

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Master Géotechnique (M1/S2)

COURS : Rhéologie des sols

EPREUVE DE FIN DE SEMESTRE

(Date : 13/05/2026 - Durée : 2 heures)

Ex. 1 (10 points) Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de type CID réalisés sur un sol sableux d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 30^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	1	2	3
σ_3 (kPa)	50	100	150
E_i (MPa)	22.500	90.000	202.500
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	125	250	375

- 1.1 Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de rupture de type Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs du paramètre R_f correspondantes.
- 1.2 Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre $p_a = 100$ kPa.

Ex. 2 (10 points) Soit le tenseur de contraintes appliqué en un point d'un massif argileux :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -3k & 0 & k\sqrt{3} \\ 0 & 4k & 0 \\ k\sqrt{3} & 0 & -k \end{pmatrix},$$

où $k = f(c_u) \geq 0$ désigne le paramètre de chargement et c_u la cohésion non drainée du sol.

- 2.1 Quelle est la particularité de ce tenseur ? Justifier la réponse donnée.
- 2.2 Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes, puis déduire le type de sollicitation correspondante.
- 2.3 Déterminer les valeurs de k satisfaisant aux critères de plasticité de Tresca et de von Mises, puis commenter les résultats trouvés.

N.B. Seules les notes de cours sont autorisées.

Bonne chance

Prof. Mohamed Khemissa

Ex. 1**1.1 Déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ et valeurs de R_f correspondantes**

Le critère de rupture de type de Mohr-Coulomb est donné par l'équation suivante :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c' \cos \varphi' + 2\sigma_3 \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

avec :

$$c' = 0 \text{ (Sable)}$$

$$\varphi' = 30^\circ$$

D'où :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = 2\sigma_3$$

Le paramètre R_f est défini par l'expression suivante : $R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$

D'où alors :

Essai	1	2	3	
σ_3 (kPa)	50	100	150	
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	125	250	375	
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ (kPa)	100	200	300	(#1.5)
R_f	0.8	0.8	0.8	(#1.5)

1.2 Paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970)

Le module de Young tangent initial est donné par la relation suivante :

$$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

avec : $p_a = 100 \text{ kPa}$

$$\Rightarrow \frac{E_i}{p_a} = K_h \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \Rightarrow \log \left(\frac{E_i}{p_a} \right) = \log K_h + n \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

Soit donc :

N°	σ_3 (kPa)	E_i (kPa)	σ_3/p_a	E_i/p_a	$\log(\sigma_3/p_a)$	$\log(E_i/p_a)$	
1	50	22 500	0.50	225.00	-0.301	2.352	(#1)
2	100	90 000	1.00	900.00	0.000	2.954	(#1)
3	150	202 500	1.50	2 025.00	0.176	3.306	(#1)

D'où finalement :

$$\log K_h = 2.954 \Rightarrow K_h = 10^{2.954} \approx 900 \quad (\#2)$$

$$n = \frac{3.306 - 2.954}{0.176 - 0.000} = 2 \Rightarrow n = 2 \quad (\#2)$$

Ex. 2

2.1 Particularité du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$:

$$Tr(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = -3k + 4k - k = 0 \Rightarrow \text{Tenseur déviatorique} \quad (\#1)$$

2.2 Contraintes principales ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) :

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal} \Rightarrow \lambda_1 = 4k$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-3k-k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3k+k}{2}\right)^2 + (k\sqrt{3})^2} = -2k \pm 2k \Rightarrow \lambda_2 = -2k + 2k = 0$$

$$\& \quad \lambda_3 = -2k - 2k = -4k$$

Soit donc :

$$\sigma_1 = 4k \quad (\#1) \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad (\#1) \quad ; \quad \sigma_3 = -4k \quad (\#1)$$

Commentaire : $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$ & $\sigma_2 = 0 \Rightarrow$ Cisaillement pur $(\#1)$

2.3 Valeur de k satisfaisant à chacun des deux critères de plasticité suivants :

a. Critère de Tresca :

$$Sup\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow Sup\{|4k - 0| ; |0 + 4k| ; |-4k - 4k|\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow Sup\{4k ; 4k ; 8k\} = 2c_u$$

$$\Rightarrow 8k = 2c_u$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{4}c_u \quad (\#2)$$

b. Critère de von Mises :

$$f(\sigma_1 ; \sigma_2 ; \sigma_3) = \tau_{oct} - \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_o = 0 \quad | \quad \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2 \quad | \quad \sigma_o = 2c_u$$

$$\Rightarrow (4k - 0)^2 + (0 + 4k)^2 + (-4k - 4k)^2 = 8c_u^2$$

$$\Rightarrow 16k^2 + 16k^2 + 64k^2 = 8c_u^2$$

$$\Rightarrow 96k^2 = 8c_u^2$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{12}c_u^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2\sqrt{3}}c_u \quad (\#2)$$

c. Commentaire :

$$k_{Tresca} = \frac{1}{4}c_u < k_{von\ Mises} = \frac{1}{2\sqrt{3}}c_u$$

$\Rightarrow$ Le critère de Tresca est donc plus restrictif que celui de von Mises $(\#1)$