

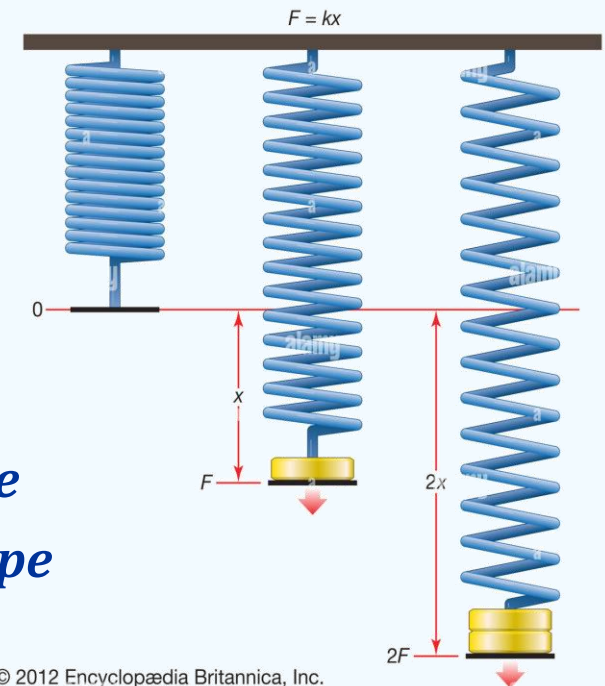
Chapitre Deux

Lois de comportement élastique

1^{ère} Partie

Comportement élastique linéaire

- ❑ *Préambule*
- ❑ *Constatations expérimentales*
- ❑ *Etendue du domaine élastique des matériaux*
- ❑ *Mécanismes de déformation des sols*
- ❑ *Formulation générale de l'élasticité linéaire*
- ❑ *Cas du comportement élastique linéaire isotrope*
- ❑ *Cas du comportement élastique linéaire aélotrope*
- ❑ *Exercices*



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

PRÉAMBULE

□ Préambule

• **Rappels de Maths**

✓ *Produit tensoriel*

$$\text{Soit : } \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & \sigma_{11} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{12} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{13} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{21} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{23} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{31} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{32} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Soit donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Exemple 1 : Cylindre creux

$$\sigma = \frac{F}{2\pi R e}$$

$$\tau = \frac{M}{2\pi R^2 e}$$

⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{bmatrix} / (\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$$

⇒

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & 0 \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_r) \\ & + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_r) + 0 \bar{e}_r \otimes \bar{e}_r \\ & + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) + \sigma \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z \end{aligned}$$

⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma \bar{e}_z \otimes \bar{e}_z + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

□ Préambule

- **Rappels de Maths**

- ✓ *Produit simplement contracté*

Soient : $\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

et $\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

On peut écrire :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

Ex.

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31}$$

$$C_{13} = A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} + A_{13}B_{33}$$

$$C_{23} = A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} + A_{23}B_{33}$$

Exemple 2

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} \Leftrightarrow C_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{11} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$C_{13} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$C_{23} = 0 \times 1 + \alpha \times 0 + 0 \times 1$$

...

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$$

Remarque : $Tr(\bar{\bar{C}}) = C_{ii} = 3\alpha + 2$

□ Préambule

• **Rappels de Maths**

✓ *Produit doublement contracté*

Soient : $\bar{\bar{C}}$ – Tenseur du 4^{ème} ordre

$\bar{\bar{A}}$ – Tenseur du 2^{ème} ordre

$\bar{\bar{B}}$ – Tenseur du 2^{ème} ordre

a – Scalaire

On peut écrire :

$$1. \quad a = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = A_{ik} B_{ki} = \text{Tr}(\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}})$$

$$\Rightarrow a = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} \\ + A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \\ + A_{31}B_{13} + A_{32}B_{23} + A_{33}B_{33}$$

$$2. \quad \bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\epsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

(Voir ci-après : Formulation générale de l'élasticité linéaire)

Exemple 3

$$\bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{\bar{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$\Rightarrow$

$$a = \bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} \Leftrightarrow a = A_{ik} B_{ki}$$

$\Rightarrow$

$$a = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ + 0 \times 0 + \alpha \times 1 + 0 \times 0 \\ + 1 \times 1 + 0 \times 0 + \alpha \times 1$$

$\Rightarrow$

$$a = 3\alpha + 2$$

$\Rightarrow$

$$a = \text{Tr}(\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}) = C_{ii} = 3\alpha + 2$$

□ Préambule

- **Définition**

Le comportement d'un matériau solide est dit élastique, lorsque celui-ci retrouve sa forme d'origine après avoir été déformé. L'histoire du chargement n'intervient donc pas et qu'à un état de contrainte donné correspond un état de déformation et un seul.

⇒ Du point de vue thermodynamique, les évolutions sont réversibles dans le comportement élastique.

On distingue deux types d'élasticité :

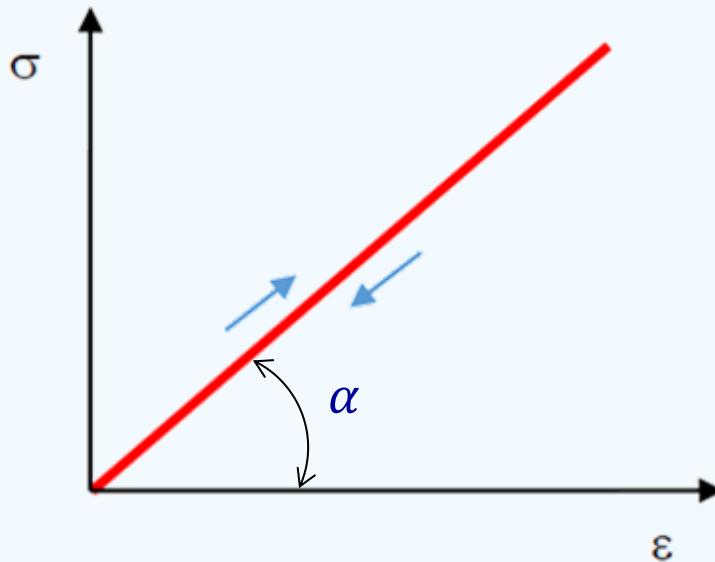
a/ Elasticité linéaire : *Dans le cas du comportement élastique linéaire, le tenseur des déformations est proportionnel au tenseur des contraintes au cours des sollicitations, d'où l'on parle d'élasticité de Hooke (1678).*

⇒ La courbe "contrainte-déformation" est linéaire et réversible.

b/ Elasticité non-linéaire : *De manière générale, le comportement élastique linéaire ne constitue qu'une approximation du comportement réversible des matériaux.*

CONSTATATIONS EXPÉRIMENTALES

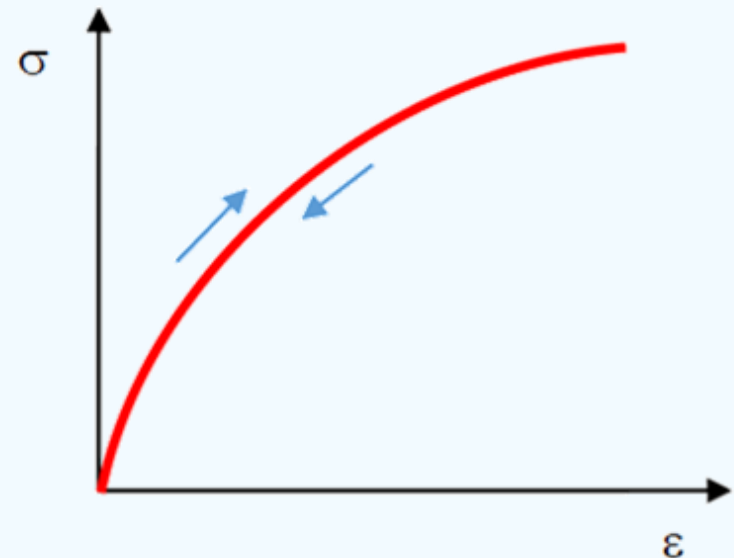
□ Constatations expérimentales



a/ Elasticité linéaire

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \tan(\alpha) \quad (\text{Module de Young})$$



b/ Elasticité non-linéaire

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

(Voir : 2^{ème} Partie de ce Chapitre)

ÉTENDUE DU DOMAINE ÉLASTIQUE DES MATÉRIAUX

❑ Etendue du domaine élastique des matériaux

L'étendue du domaine élastique est différente d'un matériau à l'autre :

- *Sols : 0.01%*
- *Métaux : 0.3%*
- *Bois : 0.9%*
- *Caoutchouc : 300%*



Nota : *Il convient de remarquer que la limite d'élasticité des matériaux dépend de la précision des mesures effectuées au cours des essais.*



MÉCANISMES DE DÉFORMATION DES SOLS

❑ Mécanismes de déformation des sols

Les déformations macroscopiques correspondantes sont associées à des déplacements relatifs de particules par rapport à d'autres particules. Les déformations des sols ne sont pas donc physiquement réversibles.

⇒ Ceci tendrait à prouver que les sols possèdent un domaine d'élasticité très réduit, sinon nul (Déformation de l'ordre de 0.01%).



Retrait - Gonflement du sol de fondation

Déformation par plastification



Glissement de terrain

Déformation par cisaillement

FORMULATION GÉNÉRALE DE L'ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

Le comportement élastique des matériaux solides est caractérisé par une relation de la forme suivante entre le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ (Loi de Hooke généralisée) :

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

où $\bar{\bar{\bar{C}}} = [C_{ijkl}]$ désigne le tenseur des raideurs ($i, j, k, l = 1, 2, 3$).

De manière générale, le tenseur $\bar{\bar{\bar{C}}}$ comporte : $9 \times 9 = 81$ paramètres indépendants. Par raison de symétrie, le nombre de ces paramètres se réduit comme suit :

- *Symétrie du tenseur des contraintes : $6 \times 9 = 54$*
- *Symétrie du tenseur des déformations : $9 \times 6 = 54$*
- *Symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations : $6 \times 6 = 36$*
- *Symétrie du tenseur des raideurs : $36 - 15 = 21$*

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\varepsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$\bar{\bar{\sigma}} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$3 \times 3 - 3 = 6$$

Tenseur des contraintes : 6 paramètres indépendants

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$3 \times 3 - 3 = 6$$

Tenseur des déformations : 6 paramètres indépendants

Tenseur des contraintes – Tenseur des déformations

Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{C}} : \bar{\bar{\varepsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

9x9=81

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Relation générale

Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

6x9=54

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Symétrie du tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\varepsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

9x6=54

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Symétrie du tenseur des déformations : $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$

Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

6x6=36

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Combinaison des deux symétries : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

6x6=36

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} & C_{2333} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3333} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix}$$

Elimination des lignes et des colonnes barrées

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

6x6=36

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

Réarrangement du système d'équations

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}} : \bar{\varepsilon} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

$$6 \times 6 - 15 = 21$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$

Symétrie du tenseur des raideurs : $C_{ijkl} = C_{klij}$

(Conservation de l'énergie de déformation)

□ Formulation générale de l'élasticité linéaire

Ainsi, le tenseur des raideurs $\bar{\bar{C}}$ comporte 21 paramètres indépendants.
Dans le cas des sols, ce nombre peut se réduire à :

- deux paramètres (E, ν) dans le cas du comportement élastique isotrope (**Massifs homogènes**),
- cinq paramètres ($E_v, E_h, \nu_{hh}, \nu_{vh}, G_v$) dans le cas du comportement élastique aélotropique ou anisotrope de révolution (**Massifs hétérogènes**).



Massif homogène



Massif hétérogène

❑ Formulation générale de l'élasticité linéaire



Exemples types : Hétérogénéité des sols (Strates géologiques)

❑ Formulation générale de l'élasticité linéaire



Geotechnical and Ground
Engineering

Exemples types : Hétérogénéité des sols (Strates géologiques)

CAS DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE ISOTROPE

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Un matériau solide est dit isotrope si toutes ses directions sont équivalentes.

⇒ La loi de comportement élastique isotrope ne dépend alors que de deux paramètres :

- le module de Young E et le coefficient de Poisson ν

ou bien :

- les coefficients de Lamé λ et μ

de sorte que :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \lambda Tr(\bar{\bar{\epsilon}}) \bar{\bar{\delta}} + 2\mu \bar{\bar{\epsilon}} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

et inversement :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = -\frac{\nu}{E} Tr(\bar{\bar{\sigma}}) \bar{\bar{\delta}} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\bar{\sigma}} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$

où $\bar{\bar{\delta}} = [\delta_{ij}]$ désigne le tenseur unité (Tenseur de Kronecker) tel que :

$$\bar{\bar{\delta}} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Les relations entre les paramètres d'élasticité sont :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou inversement :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

La condition de stabilité s'écrit :

$$E > 0 \quad \text{et} \quad -1 < \nu < +\frac{1}{2}$$

En pratique, le coefficient de Poisson ν est toujours positif, d'où :

$$0 < \nu < +\frac{1}{2}$$



Nota : L'expérience montre que la plupart des matériaux solides possèdent une valeur de ν positive, généralement comprise entre 0.2 et 0.4, sauf que certains matériaux, comme le liège, ne présentent pas de contraction latérale ($\nu = 0$). Tandis que d'autres matériaux à structure complexe (mousses solides, métamatériaux) s'étendent latéralement suite à une traction ($\nu < 0$) et sont dits auxétiques.



□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

En introduisant les contraintes moyenne p et déviatorique q :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \text{et} \quad q = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

on peut écrire la condition triaxiale suivante :

$$p = K\varepsilon_v \quad \text{et} \quad q = 3G\varepsilon_d$$

où K désigne le module de compressibilité volumique et G le module de cisaillement, telles que :

- $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (Déformation volumique)
- $\varepsilon_d = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$ (Déformation déviatorique)

On déduit alors :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{ou bien} \quad E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}$$

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

On peut aussi écrire les relations suivantes :

$$\bar{\sigma} = p\bar{\delta} + \bar{s} = \frac{1}{3}Tr(\bar{\sigma})\bar{\delta} + \bar{s} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_v\bar{\delta} + \bar{e} = \frac{1}{3}Tr(\bar{\varepsilon})\bar{\delta} + \bar{e} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + e_{ij}$$

D'où les tenseurs de contraintes et de déformations déviatoriques :

$$\bar{s} = \bar{\sigma} - \frac{1}{3}Tr(\bar{\sigma})\bar{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$\bar{e} = \bar{\varepsilon} - \frac{1}{3}Tr(\bar{\varepsilon})\bar{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

Sachant que :

$$p = K\varepsilon_v \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$$

$$\bar{s} = 2G\bar{e} \quad \Leftrightarrow \quad s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

on déduit alors :

$$\bar{\sigma} = KTr(\bar{\varepsilon})\bar{\delta} + 2G\bar{e} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3K}Tr(\bar{\sigma})\bar{\delta} + \frac{1}{2G}\bar{s} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{3K}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2G}s_{ij}$$

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Dans le cas de l'essai triaxial classique, on peut écrire les relations suivantes :

$$\sigma_a = \sigma_1 \quad \text{et} \quad \sigma_r = \sigma_2 = \sigma_3$$

où σ_a et σ_r désignent les contraintes axiale et radiale respectivement.

Soit donc :

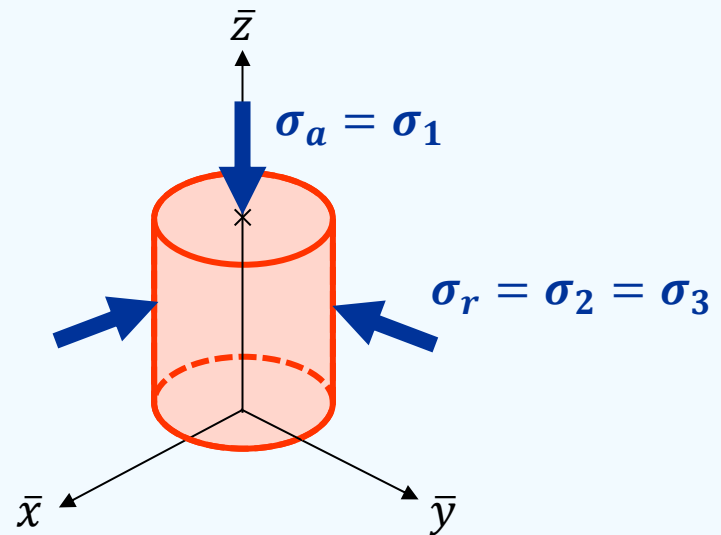
$$p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r)$$

$$q = \sigma_a - \sigma_r$$

et

$$\varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r$$

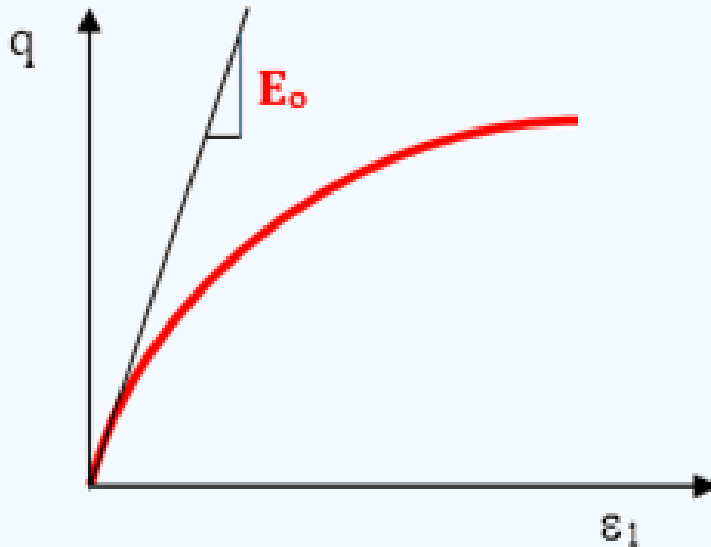
$$\varepsilon_d = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$$



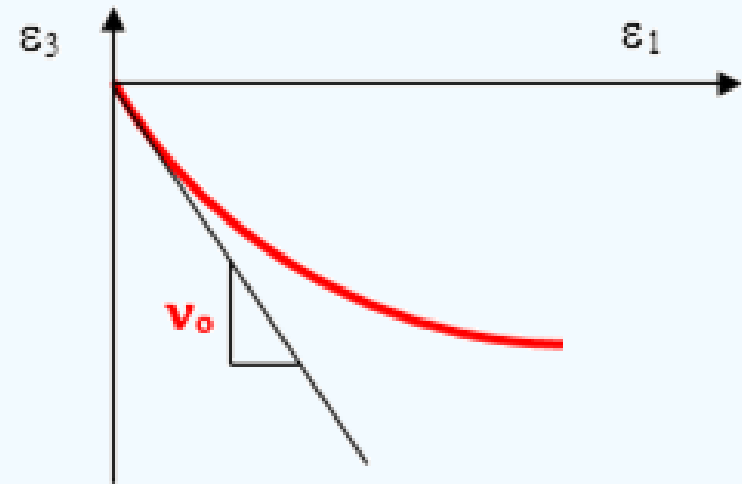
Pour des raisons de commodité, on adopte en pratique la relation suivante :

$$\varepsilon_d \approx \varepsilon_a - \varepsilon_r$$

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope



E_o – Module de Young initial



v_o – Coefficient de Poisson initial

$$E_o = \left. \frac{\Delta q}{\Delta \varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0}$$

$$v_o = - \left. \frac{\Delta \varepsilon_3}{\Delta \varepsilon_1} \right|_{\varepsilon_1=0}$$

Identification expérimentale (Essai triaxial)

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Matériaux		E_o (MPa)	ν_o
Argile	très molle	0.35 – 3	0.30 – 0.50
	molle	2 – 5	0.30 – 0.50
	moyenne	4 – 8	0.30 – 0.40
	raide	7 – 18	0.30 – 0.40
Sable	lâche	10 – 25	0.30 – 0.35
	dense	50 – 80	0.30 – 0.35
Argile sableuse		30 – 40	0.30 – 0.42
Marne		50 – 1000	0.25 – 0.35
Calcaire	compact	30000 – 60000	0.25 – 0.35
	normal	10000 – 30000	0.25 – 0.35
	tendre	2000 – 10000	0.25 – 0.35

Valeurs typiques des paramètres d'élasticité des sols

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Le tenseur $\bar{\bar{\bar{C}}} = [C_{ijkl}]$ prend la forme générale suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

où λ et μ désignent les coefficients de Lamé et $\bar{\bar{\delta}} = [\delta_{ij}]$ le tenseur unité (Tenseur de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ & $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$),
ou encore :

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

où E désigne le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Forme générale du tenseur des raideurs élastiques

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Q
u
i
z

$$\underline{\underline{C}} = [C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1223} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} \end{bmatrix} = ???$$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

- $C_{1111} = \lambda \delta_{11} \delta_{11} + \mu (\delta_{11} \delta_{11} + \delta_{11} \delta_{11}) = \lambda + 2\mu$
- $C_{1122} = \lambda \delta_{11} \delta_{22} + \mu (\delta_{12} \delta_{12} + \delta_{12} \delta_{12}) = \lambda$
- $C_{1133} = \lambda \delta_{11} \delta_{33} + \mu (\delta_{13} \delta_{13} + \delta_{13} \delta_{13}) = \lambda$
- $C_{1112} = \lambda \delta_{11} \delta_{12} + \mu (\delta_{11} \delta_{12} + \delta_{12} \delta_{12}) = 0$
- $C_{1113} = \lambda \delta_{11} \delta_{13} + \mu (\delta_{11} \delta_{13} + \delta_{13} \delta_{13}) = 0$
- $C_{1123} = \lambda \delta_{11} \delta_{23} + \mu (\delta_{12} \delta_{13} + \delta_{13} \delta_{13}) = 0$
- $C_{2211} = \lambda \delta_{22} \delta_{11} + \mu (\delta_{12} \delta_{12} + \delta_{12} \delta_{12}) = \lambda$
- $C_{2222} = \lambda \delta_{22} \delta_{22} + \mu (\delta_{22} \delta_{22} + \delta_{22} \delta_{22}) = \lambda + 2\mu$
- $C_{2233} = \lambda \delta_{22} \delta_{33} + \mu (\delta_{23} \delta_{23} + \delta_{23} \delta_{23}) = \lambda$
- $C_{2212} = \lambda \delta_{22} \delta_{12} + \mu (\delta_{22} \delta_{12} + \delta_{22} \delta_{21}) = 0$
- $C_{2213} = \lambda \delta_{22} \delta_{13} + \mu (\delta_{21} \delta_{23} + \delta_{23} \delta_{21}) = 0$
- $C_{2223} = \lambda \delta_{22} \delta_{23} + \mu (\delta_{22} \delta_{23} + \delta_{23} \delta_{22}) = 0$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

- $C_{3311} = \lambda \delta_{33} \delta_{11} + \mu (\delta_{31} \delta_{31} + \delta_{31} \delta_{31}) = \lambda$
- $C_{3322} = \lambda \delta_{33} \delta_{22} + \mu (\delta_{32} \delta_{32} + \delta_{32} \delta_{32}) = \lambda$
- $C_{3333} = \lambda \delta_{33} \delta_{33} + \mu (\delta_{33} \delta_{33} + \delta_{33} \delta_{33}) = \lambda + 2\mu$
- $C_{3312} = \lambda \delta_{33} \delta_{12} + \mu (\delta_{31} \delta_{32} + \delta_{32} \delta_{31}) = 0$
- $C_{3313} = \lambda \delta_{33} \delta_{13} + \mu (\delta_{31} \delta_{33} + \delta_{33} \delta_{31}) = 0$
- $C_{3323} = \lambda \delta_{33} \delta_{23} + \mu (\delta_{32} \delta_{33} + \delta_{33} \delta_{32}) = 0$
- $C_{1211} = \lambda \delta_{12} \delta_{11} + \mu (\delta_{11} \delta_{21} + \delta_{11} \delta_{21}) = 0$
- $C_{1222} = \lambda \delta_{12} \delta_{22} + \mu (\delta_{12} \delta_{22} + \delta_{12} \delta_{22}) = 0$
- $C_{1233} = \lambda \delta_{12} \delta_{33} + \mu (\delta_{13} \delta_{23} + \delta_{13} \delta_{23}) = 0$
- $C_{1212} = \lambda \delta_{12} \delta_{12} + \mu (\delta_{11} \delta_{22} + \delta_{12} \delta_{21}) = \mu$
- $C_{1213} = \lambda \delta_{12} \delta_{13} + \mu (\delta_{11} \delta_{23} + \delta_{13} \delta_{21}) = 0$
- $C_{1223} = \lambda \delta_{12} \delta_{23} + \mu (\delta_{12} \delta_{23} + \delta_{13} \delta_{22}) = 0$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

Q
u
i
z

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

- $C_{1311} = \lambda \delta_{13} \delta_{11} + \mu (\delta_{11} \delta_{31} + \delta_{11} \delta_{31}) = 0$
- $C_{1322} = \lambda \delta_{13} \delta_{22} + \mu (\delta_{12} \delta_{32} + \delta_{12} \delta_{32}) = 0$
- $C_{1333} = \lambda \delta_{13} \delta_{33} + \mu (\delta_{13} \delta_{33} + \delta_{13} \delta_{33}) = 0$
- $C_{1312} = \lambda \delta_{13} \delta_{12} + \mu (\delta_{11} \delta_{32} + \delta_{12} \delta_{31}) = 0$
- $C_{1313} = \lambda \delta_{13} \delta_{13} + \mu (\delta_{11} \delta_{33} + \delta_{13} \delta_{31}) = \mu$
- $C_{1323} = \lambda \delta_{13} \delta_{23} + \mu (\delta_{12} \delta_{33} + \delta_{13} \delta_{32}) = 0$
- $C_{2311} = \lambda \delta_{23} \delta_{11} + \mu (\delta_{21} \delta_{31} + \delta_{21} \delta_{31}) = 0$
- $C_{2322} = \lambda \delta_{23} \delta_{22} + \mu (\delta_{22} \delta_{32} + \delta_{22} \delta_{32}) = 0$
- $C_{2333} = \lambda \delta_{23} \delta_{33} + \mu (\delta_{23} \delta_{33} + \delta_{23} \delta_{33}) = 0$
- $C_{2312} = \lambda \delta_{23} \delta_{12} + \mu (\delta_{21} \delta_{32} + \delta_{22} \delta_{31}) = 0$
- $C_{2313} = \lambda \delta_{23} \delta_{13} + \mu (\delta_{21} \delta_{33} + \delta_{23} \delta_{31}) = 0$
- $C_{2323} = \lambda \delta_{23} \delta_{23} + \mu (\delta_{22} \delta_{33} + \delta_{23} \delta_{32}) = \mu$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Q
u
i
z

$$\bar{\bar{C}} = [C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} \end{bmatrix}$$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Q
u
i
z

$$\bar{\bar{C}} = [C_{ijkl}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Composantes élastiques du tenseur des raideurs

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\bar{\bar{C}} = [C_{IJ}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$ijkl \rightarrow IJ$

1111 $\rightarrow$ 11

1122 $\rightarrow$ 12

1133 $\rightarrow$ 13

2211 $\rightarrow$ 21

2222 $\rightarrow$ 22

2233 $\rightarrow$ 23

3311 $\rightarrow$ 31

3322 $\rightarrow$ 32

3333 $\rightarrow$ 33

1212 $\rightarrow$ 44

1313 $\rightarrow$ 55

2323 $\rightarrow$ 66

Notation de Voigt : Passage de 4 à 2 indices

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Matériau isotrope

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23}$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2}$$

$$\bar{\bar{C}} = [C_{IJ}] =$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Nota

$$\text{Posons : } C_{11} - C_{12} = 2\mu$$

$$C_{12} = \lambda$$



$$C_{11} = \lambda + 2\mu$$

Notation de Voigt – Matériau isotrope

□ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\bar{C} = [C_{IJ}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Notation de Voigt – Matériau isotrope

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\bar{C} = [C_{IJ}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

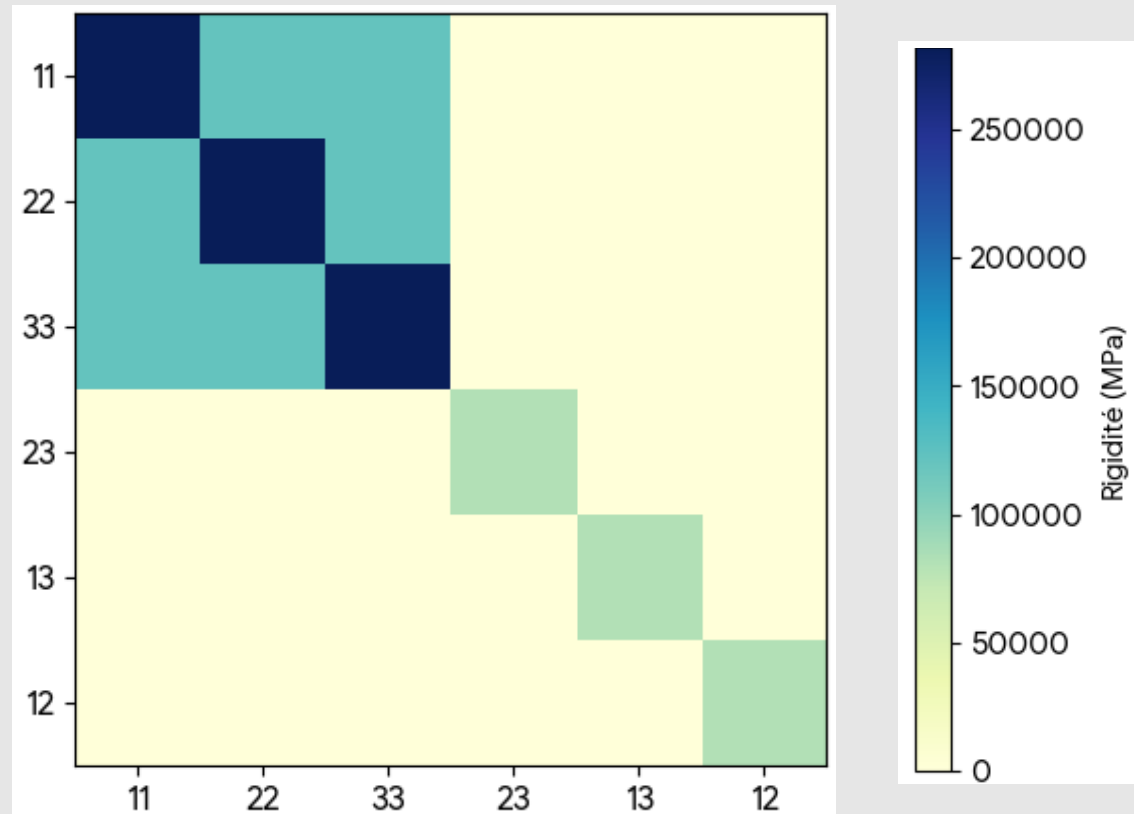
Notation de Voigt – Matériau isotrope

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Q
u
i
z

$E = 210000 \text{ MPa}$
 $\nu = 0.3$



Mode IA

Visualisation des contraintes

❑ Cas du comportement élastique linéaire isotrope

Relations de comportement
(Conditions tridimensionnelles)

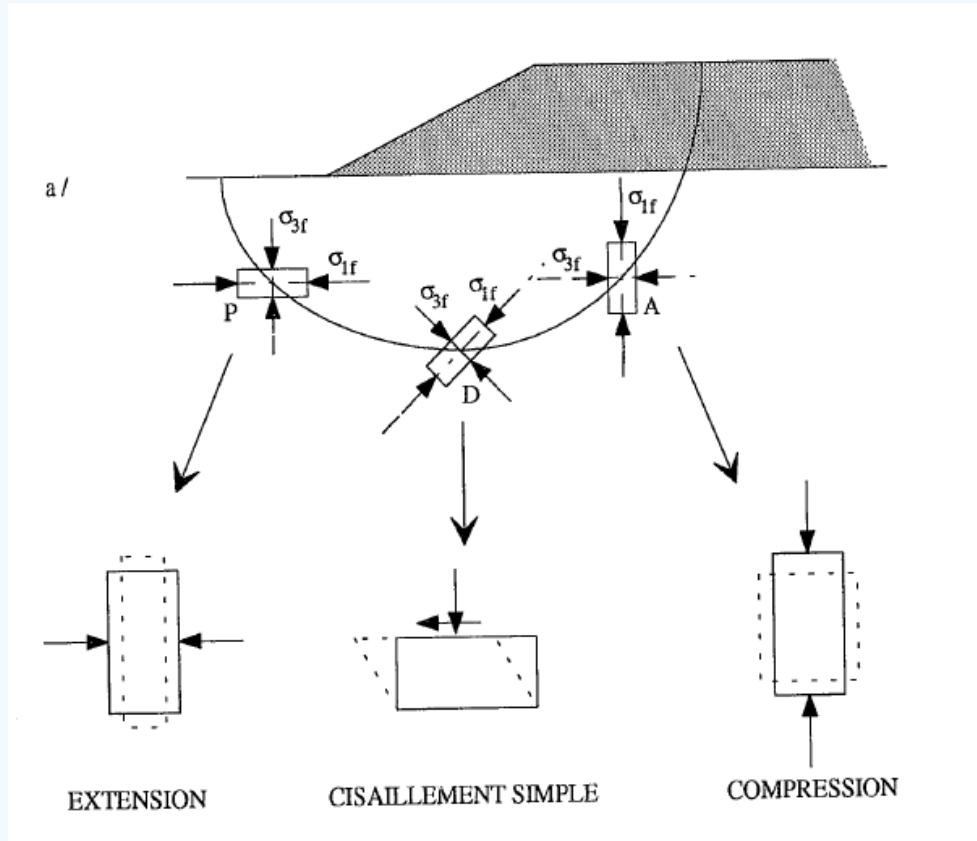
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix}$$



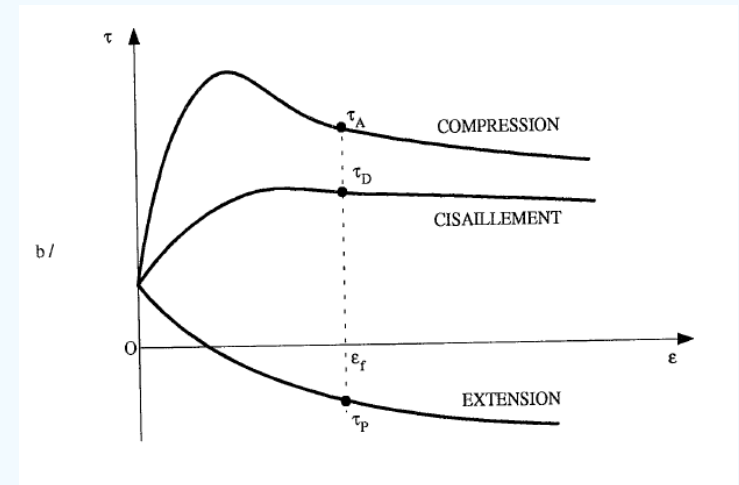
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix}$$

CAS DU COMPORTEMENT ÉLASTIQUE LINÉAIRE AÉLOTROPE

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie



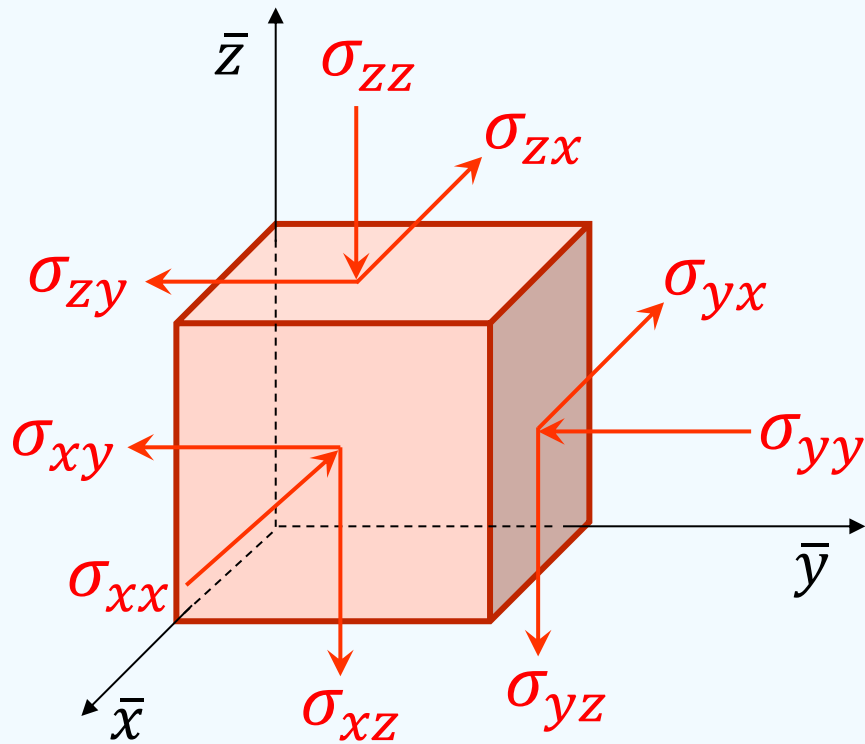
Sollicitations en place



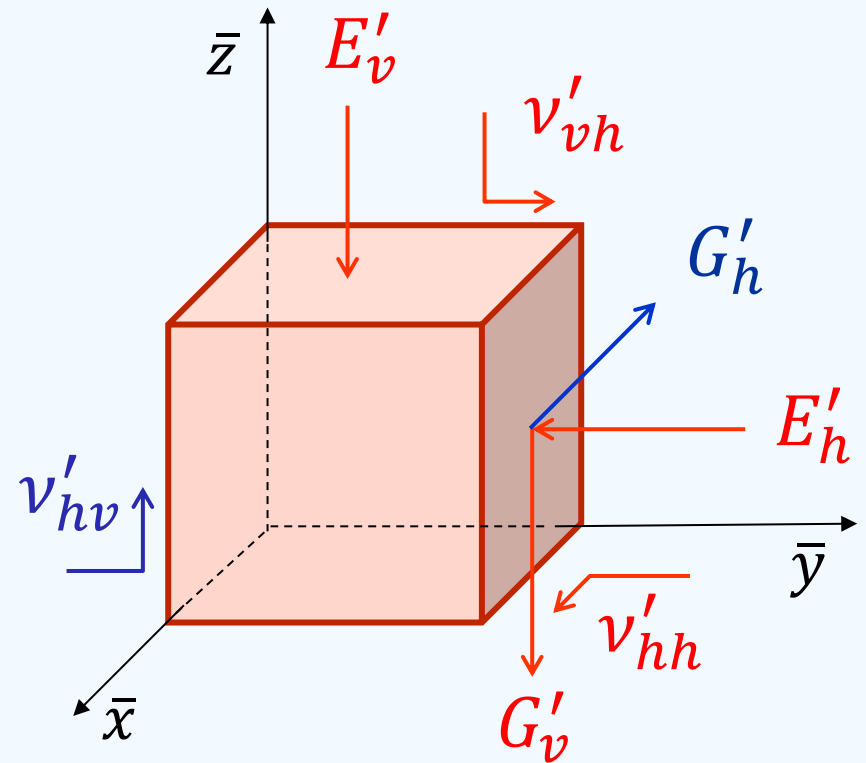
Simulation en laboratoire

**Modes de sollicitations du sol en place
et leur simulation en laboratoire**

  Cas du comportement élastique linéaire aélotrope



Contraintes dans le terrain

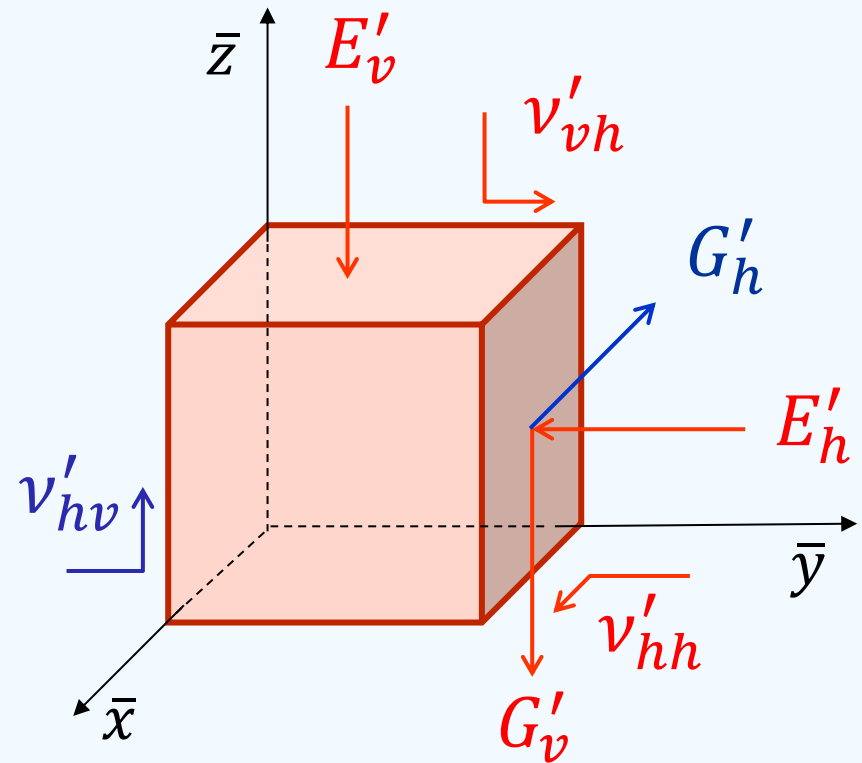


Paramètres d'élasticité aélotrope

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope

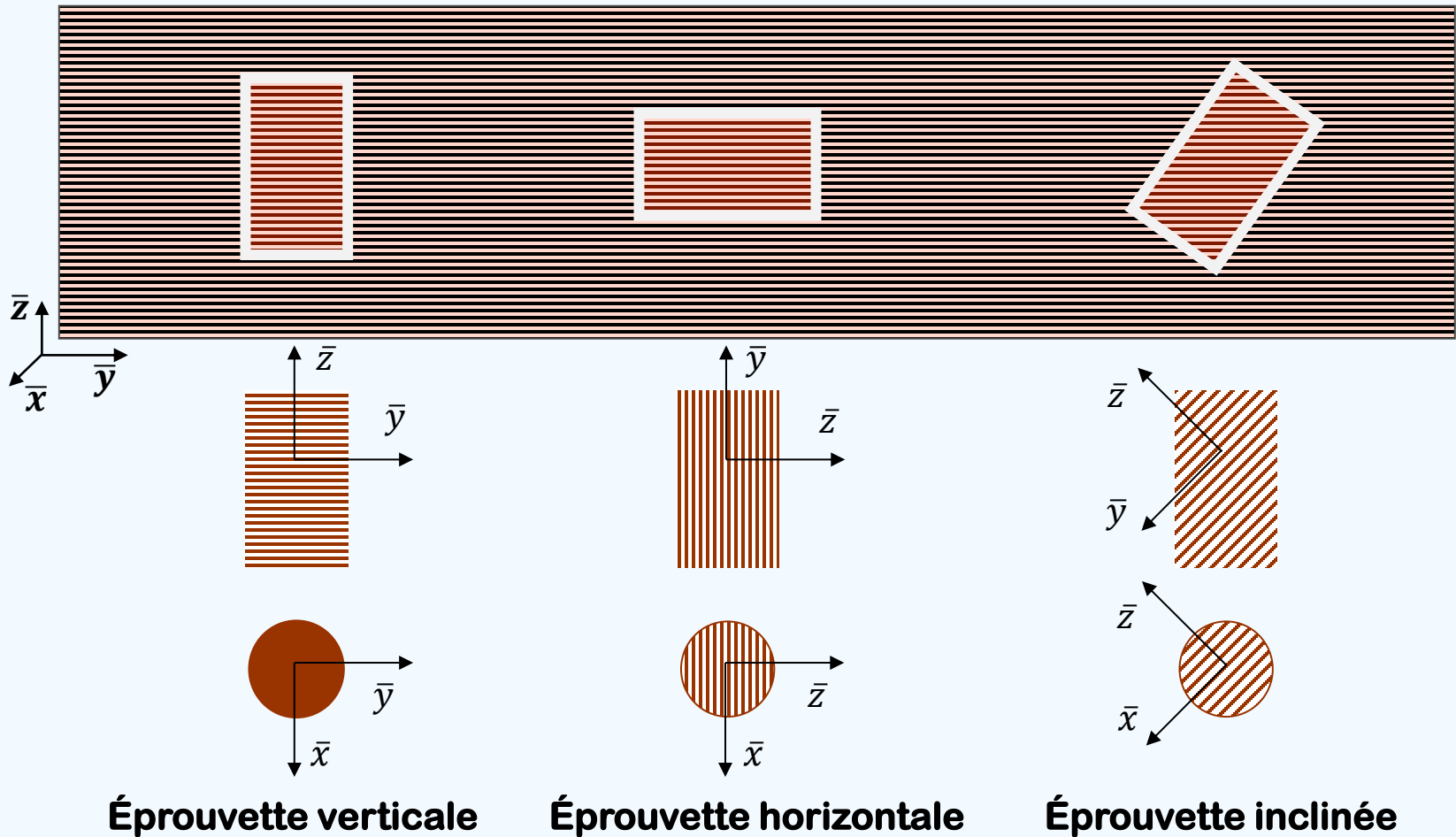
$$\nu'_{hv} = \nu'_{vh} \frac{E'_h}{E'_v}$$

$$G'_h = \frac{E'_h}{2(1 + \nu'_{hh})}$$



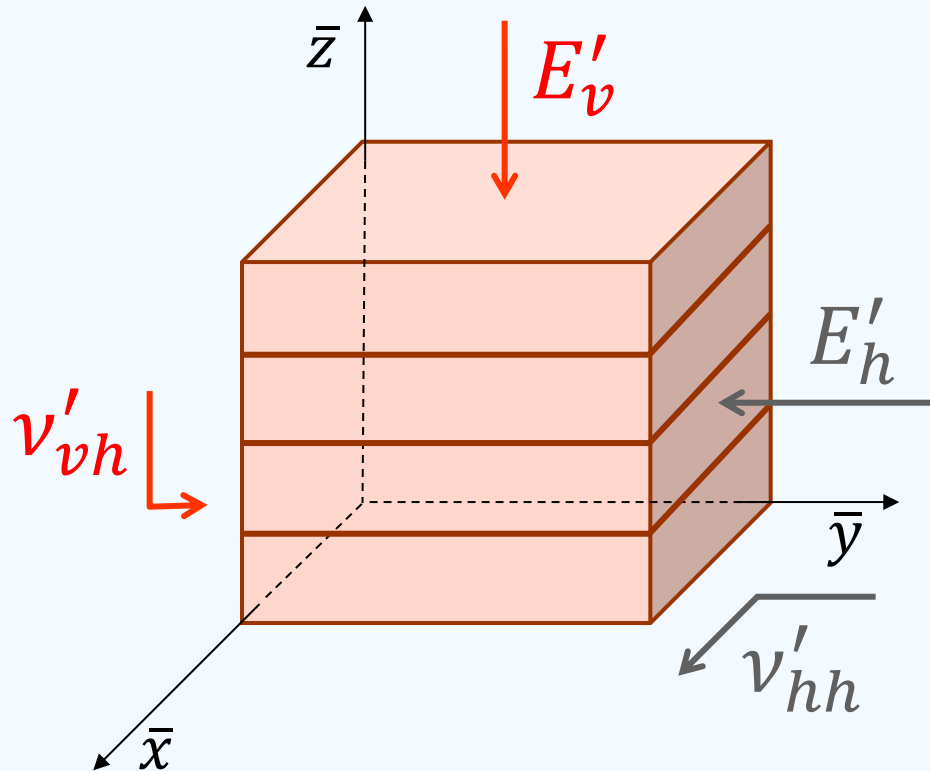
Paramètres d'élasticité aélotrope

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope



Identification expérimentale

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope



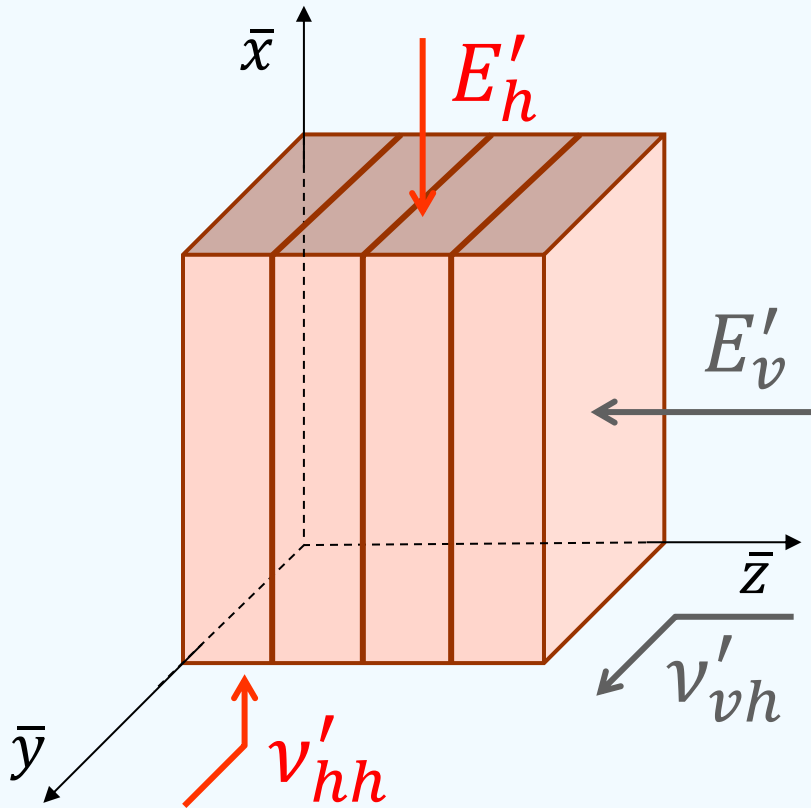
$$E'_v = \frac{\Delta \sigma'_z}{\Delta \epsilon_z}$$

$$v'_{vh} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta \epsilon_z} \right)$$

Remarque : Une augmentation du volume sous compression simple se traduit par $v'_{vh} > 0.5$ (Sols fortement surconsolidés).

Eprouvette verticale

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope



$$E'_h = \frac{\Delta \sigma'_x}{\Delta \epsilon_x}$$

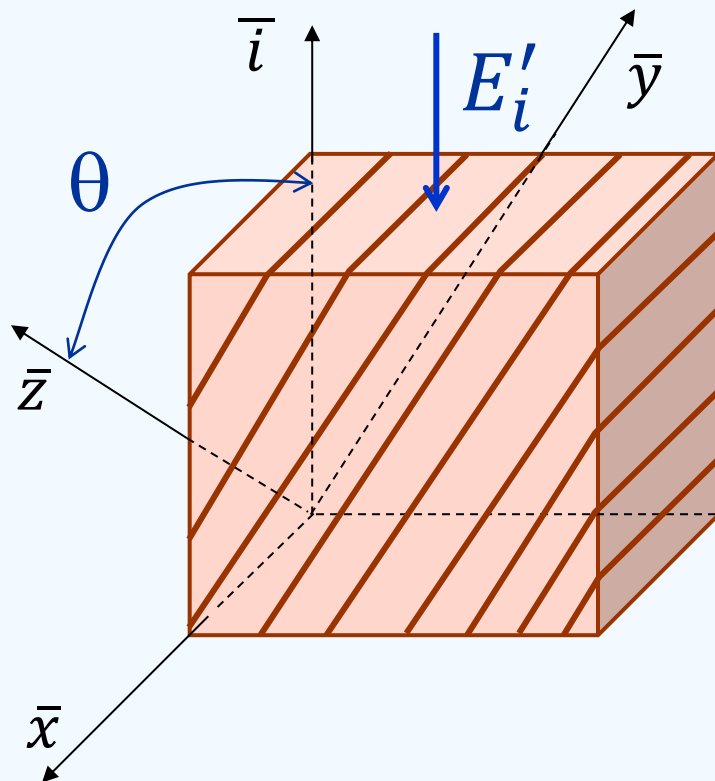
$$v'_{hh} = 1 - n v'_{vh} - \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta \epsilon_x}$$

$$n = E'_h / E'_v$$

Remarque : Une augmentation du volume sous compression simple se traduit par $1 - v'_{hh} - n v'_{vh} < 0$.

Eprouvette horizontale

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie



$$G'_v = f(\theta, E'_i) \\ = f(E'_v, n = E'_h/E'_v, \nu'_{vh}, \nu'_{hh})$$

$$G'_v = E'_v \frac{n}{1 + n + 2n\nu'_{vh}}$$

(Barden, 1963)

Remarque : La détermination expérimentale de G'_v est une opération très délicate de sorte qu'elle ne peut être recommandée en pratique, d'où l'utilisation de formules empiriques.

Eprouvette inclinée

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope

Table 1. Geotechnical characteristics of the Guiche clay

Parameters	Symbols	Intervals of variation	Mean values
Wet unit weight	γ (kN/m ³)	14.8–18.0	16.3
Moisture content	w (%)	46–85	55
Liquid limit	w _L	48–98	68
Plasticity index	I _p	26–61	49
Consistency index	I _c	0.1–0.4	0.28
Content of organic matter	c _{MO} (%)	-	4.3
In-situ void ratio	e ₀	1.39–1.87	1.62
Compression index	C _c	0.46–0.99	0.74
Swelling index	C _s	0.05–0.13	0.08
Preconsolidation pressure	σ'_p (kPa)	40–90	70
Overconsolidation ratio	$R_{oc} = \sigma'_p / \sigma'_{vo}$	0.60–1.25	1.04
Compression ratio	$C_c / (1 + e_0)$	0.19–0.36	0.28

According to LPC classification used in France (MAGNAN [16]), the Guiche clay consists of a slightly organic and very plastic silty soft clay (fo-Lt). The overconsolidation ratio and compression ratio values confirm the character of this natural clay normally consolidated and normally compressible.

Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie

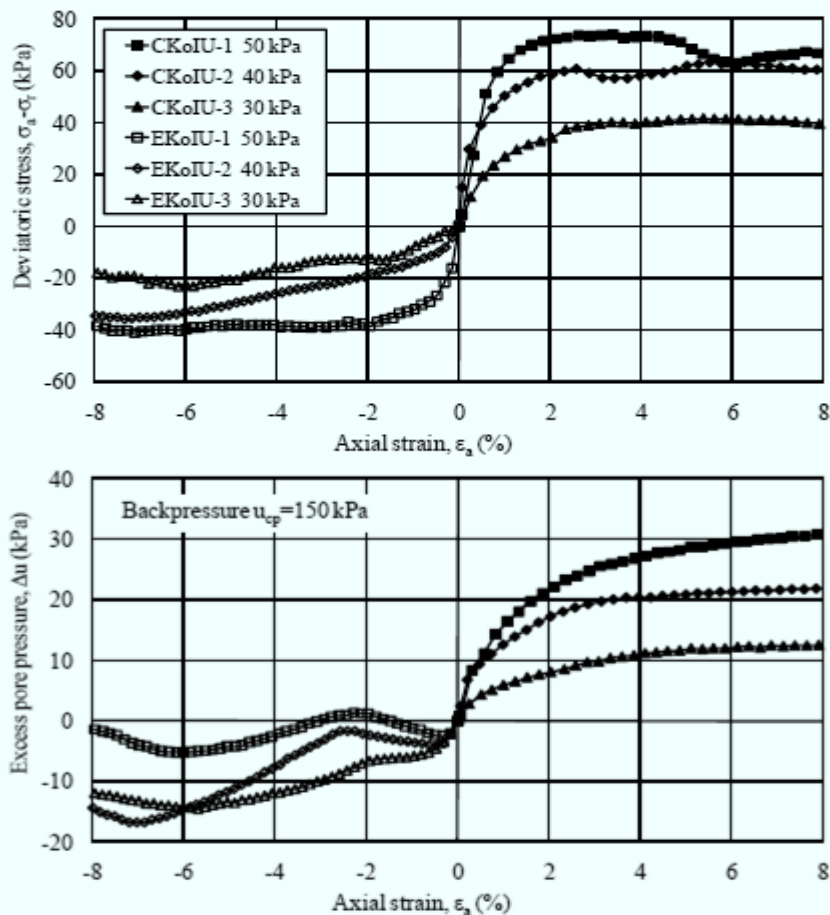


Fig. 1. Results of the CK_oIU and EK_oIU-tests

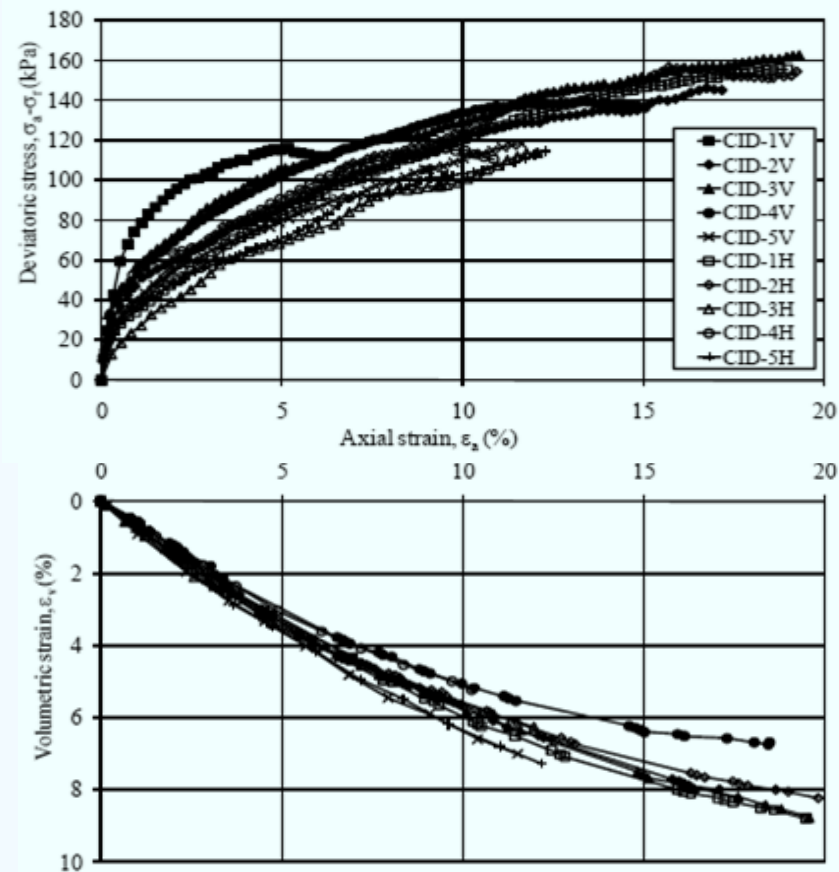


Fig. 2. Results of the CID-tests

Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie

ANISOTROPY OF THE MECHANICAL PROPERTIES

Table 4. Variation of the ratios of anisotropy with the effective confining stress

N°	σ'_c (kPa)	CK ₀ IU-tests		EK ₀ IU-tests		$\mu = \frac{s_u _{EK_0IU}}{s_u _{CK_0IU}}$	$\kappa = \frac{E_u _{EK_0IU}}{E_u _{CK_0IU}}$
		s_u (kPa)	E_u (MPa)	s_u (kPa)	E_u (MPa)		
1	50	36.91	8.79	20.46	5.35	0.55	0.61
2	40	31.71	7.95	17.81	2.08	0.56	0.26
3	30	20.78	3.77	11.60	0.82	0.56	0.22

s_u – résistance au cisaillement non drainée

E_u – module de déformation non drainé

Anisotropie de résistance

Anisotropie de déformabilité

Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope

Table 5. Young's moduli and Poisson's ratios values

Vertical samples			Horizontal samples		
Tests	E'_v (MPa)	ν'_{vh}	Tests	E'_h (MPa)	ν'_{hh}
CID-1V	17.4	0.13	CID-1H	12.4	0.21
CID-2V	16.3	0.11	CID-2H	10.9	0.22
CID-3V	16.7	0.15	CID-3H	4.4 ^a	0.22
CID-4V	22.8	0.19	CID-4H	8.6	0.32
CID-5V	9.2 ^a	0.11	CID-5H	7.6	0.09 ^a
Mean values	18.3	0.14	Mean values	9.9	0.24
Degree of anisotropy $n=9.9/18.3=0.54$					
^a - value considered as aberrant					

$$E'_v = \left. \frac{d(\sigma_a - \sigma_r)}{d\varepsilon_a} \right|_V$$

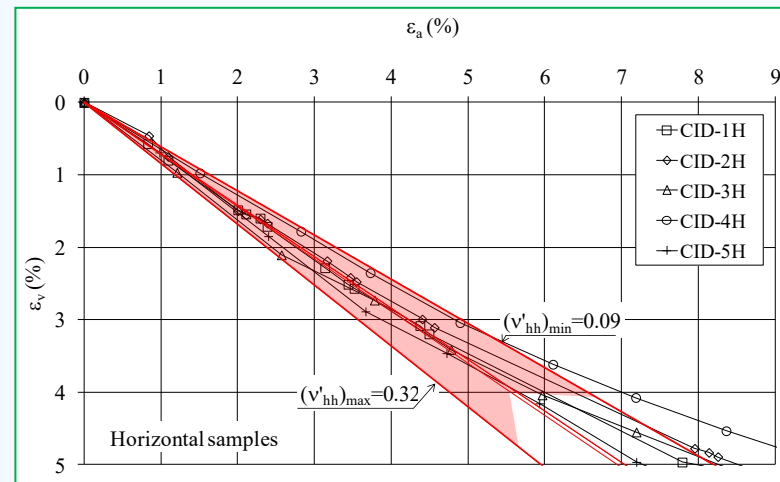
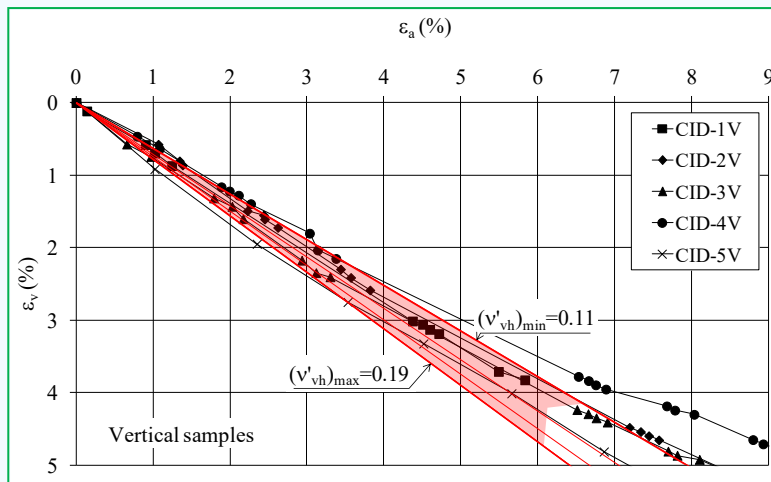
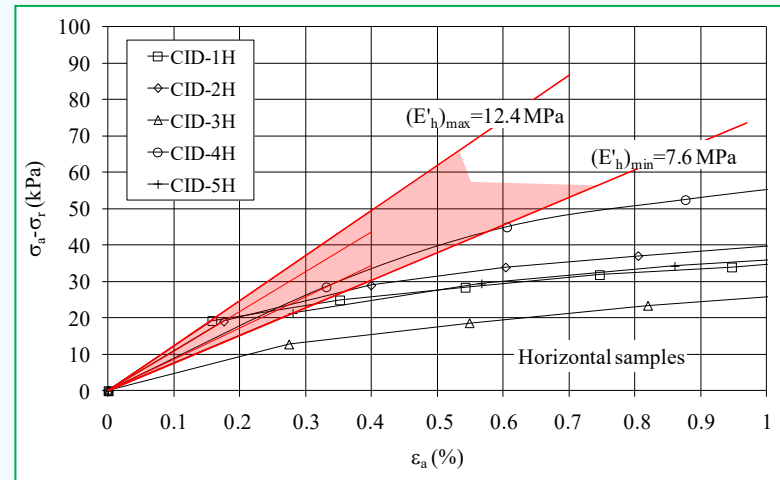
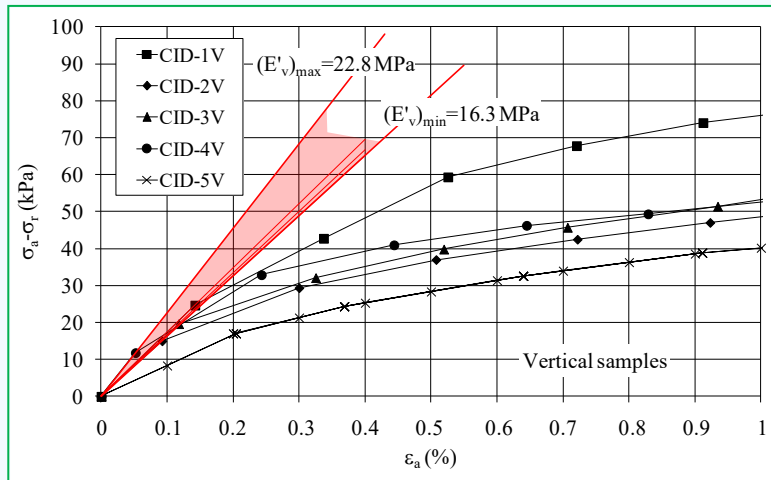
$$E'_h = \left. \frac{d(\sigma_a - \sigma_r)}{d\varepsilon_a} \right|_H$$

$$\nu'_{vh} = \frac{1}{2} \left(1 - \left. \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_a} \right|_V \right)$$

$$\nu'_{hh} = 1 - n \nu'_{vh} - \left. \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_a} \right|_H$$

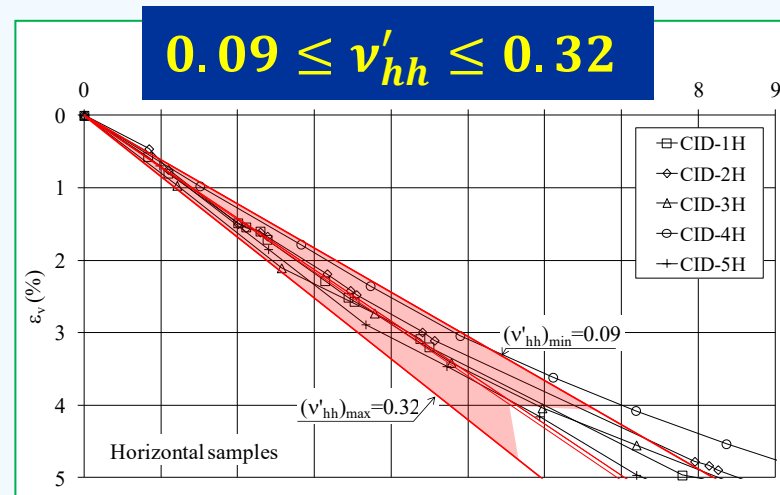
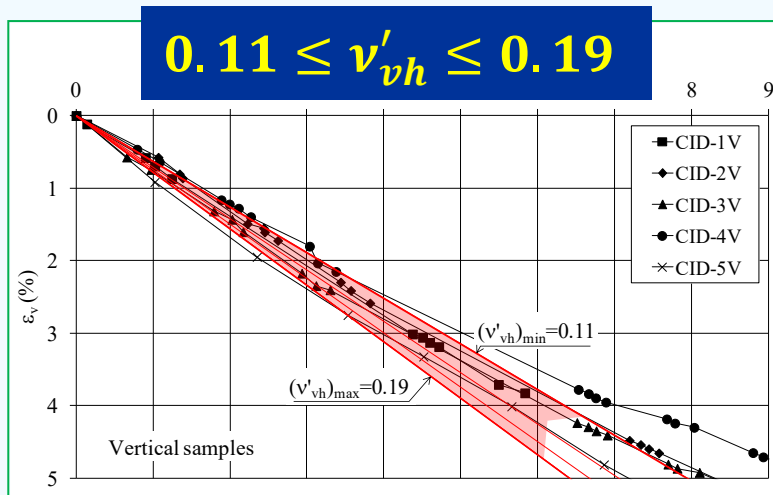
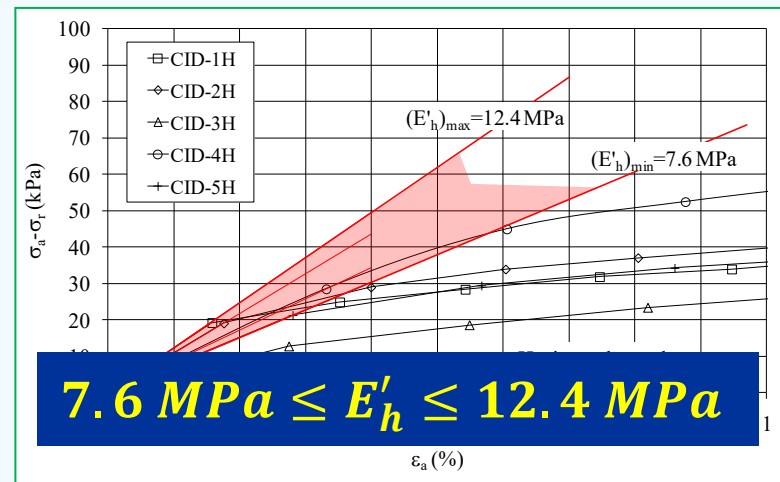
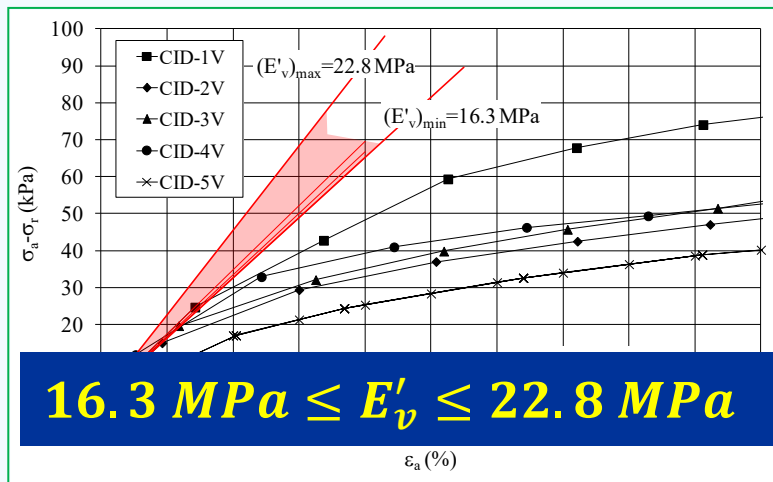
Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie



Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

□ Cas du comportement élastique linéaire aélotrope



Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie

Table 8. Computed values of the vertical shear modulus starting from some empirical expressions

Authors	Expressions of G'_v	Values of G'_v (MPa)
WOLF (1945)	$\frac{nE'_v}{1+n+2v'_{vh}}$	4.7
CARRIER (1946)	$\frac{E'_v}{1-nv'^2_{vh}+2v'_{vh}(1+v'_{hh})+\frac{1-v'^2_{hh}}{n}}$	5.3
BARDEN (1963)	$\frac{nE'_v}{1+n+2nv'_{vh}}$	5.2
WIENDIECK (1964)	$\frac{nE'_v}{1+\sqrt{n}+2nv'_{vh}}$	4.6
ZIENKIEWICZ (1972)	$\frac{(1-nv'^2_{vh})(1-v'_{hh})E'_v}{(1-v'_{hh}-2nv'^2_{vh})\left(1-nv'^2_{vh}+\frac{1-v'^2_{hh}}{n}\right)}$	6.0
GARNIER (1973)	$\frac{nE'_v}{\sqrt{8(1+n^2)}-1-n-2nv'_{vh}}$	5.5
Mean value		5.2

Exemple : Argile molle de Guiche, France (Khemissa et al., 1993)

❑ Cas du comportement élastique linéaire a otropie

Paramètres d'a otropie de quelques sols naturels

Sables : *La mesure directe des paramètres d'élasticité a otropie des sables a été rarement effectuée (très peu de données expérimentales).*

Argiles : *Pour les argiles, les résultats expérimentaux sont plus nombreux. Des valeurs typiques sont données ci-après.*

Argile	z (m)	w (%)	E'_v (MPa)	E'_h (MPa)	G'_v (MPa)	ν'_{hh}	ν'_{vh}
Cubzac-les-Ponts, France <i>Magnan et al. (1982)</i>	5 – 6	82	2.70	1.94	1.75	0.11	0.24
Guiche, France <i>Khemissa et al. (1993)</i>	10 – 14	60	18.30	9.90	6.10	0.21	0.14
Muar-Flat, Malaisie <i>Balasubramanian et al. (1989)</i>	<10	80	6.75	4.46	3.05	0.10	0.25
Leda, Canada <i>Lo et al. (1977)</i>	<10	65	7.10	4.50	2.80	0.20	0.19
Bonsecours, Québec, Canada <i>Yong and Silvestri (1979)</i>	-	66	6.90	4.30	-	0.20	0.35
Londres, United Kingdom <i>Atkinson (1973)</i>	-	28	11.03	22.06	-	0.00	0.19

❑ Cas du comportement élastique linéaire aélotropie

Relations de comportement
(Conditions triaxiales)

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_h \\ \sigma'_v \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E'_v(1 - nv_{vh}'^2)}{(1 + v'_{hh})(1 - v'_{hh} - 2nv_{vh}'^2)} & \frac{E'_h v'_{vh}}{1 - v'_{hh} - 2nv_{vh}'^2} & 0 \\ \frac{E'_h v'_{vh}}{1 - v'_{hh} - 2nv_{vh}'^2} & \frac{E'_h(1 - v'_{hh})}{1 - v'_{hh} - 2nv_{vh}'^2} & 0 \\ 0 & 0 & G'_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_h \\ \varepsilon_v \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

Merci de votre attention

Fin de la 1^{ère} Partie

EXERCICES

Ex. 1 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par les coefficients de Lamé λ et μ :

$$\bar{u} \begin{cases} u_1 = kx_2 \\ u_2 = kx_3 \\ u_3 = kx_1 \end{cases} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.
- Déterminer le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

EXERCICES

Ex. 2 Soit le tenseur des contraintes appliqué en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & k+2 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2),$$

où $k \geq 0$ désigne le paramètre de chargement.

- Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.
- Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

EXERCICES

Ex. 3 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de compressibilité volumique K et le module de cisaillement G :

$$\bar{u} \begin{cases} u_1 = k(x_2 + x_3) \\ u_2 = k(x_3 + x_1) \\ u_3 = k(x_1 + x_2) \end{cases} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- A. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.
- B. Déterminer le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.

EXERCICES

Ex. 4 Soit le tenseur des contraintes appliqué en un point d'un solide élastique isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de Poisson ν :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -k & 0 & k \\ 0 & 2k & 0 \\ k & 0 & -k \end{bmatrix} \quad (N/mm^2),$$

où $k \geq 0$ désigne le paramètre de chargement.

- A. Déterminer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.
- B. Construire le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$ résultant de la sollicitation appliquée, puis calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Commenter les résultats trouvés après chaque calcul.