

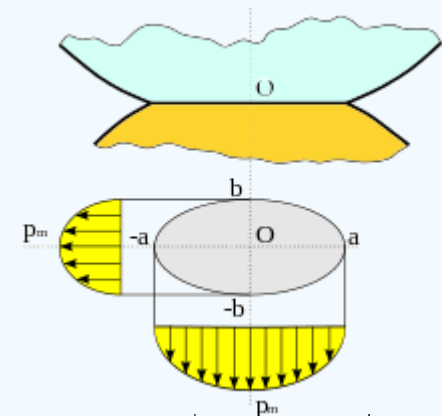
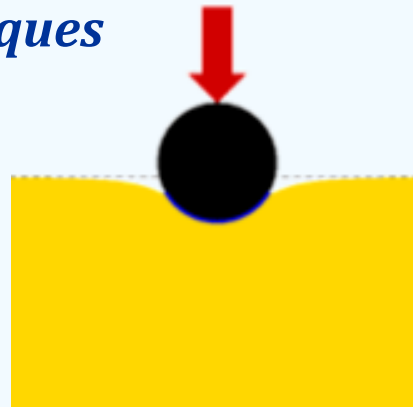
Chapitre Deux

Lois de comportement élastique

2ème Partie

Comportement élastique non-linéaire

- ❑ *Comportement élastique des sols et théorie de contact de Hertz*
- ❑ *Comportement élastique non-linéaire des sols et essais de laboratoire*
- ❑ *Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire*
- ❑ *Application aux modèles hyperboliques*
- ❑ *Relations de comportement*
- ❑ *Exercices*



COMPORTEMENT ÉLASTIQUE DES SOLS ET THÉORIE DE CONTACT DE HERTZ

□ Comportement élastique des sols et théorie de contact de Hertz

La description du comportement élastique des sols a pour origine la théorie de contact de Hertz (1881) entre solides élastiques linéaires.

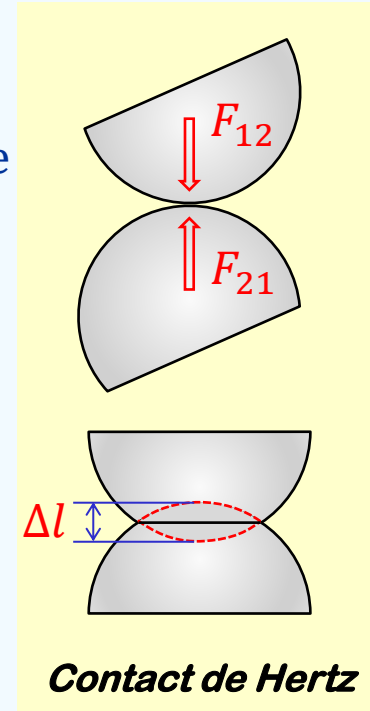
- **Théorie de contact de Hertz (1881)**

Lorsqu'une sphère solide percute une surface élastique, la surface de contact augmente. Le déplacement relatif est proportionnel à la contrainte moyenne élevée à la puissance deux tiers :

$$\Delta l \sim (\sigma_m)^{2/3}$$

Le module de compressibilité volumique d'un assemblage de sphères élastiques linéaires en contact est proportionnel à la racine cubique de la contrainte moyenne résultante :

$$K \sim (\sigma_m)^{1/3}$$



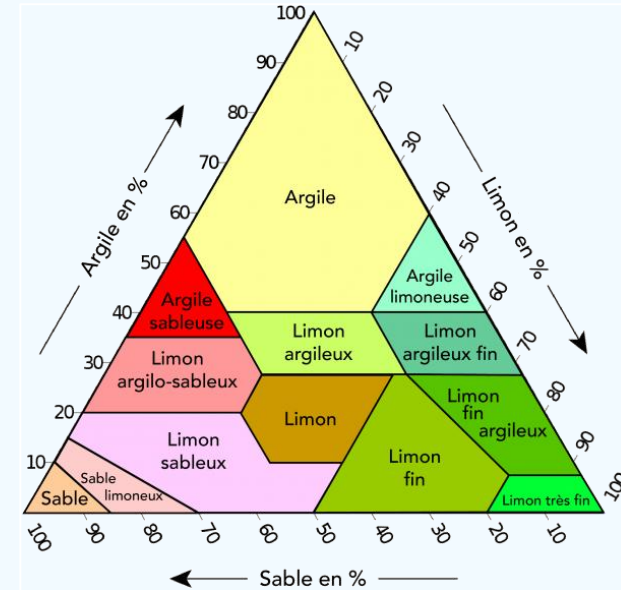
Nota : Si les deux sphères sont soumises à une force tangentielle, la contrainte tangentielle sur le pourtour de la surface de contact devenait infinie dès lors qu'on n'admettait aucun glissement.



□ Comportement élastique des sols et théorie de contact de Hertz

- **Cas des sols : Forme & Texture**

Les grains constituant les sols ne sont pas des sphères parfaites, mais plutôt des particules anguleuses pour les sables et sous forme de plaquettes pour les argiles.

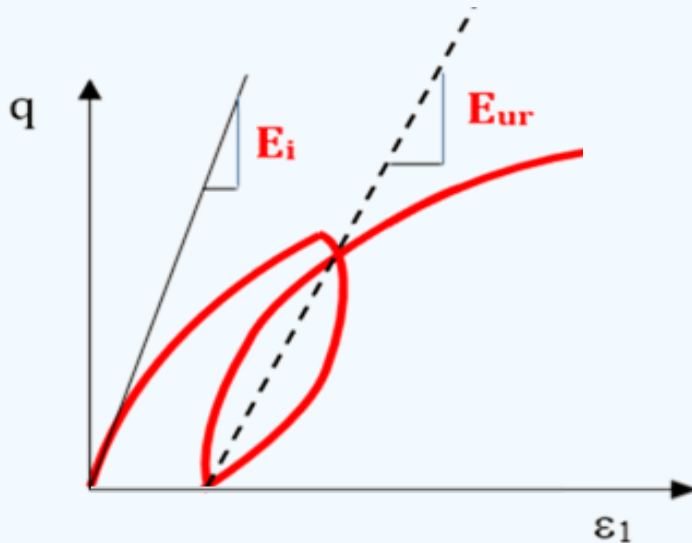


La théorie de contact de Hertz (1881) peut toutefois être utilisée pour caractériser le comportement mécanique des sols moyennant adaptation selon la forme et la texture des grains qui les composent.

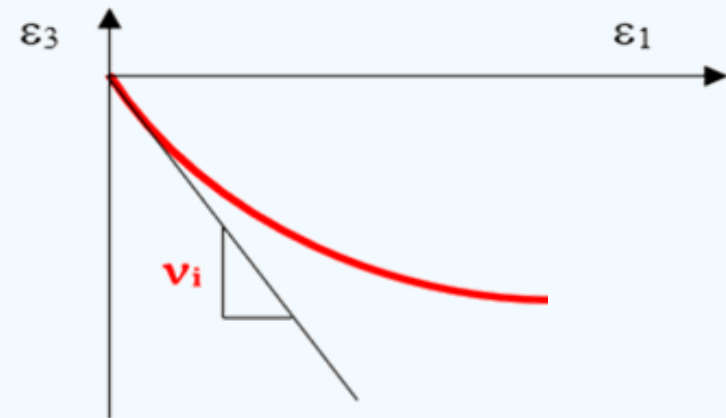
COMPORTEMENT ÉLASTIQUE NON-LINÉAIRE ET ESSAIS DE LABORATOIRE

□ Comportement élastique non-linéaire et essais de laboratoire

Les paramètres de comportement élastique des sols (module de Young tangent initial E_i , module de déchargement-rechargement E_{ur} et coefficient de Poisson initial ν_i) peuvent être identifiés à partir des essais courants de laboratoire sur les courbes ci-après.



Modules de déformation



Coefficient de Poisson

Cependant, cette approche est peu fiable et souvent entachée d'erreurs dues au comportement non linéaire des sols, d'une part, et au peu de mesures disponibles au début des essais, d'autre part.

□ Comportement élastique non-linéaire et essais de laboratoire

La théorie de contact de Hertz permet d'établir les relations suivantes pour les paramètres de comportement des sols qu'on peut identifier à partir des essais courants de laboratoire.

- **Module de Young tangent initial**

Le module de Young tangent initial E_i s'exprime en fonction de la contrainte de confinement σ_3 par la relation suivante :

$$E_i = E_o \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (\text{Janbu, 1963})$$

avec $E_o = 50$ à 500 et $n = 0.35$ à 0.55 (paramètres expérimentaux) et p_a une pression de référence prise égale à la pression atmosphérique.

- **Module de déchargement-rechargement**

Le module de déchargement-rechargement E_{ur} est défini par la relation suivante :

$$E_{ur} = (E_{ur})_o \cdot p_a \cdot \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (\text{Wong et Duncan, 1974})$$

avec $(E_{ur})_o \approx E_o$ à $3E_o$ et $m \approx n$.

□ Comportement élastique non-linéaire et essais de laboratoire

- **Module de compressibilité volumique**

Il est admis que le module de compressibilité volumique K des sols peut être exprimé en fonction de la pression moyenne p appliquée par la relation suivante :

$$K = A \cdot p_a \cdot \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (\text{Janbu, 1963})$$

où p_a désigne la pression atmosphérique, A une constante et l'exposant n compris entre $\frac{1}{3}$ et 2 ($n \approx 0.4$ pour les sables et $n \approx 0.5$ pour les argiles).

- **Module de cisaillement**

Il paraît que le module de cisaillement G des sols peut aussi être exprimé comme fonction puissance de la pression moyenne p par la relation suivante :

$$G = B \cdot p_a \cdot \left(\frac{p}{p_a} \right)^m \quad (\text{Wroth et Houlsby, 1985})$$

où B désigne une constante et l'exposant m un paramètre similaire à n .

Si le coefficient de Poisson ν est constant, alors $m = n$.

❑ Comportement élastique non-linéaire et essais de laboratoire

- **Coefficient de Poisson tangent initial**

Le coefficient de Poisson tangent initial ν_i peut être exprimé en fonction de la contrainte de confinement σ_3 par la relation suivante :

$$\nu_i = A - B \cdot \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right) \quad (\text{Janbu, 1963})$$

où A et B désignent des paramètres expérimentaux.



Remarque : Cette relation est en contradiction avec les résultats théoriques de Mindlin (1953) qui considère que le coefficient de Poisson ν est constant.

- **Autres expressions mathématiques pour E et ν (i.e. K et G)**

L'expérience montre que le module de Young E et le coefficient de Poisson ν dépendent de la contrainte de confinement σ_3 . En conséquence :

$$E = \left. \frac{\Delta q}{\Delta \varepsilon_1} \right|_{\sigma_1 = \sigma_3} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{2} \left(1 - \left. \frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta \varepsilon_1} \right|_{\sigma_1 = \sigma_3} \right)$$

où $q = \sigma_1 - \sigma_3$ désigne le déviateur de contraintes, ε_1 la déformation axiale et ε_v la déformation volumique.

❑ Comportement élastique non-linéaire et essais de laboratoire

Les variations du module de Young E et du coefficient de Poisson ν en fonction de la contrainte de confinement σ_3 sont généralement des types ci-après, où a et b sont des constantes réelles positives.

$E(\sigma_3)$	$\nu(\sigma_3)$
E_o	ν_o
$E_o + a\sigma_3$	$\nu_o + a\sigma_3$
$E_o(\sigma_3)^a$	$\nu_o(\sigma_3)^a$
$E_o(1 + \sigma_3)^a$	$\nu_o(1 + \sigma_3)^a$
$E_o(1 + b\sigma_3)^a$	$\nu_o(1 + b\sigma_3)^a$
$E_o - (E_1 - E_o)e^{-a\sigma_3}$	$\nu_o - (\nu_1 - \nu_o)e^{-a\sigma_3}$
$(E_o + E_1a\sigma_3)/(1 + a\sigma_3)$	$(\nu_o + \nu_1a\sigma_3)/(1 + a\sigma_3)$
$E_o - (E_1 - E_o)th(a\sigma_3)$	$\nu_o - (\nu_1 - \nu_o)th(a\sigma_3)$



Nota : Il faut autant d'essais triaxiaux qu'il y a de paramètres à déterminer.

FORMULATION DES LOIS DE COMPORTEMENT ÉLASTIQUE NON-LINÉAIRE

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

Il existe deux formulations des lois de comportement élastique non-linéaire, l'une de type hypo-élastique et l'autre de type hyper-élastique.

- **Formulation de type hypo-élastique**

Cette formulation est utilisée pour décrire le comportement des matériaux lorsque l'état des contraintes dépend de l'état actuel des déformations et du chemin de chargement.

Cette approche consiste à considérer que le taux d'accroissement de contrainte dépend non seulement de l'incrément de déformation, mais aussi de la contrainte elle-même. Soit donc :

$$d\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) : d\bar{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{mn}, \varepsilon_{mn}) d\varepsilon_{kl}$$

Et inversement :

$$d\bar{\varepsilon} = \bar{\bar{\bar{D}}}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}) : d\bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}(\sigma_{mn}, \varepsilon_{mn}) d\sigma_{kl}$$

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

Pour la formulation du comportement de type hypo-élastique, on distingue entre autres les modèles suivants :

Modèle	Expression	Paramètres
Ramberg et Osgood (1943)	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$	E, k, n
Hansen (1963)	$\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon}}$	a, b
Kondner (1963)	$\sigma = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon}$	a, b
Janbu (1963)	$E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$	K_h, n
Desai et Christian (1977)	$G_t = G_i \left[1 - \frac{R_f(1-\sin(\varphi))(\sigma_1-\sigma_3)}{2(c \cdot \cos(\varphi) + \sigma_3 \cdot \sin(\varphi))} \right]^2$ et $\nu = cste$	$\nu, c, \varphi, R_f, G_i$
Zytinski et al. (1978)	$K = \frac{1+e_o}{\kappa} p$ et $G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K$	e_o, κ, ν
Pastor et al. (1990)	$K = \frac{1+e_o}{\kappa} p$ et $G = G_o \frac{p}{p_o}$	e_o, κ, p_o, G_o

Exemples de modèles de comportement de type hypo-élastique

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

- **Formulation de type hyper-élastique**

On introduit l'énergie potentielle $W(\varepsilon_{ij})$ pour formuler les lois de comportement de type hyper-élastique. Pour un matériau élastique isotrope, on peut écrire:

$$W = W(E_1, E_2, E_3)$$

avec :

- $E_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
- $E_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$
- $E_3 = |\bar{\varepsilon}| = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$

où $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ désignent les déformations principales respectivement majeure, intermédiaire et mineure.

Comme : $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_1} \frac{\partial E_1}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial E_2} \frac{\partial E_2}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial E_3} \frac{\partial E_3}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

Inversement, on peut introduire l'énergie complémentaire $\Omega(\sigma_{ij})$ et l'on peut écrire:

$$\Omega = \Omega(I_1, I_2, I_3)$$

avec :

- $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
- $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$
- $I_3 = |\bar{\sigma}| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ désignent les contraintes principales respectivement majeure, intermédiaire et mineure.

Comme : $\epsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}}$

$$\Rightarrow \epsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Omega}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \sigma_{ij}}$$

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

D'où, l'on peut écrire :

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}}(\bar{\epsilon}) : \bar{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{mn}) \epsilon_{kl}$$

ou inversement :

$$\bar{\epsilon} = \bar{\bar{\bar{D}}}(\bar{\sigma}) : \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{ij} = D_{ijkl}(\sigma_{mn}) \sigma_{kl}$$

où $\bar{\bar{\bar{C}}}(\bar{\epsilon}) = [C_{ijkl}(\epsilon_{mn})]$ désigne le tenseur de souplesse et $\bar{\bar{\bar{D}}}(\bar{\sigma}) = [D_{ijkl}(\sigma_{mn})]$ le tenseur de compliance qui dépendent respectivement de l'état actuel des déformations et des contraintes.



Nota : Les paramètres constitutifs des tenseurs de souplesse et de compliance doivent satisfaire aux principes de la thermodynamique et ne pas produire de dissipation d'énergie au cours des cycles de chargement-déchargement. Dans ces conditions, le modèle obtenu est isotrope, réversible et indépendant du trajet de chargement.

□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

Exemple : Le module de Young E peut être remplacé par une fonction des invariants de contraintes $f_E(I_1, I_2, I_3)$ tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{f_E(I_1, I_2, I_3)} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{f_E(I_1, I_2, I_3)} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

De même, le coefficient de Poisson ν peut être remplacé par une fonction des invariants de contraintes $f_\nu(I_1, I_2, I_3)$ tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+f_\nu(I_1, I_2, I_3)}{E} \sigma_{ij} - \frac{f_\nu(I_1, I_2, I_3)}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

ou bien la combinaison des deux :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+f_\nu(I_1, I_2, I_3)}{f_E(I_1, I_2, I_3)} \sigma_{ij} - \frac{f_\nu(I_1, I_2, I_3)}{f_E(I_1, I_2, I_3)} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$



Nota : On peut aussi construire des modèles de comportement de type hyper-élastique en remplaçant les modules K et G par des fonctions des invariants E_1 , E_2 et E_3 .



□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

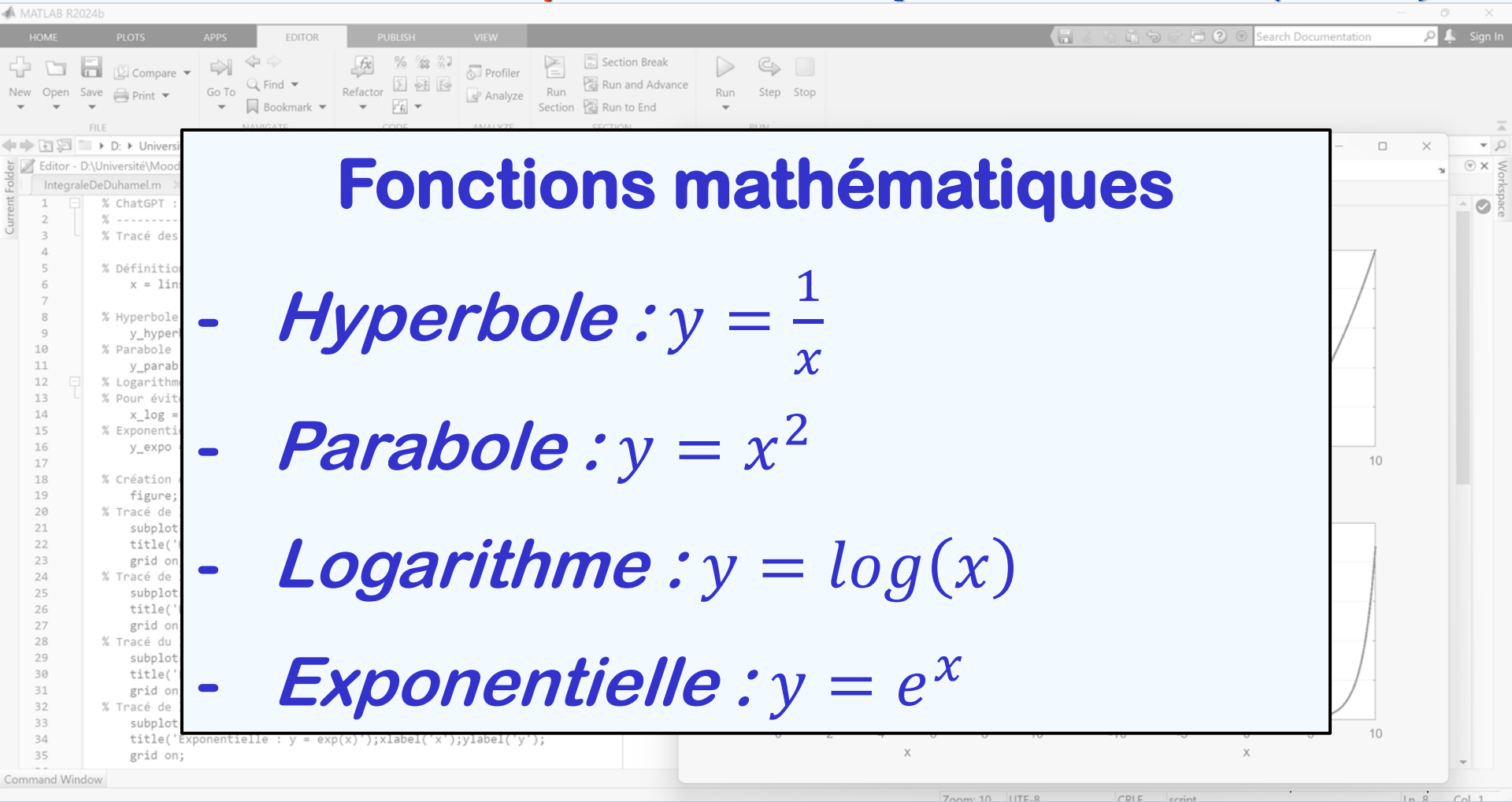
Pour la formulation du comportement de type hyper-élastique, on distingue entre autres les modèles suivants :

Modèle	Expression	Paramètres
Boyce (1980)	$K = \frac{K_1 p^{1-n}}{1 - (1-n) \frac{K_1}{6G_1} \left(\frac{q}{p}\right)^2} \quad \text{et} \quad G = G_1 p^{1-n}$	K_1, G_1, n
Loret (1980)	$E = E_o p_a \left[\left(\frac{p}{p_a}\right)^2 \left(1 + \frac{K}{3G} \left(\frac{q}{p}\right)^2\right) \right]^{\frac{1-n}{2}} \quad \text{et} \quad \nu = cste$	E_o, ν, n
Lade et Nelson (1987)	$E = M p_a \left[\left(\frac{I_1}{p_a}\right)^2 + 6 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right) \frac{J_2}{p_a^2} \right]^\lambda \quad \text{et} \quad \nu = cste$	ν, M, λ, p_a
Molenkamp (1988)	$K = \frac{1}{3} \frac{p_a}{A p} \left(\frac{I_1}{\sqrt{3} p_a}\right)^{1-P} \quad \text{et} \quad G = \frac{R p_a}{3 A p} \left(\frac{I_1}{\sqrt{3} p_a}\right)^{1-P}$	A, P, R
Prevost (1990)	$K = K_o \left(\frac{p}{p_a}\right)^n \quad \text{et} \quad G = G_o \left(\frac{p}{p_a}\right)^n$	K_o, G_o, n

Exemples de modèles de comportement de type hyper-élastique

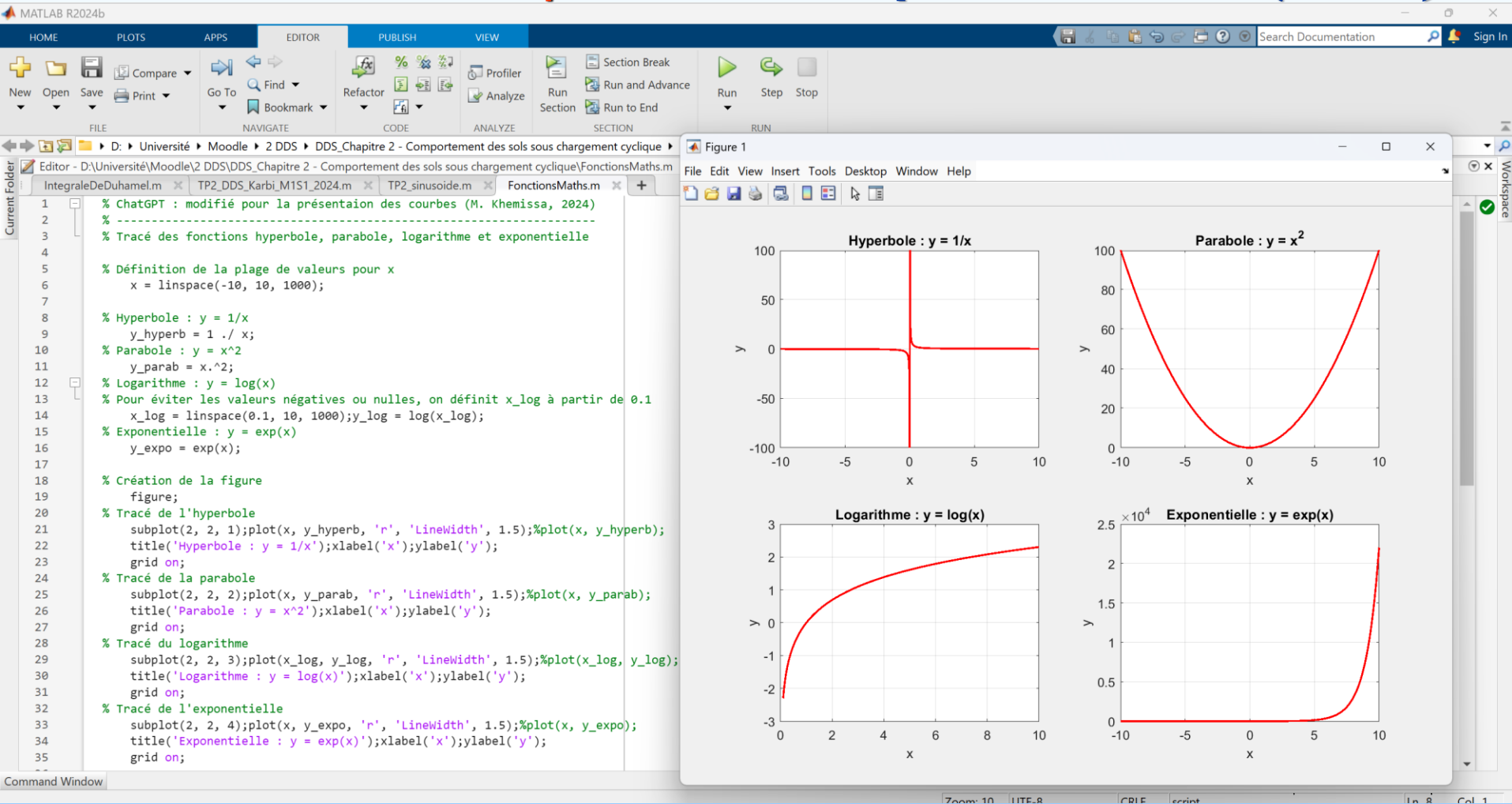
□ Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

- **Fonctions mathématiques de base** : Exemple de tracé via MatLab (*ChatGPT*)



Formulation des lois de comportement élastique non-linéaire

- Fonctions math atiques de base** : Exemple de tracé via MatLab (*ChatGPT*)



APPLICATION AUX MODÈLES HYPERBOLIQUES

□ Application aux modèles hyperboliques

Pour l'analyse du comportement élastique non-linéaire des sols, certains modèles sont mathématiquement basés sur une représentation de la relation contrainte-déformation à partir d'une courbe hyperbolique ou parabolique. Ce genre de loi de comportement est défini en tout point matériel par un module de Young tangent E_t et un coefficient de Poisson tangent ν_t .

- **Considérations générales**

La relation incrémentale de comportement s'écrit alors sous la forme suivante :

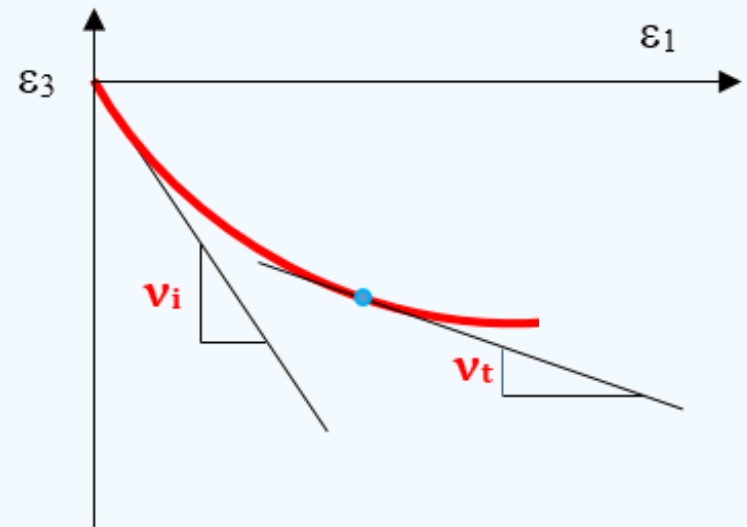
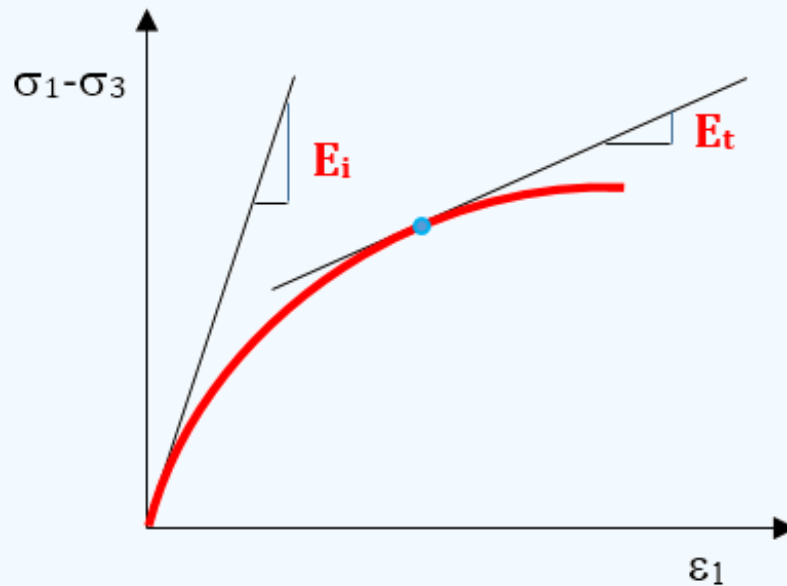
$$d\bar{\varepsilon} = -\frac{\nu_t}{E_t} Tr(d\bar{\sigma})\bar{\varepsilon} + \frac{1+\nu_t}{E_t} d\bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad d\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu_t}{E_t} d\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1+\nu_t}{E_t} d\sigma_{ij}$$

Pour un essai triaxial classique, il vient de suite :

$$d(\sigma_1 - \sigma_3) = E_t d\varepsilon_1 \quad ; \quad d\varepsilon_3 = -\nu_t d\varepsilon_1 \quad ; \quad d\varepsilon_v = (1 - 2\nu_t) d\varepsilon_1$$

L'identification des paramètres E_t et ν_t s'effectue par calage successif sur les courbes expérimentales. On obtient ainsi une suite de valeurs selon le niveau de contraintes.

□ Application aux modèles hyperboliques



Une autre façon simple de procéder consiste à approximer ces courbes par des fonctions mathématiques. En effet, les courbes expérimentales présentent des allures d'**hyperbole** ou de **parabole**, de **fonction logarithmique** ou **exponentielle**.

La loi hyperbolique de Kondner (1963) est à la base des modèles, dits **modèles hyperboliques**, dont le plus connu est le modèle quasi-linéaire de Duncan et Chang (1970) et ses versions ultérieures.

□ Application aux modèles hyperboliques

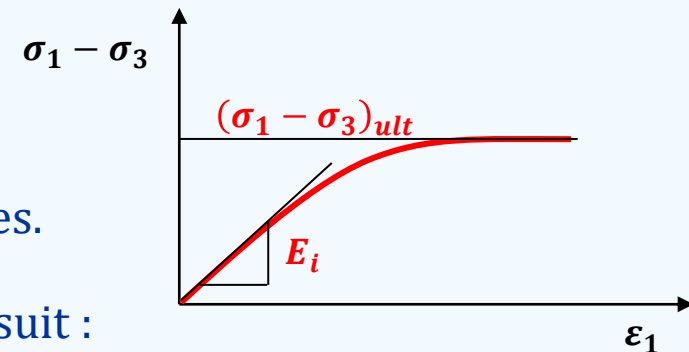
- **Loi hyperbolique de Kondner (1963)**

La courbe de cisaillement triaxial $(\sigma_1 - \sigma_3, \varepsilon_1)$ est approximée par l'hyperbole d'équation :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \quad (\text{Kondner, 1963})$$

où a et b désignent des constantes expérimentales.

Ces constantes se déterminent aisément comme suit :



- $E_i = \left. \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \right) \right|_{\varepsilon_1=0} = \left. \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \right|_{\varepsilon_1=0} = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow E_i = \frac{1}{a} \quad (\text{Module de Young tangent initial}) \Rightarrow a = \frac{1}{E_i}$$

- $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \right) = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{a}{\varepsilon_1} + b} \right) = \frac{1}{b}$

$$\Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{1}{b} \quad (\text{Déviateur de contraintes ultime}) \Rightarrow b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$$

□ Application aux modèles hyperboliques

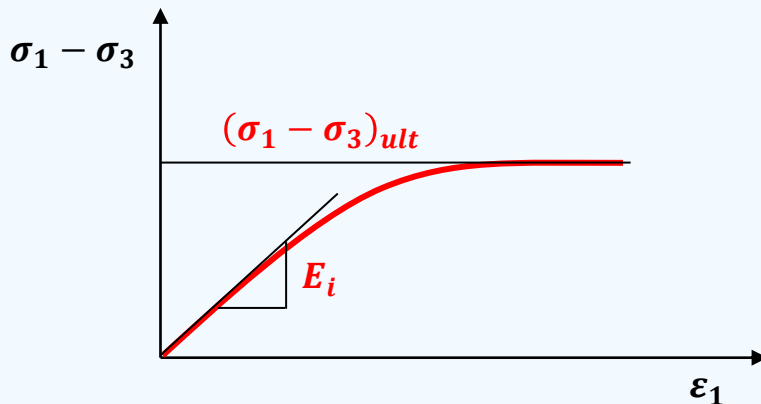
- **Loi hyperbolique de Kondner (1963)**

Soit donc :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}}$$

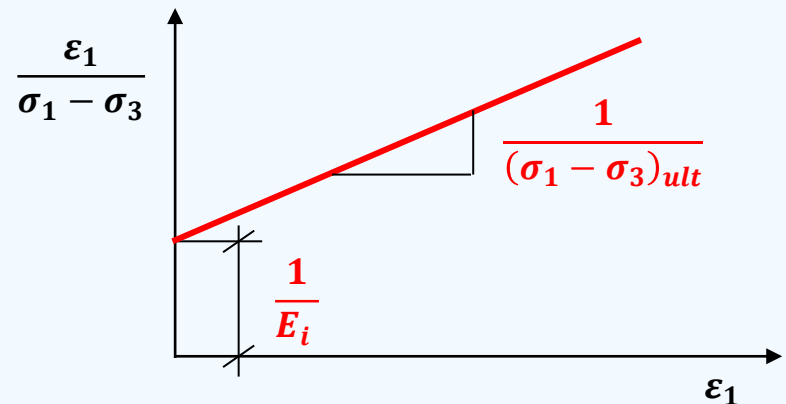
⇒

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} + \frac{1}{E_i}$$



Courbe de cisaillement

⇒



Courbe transformée

- **Modèles dérivés :** Duncan et Chang (1970), Kulhawy et Duncan (1972), Duncan et al. (1980).

□ Application aux modèles hyperboliques

- **Modèle de Duncan et Chang (1970)**

Sachant que :

$$E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{d}{d\varepsilon_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \right) = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2}$$

et que :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b\varepsilon_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{a \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{1 - b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

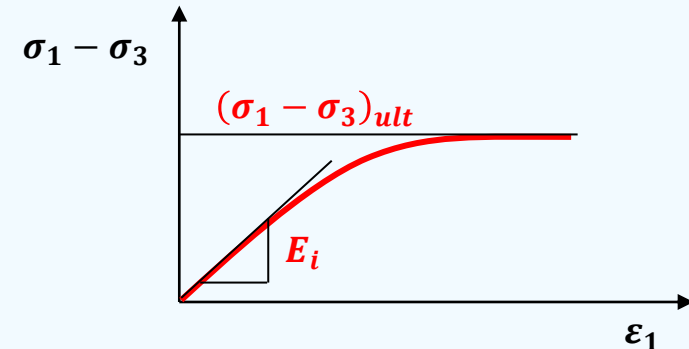
Soit alors :

$$E_t = \frac{a}{\left[a + b \frac{a \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{1 - b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)} \right]^2} = \frac{1}{a} [1 - b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)]^2$$

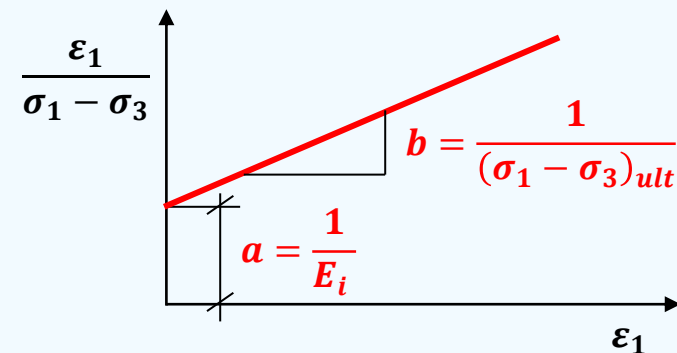
$$\text{D'où : } E_t = E_i \left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \right]^2$$

$$\text{tel que : } E_i = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (\text{Janbu, 1963})$$

avec p_a (Pression de référence), K_h et n (Constantes expérimentales).



Courbe de cisaillement



Courbe transformée

□ Application aux modèles hyperboliques

- **Modèle de Duncan et Chang (1970)**

Si l'on pose :

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \quad | \quad 0.5 \leq R_f < 1 \quad \Rightarrow \quad (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}}{R_f}$$

où $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ désigne le déviateur de contraintes à la rupture défini par le critère de rupture de type Mohr-Coulomb :

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin(\varphi) - 2c \cdot \cos(\varphi) \leq 0$$

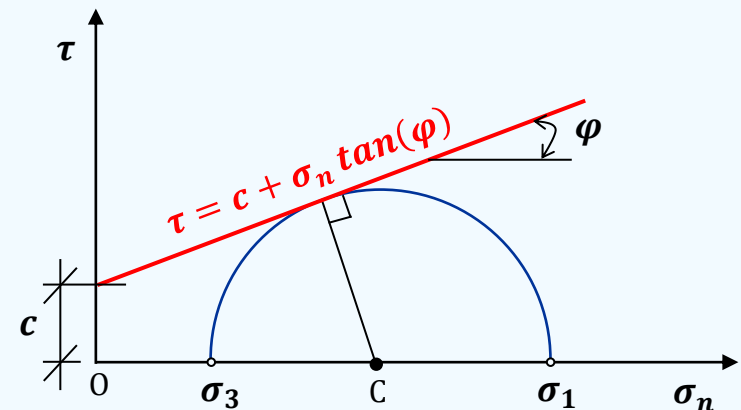
où c et φ désignent la cohésion et l'angle de frottement interne du sol.

$$\Rightarrow \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{2c \cdot \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)}{1 - \sin \varphi}$$

$$\Rightarrow \quad (\sigma_1 - \sigma_3)_{rup} = \frac{2c \cdot \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}$$

Soit donc :

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{2c \cdot \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)}{R_f(1 - \sin(\varphi))}$$



□ Application aux modèles hyperboliques

- **Modèle de Duncan et Chang (1970)**

On obtient finalement l'expression du module de Young tangent :

$$E_t = K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f(1-\sin(\varphi))(\sigma_1-\sigma_3)}{2c \cdot \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} \right]^2$$

Dans le cas d'un déchargement-rechargement, le module de Young correspondant peut se mettre sous la forme :

$$E_{ur} = K_{ur} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m$$

où K_{ur} et m désignent deux constantes expérimentales.

Remarque : $K_h \approx K_{ur}$ et $m \approx n$

Ainsi, le modèle de Duncan et Chang (1970) est caractérisé par 8 paramètres :

$K_h, n, K_{ur}, m, R_f, c, \varphi$ et p_a

□ Application aux modèles hyperboliques

- **Modèle de Kulhawy et Duncan (1972)**

D'une façon similaire, le coefficient de Poisson tangent ν_t peut être déterminé par approximation hyperbolique de la courbe $(\varepsilon_1, -\varepsilon_3)$.

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_3}{c-d \cdot \varepsilon_3} \Rightarrow \varepsilon_3 = -\frac{c \cdot \varepsilon_1}{1-d \cdot \varepsilon_1}$$

où c et d désignent des constantes expérimentales.

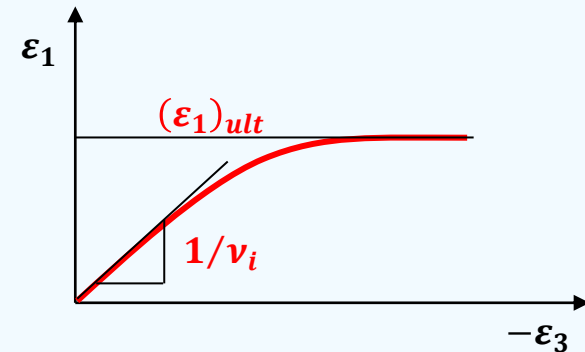
L'expression de ν_t se déduit par dérivation :

$$\nu_t = -\frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{c}{(1-d \cdot \varepsilon_1)^2}$$

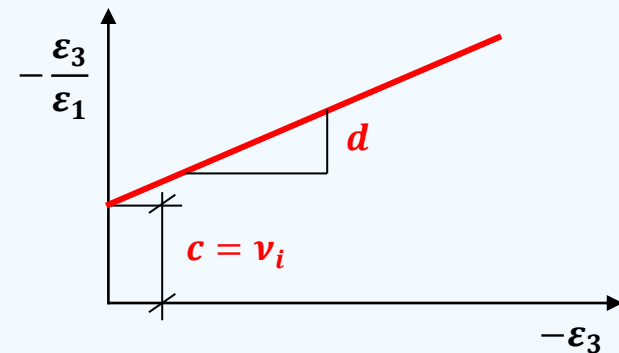
Si l'on fait apparaître les contraintes σ_1 et σ_3 :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a+b\varepsilon_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{a \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{1-b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}$$

tels que $a = \frac{1}{E_i}$, $b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$ et $c = \nu_i = \nu_t|_{\varepsilon_1=0}$



Courbe de déformation



Courbe transformée

□ Application aux modèles hyperboliques

- **Modèle de Kulhawy et Duncan (1972)**

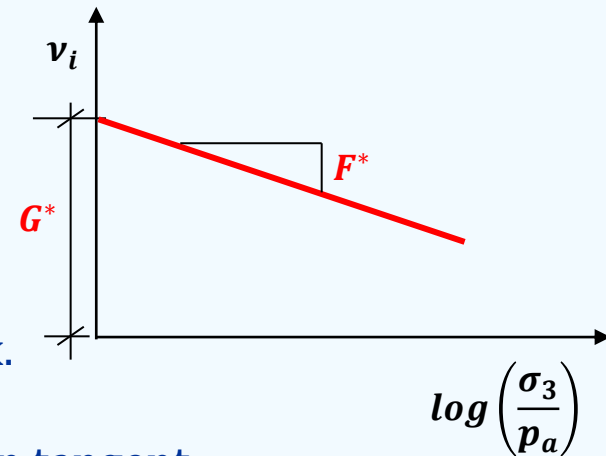
Si l'on admet que le coefficient de Poisson initial ν_i varie en fonction de la contrainte σ_3 :

$$\nu_i = G^* - F^* \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)$$

où G^* et F^* désignent des paramètres expérimentaux.

On obtient alors l'expression du coefficient de Poisson tangent :

$$\nu_t = \frac{G^* - F^* \log \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)}{\left[1 - \frac{d \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)}{K_h p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f (1 - \sin(\varphi)) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2c \cdot \cos(\varphi) + 2\sigma_3 \sin(\varphi)} \right]} \right]^2}$$



Le modèle de Kulhawy et Duncan (1972) est caractérisé par 8 paramètres :

$K_h, n, R_f, c, \varphi, G^*, F^*$ et p_a

□ Application aux modèles hyperboliques

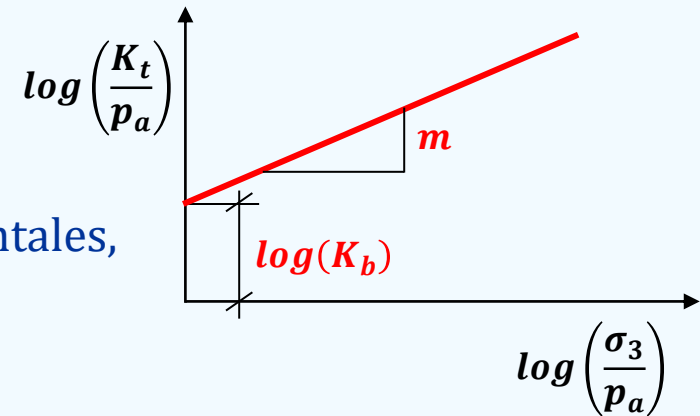
- **Modèle de Duncan et al. (1980)**

De même, on peut écrire le module de compressibilité volumique tangent K_t sous la forme :

$$K_t = K_b p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m$$

où K_b et m désignent deux constantes expérimentales, tel que le coefficient de Poisson ν soit égal à :

$$\nu = \frac{3K_t - E_t}{6K_t}$$



Le modèle de Duncan et al. (1980) est alors caractérisé par 8 paramètres :

$K_h, n, K_b, m, R_f, c, \varphi$ et p_a

RELATIONS DE COMPORTEMENT

□ Relations de comportement

Les relations de comportement en élasticité non-linéaire isotrope sont données sous forme incrémentale comme suit :

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{E_t}{(1 + \nu_t)(1 - 2\nu_t)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_t & \nu_t & 0 \\ \nu_t & 1 - \nu_t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_t}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

Merci de votre attention

Fin de la 2^{ème} Partie
Fin du Chapitre 2

EXERCICES

Ex. 1 Le tableau ci-après présente les résultats d'un essai triaxial de cisaillement drainé de type CID réalisé sur un sol sableux sous contrainte radiale $\sigma_r = 50 \text{ kPa}$, où σ_a désigne la contrainte axiale appliquée et ε_a la déformation axiale correspondante.

$\sigma_a \text{ (kPa)}$	50	95	120	150	165	175	180	190	195	200	204	205	206	207	208
$\varepsilon_a \text{ (%)}$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0

Si l'on admet pour ce sol une loi d'élasticité hyperbolique de type Kondner (1963), on demande de déterminer le module de Young tangent initial E_i et le déviateur de contraintes ultime $(\sigma_a - \sigma_r)_{ult}$, puis de tracer les courbes de cisaillement expérimentale et simulée correspondantes. Commenter ensuite les résultats trouvés.

EXERCICES

Ex. 2 Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de cisaillement drainé de type CID réalisés sur un sable d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 30^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module de Young tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	σ_3 (kPa)	E_i (MPa)	$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)
1	50	25	110
2	100	100	220
3	200	400	440

- Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs des paramètres R_f correspondantes.
- Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre comme pression de référence $p_a = 100$ kPa.
- Représenter ensuite l'évolution du module de Young tangent initial E_i en fonction de la contrainte de confinement σ_3 , puis déduire la valeur de celui-ci pour une contrainte de confinement $\sigma_3 = 150$ kPa.

EXERCICES

Ex. 3 Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de cisaillement drainé de type CID réalisés sur un sable d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 35^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module de Young tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	1	2	3	4	5	6
σ_3 (kPa)	25	50	75	100	125	150
E_i (MPa)	1.250	10.000	33.750	80.000	156.250	270.000
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	110	220	330	440	550	660

- Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs des paramètres R_f correspondantes.
- Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre comme pression de référence $p_a = 100$ kPa.
- Représenter ensuite l'évolution du module de Young tangent initial E_i en fonction de la contrainte de confinement σ_3 , puis déduire la valeur de celui-ci pour une contrainte de confinement $\sigma_3 = 165$ kPa.

EXERCICES

Ex. 4 (Interro. du 16/05/2022). Les résultats d'une série d'essais triaxiaux de type CID réalisés sur un sol sableux d'angle de frottement interne effectif $\varphi' = 30^\circ$ sont présentés dans le tableau ci-après, où E_i désigne le module tangent initial et $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ le déviateur de contraintes ultime.

Essai	1	2	3
σ_3 (kPa)	50	100	200
E_i (MPa)	10	80	640
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ (kPa)	125	250	500

- Calculer pour chaque essai le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb, puis déduire les valeurs du paramètre R_f correspondantes.
- Déterminer les valeurs des paramètres K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre $p_a = 100$ kPa.

TRAVAIL PERSONNEL

Rhéologie des sols

TP n  2

Les résultats d'essais triaxiaux de cisaillement drainés réalisés sur un sable dunaire d'angle de frottement interne effectif $\phi'=35^\circ$ sont présentés ci-après.

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
σ_3 (kPa)	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
ϵ_1 (%)	$q=\sigma_1-\sigma_3$ (kPa)											
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.25	10.71	37.47	74.91	119.82	170.17	224.59	282.14	342.14	404.11	467.68	532.56	598.54
0.50	18.73	59.91	112.29	171.07	233.84	299.27	366.56	435.21	504.87	575.31	646.36	717.90
0.75	24.97	74.86	134.70	199.51	267.16	336.58	407.18	478.60	550.63	623.10	695.93	769.02
1.00	29.96	85.54	149.64	217.60	287.65	358.95	431.06	503.71	576.77	650.11	723.67	797.41
1.25	34.03	93.54	160.30	230.12	301.53	373.86	446.78	520.09	593.67	667.47	741.41	815.47
1.50	37.43	99.76	168.29	239.30	311.55	384.51	457.91	531.61	605.51	679.56	753.73	827.98
1.75	40.31	104.73	174.50	246.32	319.13	392.50	466.21	540.15	614.26	688.47	762.78	837.15
2.00	42.77	108.80	179.48	251.86	325.05	398.71	472.63	546.75	620.98	695.31	769.71	844.16
2.25	44.90	112.19	183.54	256.34	329.82	403.67	477.75	551.98	626.32	700.73	775.19	849.69
2.50	46.77	115.06	186.93	260.04	333.73	407.74	481.93	556.25	630.65	705.12	779.63	854.17
2.75	48.41	117.52	189.80	263.15	337.00	411.12	485.40	559.79	634.24	708.75	783.30	857.87
3.00	49.88	119.65	192.26	265.80	339.78	413.99	488.33	562.77	637.27	711.81	786.38	860.98
3.25	51.19	121.51	194.38	268.09	342.17	416.44	490.84	565.32	639.85	714.42	789.01	863.63
3.50	52.37	123.16	196.25	270.08	344.24	418.57	493.01	567.52	642.08	716.67	791.28	865.91
3.75	53.43	124.62	197.89	271.82	346.05	420.44	494.91	569.45	644.02	718.63	793.26	867.90
4.00	54.40	125.93	199.35	273.37	347.66	422.08	496.58	571.14	645.74	720.36	794.99	869.65
4.25	55.29	127.11	200.66	274.75	349.08	423.54	498.07	572.64	647.25	721.88	796.53	871.19
4.50	56.10	128.17	201.84	275.99	350.36	424.85	499.39	573.99	648.61	723.25	797.91	872.57
4.75	56.84	129.14	202.90	277.11	351.51	426.02	500.59	575.19	649.83	724.48	799.14	873.81
5.00	57.53	130.02	203.87	278.12	352.56	427.09	501.67	576.28	650.92	725.58	800.25	874.93

1. Tracer sur le même graphique les courbes de cisaillement de trois essais correspondant à votre choix. puis commenter les.
2. Calculer pour chacun des trois essais que vous avez choisis le module d'Young tangent initial E_i et le déviateur de contraintes ultime $(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$. ainsi que le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1-\sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb.
3. Déterminer ensuite les valeurs des paramètres R_f , K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre $p_a=100$ kPa.

Bonne chance
Prof. Mohamed Khemissa

TRAVAIL PERSONNEL

Rhéologie des sols

TP n° 2

Les résultats d'essais triaxiaux de cisaillement drainés réalisés sur un sable dunaire d'angle de frottement interne effectif $\phi'=35^\circ$ sont présentés ci-après.

Essai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
σ_3 (kPa)	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
ε_1 (%)												
0.00	0.00	0.00	TP n° 2 - Rhéologie des sols								0.00	0.00
0.25	10.71	37.47	NOMS & Prénoms								467.68	532.56
0.50	18.73	59.91	N° des essais à traiter								575.31	646.36
0.75	24.97	74.86	ADJILI Ali								623.10	695.93
1.00	29.96	85.54	1								650.11	723.67
1.25	34.03	93.54	BAKOUR Zinelabidine								667.47	741.41
1.50	37.43	99.76	1								679.56	753.73
1.75	40.31	104.73	BEKOUCE Dhia-Eddine								688.47	762.78
2.00	42.77	108.80	2								695.31	769.71
2.25	44.90	112.19	BENCHARIF Djamel-Eddine								700.73	775.19
2.50	46.77	115.06	2								705.12	779.63
2.75	48.41	117.52	BITAR Lina-Achwak								708.75	783.30
3.00	49.88	119.65	2								711.81	786.38
3.25	51.19	121.51	CHENDI Yaakoub								714.42	789.01
3.50	52.37	123.16	3								716.67	791.28
3.75	53.43	124.62	DJEDILI Wefa								718.63	793.26
4.00	54.40	125.93	3								720.36	794.99
4.25	55.29	127.11	3								721.88	796.53
4.50	56.10	128.17	GUELIEL Feryal								723.25	797.91
4.75	56.84	129.14	3								724.48	799.14
5.00	57.53	130.02	4								725.58	800.25
			4									
			5									
			5									
			6									
			7									
			8									
			9									
			10									
			11									
			12									

- Tracer sur le même graphique les courbes de cisaillement de trois essais correspondant à votre choix. puis commenter les.
- Calculer pour chacun des trois essais que vous avez choisis le module d'Young tangent initial E_i et le déviateur de contraintes ultime $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$. ainsi que le déviateur de contraintes à la rupture $(\sigma_1 - \sigma_3)_{rup}$ satisfaisant au critère de Mohr-Coulomb.
- Déterminer ensuite les valeurs des paramètres R_f , K_h et n pour le modèle de Duncan et Chang (1970). Prendre $p_a=100$ kPa.

Bonne chance
Prof. Mohamed Khemissa