

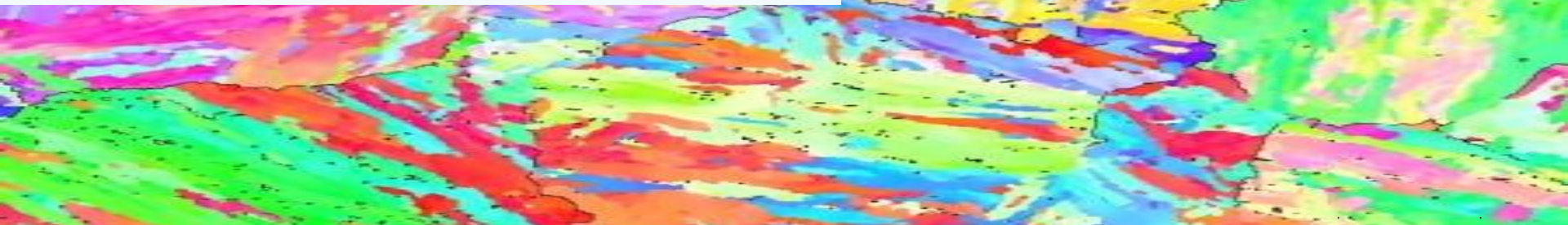
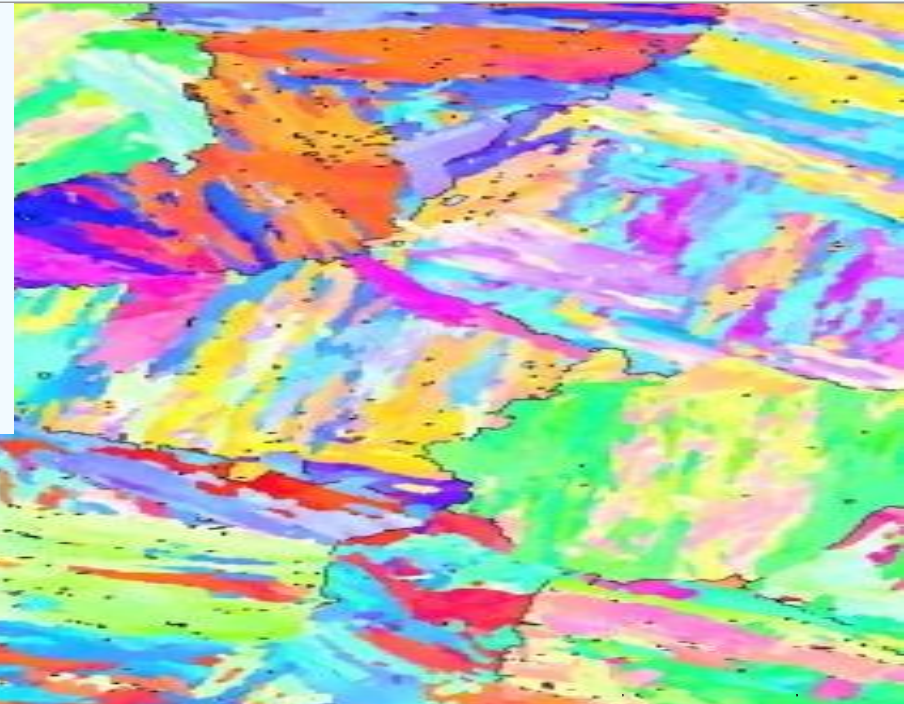
## Chapitre Trois

# Lois de comportement anélastique

### 1<sup>ère</sup> Partie

## Concepts fondamentaux

- ❑ *Introduction*
- ❑ *Bases expérimentales*
- ❑ *Fondements théoriques*
- ❑ *Application au calcul des structures*
- ❑ *Exercices*



### *INTRODUCTION*

### □ Introduction

Dans le schéma élasto-plastique classique, la réponse d'un matériau à une sollicitation donnée se produit de manière instantanée. Cette réponse exprime le comportement des *matériaux non-vieillissants* (invariance par translation sur la variable temps) *et sans viscosité* (indépendance de la vitesse à laquelle la réponse s'est effectuée).

⇒ La relation de comportement des matériaux solides sans vieillissement, ni viscosité, ne saurait dépendre implicitement ou explicitement du temps physique.

Le schéma élasto-plastique classique a été initialement élaboré à partir des résultats expérimentaux relatifs au comportement des métaux. Son domaine d'application a ensuite été étendu à d'autres types de matériaux tels les sols et les roches. Il a pour but de décrire l'apparition des déformations permanentes (ou irréversibles) en s'appuyant sur deux concepts :

- ❖ **Le critère de plasticité :** qui généralise la notion de seuil de plasticité mise en évidence dans les expériences de sollicitations uniaxiales.
- ❖ **La loi d'écoulement plastique :** qui définit dans le cas de sollicitations multiaxiales la façon dont évolue la déformation plastique.

### □ Introduction

Schématiquement parlant, on doit répondre à deux questions :

- QUAND est-ce que la plasticité apparaisse ?
- COMMENT se développe-t-elle ?

La réponse à ces deux questions est donnée comme suit :

- **QUAND ?**

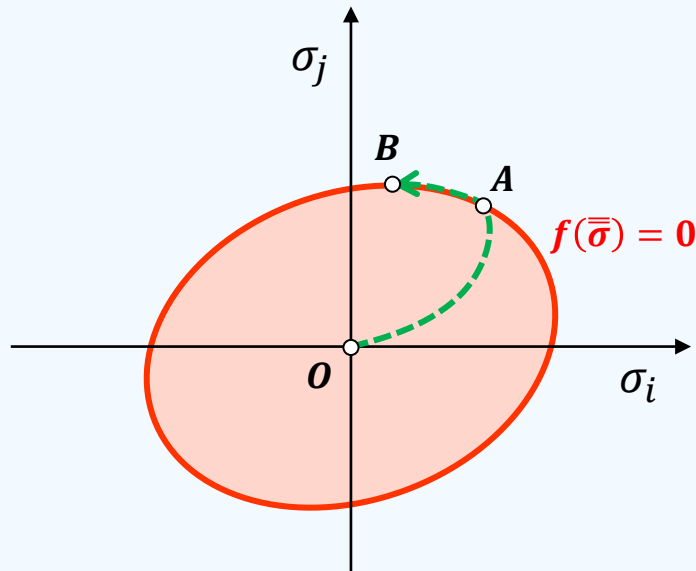
⇒ **Le critère de plasticité** : C'est le seuil de contraintes à partir duquel apparaissent des déformations permanentes ou irréversibles (déformations plastiques) : *Domaine d'élasticité initial*.

⇒ *La frontière du domaine d'élasticité initial est définie par la fonction de charge qui précise l'instant à partir duquel apparaissent les déformations plastiques.*

- **COMMENT ?**

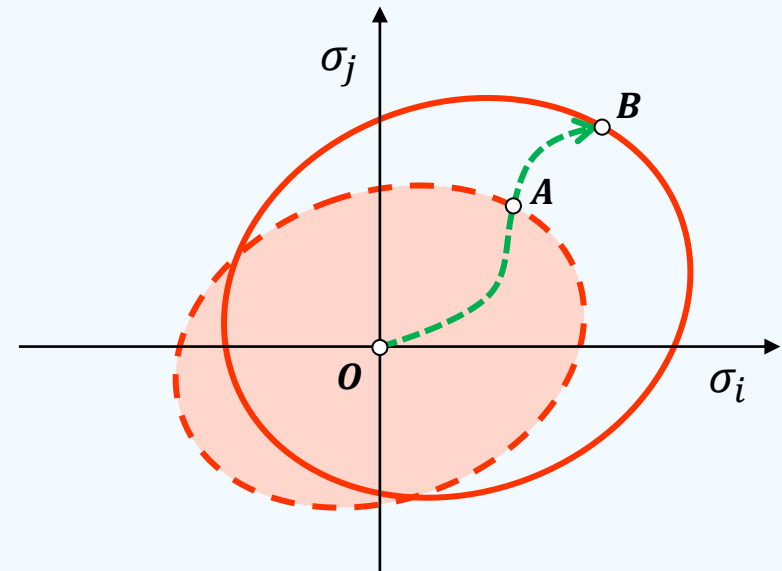
⇒ **La loi d'écoulement plastique** : Elle exprime la façon dont se poursuit la déformation plastique au-delà du domaine d'élasticité initial.

### Introduction



*Domaines d'élasticité initial et actuel confondus : **Domaine fixe***

*a/ Cas du matériau élasto-plastique parfait*



*Domaines d'élasticité initial et actuel distincts : **Domaine évolutif***

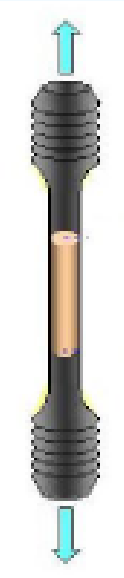
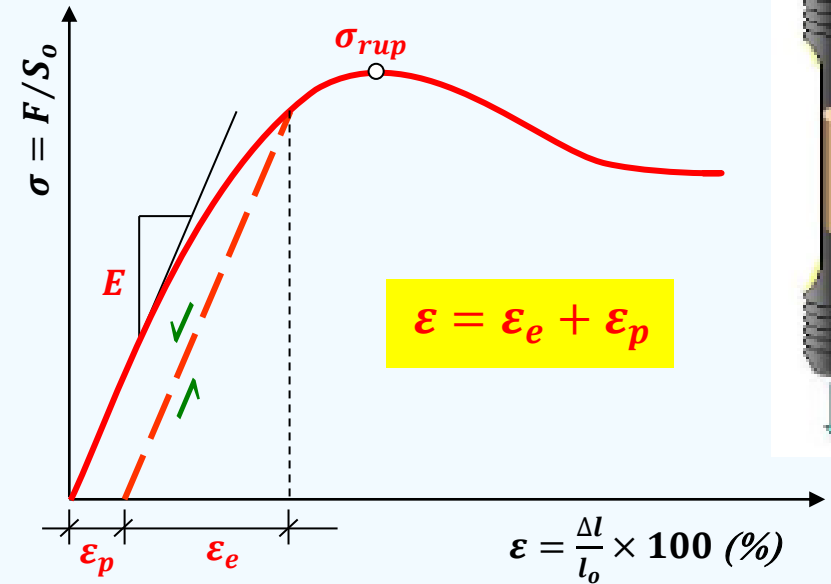
*b/ Cas du matériau élasto-plastique écrouissable*

***Domaines d'élasticité initial et actuel***

### ***BASES EXPÉRIMENTALES***

### ❑ Bases expérimentales

#### • **Expérience de traction simple : Courbe de déformation type**

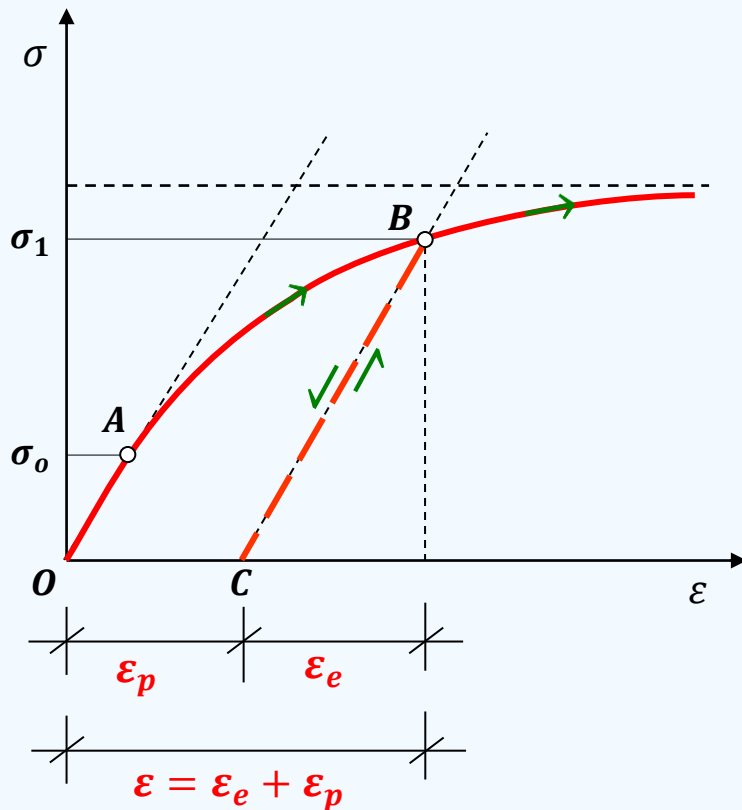


- Déformation élastique :  $\varepsilon_e = \sigma/E$
- Déformation anélastique :  $\varepsilon_p = f(\sigma, k)$



### □ Bases expérimentales

#### • **Expérience de traction simple : Courbe de déformation type**



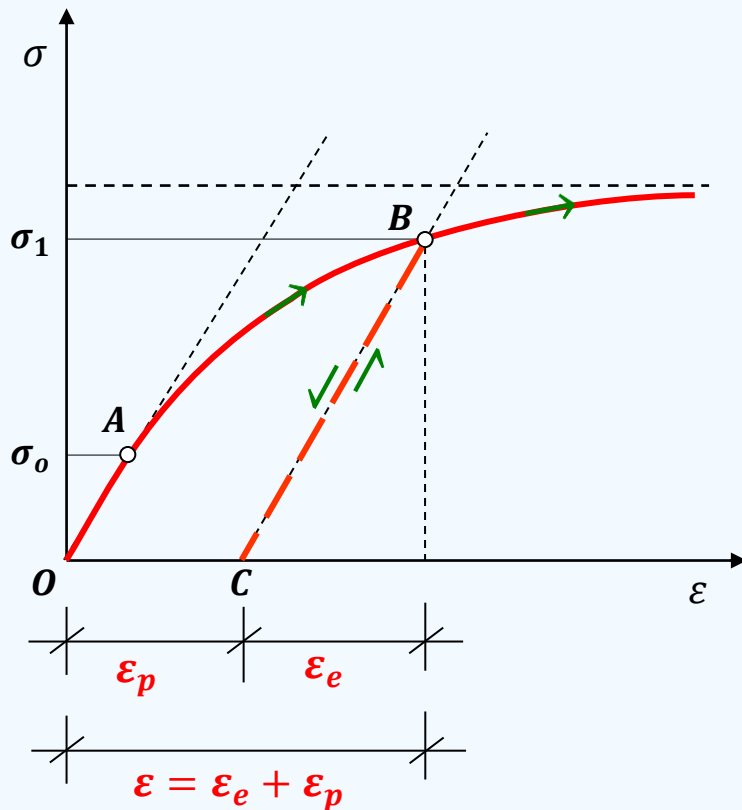
### Constatations

1. Existence d'un seuil de contrainte  $\sigma_0$  à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible.
2. Après un déchargement total pour  $\sigma > \sigma_0$ , il subsiste une déformation permanente, notée  $\epsilon_p$ .
3. Après rechargement, le seuil de contrainte actuel ( $\sigma_1 = \sigma_B$ ) est supérieur au seuil de contrainte initial ( $\sigma_1 > \sigma_0$ ) dans le cas de matériau écrouissable et égal à ( $\sigma_1 = \sigma_0$ ) dans le cas du matériau non écrouissable (ou parfait).
4. La déformation totale, notée  $\epsilon$ , est définie comme la somme d'une déformation réversible ou élastique, notée  $\epsilon_e$ , et d'une déformation irréversible ou plastique, notée  $\epsilon_p$ , telle que :  $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$ .



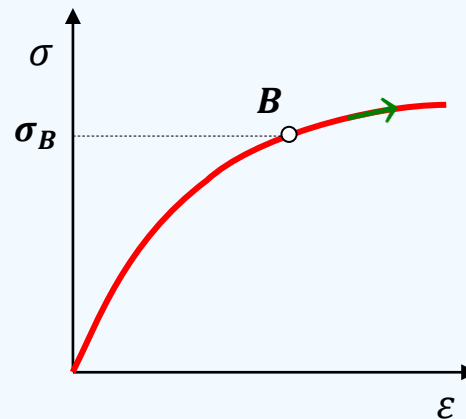
### □ Bases expérimentales

#### • Expérience de traction simple : Courbe de déformation type

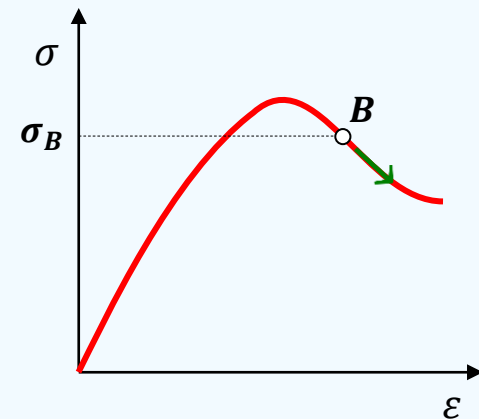


#### Constatations

5. Si  $\sigma_B \nearrow$  et  $\varepsilon_p \nearrow \Rightarrow$  l'écrouissage est positif
6. Si  $\sigma_B \searrow$  et  $\varepsilon_p \nearrow \Rightarrow$  l'écrouissage est négatif



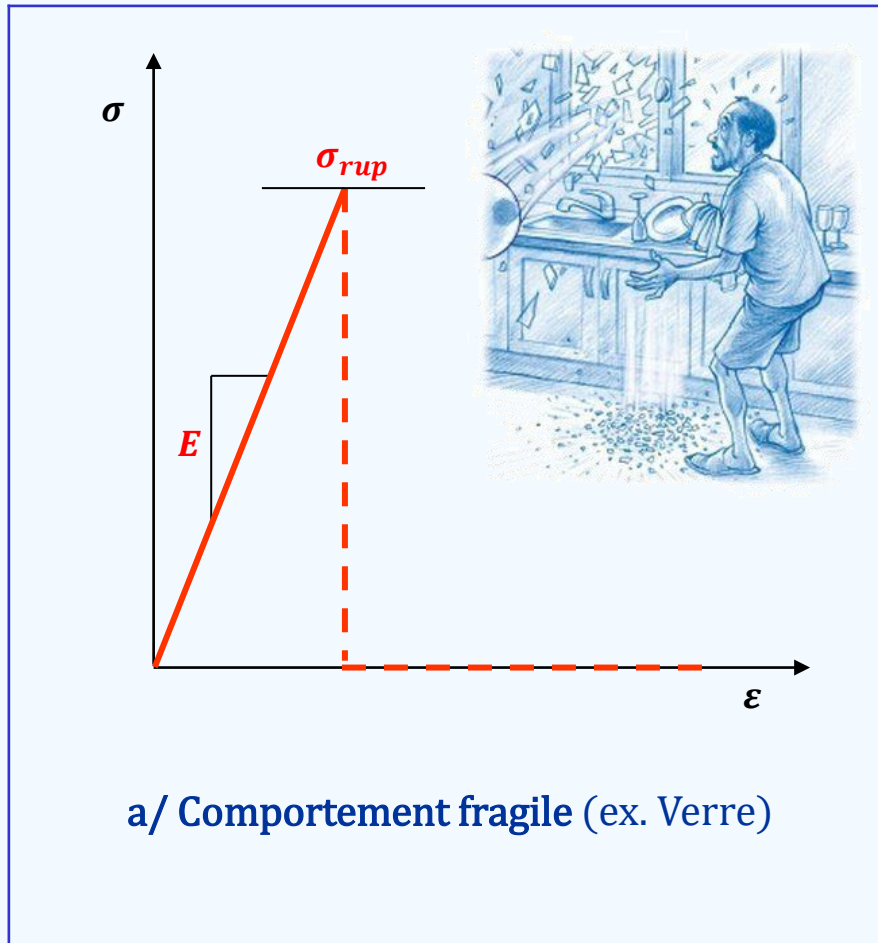
**Ecrouissage positif**



**Ecrouissage négatif**

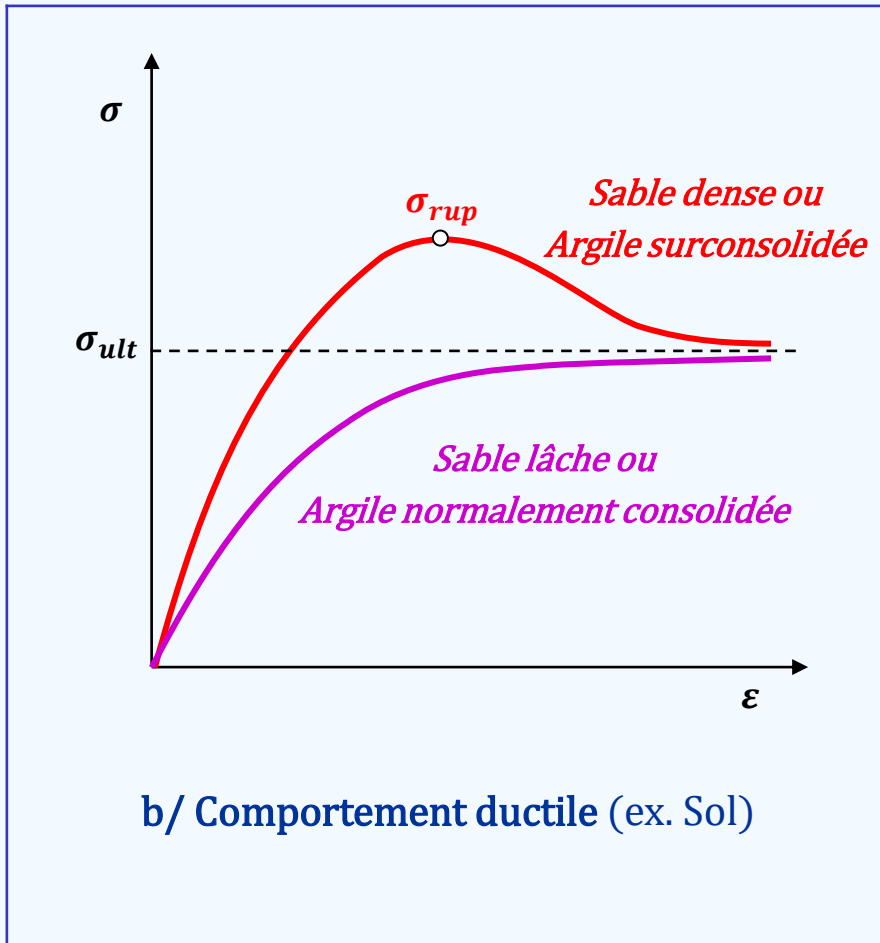
### □ Bases expérimentales

- **Exemples de modèles de comportement**



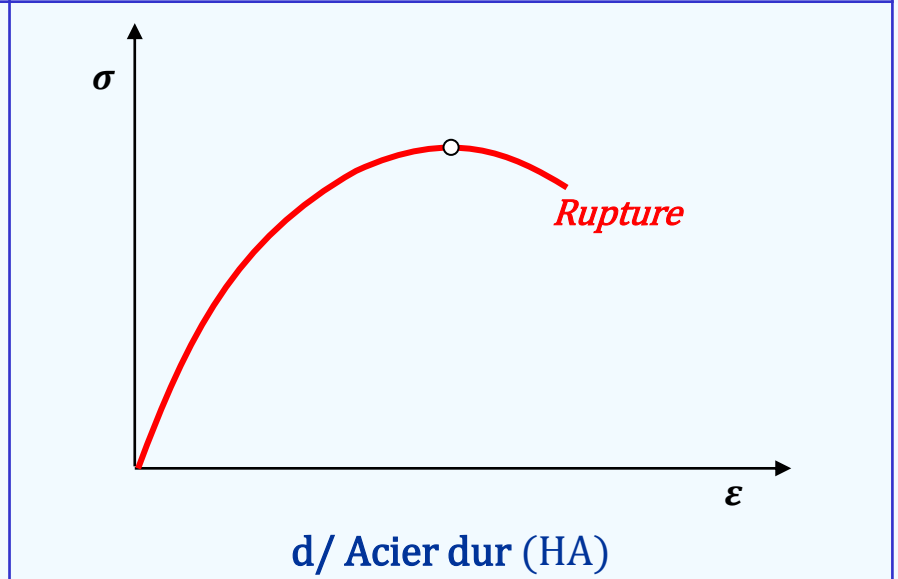
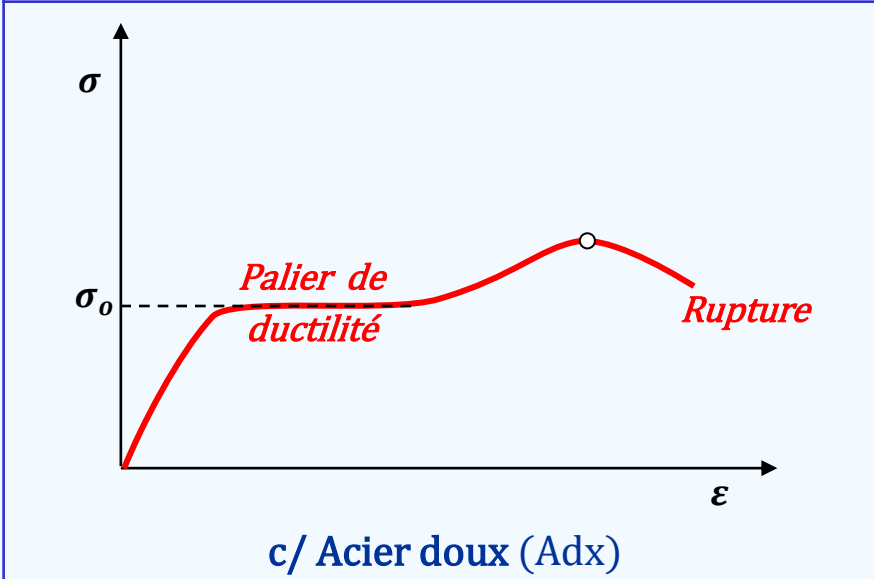
### □ Bases expérimentales

- **Exemples de modèles de comportement**



### □ Bases expérimentales

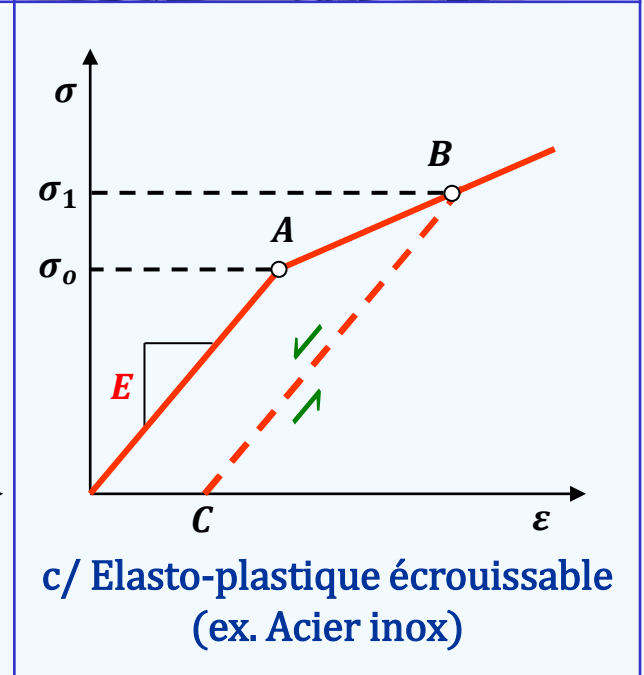
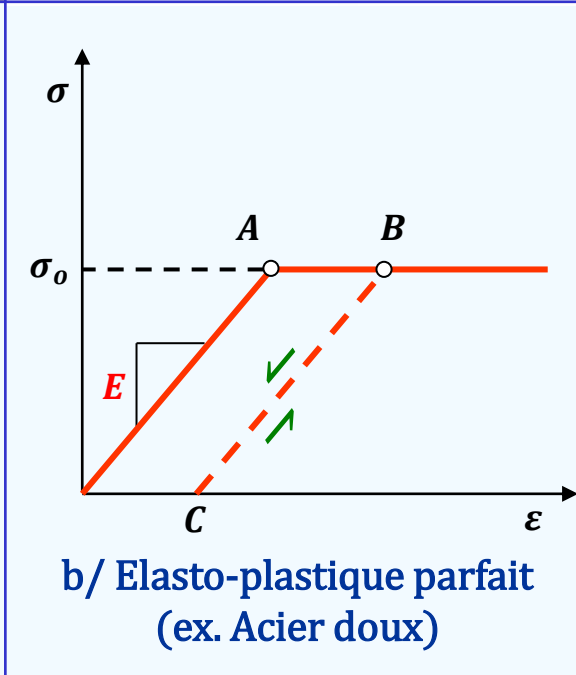
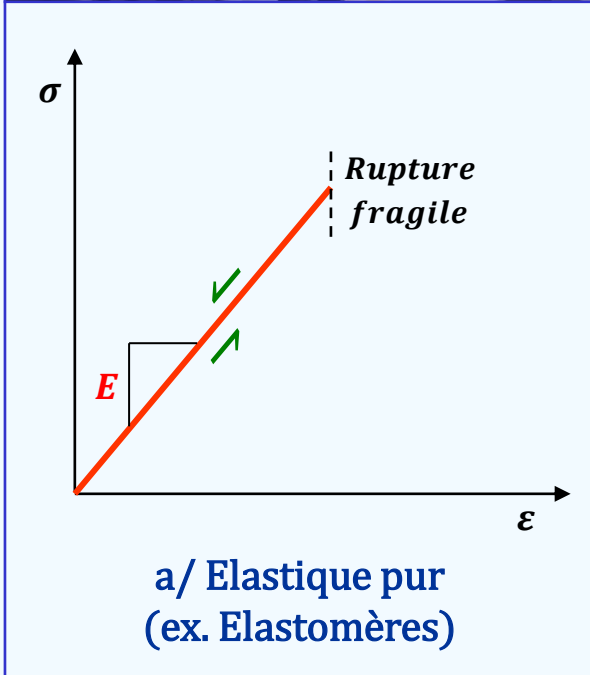
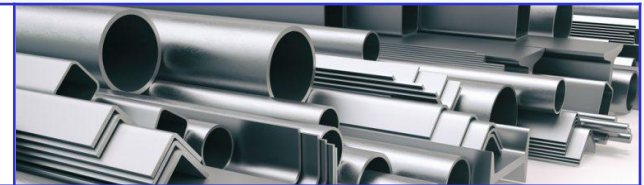
- **Exemples de modèles de comportement**





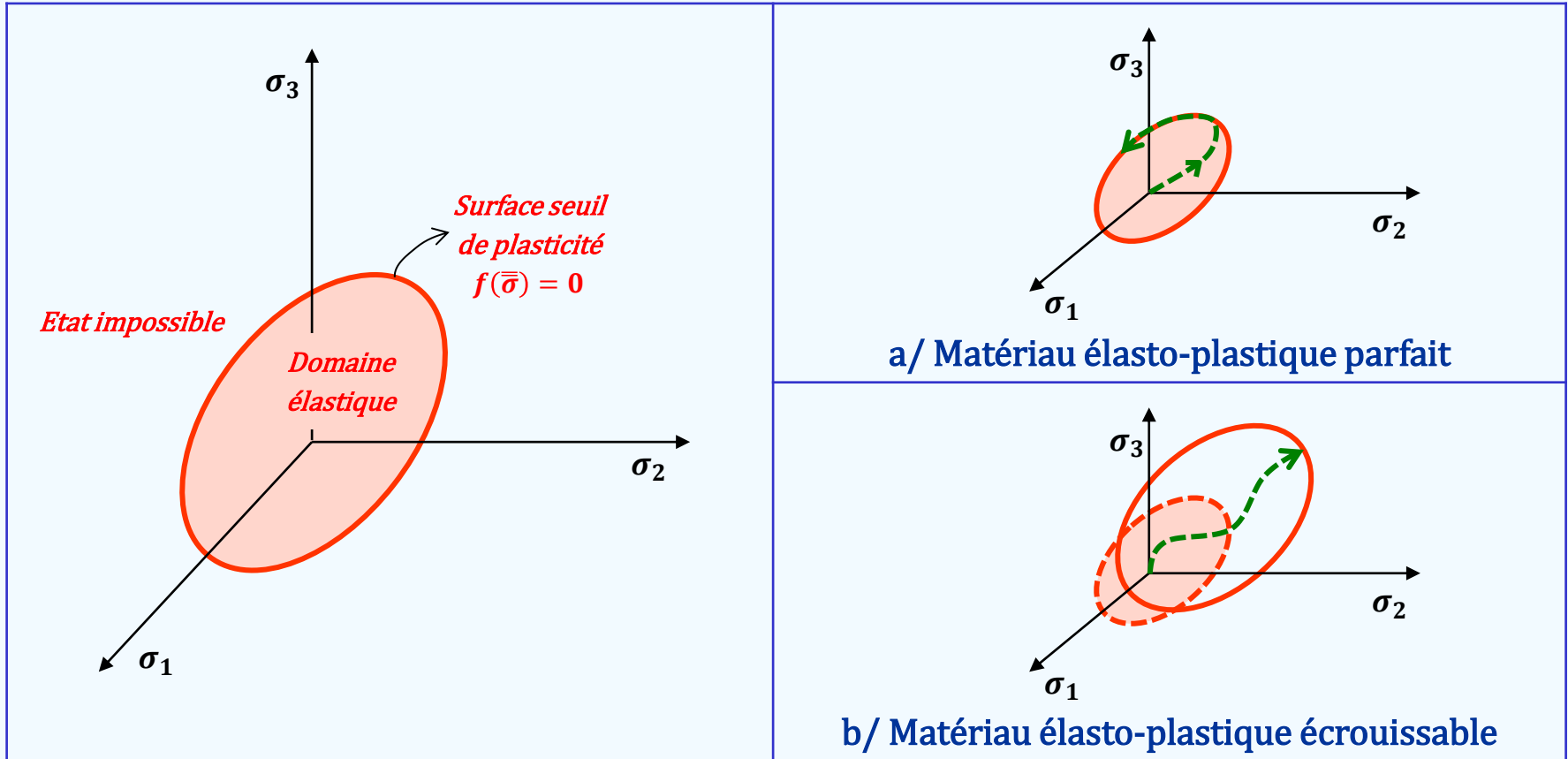
### □ Bases expérimentales

#### • Exemples de modèles de comportement



### □ Bases expérimentales

#### • Généralisation 3D



$f(\bar{\sigma}) = 0 \rightarrow$  Fonction de charge ou Seuil de plasticité

### *FONDEMENTS THÉORIQUES*



### □ Fondements théoriques

Les lois de comportement élasto-plastique sont basées sur les quatre notions fondamentales suivantes qui sont traitées dans cette 1<sup>ère</sup> Partie :

- ❖ L'apparition des *déformations élastiques et plastiques*.
- ❖ L'existence d'une *surface de charge* dans l'espace des contraintes principales.
- ❖ La notion de *loi d'écoulement plastique*.
- ❖ La notion de *loi d'écrouissage*.
- ❖ Le principe du *travail plastique maximal*.

Ces notions fondamentales permettent de traiter successivement les lois de comportement élasto-plastique suivantes :

- ❖ Lois de comportement élasto-plastique parfait (2<sup>ème</sup> Partie).
- ❖ Lois de comportement élasto-plastique écrouissable (3<sup>ème</sup> Partie).
- ❖ Lois de comportement élasto-visco-plastique (4<sup>ème</sup> Partie).

### □ Fondements théoriques

- **Relations incrémentales**

Le comportement élasto-plastique des matériaux n'étant pas linéaire, les relations entre les tenseurs de contraintes  $\bar{\sigma}$  et de déformations  $\bar{\varepsilon}$  s'écrivent en notations incrémentales et l'on parle de plasticité incrémentale, d'où les relations suivantes entre les incréments de contraintes  $d\bar{\sigma}$  et de déformations  $d\bar{\varepsilon}$  :

$$d\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}}^{ep} d\bar{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}$$

ou inversement :

$$d\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{\bar{D}}}^{ep} d\bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl}$$

où  $\bar{\bar{\bar{C}}}^{ep} = [C_{ijkl}^{ep}]$  et  $\bar{\bar{\bar{D}}}^{ep} = [D_{ijkl}^{ep}]$  désignent les tenseurs de souplesse et de rigidité lesquels dépendent de l'histoire des contraintes et des déformations.

Dans l'hypothèse des petites déformations (HPP), on peut écrire :

$$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}^e + d\bar{\varepsilon}^p \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$$



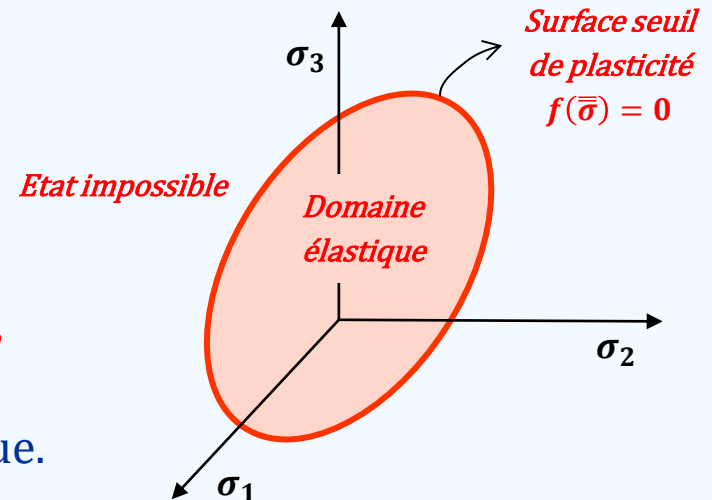
**Nota :** Cette notation incrémentale se prête bien à une programmation numérique.

### □ Fondements théoriques

- **Notion de surface de charge**

Elle est définie par le domaine convexe à l'intérieur duquel les déformations sont réversibles (*Déformations élastiques ou viscoélastiques*) et au bord duquel les déformations sont irréversibles (*Déformations plastiques ou viscoplastiques*). Cette surface, appelée fonction de charge, s'exprime à travers l'équation suivante :

$$f(\bar{\sigma}) \begin{cases} < 0 \rightarrow \text{Domaine élastique} \\ = 0 \rightarrow \text{Domaine plastique} \\ > 0 \rightarrow \text{Etat physique impossible} \end{cases}$$



Elle caractérise la frontière du domaine élastique.

**Nota :** Le seuil de plasticité est donc déterminé par le critère de plasticité :

$$f(\bar{\sigma}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\sigma_{ij}) = 0$$



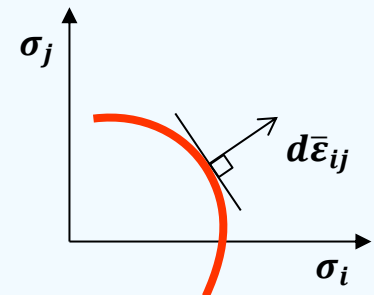
### □ Fondements théoriques

#### • **Loi d'écoulement plastique**

Lorsque l'état actuel des contraintes est situé sur la surface de charge et a tendance à sortir de cette surface, le matériau est dit en chargement. Lorsqu'il a tendance à y rester, le matériau est dit en déchargement. D'une façon mathématique :

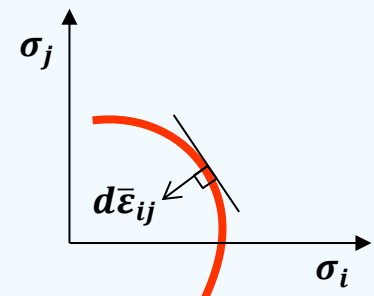
- Il y a **chargement** si :

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}; k) = 0 \\ df_k = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \end{cases} \Rightarrow d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p$$



- Il y a **déchargement** si :

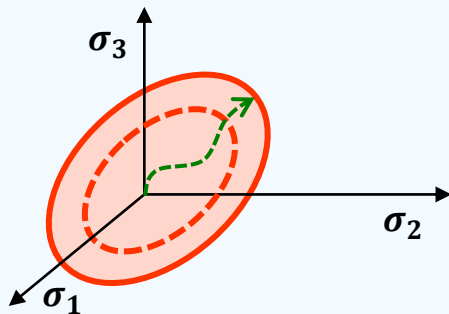
$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}; k) = 0 \\ df_k = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \end{cases} \Rightarrow d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e$$



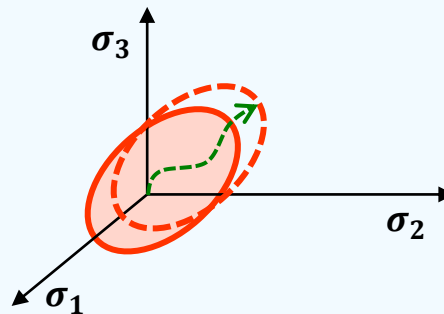
### □ Fondements théoriques

#### • **Loi d'écrouissage**

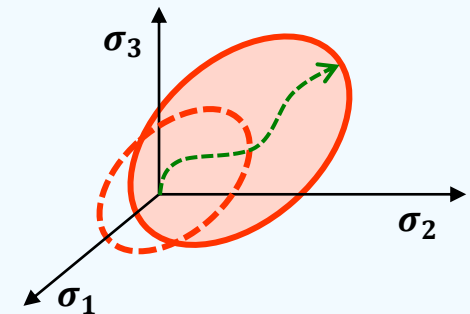
Lorsque le point de charge franchit la frontière du domaine d'élasticité initial, il l'entraîne avec lui et, en général, modifie la forme de la frontière du domaine d'élasticité actuel. On en distingue trois types :



*Ecrouissage isotrope*  
(Expansion)



*Ecrouissage cinématique*  
(Translation)



*Ecrouissage mixte*  
(Expansion + Translation)

L'écrouissage est représenté par un paramètre, noté  $k$ , qu'on introduit dans l'expression de la surface de charge écrite désormais comme suit :

$$f(\bar{\sigma} ; k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\sigma_{ij} ; k) = 0$$

Le paramètre d'écrouissage  $k$  peut être scalaire (cas de l'écrouissage isotrope) ou tensoriel (cas de l'écrouissage cinématique).

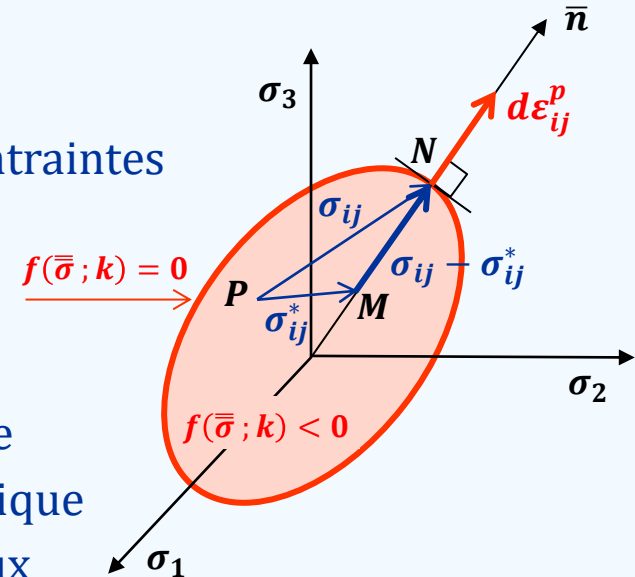
### □ Fondements théoriques

#### • **Principe de travail plastique maximal**

Il traduit la condition de normalité entre l'incrément de déformation plastique en tout point sur la frontière convexe de la surface de charge. Il correspond à l'inégalité suivante (Hill, 1950) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$

dans laquelle  $\sigma_{ij}^*$  et  $\sigma_{ij}$  désignent les tenseurs de contraintes correspondant à deux points situés, respectivement, l'un à l'intérieur de la surface de charge (point M) et l'autre sur la frontière de celle-ci (point N).



⇒ Un matériau est dit standard s'il obéit au principe du travail plastique maximal : son potentiel plastique est dit associé. Ceci est vrai pour le cas des métaux et autres matériaux dont le critère de plasticité ne dépend pas de la contrainte moyenne. Dans les autres cas, notamment les sols et les roches, le matériau est dit non-standard.



### □ Fondements théoriques

- **Matériau standard : Loi d'écoulement associée**

Dans le cas d'un matériau standard, en un point régulier de la surface de charge, la déformation plastique est de la forme :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda > 0 - \text{multiplicateur de plasticité})$$

- **Matériau non-standard : Loi d'écoulement non associée**

Dans le cas d'un matériau non-standard, on introduit un potentiel plastique  $g(\bar{\sigma} ; k)$  différent de la fonction de charge  $f(\bar{\sigma} ; k)$  telle que la loi d'écoulement plastique devienne :

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$



**Nota :** - Le potentiel plastique  $g(\bar{\sigma} ; k)$  définit la direction des incréments de déformation plastique.

- Le multiplicateur de plasticité est défini par  $d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}$  où  $H$  désigne le module d'écrouissage (ou module plastique).



### □ Fondements théoriques

- **Module d'écrouissage**

Il est défini par la condition de consistance qui assure que les états de contraintes demeurent sur la surface de charge au cours de son évolution. Celle-ci s'écrit :

$$df(\sigma_{ij}; k) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0$$

Le paramètre d'écrouissage  $k$  est une fonction de la déformation plastique  $\varepsilon_{ij}^p$  qui peut s'écrire, par exemple, sous la forme :

$$k = \kappa(\eta) \quad | \quad \eta = \eta(\varepsilon_{ij}^p) \quad \Rightarrow \quad dk = \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p$$

Les relations précédentes permettent d'établir l'expression du module d'écrouissage (ou module plastique), noté  $H(\sigma_{ij}; k)$ , tel que :

$$H d\lambda = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (\text{déf.}) \quad \Rightarrow \quad H d\lambda = -\frac{\partial f}{\partial k} dk \quad | \quad dk = \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p$$

$$\text{Sachant que : } d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

### □ Fondements théoriques

- **Multiplicateur de plasticité**

Les incréments de contraintes  $\sigma_{ij}$  peuvent s'exprimer sous la forme :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}\right)$$

⇒

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}} = Hd\lambda$$

D'où l'expression du multiplicateur de plasticité :

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}d\varepsilon_{kl}}{H + \frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}C_{ijkl}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{kl}}}$$



**Nota :** Pour un matériau élasto-plastique parfait :  $H = 0$ .

### □ Fondements théoriques

- **Tenseur d'élasto-plasticité**

Sachant que :  $d\sigma_{ij} = C_{ijkl}d\varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl}(d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}\left(d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}\right)$

$$\Rightarrow d\sigma_{ij} = \left[ C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right] d\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl}$$

D'où le tenseur de souplesse en élasto-plasticité :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rskl}}{H + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}}$$

Inversement, on peut écrire :

$$d\varepsilon_{ij} = \left[ D_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] d\sigma_{kl}$$

D'où le tenseur de rigidité en élasto-plasticité :

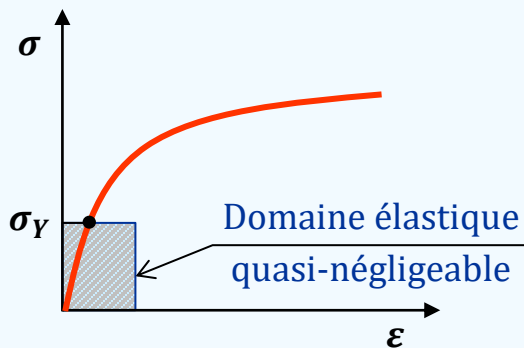
$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

### *APPLICATION AU CALCUL PLASTIQUE DES STRUCTURES*

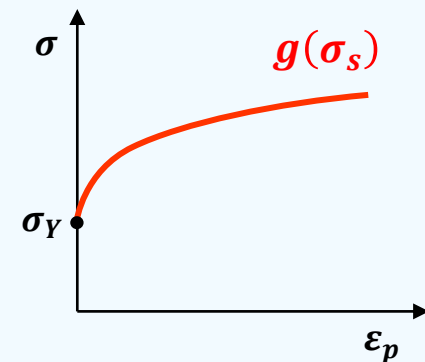
### □ Application au calcul plastique des structures

- **Loi d'écrouissage**

L'expérience montre qu'en plasticité unidimensionnelle, les matériaux dits écrouissables sont caractérisés par des courbes de déformation qui peuvent être schématisées comme suit :



**Expérience**



**Loi d'écrouissage :  $\varepsilon_p = g(\sigma_s)$**

telles que :  $\sigma_Y$  - limite d'élasticité  
 $\sigma_s$  - seuil de plasticité  
 $\varepsilon_p$  - déformation plastique

**Nota :** Pour les matériaux élasto-plastiques parfaits :  $\sigma_Y \equiv \sigma_s$

### □ Application au calcul plastique des structures

#### • **Loi d'écrouissage**

$$\text{Si } \sigma_s > \sigma_Y \Rightarrow \varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{La loi d'écrouissage s'écrit : } \varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y}$$

tels que :  $K_Y$  - coefficient de résistance plastique

$M_Y$  - exposant d'écrouissage

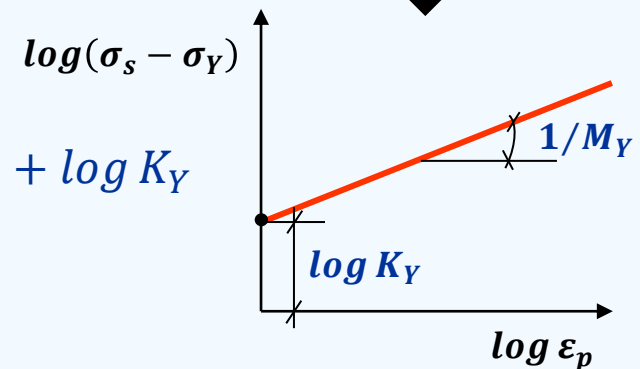
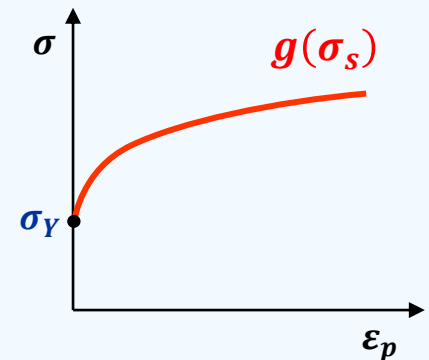
$$\langle X \rangle = X \text{ si } X > 0 \text{ sinon } X = 0$$

Identification :

$$\varepsilon_p = \left\langle \frac{\sigma_s - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y} \Rightarrow \log(\sigma_s - \sigma_Y) = \frac{1}{M_Y} \log \varepsilon_p + \log K_Y$$

D'où :  $M_Y \equiv$  et  $K_Y \equiv$

Valeurs indicatives :  $2 < M_Y < 50$  (métaux)



**Nota :** Pour les calculs de mise en forme, la loi d'écrouissage s'écrit :  $\varepsilon_p = \left( \frac{\sigma_s}{K} \right)^M$



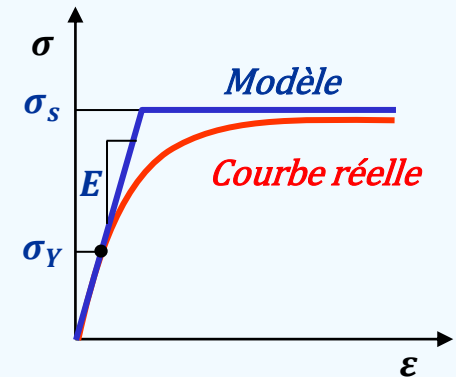
### □ Application au calcul plastique des structures

#### • **Loi d'écoulement plastique**

##### *a/ Solides élasto-plastiques parfaits*

$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ |\sigma| = \sigma_s \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \end{cases}$$

↪ arbitraire

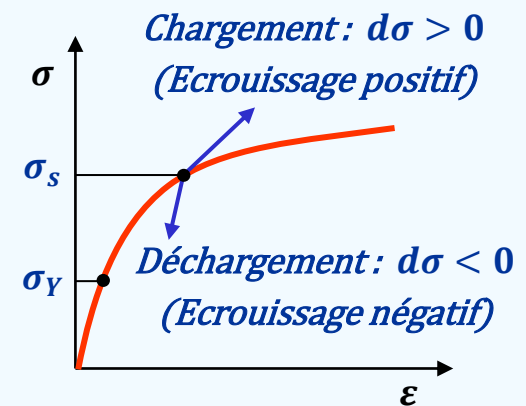


##### *b/ Solides élasto-plastiques écrouissables*

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon_p$$

Sachant que :  $\varepsilon_p = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y}$

Alors : si  $\sigma = \sigma_s \Rightarrow d\varepsilon_p = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_Y}{K_Y} \right\rangle^{M_Y - 1} \frac{M_Y}{K_Y} \langle d\sigma \rangle$



***Merci de votre attention***

***Fin de la 1<sup>ère</sup> Partie***

### EXERCICES

**Ex. 1** Pour les besoins de calcul de mise en forme, des essais d'écrouissage effectués sur un matériau métallique ont donné les valeurs résumées dans l'encadré ci-après.

|                                           |        |        |        |
|-------------------------------------------|--------|--------|--------|
| Déformation plastique $\varepsilon_p$ (%) | 2.5    | 5      | 10     |
| Contrainte d'écrouissage $\sigma_s$ (MPa) | 159.05 | 189.15 | 224.94 |

Ecrire la loi d'écrouissage en plasticité unidimensionnelle correspondante  $\sigma_s = f(\varepsilon_p)$ , puis déterminer les paramètres  $M$  et  $K$  caractérisant ce matériau.

---