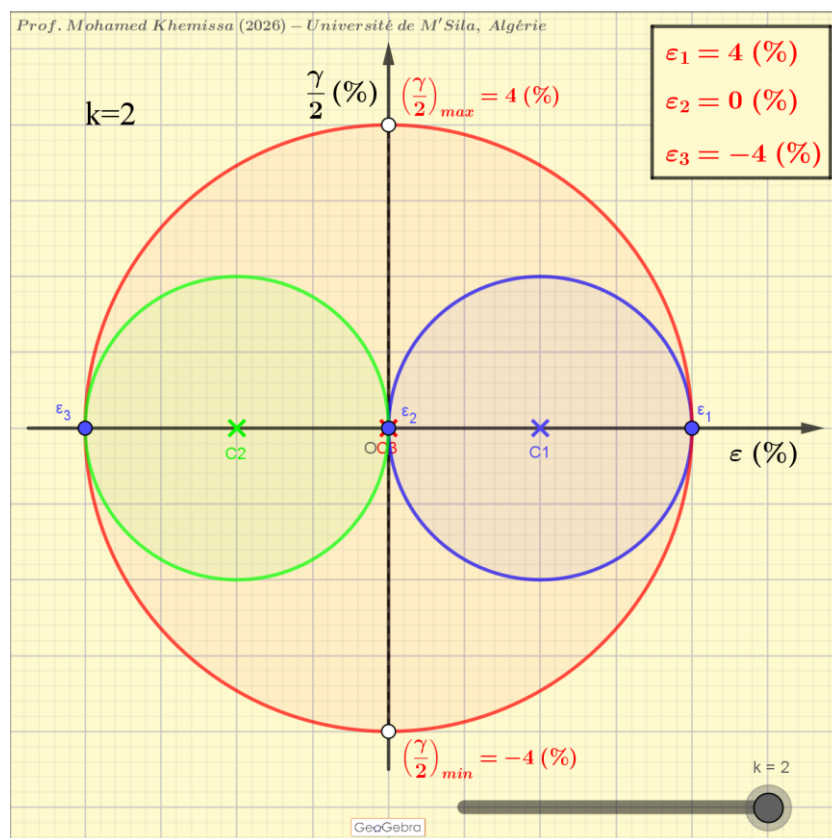
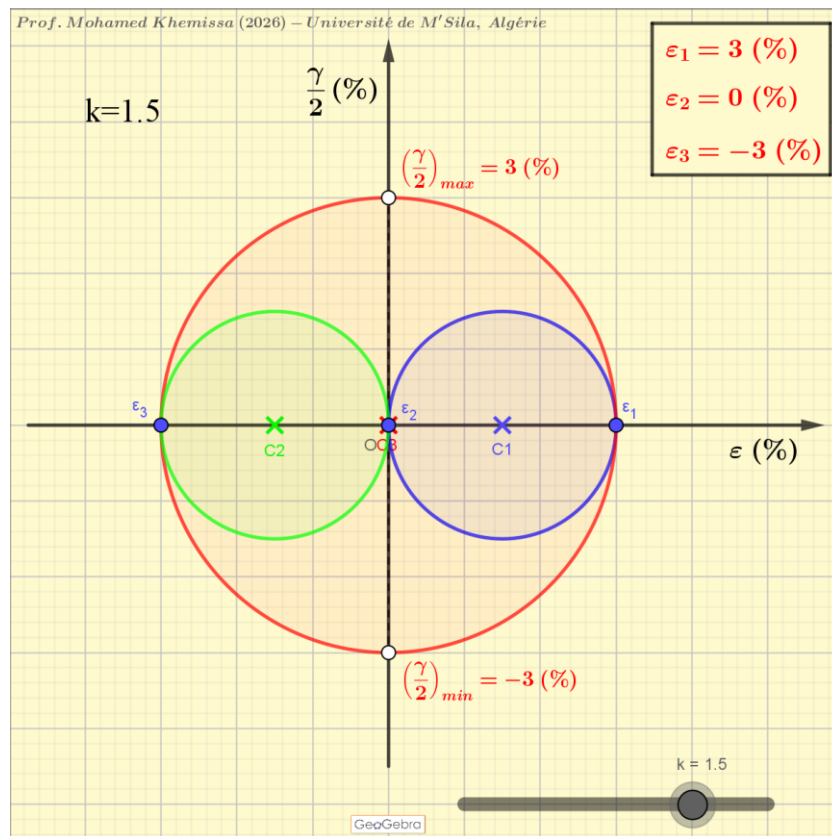
L'état des déformations étant cylindrique, le tricerle de Mohr des déformations se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(2k, 0)$ et $B(-k, 0)$; donc un cercle de centre $C(k/2, 0)$ et de rayon $R = 3k/2$.

A6. Distorsion maximale

$$\left(\frac{\gamma}{2} \right)_{\max} = \frac{|\varepsilon_1 - \varepsilon_3|}{2} = \frac{|2k + k|}{2} = \pm \frac{3k}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{\max} = \pm 3k$$

A7. Illustration graphique via GeoGebra





B1. Tenseur des contraintes

Sachant que :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= KTr(\bar{\epsilon})\bar{\delta} + 2G\bar{e} & \Leftrightarrow & \sigma_{ij} = K\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \\ \bar{e} &= \bar{\epsilon} - \frac{1}{3}Tr(\bar{\epsilon})\bar{\delta} & \Leftrightarrow & e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij}\end{aligned}$$

telle que : $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 0 + 0 + 0 = 0$

D'où :

- $e_{11} = \epsilon_{11} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{11} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{22} = \epsilon_{22} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{22} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{33} = \epsilon_{33} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{33} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{12} = \epsilon_{12} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{12} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{21})$
- $e_{13} = \epsilon_{13} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{13} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{31})$
- $e_{23} = \epsilon_{23} - \frac{1}{3}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{23} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{32})$

$$\Rightarrow \bar{e} = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{e} = \bar{\epsilon}$$

D'où :

- $\sigma_{11} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{11} + 2G \times e_{11} = K \times (0) \times 1 + 2G \times 0 = 0$
- $\sigma_{22} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{22} + 2G \times e_{22} = K \times (0) \times 1 + 2G \times 0 = 0$
- $\sigma_{33} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{33} + 2G \times e_{33} = K \times (0) \times 1 + 2G \times 0 = 0$
- $\sigma_{12} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{12} + 2G \times e_{12} = K \times (0) \times 0 + 2G \times k = 2Gk \quad (= \sigma_{21})$
- $\sigma_{13} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{13} + 2G \times e_{13} = K \times (0) \times 0 + 2G \times k = 2Gk \quad (= \sigma_{31})$
- $\sigma_{23} = K \times (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \times \delta_{23} + 2G \times e_{23} = K \times (0) \times 0 + 2G \times k = 2Gk \quad (= \sigma_{32})$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = 2G \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = 2G\bar{e} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij}$$

Remarque : $Tr(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0 \Rightarrow$ Tenseur déviatorique

B2. Contraintes principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma\bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}) = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \left| 2G \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} - \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\sigma & 2Gk & 2Gk \\ 2Gk & -\sigma & 2Gk \\ 2Gk & 2Gk & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \\
\Rightarrow & -\sigma \begin{vmatrix} -\sigma & 2Gk \\ 2Gk & -\sigma \end{vmatrix} - 2Gk \begin{vmatrix} 2Gk & 2Gk \\ 2Gk & -\sigma \end{vmatrix} + 2Gk \begin{vmatrix} 2Gk & -\sigma \\ 2Gk & 2Gk \end{vmatrix} = 0 \\
\Rightarrow & -\sigma[\sigma^2 - (2Gk)^2] - 2Gk[-2Gk\sigma - (2Gk)^2] + 2Gk[(2Gk)^2 + 2Gk\sigma] = 0 \\
\Rightarrow & \sigma(\sigma - 2Gk)(\sigma + 2Gk) - 2(2Gk)^2(\sigma + 2Gk) = 0 \\
\Rightarrow & (\sigma + 2Gk)[\sigma^2 - 2Gk\sigma - 2(2Gk)^2] = 0 \\
\Rightarrow & (\sigma + 2Gk)(\sigma - 4Gk)(\sigma + 2Gk) = 0 \\
\Rightarrow & \begin{cases} \sigma_1 = +4Gk \\ \sigma_2 = -2Gk \\ \sigma_3 = -2Gk \end{cases} \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)
\end{aligned}$$

Type de sollicitation :

$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow$ Etat cylindrique des contraintes (Compression triaxiale)

Nota : Les contraintes principales peuvent être calculées directement à partir des déformations principales :

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = +2k \\ \varepsilon_2 = -k \\ \varepsilon_3 = -k \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} +2k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$\bar{\sigma} = KTr(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{\delta}} + 2G\bar{\bar{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij}$$

$$\bar{\bar{e}} = \bar{\bar{\varepsilon}} - \frac{1}{3}Tr(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{\delta}} \quad \Leftrightarrow \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

D'où :

- $e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{11} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{22} = \varepsilon_{22} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{22} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{33} = \varepsilon_{33} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{33} = 0 - \frac{1}{3}(0) \times 1 = 0$
- $e_{12} = \varepsilon_{12} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{12} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{21})$
- $e_{13} = \varepsilon_{13} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{13} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{31})$
- $e_{23} = \varepsilon_{23} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{23} = k - \frac{1}{3}(0) \times 0 = k \quad (= e_{32})$

$$\Rightarrow \bar{\bar{e}} = [e_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{e}} = \bar{\bar{\varepsilon}} \Rightarrow \bar{\bar{e}} = \begin{bmatrix} +2k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}$$

D'où :

- $\sigma_1 = K \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{11} + 2G \times e_{11} = K \times (0) \times 1 + 2G \times (2k) = +4Gk$
- $\sigma_2 = K \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{22} + 2G \times e_{22} = K \times (0) \times 1 + 2G \times (-k) \times (0) = -2Gk$
- $\sigma_3 = K \times (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \times \delta_{33} + 2G \times e_{33} = K \times (0) \times 1 + 2G \times (-k) = -2Gk$

Ou bien directement :

- $\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 = 2G \times (+2k) = +4Gk$
- $\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 = 2G \times (-k) = -2Gk$
- $\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 = 2G \times (-k) = -2Gk$

B3. Directions principales des contraintes

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

- $\sigma_1 = +4Gk \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$

$$\Rightarrow \left[2Gk \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 4Gk \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

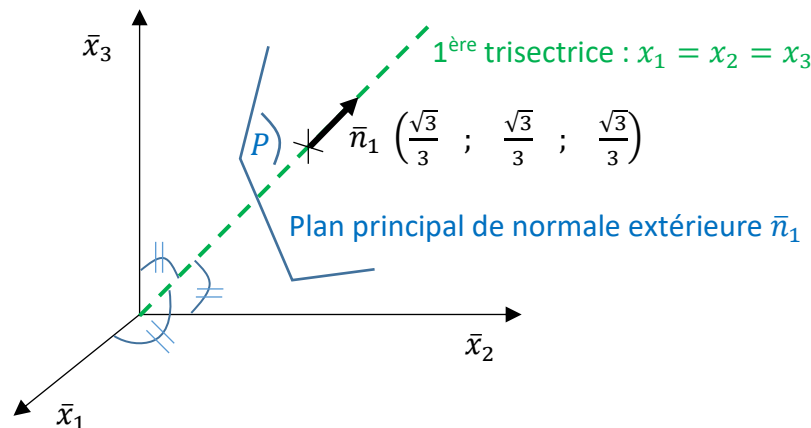
$$(b) - (c) \quad \Rightarrow \quad -3m_1 + 3n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = n_1$$

$$(b) - (a) \quad \Rightarrow \quad 3l_1 - 3m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1$$

$$(d) \quad \Rightarrow \quad 3l_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \sqrt{3}/3 \quad (\varepsilon_1 = +k \geq 0)$$

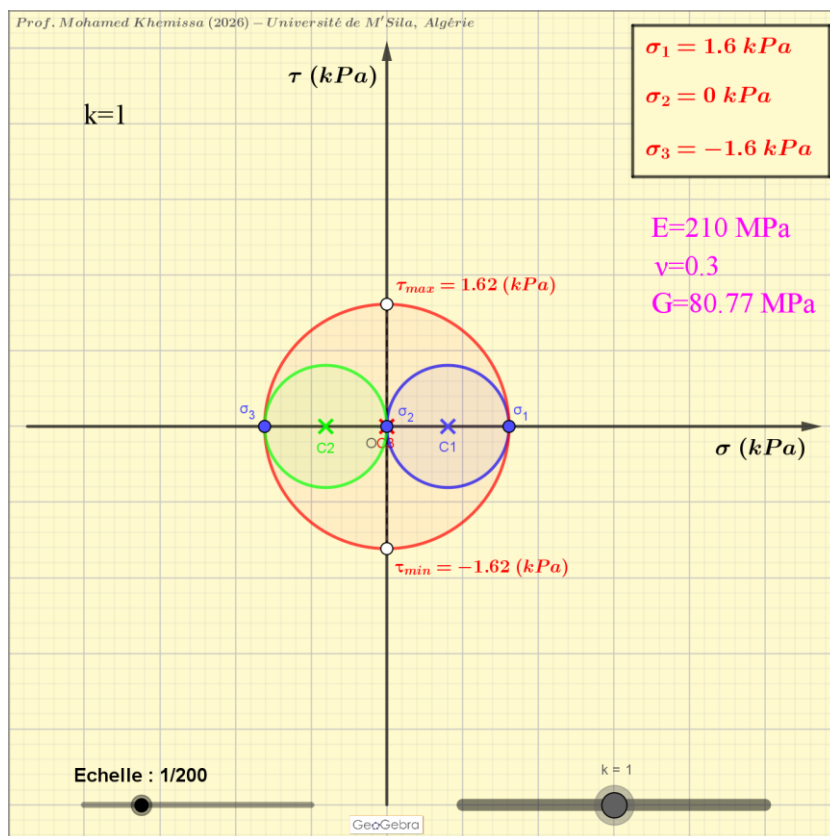
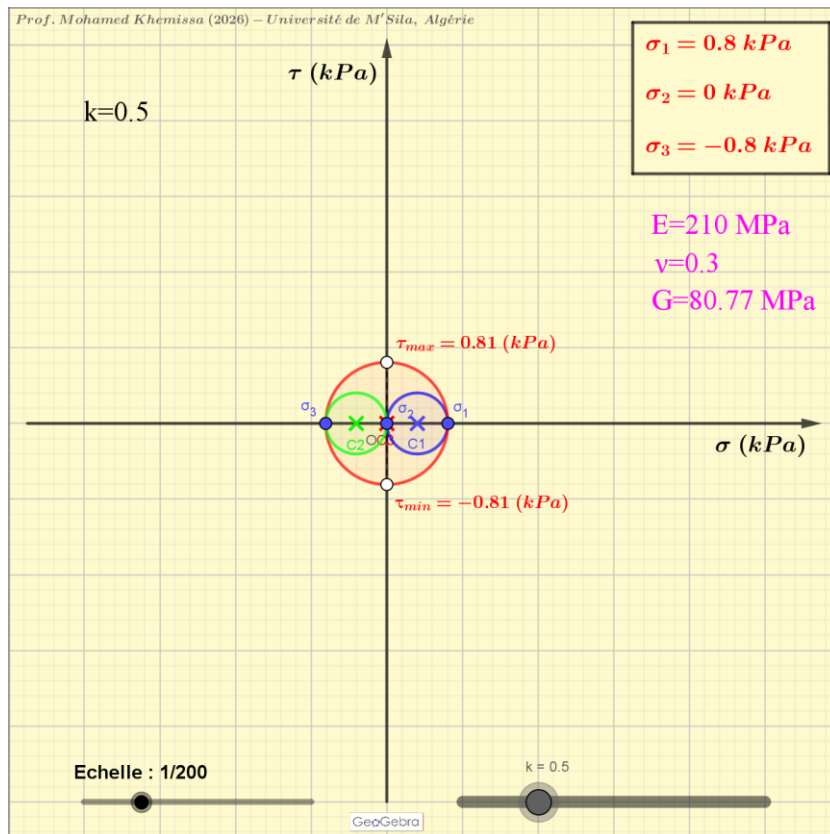
$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \Leftrightarrow \quad \bar{n}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} ; \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

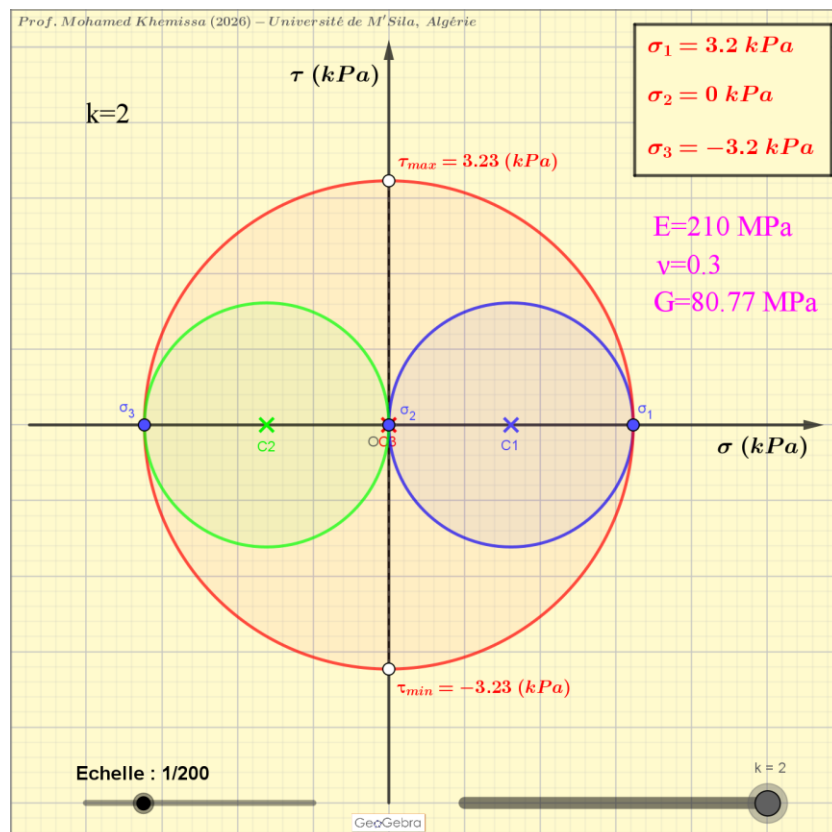
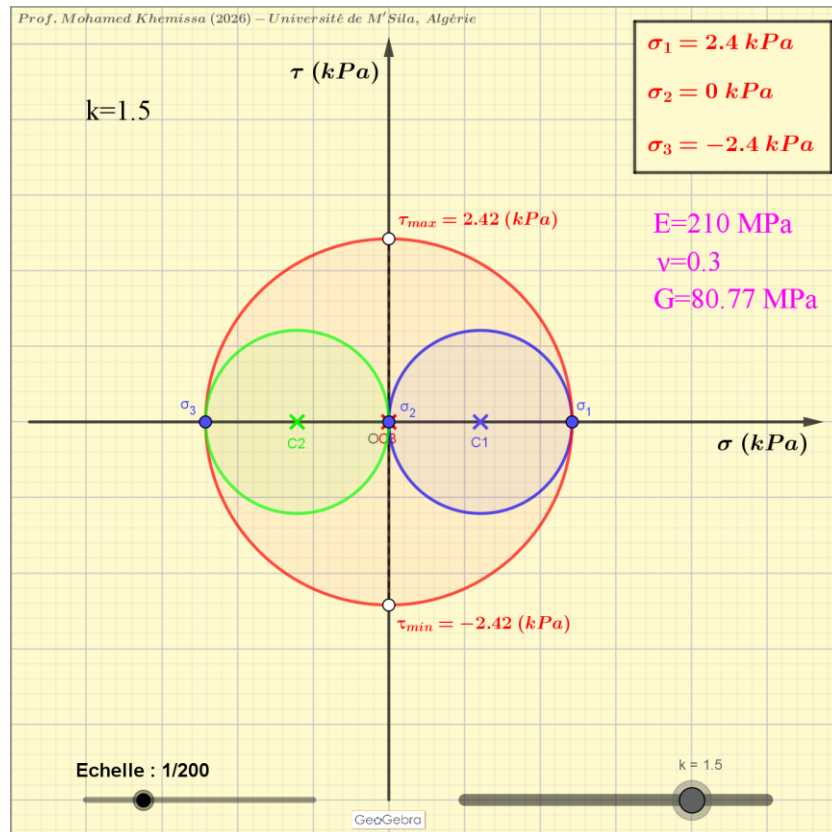
Remarque : L'état des contraintes étant cylindrique, toute direction du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est donc une direction principale associée à la valeur double $\sigma_2 = \sigma_3 = -2Gk$.

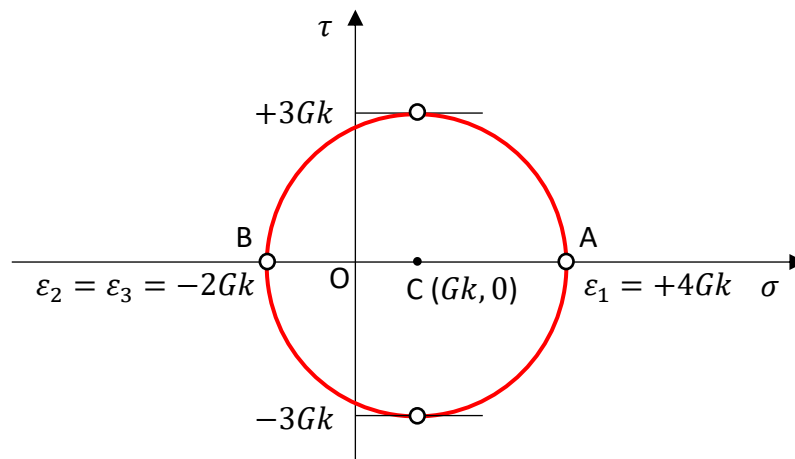


Nota : Les contraintes principales et les déformations principales ont les mêmes directions.

B4. Illustration graphique via GeoGebra





B5. Tricercler de Mohr des contraintes

L'état des contraintes étant cylindrique, le tricercler de Mohr des contraintes se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(4Gk, 0)$ et $B(-2Gk, 0)$; donc un cercle de centre $C(Gk, 0)$ et de rayon $R = 3Gk$.

B6. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|4Gk + 2Gk|}{2} = \pm 3Gk$$

Ex. 4 Soit le tenseur des contraintes appliqué en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} \quad (N/mm^2),$$

où $k \geq 0$ désigne le paramètre de chargement.

- A. Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.
- B. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

Rép. 4

A1. Contraintes principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma \bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker)

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -k - \sigma & 0 & k \\ 0 & 2k - \sigma & 0 \\ k & 0 & -k - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2k - \sigma)[(-k - \sigma)^2 - k^2] = 0$$

$$\Rightarrow (2k - \sigma)[(k + \sigma)^2 - k^2] = 0$$

$$\Rightarrow (2k - \sigma)(k + \sigma - k)(k + \sigma + k) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(2k - \sigma)(\sigma + 2k) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +2k \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -2k \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

Autre approche :

Sachant que : $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ La contrainte $\sigma_{22} = 2k$ est donc principale
 $\Rightarrow \sigma_I = 2k$

$$\Rightarrow \sigma_{II,III} = \frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2}\right)^2 + (\sigma_{23})^2} = \frac{-k - k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-k + k}{2}\right)^2 + k^2} = -k \pm k$$

$$\Rightarrow \sigma_{II} = 0 \quad \& \quad \sigma_{III} = -2k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = +2k \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -2k \end{cases} \quad (N/mm^2)$$

Type de sollicitation :

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 0 \quad \& \quad \sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cisaillement pur}$$

Commentaire :

$$Tr(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -k + 2k - k = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Tenseur déviatorique}$$

A2. Directions principales des contraintes

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\sigma} - \sigma_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

$$\bullet \quad \sigma_1 = +2k \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - (2k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & -3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3l_1 + 0m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ 0l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + 0m_1 - 3n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

$$(b) \quad \Rightarrow \quad \text{Solution indéterminée}$$

$$(a) \quad \Rightarrow \quad n_1 = 3l_1$$

$$(c) \quad \Rightarrow \quad l_1 = 3n_1$$

$$\Rightarrow \quad l_1 = n_1 = 0$$

$$(d) \quad \Rightarrow \quad m_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 1 \quad (\sigma_1 = 2k \geq 0)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{n}_1 = 0\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 0\bar{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = (0 ; 1 ; 0)$$

$$\bullet \quad \sigma_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_2 = l_2 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + n_2 \bar{x}_3 = \{l_2 ; m_2 ; n_2\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - (0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -l_2 + 0m_2 + n_2 = 0 & (a) \\ 0l_2 + 2m_2 + 0n_2 = 0 & (b) \\ l_2 + 0m_2 - n_2 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (d)$$

$$(a) \text{ ou } (c) \Rightarrow l_2 = n_2$$

$$(b) \Rightarrow m_2 = 0$$

$$(d) \Rightarrow 2l_2^2 = 1 \Rightarrow l_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_2 = 1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_1 + 0\bar{x}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = -2k \Rightarrow \bar{n}_3 = l_3 \bar{x}_1 + m_3 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - (-2k) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & 4k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (a) \\ 0l_3 + 4m_3 + 0n_3 = 0 & (b) \\ l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (d)$$

$$(a) \text{ ou } (c) \Rightarrow l_3 = -n_3$$

$$(b) \Rightarrow m_3 = 0$$

$$(d) \Rightarrow 2l_3^2 = 1 \Rightarrow l_3 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = -1/\sqrt{2}$$

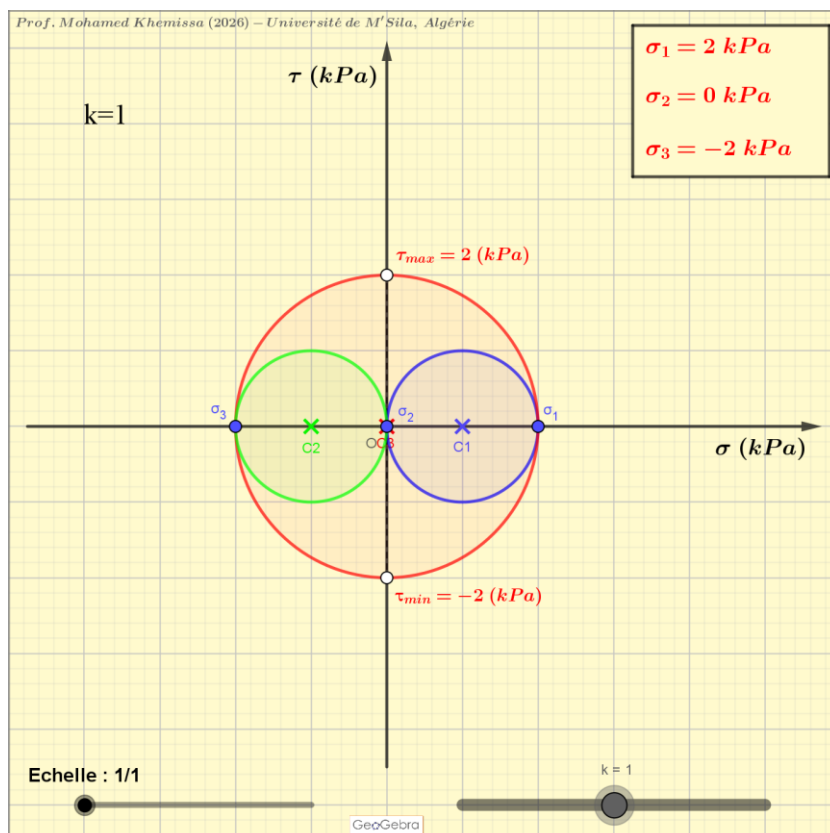
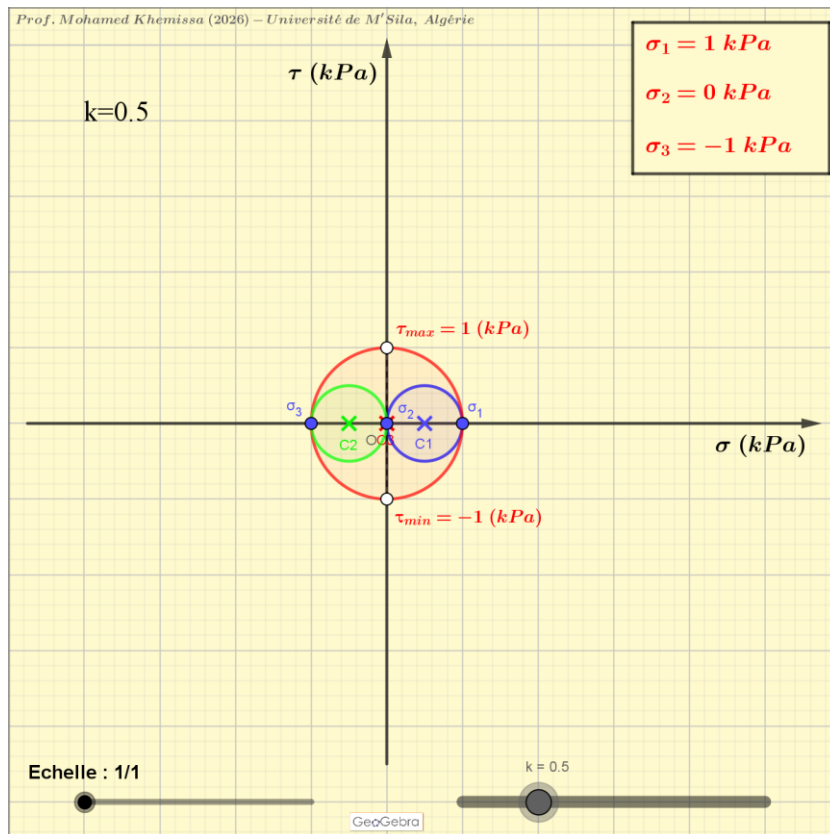
$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_1 + 0\bar{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

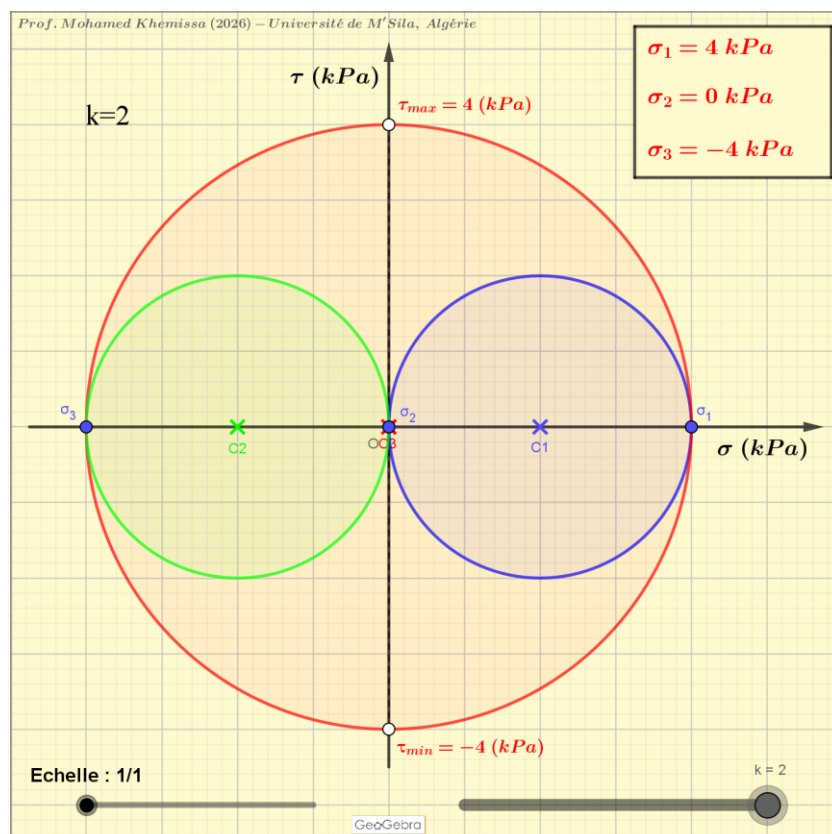
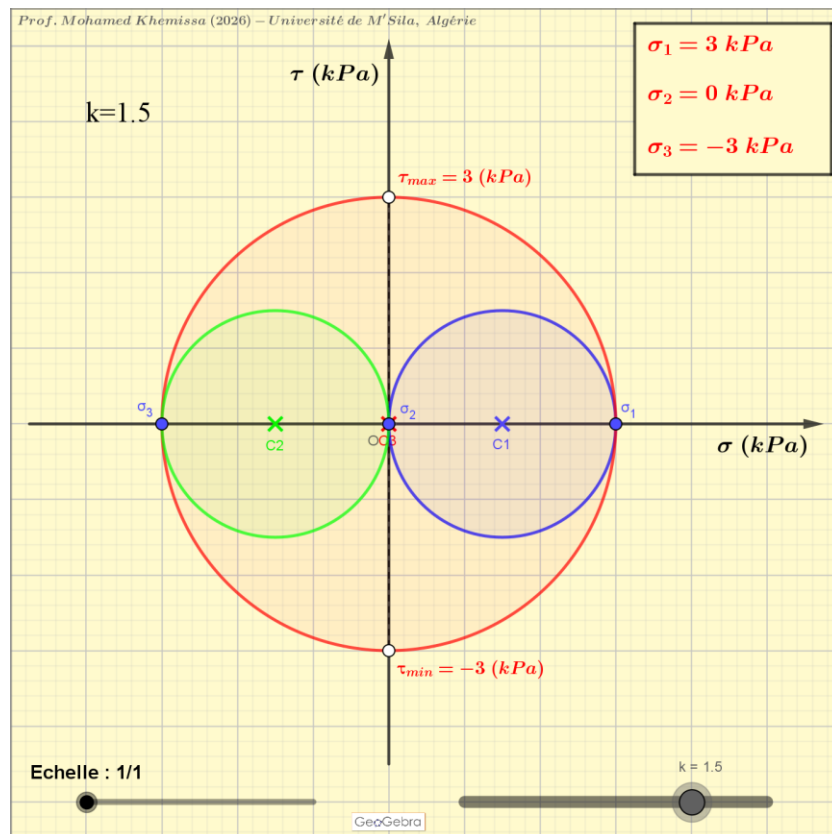
Autre approche :

$$\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \quad | \quad \bar{n}_1 = (0 ; 1 ; 0) \quad \& \quad \bar{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

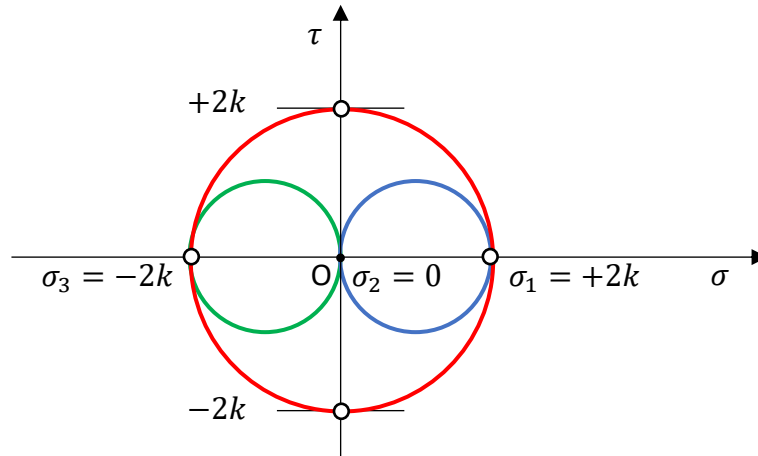
$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \times 0 \right) \bar{i} - \left(0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 \right) \bar{j} + \left(0 \times 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \right) \bar{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{i} - 0\bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{k} \\ \Rightarrow \bar{n}_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

A3. Illustration graphique via GeoGebra





A4. Tricercler de Mohr des contraintes



L'état des contraintes étant cylindrique, le tricercler de Mohr des contraintes se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(+2k, 0)$ et $B(-2k, 0)$; donc un cercle de centre $C(0, 0)$ et de rayon $R = 2k$.

A5. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|2k + 2k|}{2} = \pm 2k$$

B1. Tenseur des déformations

Sachant que :

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} Tr(\bar{\sigma}) \bar{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

telle que : $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -k + 2k - k = 0$

D'où :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_{11} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{11} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (-k) = -\frac{(1+\nu)k}{E} \\ \bullet \quad \varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{22} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (2k) = \frac{2(1+\nu)k}{E} \\ \bullet \quad \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{33} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (-k) = -\frac{(1+\nu)k}{E} \\ \bullet \quad \varepsilon_{12} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{12} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{12} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (0) = 0 = \varepsilon_{21} \\ \bullet \quad \varepsilon_{13} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{13} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{13} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (k) = \frac{(1+\nu)k}{E} = \varepsilon_{31} \\ \bullet \quad \varepsilon_{23} &= -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{23} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{23} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 0 + \frac{1+\nu}{E} \times (0) = 0 = \varepsilon_{32} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{(1+\nu)k}{E} & 0 & \frac{(1+\nu)k}{E} \\ 0 & \frac{2(1+\nu)k}{E} & 0 \\ \frac{(1+\nu)k}{E} & 0 & -\frac{(1+\nu)k}{E} \end{bmatrix} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \bar{\sigma}$$

Remarque 1 : $Tr(\bar{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{(1+\nu)}{E} (-k + 2k - k) = 0 \quad Ok.$

Remarque 2 : Sachant que : $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2G} \bar{\sigma} \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij}$

B2. Déformations principales

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon \bar{\delta}) \cdot \bar{n} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) n_i = 0$$

avec $\bar{\delta} = [\delta_{ij}] \quad | \quad \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \text{ et } \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$ (Tenseur de Kronecker).

D'où la solution non triviale suivante : $\det(\sigma_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\varepsilon_{ij} - \varepsilon \delta_{ij}) &= \left| \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - \varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \\ &= \left| \begin{array}{ccc} -\frac{(1+\nu)k}{E} - \varepsilon & 0 & \frac{(1+\nu)k}{E} \\ 0 & \frac{2(1+\nu)k}{E} - \varepsilon & 0 \\ \frac{(1+\nu)k}{E} & 0 & -\frac{(1+\nu)k}{E} - \varepsilon \end{array} \right| = 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{2(1+\nu)k}{E} - \varepsilon \right) \left[\left(-\frac{(1+\nu)k}{E} - \varepsilon \right)^2 - \left(\frac{(1+\nu)k}{E} \right)^2 \right] &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon \left(\frac{2(1+\nu)k}{E} - \varepsilon \right) \left(\frac{2(1+\nu)k}{E} + \varepsilon \right) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +\frac{2(1+\nu)k}{E} \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -\frac{2(1+\nu)k}{E} \end{cases} & (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3) \end{aligned}$$

Type de sollicitation :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \quad \& \quad \varepsilon_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Cisaillement pur}$$

Autre approche :

$$\text{Sachant que : } \begin{cases} \sigma_1 = 2k \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -2k \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k \end{bmatrix} \quad (N/mm^2)$$

$$\text{telles que : } \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 2k + 0 - 2k = 0 \quad \& \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \end{cases}$$

D'où :

- $\varepsilon_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{11} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{11} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (2k) = \frac{2(1+\nu)k}{E}$
 $\Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2(1+\nu)k}{E} \quad Ok.$
- $\varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{22} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{22} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (0) = 0$
 $\Rightarrow \varepsilon_2 = 0 \quad Ok.$
- $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \times \delta_{33} + \frac{1+\nu}{E} \times \sigma_{33} = -\frac{\nu}{E} \times (0) \times 1 + \frac{1+\nu}{E} \times (-2k) = -\frac{2(1+\nu)k}{E}$
 $\Rightarrow \varepsilon_3 = -\frac{2(1+\nu)k}{E} \quad Ok.$

B3. Directions principales des déformations

Elles sont déterminées comme suit :

$$(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_p \bar{\delta}) \cdot \bar{n}_p = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})(n_p)_i = 0$$

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = \frac{2(1+\nu)k}{E} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = l_1 \bar{x}_1 + m_1 \bar{x}_2 + n_1 \bar{x}_3 = \{l_1 ; m_1 ; n_1\}$$

$$\left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - \left(\frac{2(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{2(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3l_1 + 0m_1 + n_1 = 0 & (a) \\ 0l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (b) \\ l_1 + 0m_1 - 3n_1 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (d)$$

(b) $\Rightarrow$ Solution indéterminée

(a) $\Rightarrow n_1 = 3l_1$

(c) $\Rightarrow l_1 = 3n_1$

$\Rightarrow l_1 = n_1 = 0$

(d) $\Rightarrow m_1^2 = 1 \Rightarrow m_1 = 1 \quad (\sigma_1 = 2k \geq 0)$

$\Rightarrow \bar{n}_1 = 0\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 0\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{n}_1 = (0 ; 1 ; 0) \quad Ok$

$$\bullet \quad \varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \bar{n}_2 = l_2 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 + n_2 \bar{x}_3 = \{l_2 ; m_2 ; n_2\}$$

$$\left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - (0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -l_2 + 0m_2 + n_2 = 0 & (a) \\ 0l_2 + 2m_2 + 0n_2 = 0 & (b) \\ l_2 + 0m_2 - n_2 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (d)$$

(a) ou (c) : $\Rightarrow l_2 = n_2$

(b) : $\Rightarrow m_2 = 0$

(d) : $\Rightarrow 2l_2^2 = 1 \Rightarrow l_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_2 = 1/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_1 + 0 \bar{x}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\bullet \quad \varepsilon_3 = -\frac{2(1+\nu)k}{E} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_3 = l_3 \bar{x}_1 + m_3 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 = \{l_3 ; m_3 ; n_3\}$$

$$\left[\left(\frac{1+\nu}{E} \right) \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} - \left(-\frac{2(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{2(1+\nu)k}{E} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (a) \\ 0l_3 + 4m_3 + 0n_3 = 0 & (b) \\ l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (c) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (d)$$

$$(a) \text{ ou } (c) \Rightarrow l_3 = -n_3$$

$$(b) \Rightarrow m_3 = 0$$

$$(d) \Rightarrow 2l_3^2 = 1 \Rightarrow l_3 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow n_3 = -1/\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_1 + 0 \bar{x}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

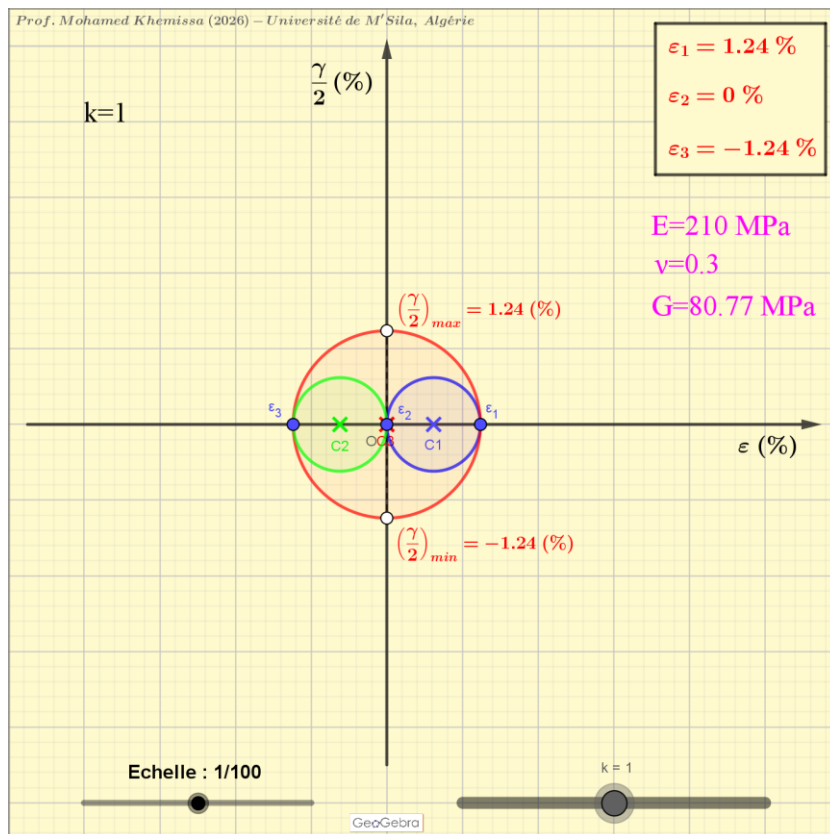
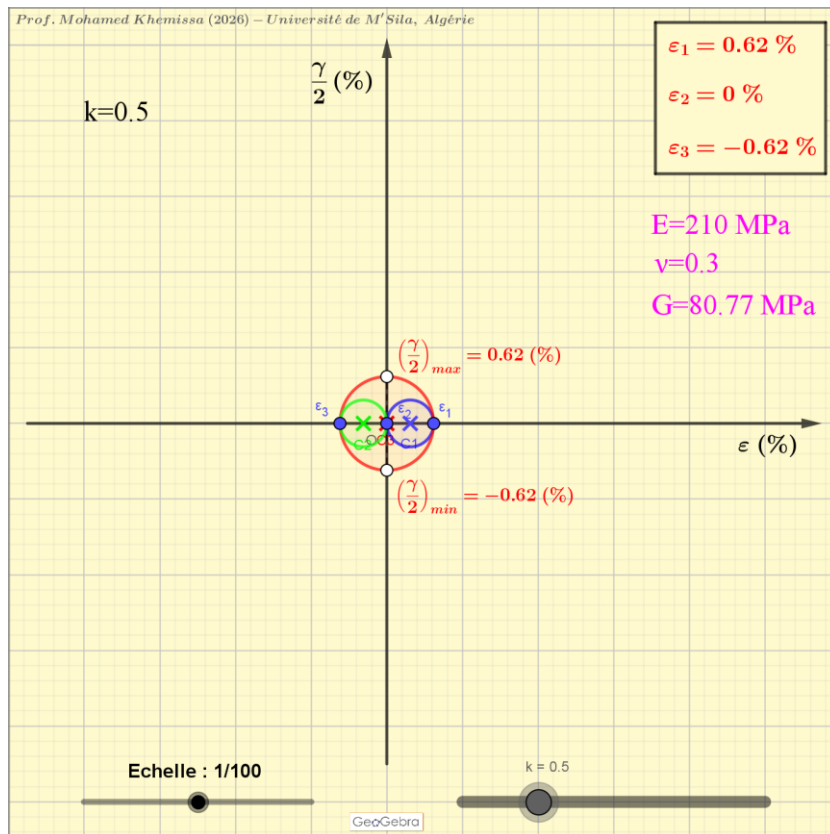
Autre approche :

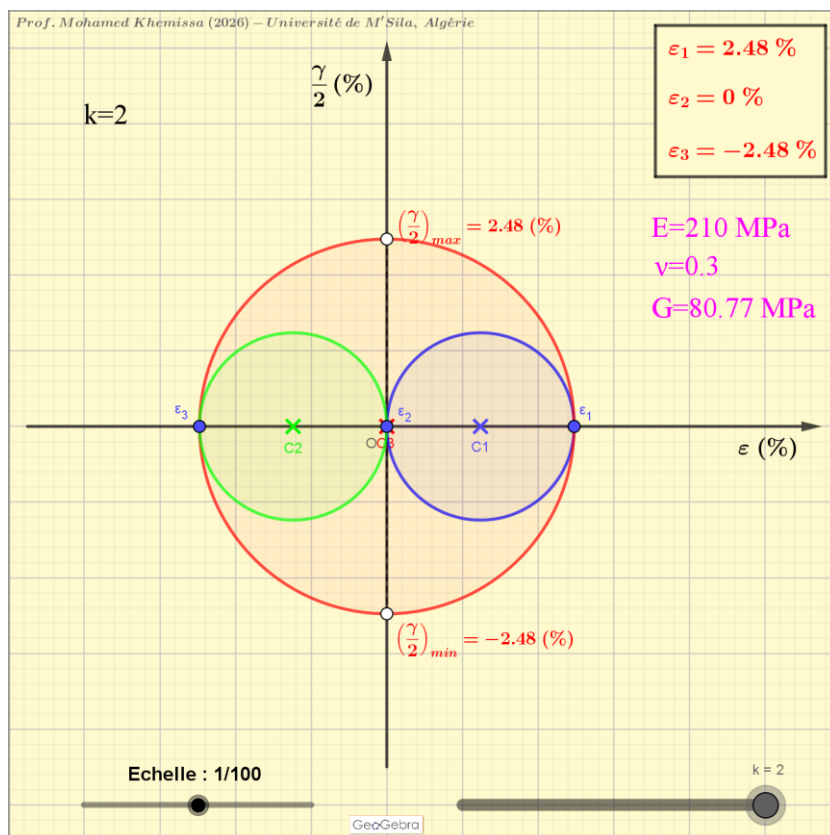
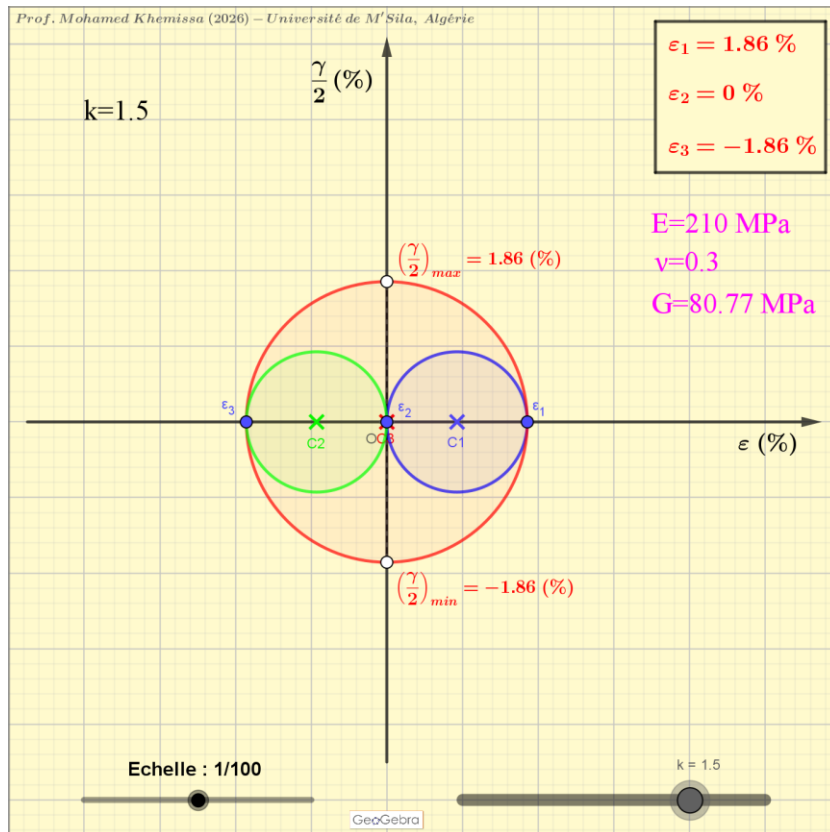
$$\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 \quad | \quad \bar{n}_1 = (0 ; 1 ; 0) \quad \& \quad \bar{n}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

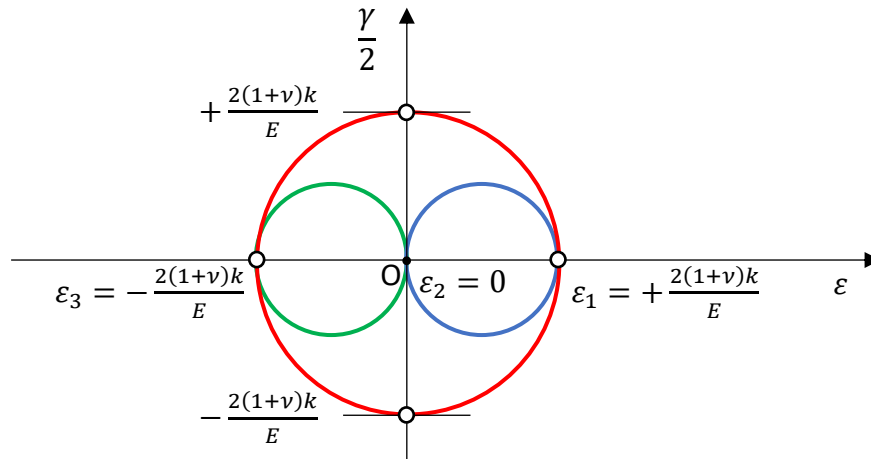
$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2 &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \\ &= \left(1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \times 0 \right) \bar{i} - \left(0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 \right) \bar{j} + \left(0 \times 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \right) \bar{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{i} - 0 \bar{j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{k} \\ \Rightarrow \bar{n}_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; 0 ; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad Ok. \end{aligned}$$

Nota : Les contraintes principales et les déformations principales ont les mêmes directions.

B4. Illustration graphique via GeoGebra





B5. Tricercler de Mohr des déformations

L'état des déformations étant cylindrique, le tricercler de Mohr des déformations se réduit donc à un seul cercle défini par les points $A(+\frac{2(1+\nu)k}{E}, 0)$ et $B(-\frac{2(1+\nu)k}{E}, 0)$; donc un cercle de centre $C(0, 0)$ et de rayon $R = \frac{2(1+\nu)k}{E}$.

B6. Distorsion maximale

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{max} = \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_3|}{2} = \frac{1}{2} \left| \left(+\frac{2(1+\nu)k}{E}\right) - \left(-\frac{2(1+\nu)k}{E}\right) \right| = \left| \frac{2(1+\nu)k}{E} \right| = \pm \frac{2(1+\nu)k}{E}$$

$$\Rightarrow \gamma_{max} = \pm \frac{2(1+\nu)k}{E}$$