

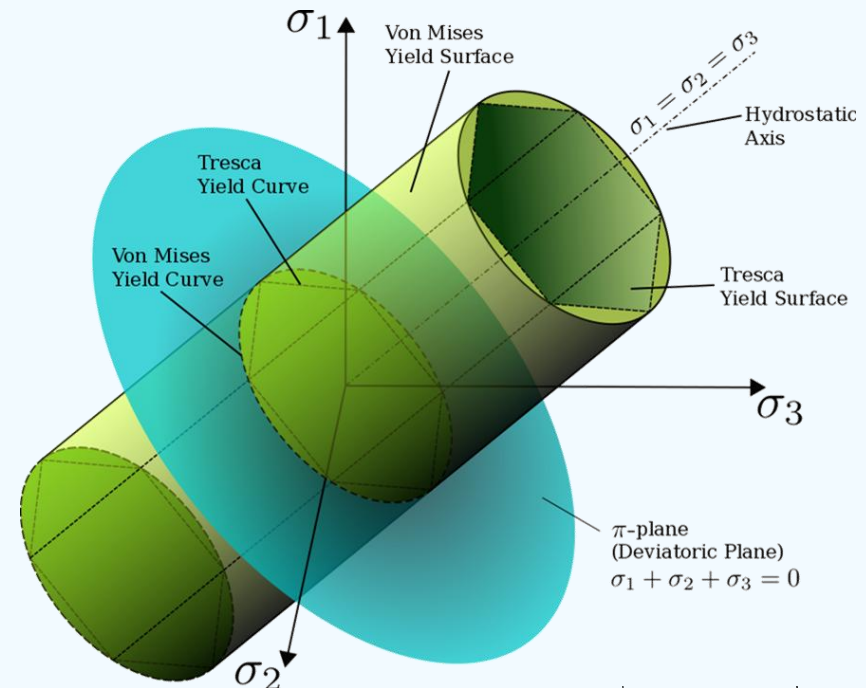
Chapitre Trois

Lois de comportement anélastique

2ème Partie

Comportement élasto-plastique parfait

- ❑ *Définition*
- ❑ *Critères de plasticité usuels*
 - ❖ *Critères à un seul paramètre*
 - ❖ *Critères à deux paramètres*
- ❑ *Exercices*



DÉFINITION

□ Définition

Le comportement élasto-plastique parfait caractérise les matériaux présentant un palier d'écoulement sur la courbe « contrainte-déformation » tels que l'acier doux, les sols et les roches, etc. Ce modèle de comportement permet notamment d'analyser la rupture des sols en interaction avec les ouvrages géotechniques (Fondations, Soutènements, Talus, Ouvrages souterrains, etc.).

⇒ Dans ce modèle, la fonction de charge est confondue avec le critère de plasticité.

Comportement élasto-plastique parfait

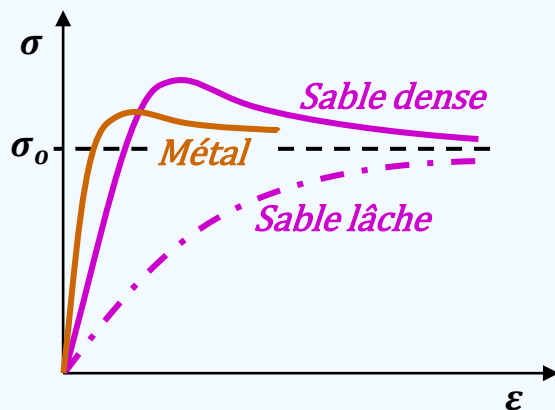


Schéma réel
(Expérience)

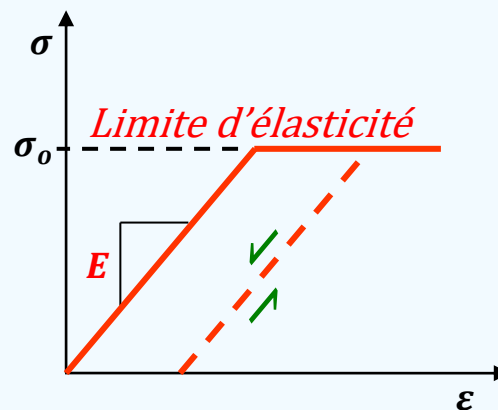
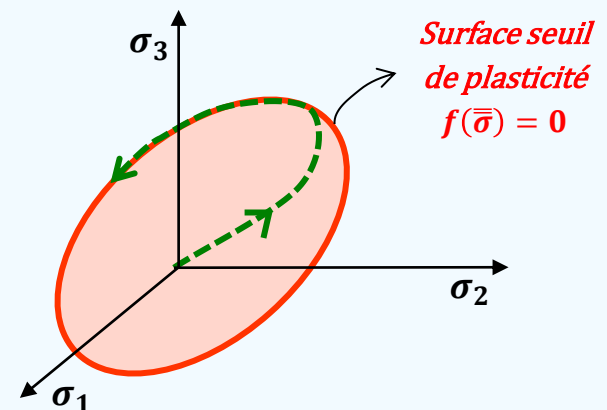


Schéma théorique
(Modèle)



Domaines d'élasticité initial et
actuel confondus

(Fonction de charge $\equiv$ Critère de plasticité)

CRITÈRES DE PLASTICITÉ USUELS

❑ Critères de plasticité usuels

Les modèles élasto-plastiques parfaits proposés par divers auteurs sont définis à partir de la donnée d'un critère de plasticité caractérisant les propriétés de résistance des matériaux ductiles (Domaine d'élasticité initial). On distingue toutefois les critères dépendant d'un seul paramètre de ceux dépendant de deux paramètres.

On donnera ci-après quelques critères de plasticité usuellement utilisés dans le calcul des ouvrages géotechniques :

❖ Critères à un seul paramètre

- ✓ *Critère de Tresca : Sols fins non drainés (court terme)*
- ✓ *Critère de von Mises : Tous les sols*

❖ Critères à deux paramètres

- ✓ *Critère de Mohr-Coulomb : Sols drainés (long terme) et non drainés (court terme)*
- ✓ *Critère de Drucker-Prager : Sols et roches indurées*

Henri Tresca



□ Critères de plasticité usuels

- **Critère de Tresca (Métaux et sols fins non drainés)**

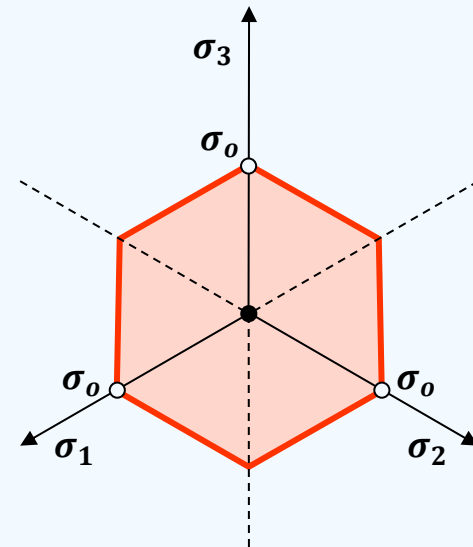
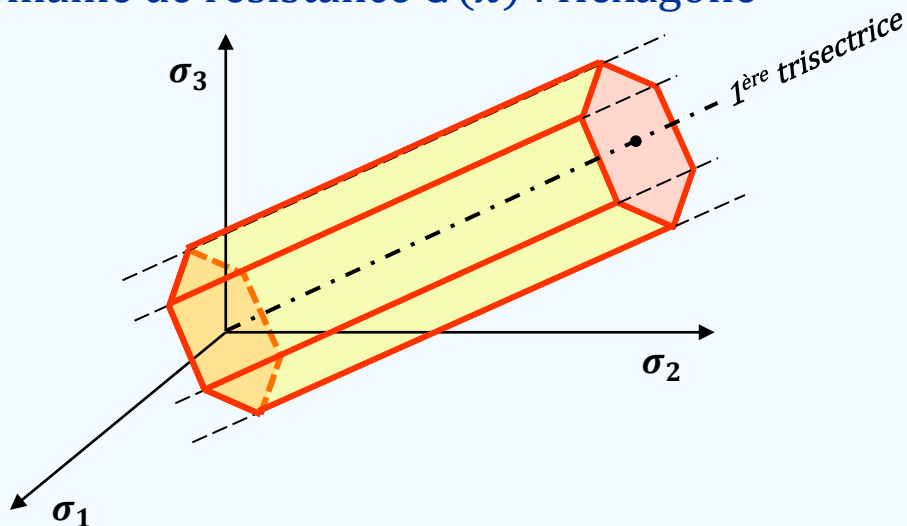
Il est défini par la relation suivante (Tresca, 1864) :

$$\sup_{|\bar{n}|=1} |\bar{\tau}(\bar{n})| = \sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} |\sigma_i - \sigma_j| = \sigma_o$$

En termes de contraintes principales :

$$\sup\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = \sigma_o$$

Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Hexagone





Richard v. Mises

❑ Critères de plasticité usuels

- **Critère de von Mises (Métaux et tous les sols)**

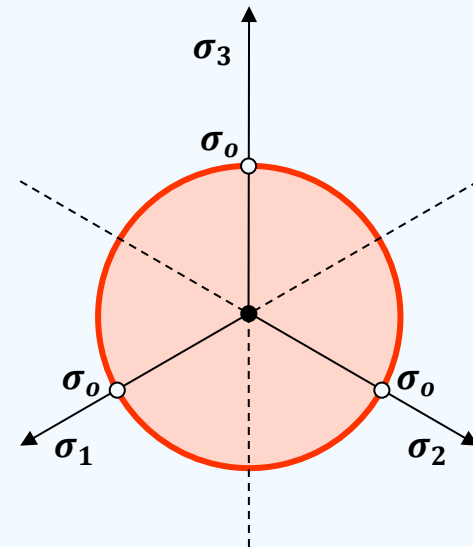
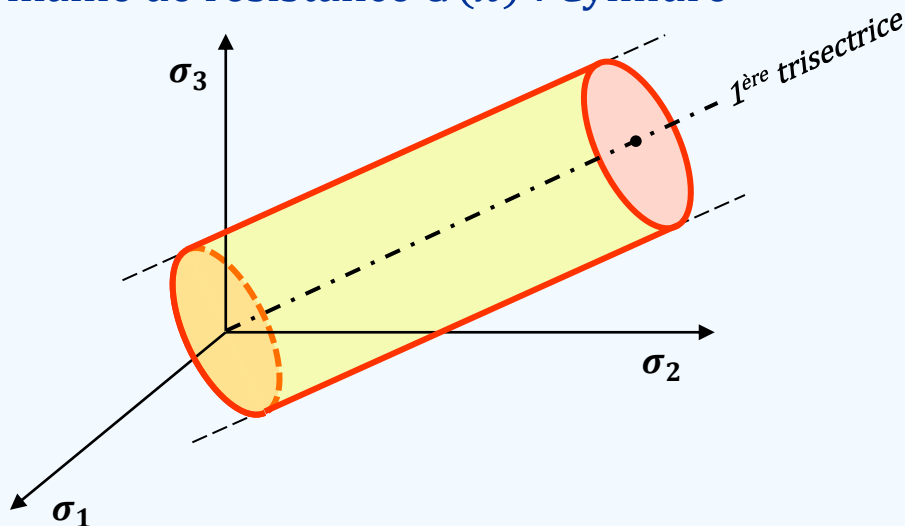
Il est défini par la relation suivante (von Mises, 1913) :

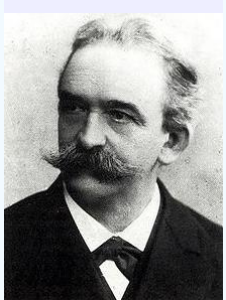
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ik} s_{ki}} = \sigma_o \quad | \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

En termes de contraintes principales :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_o^2$$

Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Cylindre





❑ Critères de plasticité usuels

• **Critère de Mohr – Coulomb (Sols drainés et non drainés)**

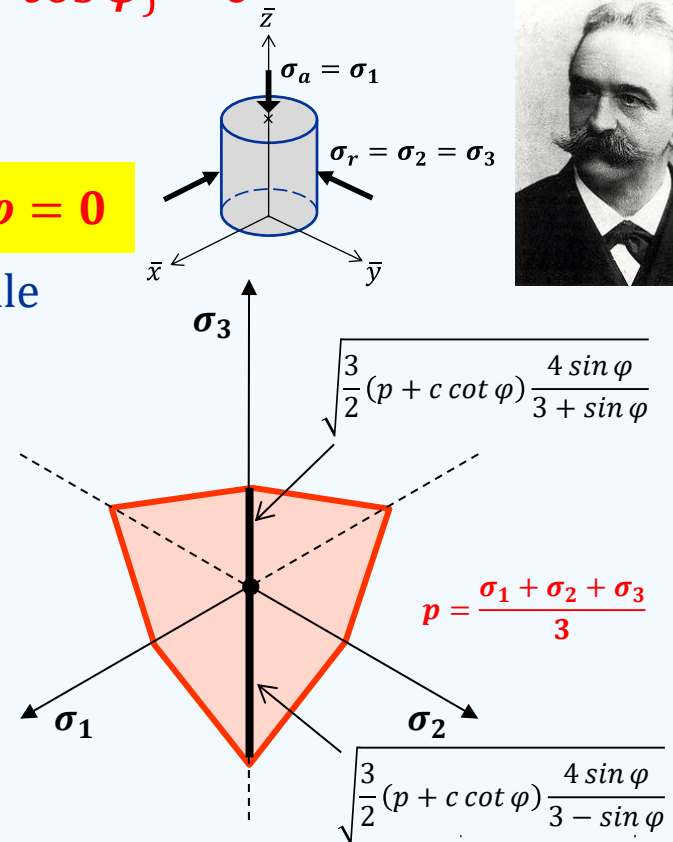
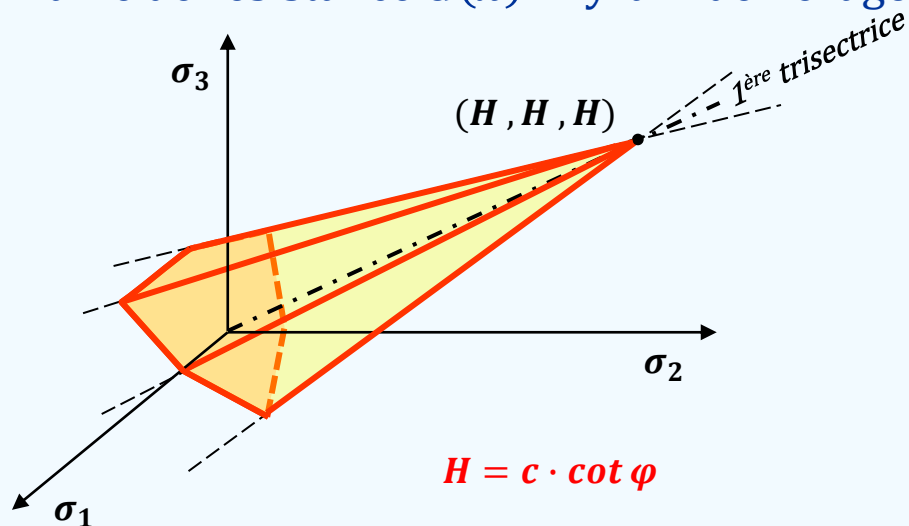
Il est défini par la relation suivante (Coulomb, 1773 ; Mohr, 1900) :

$$\sup_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}} \{ (1 - \sin \varphi) \sigma_i - (1 + \sin \varphi) \sigma_j - 2c \cdot \cos \varphi \} = 0$$

En conditions triaxiales ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) :

$$(1 - \sin \varphi) \sigma_1 - (1 + \sin \varphi) \sigma_3 - 2c \cdot \cos \varphi = 0$$

Domaine de résistance $G(\bar{\sigma})$: Pyramide hexagonale



❑ Critères de plasticité usuels

- **Critère de Drucker – Prager (Sols et roches indurées)**

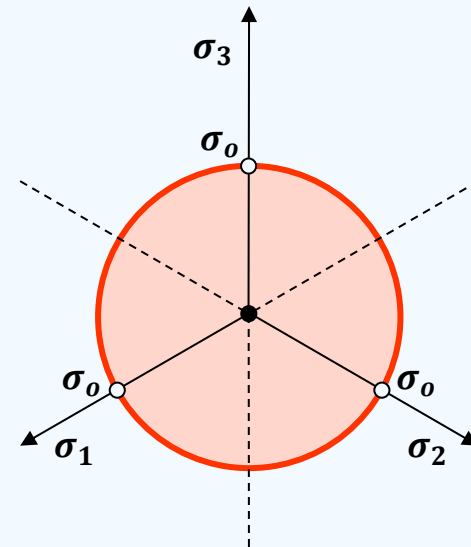
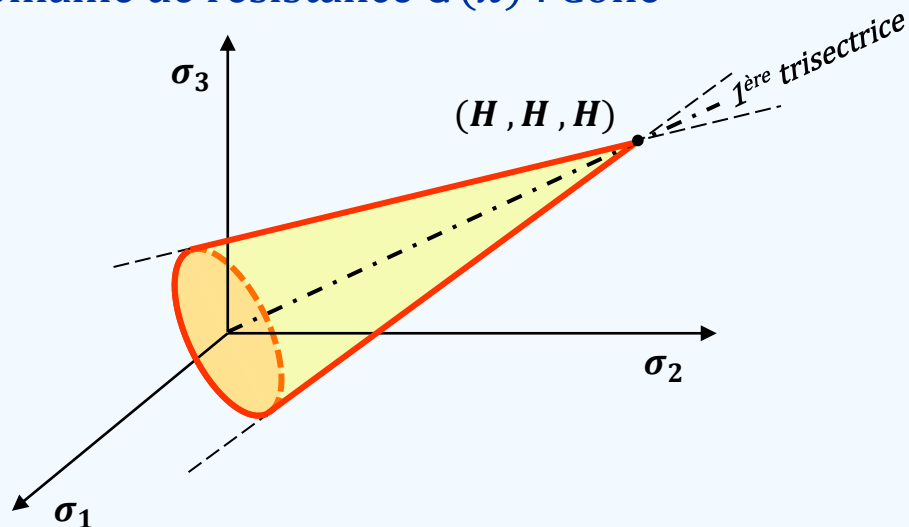
Il est défini par la relation suivante (Drucker & Prager, 1952) :

$$\sqrt{\frac{1}{2} Tr(\bar{s}^2)} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \left[H - \frac{1}{3} Tr(\bar{\sigma}) \right] = 0$$

où $H = c \cdot \cot \varphi$ désigne la pression de cohésion.



Domaine de résistance $G(\bar{x})$: Cône



❑ Critères de plasticité usuels

- **Critère de Drucker – Prager (Sols et roches indurées)**

Il est défini par la relation suivante (Drucker & Prager, 1952) :

$$\sqrt{\frac{1}{2}Tr(\bar{s}^2)} - \frac{3 \sin \varphi}{\sqrt{3(3+\sin^2 \varphi)}} \left[H - \frac{1}{3}Tr(\bar{\sigma}) \right] = 0$$

où $H = c \cdot \cot \varphi$ désigne la pression de cohésion.



En conditions triaxiales ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$) :

$$\sqrt{\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = A + B(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

tels que :

$$A = \frac{6 c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)} \quad \& \quad B = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3-\sin \varphi)}$$

où c et φ désignent les paramètres de cisaillement du sol.

Merci de votre attention

Fin de la 2^{ème} Partie

EXERCICES

Ex. 1 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2\sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} .$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines d'élasticité initiaux satisfaisant aux critères de plasticité de Tresca et de von Mises ; la limite d'élasticité du matériau en traction simple étant égale à σ_0 . Commenter ensuite les résultats trouvés.

Ex. 2 Soit, en un point M d'un matériau, le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} \quad | \quad \sigma \geq \tau.$$

Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, puis déterminer les domaines d'élasticité initiaux satisfaisant aux critères de plasticité de Tresca et de von Mises ; la limite d'élasticité du matériau en traction simple étant égale à σ_0 .

EXERCICES

Ex. 3 Des essais triaxiaux drainés réalisés sur un sable sec sous une contrainte de confinement $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$ ont donné un déviateur de contraintes ultime $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = 200 \text{ kPa}$. Calculer l'angle de frottement interne effectif φ' du sable dont le comportement est supposé obéissant au critère de plasticité de type Mohr-Coulomb.

Ex. 4 (Interro. du 16/05/2022). Soit le tenseur de contraintes appliqué en un point d'un massif argileux :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}, \quad \text{où } k \geq 0 \text{ (paramètre de chargement)}$$

4.1 Quelle est la particularité de ce tenseur ? Justifier la réponse donnée.

4.2 Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes, puis commenter les résultats trouvés.

4.3 Déterminer la valeur de k satisfaisant au critère de plasticité suivant (critère de Tresca) :

$$\text{Sup}\{|\sigma_1 - \sigma_2| ; |\sigma_2 - \sigma_3| ; |\sigma_3 - \sigma_1|\} = 2c_u$$

où c_u désigne la cohésion non drainée du sol.