

OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT :

Ce cours a pour objet d'initier l'étudiant aux notions théoriques et expérimentales de mécanique des solides déformables.

CONNAISSANCES PRÉALABLES RECOMMANDÉES :

Mécanique rationnelle, Thermodynamique, Mécanique des milieux continus.

CONTENU DE LA MATIÈRE :

<u>Chapitre I :</u>	MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE (2 SEMAINE)
<u>Chapitre II :</u>	CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE ET CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE (3 SEMAINES)
<u>Chapitre III :</u>	ELASTICITÉ ET VISCOÉLASTICITÉ (5 SEMAINES)
<u>Chapitre IV :</u>	PLASTICITÉ ET VISCOPLASTICITÉ (4 SEMAINES)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES :

1. J. Lemaitre, J.L. Chaboche. *Mécanique des solides déformables et endommageables*. Ed. Dunod.
2. J. Lemaitre, J.L. Chaboche, A. Benallal, R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Ed. Dunod.
3. D. François, A. Pineau, A. Zaoui. *Elasticité et plasticité*. Ed. Lavoisier.
4. S. Timoshenko, J.M. Goodier. *Théorie de l'élasticité*. Ed. Librairie Polytechnique Ch. Béranger.
5. J. Salençon. *Elastoplasticité*. Ed. Ecole polytechnique, France.
6. B. Halphen, J. Salençon. *Elasto-plasticité*. Ed. Presses des ponts, France.
7. V.A. Lubarda. *Elastoplasticity theory*. Ed. CRC Press.
8. R. Richards Jr. *Principles of solid mechanics*. Ed. CRC Press.
9. Robert J. Asaro, Vlado A. Lubarda. *Mechanics of solid and materials*. Ed. Cambridge University Press.

Chapitre I :

MÉCANISMES PHYSIQUES DE DÉFORMATION ET DE RUPTURE

Ce chapitre introduit les bases physiques nécessaires à la compréhension des lois macroscopiques utilisées ensuite en mécanique des milieux continus.

L'objectif est de relier :

- la structure microscopique des matériaux,
- aux mécanismes élémentaires de déformation,
- puis aux modes de rupture observés à l'échelle macroscopique.

Les matériaux de structure se classent selon la nature des liaisons interatomiques, car ce sont elles qui gouvernent rigidité, ductilité et rupture.

Famille	Type de liaison	Propriétés dominantes
Métaux	Liaison métallique	Ductilité, conduction, écrouissage
Céramiques	Ionique / covalente	Rigidité élevée, fragilité
Polymères	Covalente + liaisons faibles	Viscoélasticité, faible module
Composites	Structure multiphasée	Anisotropie contrôlée

1. Métaux et Alliages :

1.1. Structure :

1.1.1. Éléments de cristallographie :

A. Atomes :

Les métaux et alliages sont formés par des groupements d'atomes reliés par des forces électromagnétiques délocalisées (gaz d'électrons) entre atomes.

En général, les métaux et alliages se trouvent sous forme polycristalline, c'est-à-dire qu'ils sont constitués d'un agrégat de cristaux ou de grains.

B. Monocristaux :

L'état cristallin se définit par une disposition ordonnée. La majorité des réseaux cristallins métalliques se classent dans l'un des trois systèmes suivants :

- Cristal cubique centré (C.C.) (Fig. 1), exemples : Fe α , Cr, Mo ;
- Cristal cubique à faces centrées (C.F.C.) (Fig. 2), exemples : Cu, Ag, Al, Ni ;
- Cristal hexagonal compact centré (H.C.) (Fig. 3), exemples : Mg, Zn, Ti α , Co α .

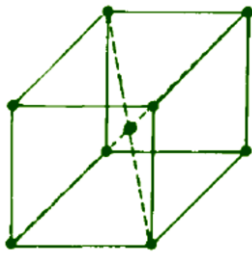


Fig. 1 – Cristal C.C.

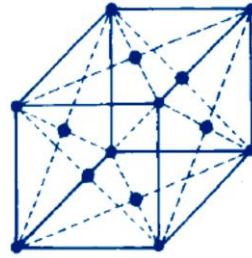


Fig. 2 – Cristal C.F.C.

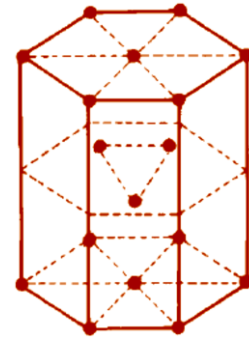


Fig. 3 – Cristal H.C.

Ces mailles possèdent des axes et des plans de symétrie qui sont en général des plans de densité maximale d'atomes (encore dénommés plans de plus grande équidistance ou plans denses), offrant une moindre résistance au cisaillement (entre lesquels la cohésion est la plus faible), d'équation :

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

où les inverses des coefficients a_1, a_2, a_3 sont des multiples entiers de la distance interatomique. Cela permet de réécrire l'équation des plans denses sous la forme synthétique :

$$hx_1 + kx_2 + lx_3 = \text{constante entière}$$

les plus petits entiers (h, k, l) sont les indices de **Miller** (Fig. 4) d'une famille de plans parallèles.

Une direction cristallographique est définie par une droite provenant de l'origine du repère et traversant la position d'un atome. Elle est désignée par les coordonnées de cet atome exprimées en nombre de distances interatomiques. Par exemple, on a pour une structure CFC quatre familles de plans denses de normale les vecteurs $(hkl) = (111)$ ou $(\bar{1}11)$ ou $(1\bar{1}1)$ ou encore $(11\bar{1})$, la notation $\bar{1}$ signifiant -1. Les directions denses correspondantes (vecteurs appartenant aux plans denses) sont notées entre crochets, par exemple $\langle \bar{1}10 \rangle$.

La structure des alliages peut être celle de l'un de ses éléments constitutifs ou bien une structure cristalline différente.

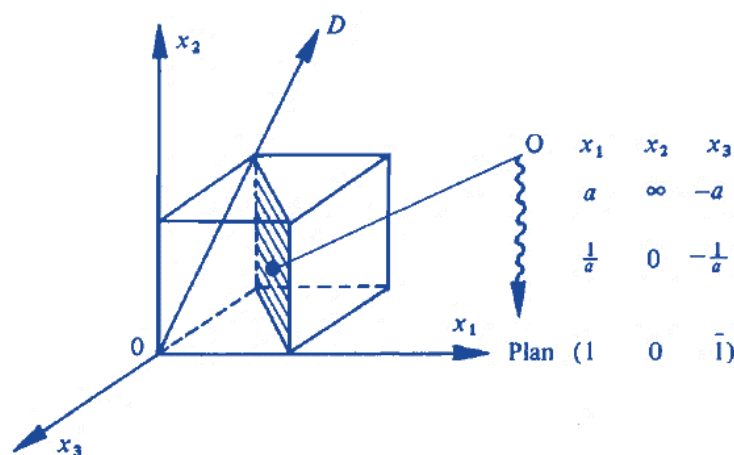


Fig. 4 – Indice de Miller.

- Les solutions solides peuvent comporter une substitution d'un atome de la structure cristalline (comme Al dans Fe), ou l'insertion d'atomes à faible volume (comme C dans Fe pour l'austénite, tel que représenté sur la Fig. 5).

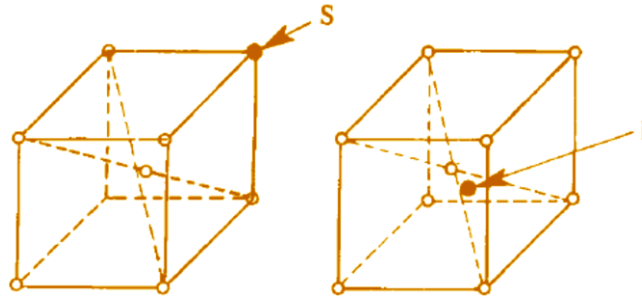


Fig. 5 – Solution solide de substitution (S) ou d’insertion (I).

- Les métaux peuvent avoir différentes formes ou phases, suivant le niveau de température et de pression. Dans le cas des aciers, les phases γ (C.F.C. pour l’austénite) et α (C.C. pour ferrite du système fer-carbone). Dans la structure $\text{Fe}\alpha$, chaque atome de fer a 8 voisins tandis qu’il en a 12 dans la structure $\text{Fe}\gamma$. L’empilement des atomes devient donc plus compact au passage de la forme α à la forme γ .

C. Polycristaux :

Les métaux et alliages se forment par solidification de la matière liquide, avec une réduction de la distance entre les atomes. Des noyaux de cristaux se forment aléatoirement avec la baisse de température, qui se développent en cristaux uniques limités par les cristaux voisins. L’ensemble de ces monocristaux forme un polycristal.

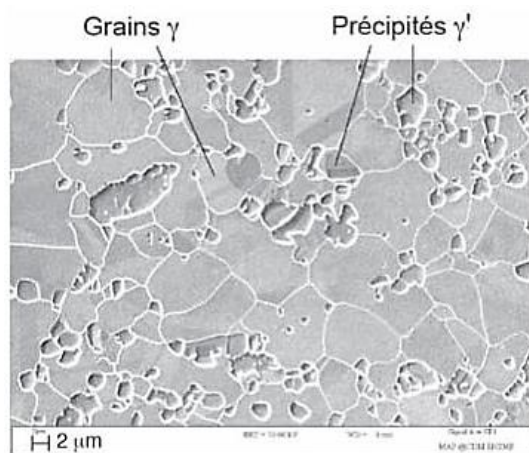


Fig. 6 – Exemple de cristaux. Microstructure du superalliage base nickel Udimet 720. Observation MEB (d’après M. Mazière).

1.1.2. Défauts cristallins :

Les déformations plastiques et la rupture ductile sont causées par la présence de défauts perturbant le réseau cristallin.

A. Défauts ponctuels et surfaciques :

Les défauts atomiques ponctuels sont formés par des atomes de substitution ou d’insertion dans les solides, ainsi que par des lacunes. Ils causent une perturbation locale de la structure cristalline.

Les défauts surfaciques sont des surfaces de séparation entre des cristaux ou des parties de cristaux ayant des orientations ou des natures différentes. Ils ont une épaisseur d’environ 4 à 5 diamètres atomiques :

- Joints de grains : surfaces de séparation entre différents grains ou cristaux dans les polycristaux.

- Boucles et cellules de dislocations : défauts linéaires dans la structure cristalline.
- Joints de macles : surfaces de séparation entre des grains qui sont également des plans de symétrie miroir pour les réseaux de cristallites.
- Interface entre deux phases : surface de séparation entre deux phases distinctes.

Les défauts de cohésion qui provoquent la rupture sont les microfissures et les cavités, qui sont des surfaces de séparation de la matière.

B. Dislocations (défauts linéiques) :

Les défauts tels que les lignes de dislocation sont les principaux responsables de la plasticité des métaux. Ils représentent un défaut de l'assemblage périodique des atomes, qui est dû à des différences légères dans les champs électromagnétiques entre les atomes.

- Dislocation coin ou défaut créé par la translation de la partie supérieure du cristal (Fig. 7).

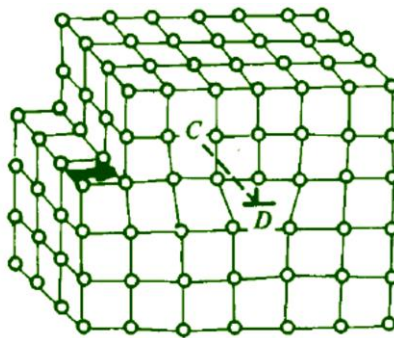


Fig. 7 – Dislocation coin de ligne DC.

- Dislocation vis ou défaut créé par une rotation locale de la partie supérieure du cristal (Fig. 8).

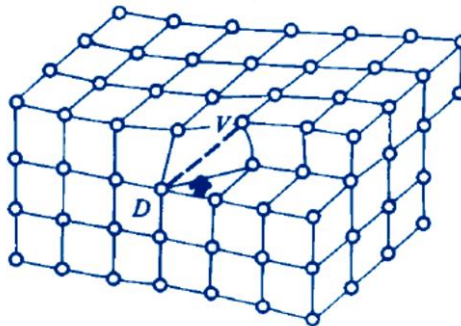


Fig. 8 – Dislocation vis de ligne DV.

- Boucle de dislocation (Dislocation réelle) ou ligne qui, par exemple, rejoint une dislocation coin pure à une dislocation vis pur (Fig. 9).

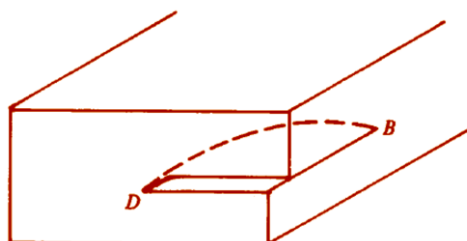


Fig. 9 – Boucle de dislocation de ligne BD.

Les dislocations se forment à la formation des cristaux, et leur concentration est très élevée dans la plupart des métaux et alliages. Elle varie de 10^3 km/cm^3 pour les cristaux correctement recuits à 10^7 km/cm^3 pour les échantillons très écrouis.

- **Vecteur de Burgers :**

On peut identifier une dislocation par le vecteur « défaut de fermeture » d'un contour entourant la ligne de dislocation.

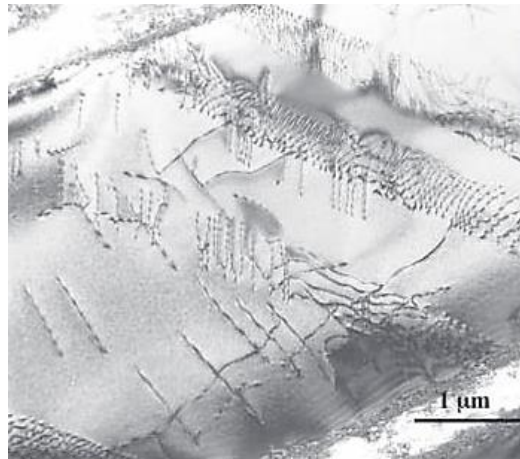


Fig. 10 – Microstructure de dislocations dans l'alliage Ti 6242-Si.

Prenons l'exemple d'un cristal cubique simple parfait, ainsi qu'un cristal contenant une dislocation coin de trace L (Fig. 11). Dans le second cristal, prenons un contour fermé $ABCD$ qui encercle le point L dans le sens direct par rapport à un repère orthonormé. Dans le cristal parfait, reproduisons ce même circuit en comptant le même nombre de distances interatomiques pour obtenir le contour : $A'B'C'D'$. Pour refermer ce contour, il est nécessaire d'ajouter le vecteur $\vec{E'A'}$, qui représente par définition le vecteur de Burgers $\vec{b}$.

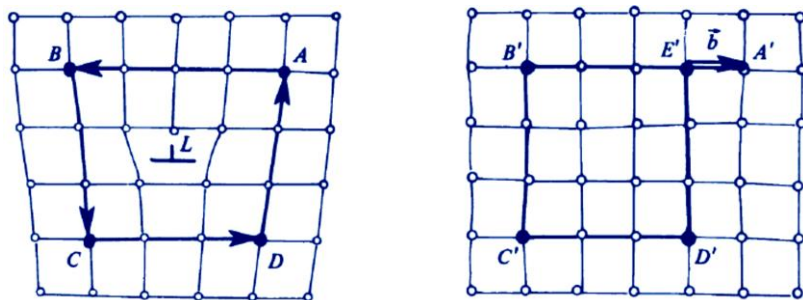


Fig. 11 – Vecteur de Burgers.

Le vecteur de Burgers possède plusieurs propriétés importantes :

- Il est indépendant du contour choisi.
- Son module définit la distance fictive nécessaire pour créer la dislocation.
- Il est identique sur toute la ligne de dislocation.
- Le vecteur unitaire de la ligne de dislocation est représenté par $\vec{t}$:
 - Si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires, la dislocation est de type coin.
 - Si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ sont parallèles, la dislocation est de type vis.

- Si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ font un angle quelconque, la dislocation est mixte.
- Enfin, pour un contour qui entoure plusieurs dislocations, le vecteur de fermeture est la somme des vecteurs de Burgers de ces dislocations.
- **Energie associée aux dislocations :**

En supposant que les dislocations engendrent uniquement des déformations élastiques dans le réseau, et en considérant le voisinage d'une dislocation comme un milieu continu élastique linéaire, il est possible de calculer l'énergie élastique stockée w_e dans la matière sous forme de contraintes et de déformations internes. Pour une dislocation de type coin ou vis (Fig. 12), dont la longueur unitaire et le module de Burgers sont respectivement représentés par b , et dans un milieu ayant un module de cisaillement μ , cette énergie peut être estimée à :

$$w_e = \mu b^2 \text{J/m}$$



Fig. 12 – Energie associée aux dislocations.

1.2. Mécanismes physiques de déformation :

1.2.1. Déformations élastiques :

Les déformations élastiques sont des modifications atomiques causées par les sollicitations extérieures, qui se traduisent par des variations des espaces interatomiques et des mouvements réversibles de dislocations. Les modifications géométriques associées à ces déformations sont fondamentalement réversibles.

1.2.2. Déformations permanentes :

Les déformations permanentes, également appelées déformations plastiques ou viscoplastiques, se produisent à un niveau cristallin et se combinent aux déformations élastiques. Elles résultent des déplacements relatifs d'atomes.

A. Déformations par glissements et maclage :

Les plans de symétrie des mailles, qui sont également les plans les plus concentrés en atomes, correspondent aux plus grandes distances entre les plans parallèles. Par conséquent, c'est dans ces plans que les glissements de cisaillement peuvent se produire dans la direction de la contrainte tangentielle maximale la plus élevée.

Exemple : plans (111) dans les cristaux C.F.C., plans (110) et (112) dans les cristaux C.C. Ils prennent la forme de « bandes de glissements » parallèle, provoquent des marches sur la surface extérieure des échantillons (Fig. 13a), ou bien de « macles » qui sont des glissements symétriques par rapport à un plan (Fig. 13b).

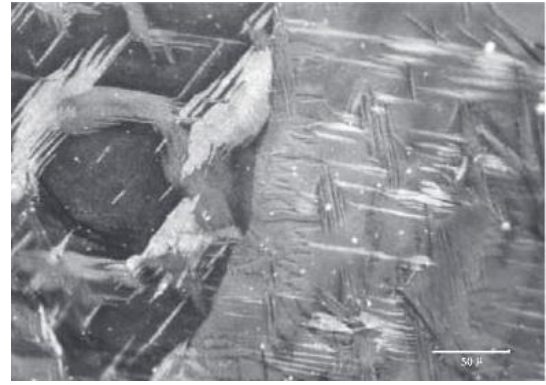
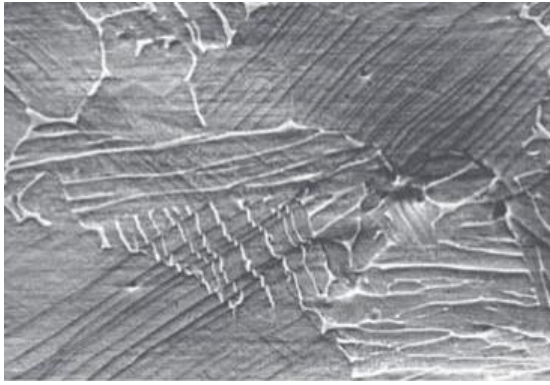


Fig. 13 – (a) Lignes de glissement intenses à la surface d'une éprouvette de titane TA6V sollicitée en fatigue.
(b) Macles de déformation dans deux grains de zinc d'un revêtement de tôle d'acier galvanisé.

B. Déformation par mouvements de dislocations :

Le réseau cristallin est grandement perturbé par la présence de dislocations. Leur capacité à se déplacer est à l'origine des déformations permanentes uniformes à une échelle macroscopique.

Déplacement par glissement : lorsqu'une dislocation coin ou vis se déplace sous l'influence d'une force extérieure et traverse un cristal, elle provoque un déplacement irréversible d'un vecteur équivalent au vecteur de Burgers.

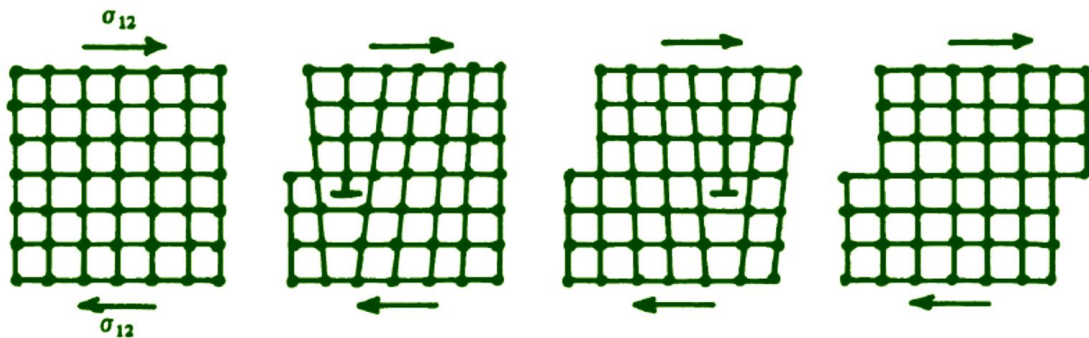


Fig. 14 – Déplacement par glissement d'une dislocation.

Déplacement par montée : Une dislocation coin peut se déplacer en traversant le cristal de manière perpendiculaire à son plan de glissement, entraînant un transport de matière.

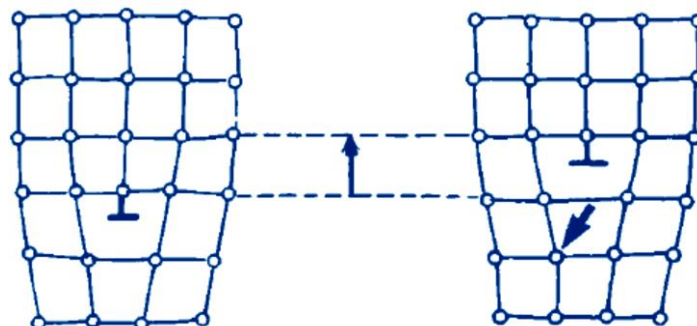


Fig. 16– Déplacement par montée d'une dislocation.

C. Sources de dislocations :

Les déformations permanentes sont causées par les mouvements de dislocations. De même, l'augmentation des déformations plastiques entraîne une augmentation de la densité de dislocations, ce qui augmente les blocages et conduit au durcissement par écrouissage.

1.2.3. Limite d'élasticité :

Il est possible de déterminer aisément la limite élastique d'un empilement parfait d'atomes en considérant que la force de cisaillement requise pour faire glisser un ensemble d'atomes dans un plan sur un autre est une fonction sinusoïdale ayant une période équivalente à la distance entre atomes (selon l'hypothèse de Frenkel).

En considérant que la contrainte tangentielle à la position d'équilibre est liée linéairement à la déformation correspondante via le module de cisaillement μ , on peut déterminer que le maximum τ_Y de cette contrainte, qui représente la limite de réversibilité du mouvement, est calculé :

$$\tau_Y = \frac{\mu}{2\pi}$$

La valeur correspondante est environ 100 fois supérieure aux limites d'élasticité en cisaillement des métaux courants, mais elle est très proche de ce qui est constaté sur les « whiskers » ou les fibres minces formées par des empilements d'atomes.

Exemple :

Limites d'élasticité théorique :	Fer pur Whiskers de fer	$\tau_Y = \frac{84700}{2\pi} = 13550\text{MPa}$
Limites d'élasticité mesurée :	Fer pur Whiskers de fer	$\tau_Y = 28\text{MPa}$ $\tau_Y = 11000\text{MPa}$

1.2.4. Déformation des polycristaux :

Pour mieux comprendre les hypothèses de base sur lesquelles repose la modélisation, examinons les étapes du processus de déformation d'un polycristal sous une contrainte extérieure unidimensionnelle qui augmente puis diminue (Fig. 17) :

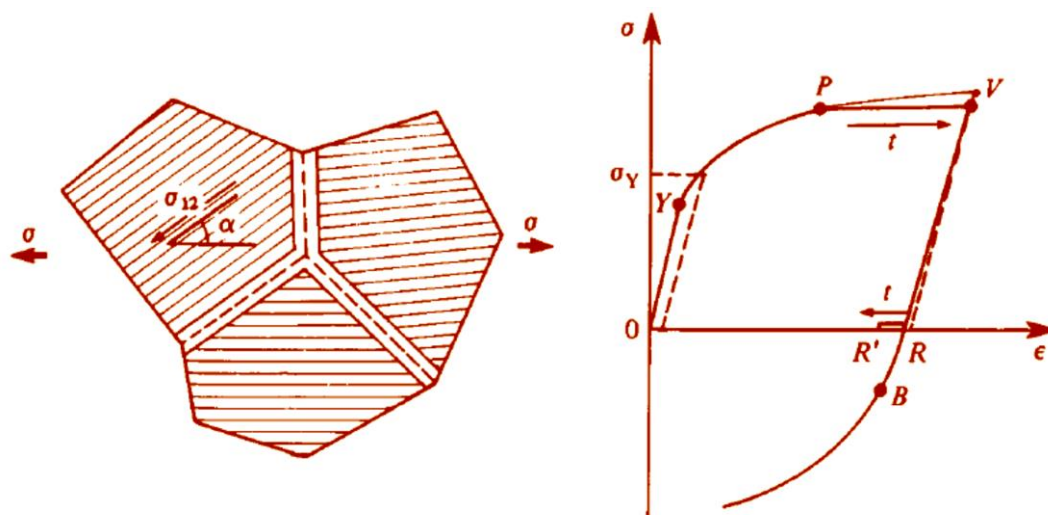


Fig. 17– Déformation d'un polycristal.

Déformation élastique (0Y) : Les déformations élastiques sont des mouvements relatifs réversibles des atomes.

Limite d'élasticité (point Y) : Elle est caractérisée par l'état de contrainte ou de déformation qui engendre les premiers mouvements irréversibles de dislocations.

Déformation plastique (YP) : Les premiers glissements apparaissent dans les cristaux qui possèdent des plans de glissement cristallographiques orientés à $\alpha = \pi/4$ de la direction de la sollicitation σ , là où la contrainte tangentielle σ_{12} est maximale. Elle est stable, chaque état est un état d'équilibre élastoplastique.

Ecrouissage ou consolidation (YP) : Lorsque la contrainte augmente, la densité de dislocations augmente, mais le nombre de points de blocage augmente davantage, ce qui signifie que la déformation ne peut progresser que si la sollicitation augmente également. Ce phénomène, connu sous le nom d'écrouissage, se traduit par une augmentation de la résistance à la déformation.

Déformation viscoplastique (PV) : Lorsque la contrainte continue à augmenter, les glissements peuvent se propager à travers les joints des grains, ce qui est favorisé par l'activation thermique. La plupart de la déformation reste intergranulaire avec glissements et accumulation de dislocations. La déformation peut continuer sous contrainte constante et il n'y a plus de possibilité d'équilibre. Il y a alors un fluage progressif à une vitesse dépendante de la contrainte exercée, ce qui correspond au domaine de la viscoplasticité.

Restauration ou recouvrance (RR') : Lorsque le polycristal est déformé, les changements apportés à son agrégat dérivent de l'équilibre thermodynamique. Sous sollicitations nulles ou inversées, cet écart tend à se découvrir : la présence de lacunes et d'atomes interstitiels diminue, les dislocations de sens opposé s'annulent, et une recristallisation peut se produire. Ce processus de restauration dépend du temps et est amplifié par l'activation thermique.

Incompressibilité plastique ou viscoplastique : Les mouvements de glissement n'affectent pas la structure cristalline, le volume global de l'ensemble restant constant. Seules les déformations élastiques peuvent entraîner une modification significative du volume, tandis que l'augmentation de la densité des dislocations ne produit qu'une variation très faible.

1.2.5. Instabilités microstructurales :

Les instabilités de l'état métallurgique de la microstructure qui se traduisent par des variations de résistance au fil du temps sont généralement provoquées par des variations de température telles que des changements de phase ou des précipitations.

1.3. Mécanismes physiques de rupture :

Les déformations élastiques et permanentes observées respectivement au niveau des atomes et des plans cristallins préservent la cohésion de la matière. En revanche, la rupture, par nature, détruit cette cohésion en créant des discontinuités surfaciques ou volumiques dans la matière. Cette rupture se produit donc à une échelle plus grande, au niveau des cristaux.

1.3.1. Rupture fragile :

La rupture dite "fragile" ne provoque que des ruptures de liaisons interatomiques sans qu'il y ait de déformations plastiques globales significatives. Ces ruptures se produisent lorsque l'énergie de déformation locale due aux contraintes externes atteint une valeur égale à l'énergie nécessaire pour briser la cohésion atomique.

La rupture fragile par clivage est une séparation directe qui se produit selon des plans cristallographiques spécifiques (par exemple le plan (100) pour le fer). Dans un cristal, plusieurs surfaces de clivage parallèles peuvent apparaître et se rejoindre perpendiculairement sous forme de "marches" disposées en "rivière". Aux joints de grains, les surfaces de clivage changent de direction pour suivre celle des plans cristallographiques de clivage, comme illustré dans la figure 18.

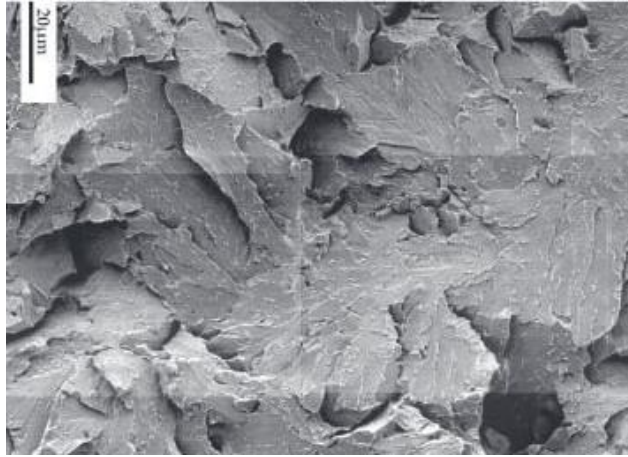


Fig. 18– Rupture fragile par clivage dans un acier AE4-50 (d'après A. Lambert-Perlade).

La rupture par clivage est peu fréquente dans les cristaux cubiques à faces centrées (C.F.C.), mais elle est courante dans les cristaux cubiques centrés (C.C.), tels que les aciers à faible teneur en carbone, ainsi que dans les cristaux hexagonaux compacts (H.C.), tels que le zinc et le magnésium.

La rupture intergranulaire correspond à un clivage qui suit les joints de grains, et elle peut s'exprimer sous deux formes :

- La rupture fragile peut survenir à basse température lorsque des éléments d'impuretés se concentrent aux joints de grains, diminuant ainsi l'énergie de cohésion de ces joints ;
- La rupture intergranulaire par fluage est généralement observée à des températures moyennes et élevées. Elle peut se produire avec ou sans une déformation viscoplastique globale significative, ce qui explique pourquoi elle est qualifiée de "fragile" (voir Figure 19).

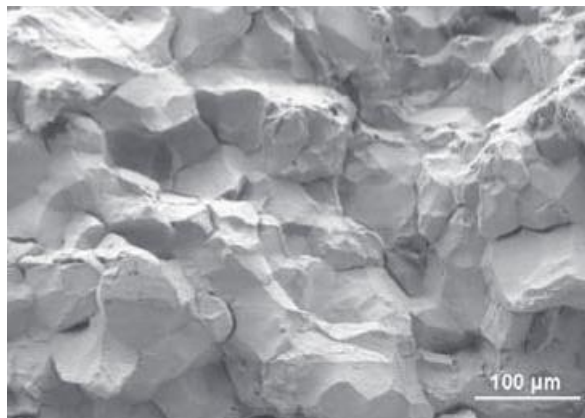


Fig. 19– Faciès de rupture intergranulaire en rupture fragile par fluage d'un acier austénitique inoxydable (d'après A. Pineau).

1.3.2. Rupture ductile :

La rupture ductile se produit lorsque des déformations locales très importantes sont engendrées près des défauts cristallins, causant une instabilité. Les défauts qui peuvent amorcer la rupture ductile incluent :

- les particules d'éléments d'addition dans les alliages,
- les inclusions,
- les précipités de mise en solution par traitements thermiques,

- les empilements de dislocations,
- les joints de grains.

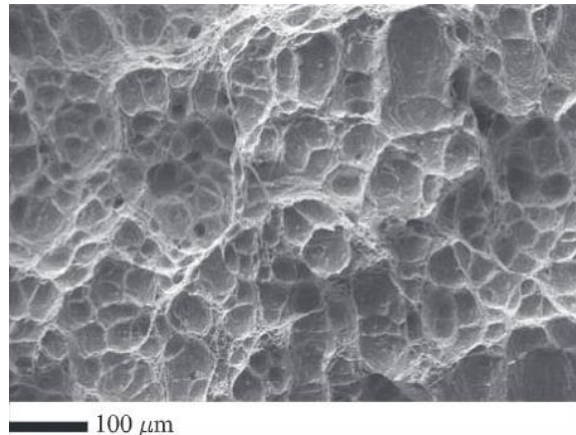


Fig. 20– Rupture ductile transgranulaire dans un Acier d'oléoduc (X 100) (d'après A. Pineau).

1.3.3. Rupture par fatigue d'un polycristal :

Il est intéressant de décrire sommairement la rupture par fatigue sous sollicitations cycliques afin de bien distinguer les différentes phases pour des fins de modélisation. Imaginons donc un polycristal soumis à une sollicitation périodique :

- Phase d'accommodation (adaptation) ;
- Phase d'amorçage des microfissures (stade I) ;
- Phase de croissance des microfissures (stade II) ;
- Phase de progression d'une microfissure (Fig. 21).

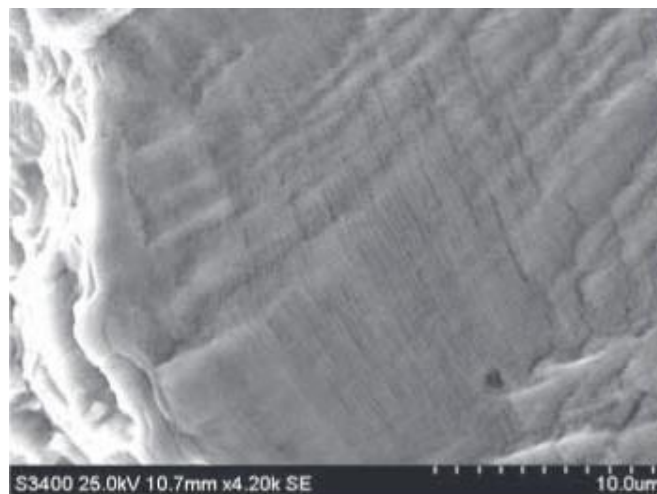


Fig. 21– Stries de fatigue à la surface de rupture d'un acier inoxydable austénitique (AISI 316L).

1.3.4. Effets de l'environnement :

Les différents mécanismes de rupture décrits précédemment peuvent être influencés par des réactions chimiques engendrées par un environnement agressif. La corrosion, en particulier la corrosion sous contrainte, affecte les joints de grains et peut accélérer la rupture intergranulaire.

La présence d'hydrogène dans les aciers, même à faible teneur, peut favoriser la fissuration par diffusion et concentration dans les régions très sollicitées.

Le phénomène d'endommagement le plus impacté est la fatigue, en raison de la localisation préférentielle des défauts en surface, dans une région plus facilement accessible aux agents agressifs.

Dans le cas de la propagation de fissures de fatigue, l'effet de l'environnement peut ralentir ou accélérer la vitesse de progression, selon qu'il y a émoussement de la pointe de fissure ou augmentation de la concentration de contrainte par effet de coin d'une pénétration partielle. Ces phénomènes sont encore mal compris et donc difficiles à modéliser.

2. Autres Matériaux :

2.1. Polymères :

2.1.1. Structures :

A. Molécules :

Les matériaux polymères solides se composent de molécules en chaîne, dans lesquelles le squelette est principalement constitué d'atomes de carbone reliés par des liaisons covalentes carbone-carbone d'une énergie à rupture d'environ 300 kJ/mole. D'autres atomes tels que l'hydrogène, l'oxygène, l'azote, etc. sont liés aux atomes de la chaîne ainsi qu'à ceux des molécules voisines par des liaisons polaires ou de type Van der Waals dont l'énergie à rupture n'est que d'environ 10 kJ/mole (voir figure 22).

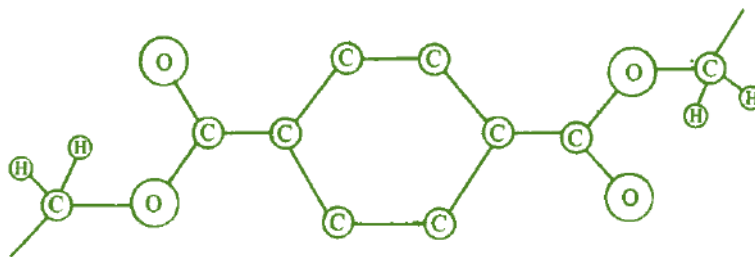


Fig. 22– Molécule (monomère) de polyéthylène téréphthalate (d'après I.M. Ward).

B. Arrangements amorphe et semi-cristallin :

La flexibilité des molécules permet différents modes d'organisation qui toutefois présentent un caractère beaucoup moins régulier que les cristaux métalliques.

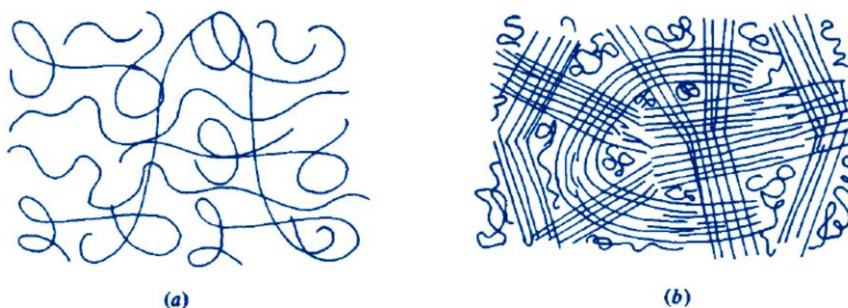


Fig. 23– Schémas d'arrangements amorphes (a), et semi-cristallins (b).

- Dans l'arrangement amorphe, les chaînes de polymères sont enchevêtrées au hasard à l'échelle d'un ensemble de molécules, mais avec un certain degré d'ordre à une échelle plus petite (Fig. 23). Ce type d'arrangement est présent dans des polymères tels que le plexiglas et le polystyrène.
- Lors de la polymérisation, sous l'effet de contraintes thermomécaniques, les molécules de certains polymères à longues chaînes ont tendance à s'organiser en paquets pour former des cristallites séparées par des régions amorphes. Ce type d'arrangement est présent dans des polymères tels que le nylon et le polyéthylène.

C. Différents Polymères :

La structure d'un polymère peut varier en fonction de la température, ce qui se traduit par quatre états différents. Ces états correspondent à une augmentation des volumes libres intermoléculaires avec la température et à une diminution des forces de liaison.

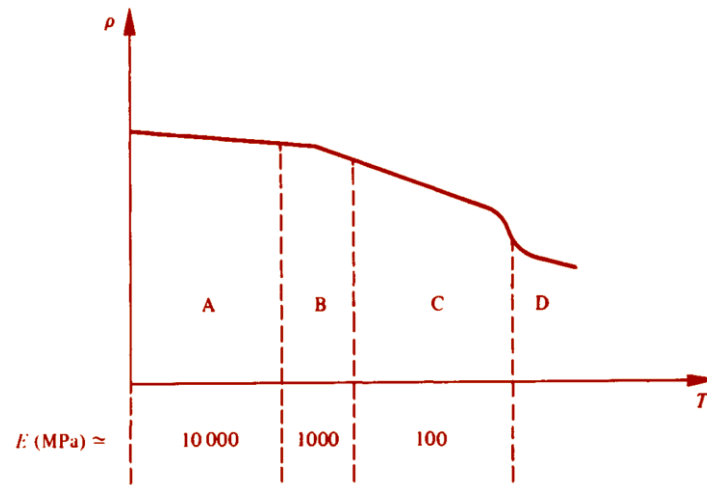


Fig. 24– États des polymères.

- *L'état vitreux (A)* : les verres organiques ont une faible tolérance aux déformations.
- *L'état de transition (B)* : on trouve dans cet état les polymères linéaires thermoplastiques tels que les cellulosiques, les polyamides, les polyester et les polyvinyli, ainsi que les polymères réticulés dont la décomposition chimique se produit avant la fusion, tels que les phénoplastes et les aminoplastes.
- *L'état caoutchouteux (C)* : les élastomères sont constitués de longues molécules interconnectées par des points de jonction relativement rares.
- *L'état fluide (D)* : les polymères dans cet état ont une viscosité élevée et présentent des mouvements moléculaires importants.

D. Composites fibres-résines :

Les matériaux composites sont formés par l'association de fibres immergées dans une résine, ce qui peut conduire à des matériaux ayant une résistance spécifique supérieure à celle de certains métaux. Les fibres couramment utilisées sont le verre, le kevlar, le bore et le carbone, avec des diamètres allant de quelques centièmes de millimètre à quelques dixièmes. Les résines époxy sont les plus utilisées. La proportion de fibres par rapport à la résine varie généralement de 50 à 70 % et l'agencement peut prendre différentes formes, notamment :

- *unidirectionnel* : le composite est constitué de fibres parallèles entre elles sous forme de barreaux ou de plaques (Fig. 25a) ;





Fig. 25– Structures de composites.

- *bidirectionnel* : par superposition de nappes unidirectionnelles croisées, ou bien par imprégnation de tissus (Fig. 25b) ;
- *tridirectionnel* : il est aussi possible de fabriquer des composites avec des fibres dans trois directions (Fig. 25c).

Tous les composites ont une forte anisotropie intrinsèque car la rigidité et la résistance des fibres sont généralement de 50 à 100 fois supérieures à celles des résines.

2.1.2. Mécanismes physiques de déformation :

A. Déformations viscoélastiques :

La plupart des polymères peuvent subir des déformations élastiques tant que la sollicitation reste en dessous d'une certaine valeur. Cependant, ces déformations élastiques engendrent des phénomènes dissipatifs qui se traduisent par une viscosité. Bien que la déformation soit réversible, elle ne se stabilise ou ne disparaît qu'après un certain temps. La limite de réversibilité est généralement d'environ quelques pour cent. Cependant, pour les élastomères dont la densité des liaisons est faible, cette limite peut atteindre 50 à 100 %.

B. Limite d'élasticité :

Des réorientations irréversibles de segments de chaînes et de cristallites lamellaires se produisent en fonction d'une valeur caractéristique de la sollicitation. Ces réorientations entraînent des déformations qui se superposent aux déformations élastiques et persistent même longtemps après l'arrêt de la sollicitation.

C. Déformations permanentes :

Les réorientations ont lieu à la fois dans les cristallites, où des dislocations sont générées, et dans les régions amorphes (*molles*), où des rotations importantes des liaisons ont lieu. Si la sollicitation est plus importante, la sous-structure peut être détruite par rupture des liaisons de plus faible énergie, tandis que de nouvelles liaisons peuvent être créées par simple rapprochement d'éléments actifs.

- Ces réorientations favorisent la formation de nouvelles cristallites qui renforcent la structure.
- Lorsque la densité des cristallites atteint une valeur stable, l'écoulement de fluage peut se produire sous contrainte constante.
- Enfin, tout comme pour les métaux, la déformation plastique est accompagnée d'une anisotropie due à une consolidation directionnelle.

2.1.3. Mécanismes physiques de rupture :

De manière très simplifiée, on peut dire que la rupture des polymères commence lorsque les liaisons moléculaires disparaissent sous l'effet combiné des sollicitations extérieures et de l'activation thermique. Tout comme les déformations, ce phénomène est sensible à la vitesse.

2.2. Matériaux granulaires : béton

2.2.1. Constitution du béton hydraulique :

Le béton utilisé dans la construction est généralement composé de granulats, de ciment et d'eau. Pour les bricoleurs, un mélange de béton efficace peut être réalisé avec une mesure (en volume) de ciment, deux mesures de sable sec, quatre mesures de gravier et une quantité d'eau appropriée.

A. Granulats :

Les granulats naturels sont généralement issus de dépôts alluvionnaires roulés ou de roches concassées de différentes natures telles que le silico-calcaire et le granit. Dans la fabrication des mortiers, on utilise des sables dont le diamètre des grains ne dépasse pas 5 mm. Pour les bétons, on utilise également des gravillons dont les diamètres peuvent atteindre 25 mm. Dans des cas très particuliers, tels que la construction de barrages, des cailloux (jusqu'à 100 mm) et des moellons (de 160 mm et plus) peuvent être utilisés.

B. Ciment :

Le ciment Portland est principalement composé de silicate tricalcique (environ 60%), de silicate bicalcique (environ 20%), de gypse (environ 3%), d'aluminate tricalcique (environ 10%) et d'aluminoferrite tétracalcique (environ 7%). Ces ingrédients sont réduits en poudre, dont les grains ont une taille d'environ 10 à 50 μm . Grâce à l'hydratation, ces constituants ont la capacité de se transformer en une véritable pierre artificielle.

C. Hydratation de la pâte de ciment

En mélangeant 66% de ciment et 33% d'eau en poids, on obtient une pâte qui durcit avec le temps. Au début de la prise, les ingrédients secs se dissolvent jusqu'à saturation et réagissent en solution pour former des hydrates qui se précipitent et enrobent les grains secs. Les cristaux formés sont principalement des hydrates de silicate de calcium, de l'hydroxyde de chaux et différents aluminates. La pâte reste fluide pendant quelques heures, puis durcit grâce à la croissance des cristaux de tobermorite et de portlandite issus des silicates. L'hydratation entraîne les phénomènes suivants :

- *Augmentation de la surface spécifique des grains* jusqu'à un facteur de 100 ;
- *Contraction chimique* de l'ordre de 0,1 à 0,3 mm/m. Des adjuvants récents peuvent modérer cette valeur ;
- *Dégagement de chaleur* (de 400 à 500 kJ/kg de ciment) ;
- *Durcissement en fonction du temps* : la résistance à la rupture en compression, normalisée à 0,1 (au 7^e jour), atteint 0,35 au bout de 2 jours, 1,5 au bout de 28 jours, 1,8 après un an et 2,2 après 10 ans.



Fig. 26– Béton 0/20mm granulats silico-calcaires de Seine (d'après G. Bernier).

2.2.2. Mécanismes physiques de déformation et de rupture :

La difficulté de séparer les phénomènes de déformation et de rupture réside dans le fait que les microfissures et les cavités initiales présentes avant toute sollicitation peuvent se développer en utilisant des mécanismes de rupture fragile, entraînant ainsi des déformations permanentes (voir Fig. 27).

- En deçà d'une certaine valeur de sollicitation, le phénomène de microfissuration est relativement insignifiant. La déformation observée au cours de cette première phase est le résultat de mouvements atomiques quasi-réversibles et peut être considérée comme élastique, avec une faible viscosité.
- La rupture fragile par décohesion pâte-grains est le phénomène prépondérant responsable de la déformation permanente et de la rupture. Elle est fortement influencée par la nature de la sollicitation. En compression, la limite d'élasticité ou la résistance à la rupture sont environ deux fois supérieures à celles observées en traction. C'est pourquoi le béton est principalement utilisé en compression.
- À mesure que la sollicitation augmente, les microfissures se propagent dans la pâte par décohesion, en s'alignant parallèlement à la contrainte si celle-ci est de nature compressive. Des glissements cristallins apparaissent dans les grains, contribuant ainsi à la déformation permanente à volume constant. L'endommagement causé par la microfissuration devient de plus en plus anisotrope.
- La quatrième phase est celle de la rupture. Des fissures macroscopiques se forment, la contrainte nécessaire pour engendrer de nouvelles déformations diminue, et le volume spécifique augmente. La rupture finale survient lorsque les macrofissures se rejoignent pour former une surface de discontinuité traversant tout l'objet.

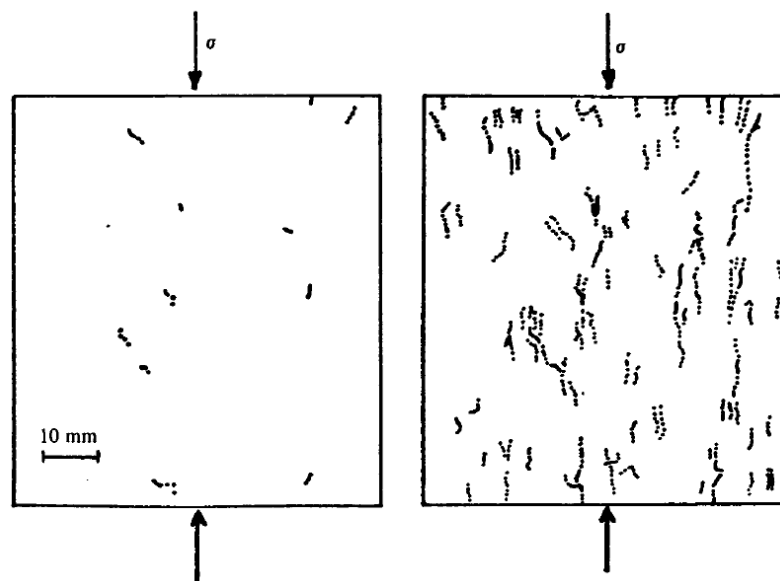


Fig. 27– Observations aux rayons X de l'évolution de la microfissuration dans un béton sollicité en compression (d'après M. Robinson).

2.3. Bois :

2.3.1. Structure anatomique des bois :

Les deux principales catégories de bois, à savoir les résineux et les feuillus, possèdent des structures distinctes, mais partagent des caractéristiques communes découlant de la croissance des arbres.

A. Hétérogénéité et anisotropie :

La croissance en diamètre des arbres résulte de la multiplication cellulaire dans le cambium, une couche située sous l'écorce du tronc et dont l'activité est saisonnière. Durant le printemps, des vaisseaux de grand diamètre se forment dans un tissu lâche (appelé bois de printemps), tandis qu'à la fin de l'été, l'activité ralentit, ce qui conduit à la formation d'un tissu plus serré et plus fibreux (bois d'été). Ces alternances engendrent des cernes concentriques qui confèrent à la coupe transversale des arbres un aspect macroscopique particulier (voir Fig. 28).

En plus de cette hétérogénéité radiale pseudopériodique, il existe une autre forme d'hétérogénéité liée au vieillissement de la partie centrale ou duramen, où les tissus s'épaississent comparativement à ceux de la partie périphérique, ou aubier. L'anisotropie de formation est donc essentiellement une anisotropie de révolution, avec des imperfections telles que des malformations créées par les nœuds de départ des branches, les différences d'exposition, les contraintes internes longitudinales de compression et de traction, ainsi que les accidents biologiques locaux.

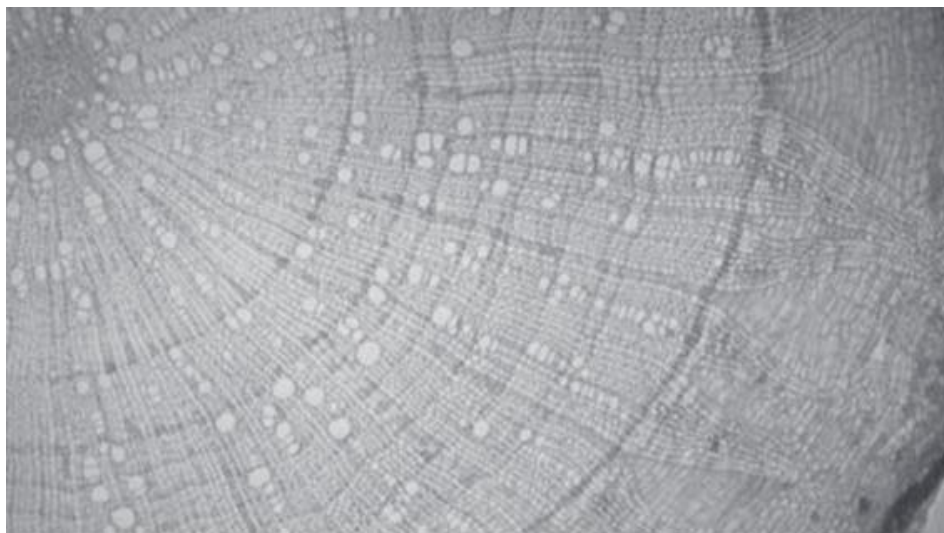


Fig. 28– Coupe anatomique transversale d'un tronc de tilleul de 8 ans (d'après R. Prat).

B. Fibres et cellules :

Les fibres macroscopiques du bois sont constituées de cellules d'une taille de quelques centièmes de millimètres de côté et de quelques millimètres de long, disposées parallèlement à l'axe du tronc. La résistance du bois est directement liée à la section transversale des cellules.

- Dans le cas des résineux, un seul type de cellule forme le tissu de soutien et le tissu de conduction qui assure la circulation de la sève. On y trouve également des canaux résinifères qui produisent des résines, ainsi que des "rayons" du bois, formés de cellules plus denses organisées en lames radiales (voir Fig. 29a).
- Les feuillus, quant à eux, possèdent une structure plus complexe composée de 3 à 4 types de cellules différentes assurant des fonctions diverses, notamment le tissu de soutien, le tissu de conduction et le tissu de réserve (voir Fig. 29b).

C. Humidité :

Les cellules du bois sont principalement constituées de cellulose (40 à 50 % en poids) et de lignine (25 à 30 %). À ces deux polymères, s'ajoute l'eau qui peut représenter jusqu'à 100 % du poids du bois sec, soit sous forme de combinaison chimique avec la lignine, soit sous forme d'imprégnation dans les membranes cellulaires, ou encore sous forme « libre » dans les espaces intercellulaires.

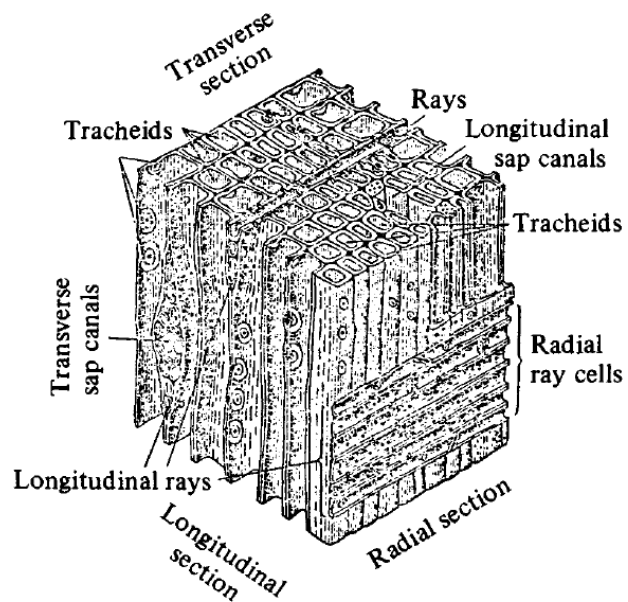
L'humidité joue un rôle crucial dans les propriétés mécaniques du bois, d'où l'importance du séchage. En dessous du point de saturation des fibres, les caractéristiques d'élasticité et la résistance à la rupture augmentent à mesure que le taux d'humidité diminue.

2.3.2. Mécanismes physiques de déformation et de rupture :

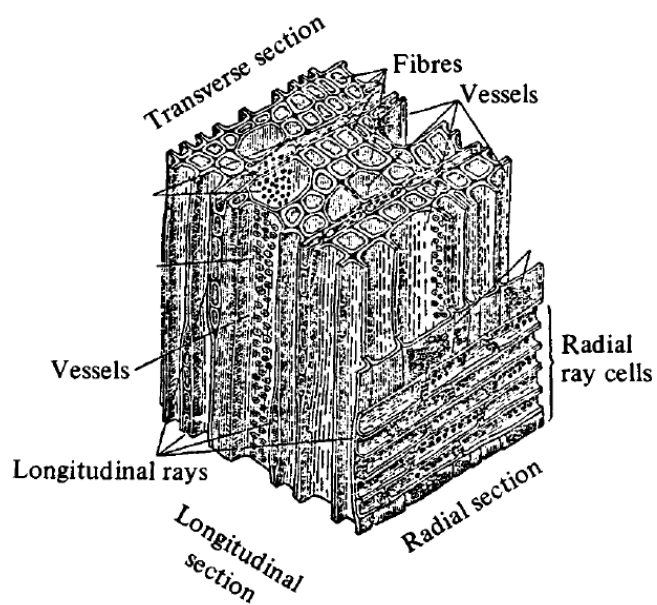
Les déformations élastiques du bois sont causées par les déformations réversibles des cellules, qui sont fortement influencées par le taux d'humidité. Selon les essences de bois et la direction de la sollicitation par rapport à l'axe de l'arbre, ces déformations peuvent atteindre 0,1 à 0,5 % sans entraîner de déformations permanentes significatives. La viscosité du bois est généralement faible.

Tout comme pour le béton, il est difficile de différencier les mécanismes de déformation permanente et de rupture. Il est possible que les déformations permanentes macroscopiques résultent en réalité de microruptures ou que la rupture macroscopique se produise avant que des déformations significatives ne surviennent.

En tout cas, le mécanisme principal de déformation plastique du bois est le glissement des cellules les unes par rapport aux autres. La rupture se produit lorsque les chaînes de cellulose se rompent, ce qui se produit pour des contraintes très élevées dans la direction des fibres, ou par clivage pour des contraintes beaucoup plus faibles dans les directions perpendiculaires.



(a)



(b)

Fig. 29– Section des bois : (a) résineux : épicéa, (b) feuillu : peuplier.

CLASSIFICATION RHÉOLOGIQUE ET CARACTÉRISATION EXPÉRIMENTALE

La méthode phénoménologique globale consiste à observer les résultats expérimentaux à grande échelle et à les reproduire à l'aide de modèles pour la conception et la durée de vie des matériaux.

Pour construire des modèles pertinents, il est nécessaire d'effectuer de nombreux essais sous différentes conditions de charge. Cette méthode utilise des machines et des techniques de mesure modernes pour étudier les caractéristiques du comportement des matériaux solides.

La rhéologie s'intéresse à l'écoulement des matériaux mous, des fluides très visqueux et des solides peu rigides, tels que les polymères lorsqu'ils sont façonnés à chaud et les pâtes... .

Les lois de comportement sont construites à partir de l'observation expérimentale macroscopique et microscopique, en utilisant la mécanique et la thermodynamique des milieux continus. Il est possible de classer les grands types de comportement de manière qualitative et de présenter brièvement les méthodes modernes de caractérisation et d'identification de ces comportements.

La classification schématique résultante permet d'attribuer à chaque matériau une théorie des phénomènes prépondérants, dans un domaine restreint de variables d'état. Cette classification a un intérêt fondamental, mais elle permet également de guider la sélection des matériaux lors de la conception, de limiter le nombre de paramètres caractéristiques du matériau, et de simplifier l'estimation de la résistance en service pour les calculs de structures. Par exemple, un acier peut être considéré comme :

- élastique linéaire pour un calcul de déformation d'une structure ;
- visco-élastique pour un problème d'amortissement de vibrations ;
- rigide parfaitement plastique pour un calcul de charges limites ;
- élasto-plastique écrouissable pour un calcul précis de déformations permanentes ;
- élasto-visco-plastique pour les problèmes de relaxation des contraintes ;
- endommageable par ductilité pour un calcul de limite de mise en forme ;
- endommageable par fatigue pour un calcul de durée de vie ;
- etc...

1. La méthode phénoménologique globale pour la formulation des lois de comportements :

La méthode phénoménologique globale étudie les matériaux en examinant leur élément de volume à travers les relations de cause à effet existant entre les variables physiquement accessibles qui constituent les entrées et les sorties du processus étudié. Cette approche permet de déterminer les réponses du matériau à des entrées spécifiques, lesquelles sont suffisantes pour caractériser qualitativement les matériaux, mais ne constituent pas des lois de comportement.

L'élément de volume, tel que défini en mécanique des milieux continus, désigne un volume suffisamment petit pour que les dérivées partielles intervenant dans les équations soient significatives, mais suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités du matériau. Le tableau ci-dessous indique l'ordre de grandeur des tailles raisonnables d'éléments de volume représentatifs en dessous desquels il est impossible de donner un sens physique aux contraintes ou déformations, à l'exception de celui d'une moyenne sur le volume "homogénéisé" considéré.

Tableau I– Ordre de grandeur des éléments de volume représentatifs.

Matériaux	Hétérogénéités	Eléments de volume
Métaux et alliages	Cristal 1 μm à 0,1 mm	0,5 $\times$ 0,5 $\times$ 0,5 mm
Polymères	Molécule 10 μm à 0,05 mm	1 $\times$ 1 $\times$ 1 mm
Bois	Fibres 0,1 à 1 mm	1 $\times$ 1 $\times$ 1 cm
Béton	Granulats $\approx$ 1 cm	10 $\times$ 10 $\times$ 10 cm

Les variables physiquement accessibles de l'élément de volume sont celles que l'on peut déduire simplement des quatre grandeurs mesurables classiques de la mécanique : les déplacements, la force, le temps et la température. Sous certaines hypothèses (telles que l'homogénéité), il est également possible d'accéder aux contraintes et aux déformations.

La pertinence et le choix des échelles à considérer pour la construction de la loi de comportement dépendent évidemment de la structure même des matériaux. Par exemple, dans le cas des métaux, dont les propriétés mécaniques sont directement liées à leur structure atomique et à la nature des liaisons interatomiques, diverses approches peuvent être envisagées en considérant les échelles suivantes :

- l'échelle atomique ;
- l'échelle des dislocations ;
- le monocristal ;
- le polycristal.

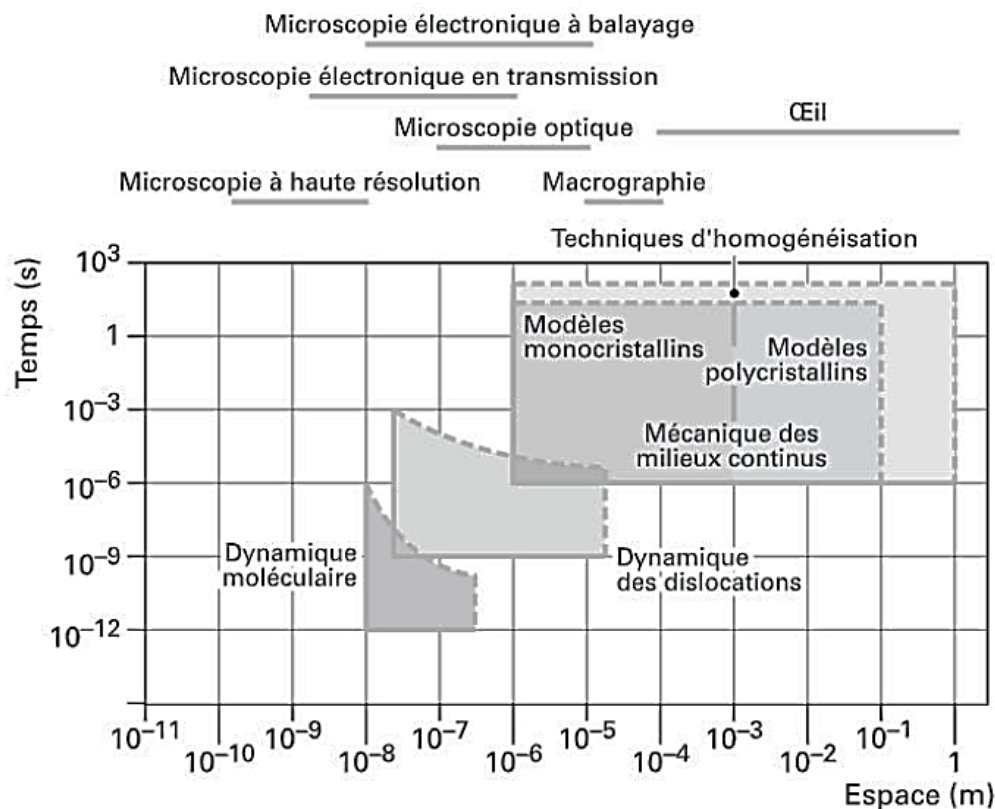


Fig. 01– Représentation schématisée des possibilités de simuler et d'observer le comportement plastique d'un volume de matière de taille donnée pendant un temps physique. Les frontières tracées en traits continus représentent la limite de validité des modèles, les traits pointillés montrent la position actuelle des limites imposées par la puissance des calculateurs (taille mémoire ou temps de calcul). D'après M. Fivel & S. Forest.

La figure 1 présente une brève description des moyens d'observation utilisés à différentes échelles. Elle fournit des indications sur les limites actuelles des simulations numériques effectuées à ces échelles, aussi bien

pour les dimensions de l'élément de matière pouvant être analysé que pour les durées d'analyse. La figure met également en évidence les limites de validité de chacune des modélisations associées.

Par exemple, le bloc situé le plus à droite et le plus haut de la figure 1 montre comment, à partir de la théorie du monocristal (à partir de l'échelle des plans de glissement cristallographiques) et d'informations expérimentales sur la texture d'un matériau polycristallin, il est possible de construire un volume élémentaire représentatif d'un matériau donné. Par diverses procédures d'homogénéisation, on peut alors construire le comportement macroscopique qui sera utilisé pour un calcul de prévision par éléments finis.

2. Essais mécaniques de caractérisation :

Pour caractériser expérimentalement le comportement des matériaux solides, il est important de pouvoir déterminer correctement et précisément les contraintes et les déformations, qui sont liées dans la loi de comportement du matériau. Les essais "homogènes", où les états de contraintes et de déformations sont uniformes ou quasi-uniformes, ont été et restent les principaux essais utilisés. Cependant, les développements récents des mesures de champs permettent l'utilisation d'essais hétérogènes dans certaines situations.

La panoplie d'essais homogènes a considérablement évolué ces dernières décennies. Les essais de traction-compression restent les plus courants, mais des essais de traction-compression avec pression interne et/ou externe, de torsion, de biaxialité, ainsi que des essais de cisaillement sont désormais utilisés. Pour les métaux, l'essai de traction ne permet pas toujours d'atteindre les grandes déformations observées dans les procédés de mise en forme, en raison de phénomènes de striction et de localisation qui le rendent hétérogène. Les essais réellement multiaxiaux sont encore limités, mais des essais triaxiaux sont possibles.

De nombreux essais homogènes sont disponibles, chacun destiné à la détermination de propriétés particulières du comportement, tels que l'écrouissage, la viscosité, ou l'endommagement. Ces essais peuvent être monotones ou cycliques, et sont réalisés en conditions quasistatiques ou dynamiques, avec une température uniforme et quasi-constante ou une température uniforme évoluant dans le temps. Ils peuvent également comporter d'autres sollicitations, telles qu'un champ électromagnétique.

2.1. Essais caractéristiques homogènes :

Si l'éprouvette subit une sollicitation qui produit **un état de contrainte et de déformation uniforme** dans tout le volume utile, elle peut être considérée comme un élément de volume.

A. Essai d'écrouissage en traction ou compression uniaxiale :

L'essai le plus fréquent est l'essai de traction, où la déformation ϵ est contrôlée à une vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ constante. La réponse du matériau est représentée par la variation de la contrainte σ en fonction de la déformation ϵ , ce qui permet de mettre en évidence l'écrouissage (Fig. 2). Des déchargements élastiques peuvent également être réalisés pour mesurer les déformations permanentes et l'endommagement.

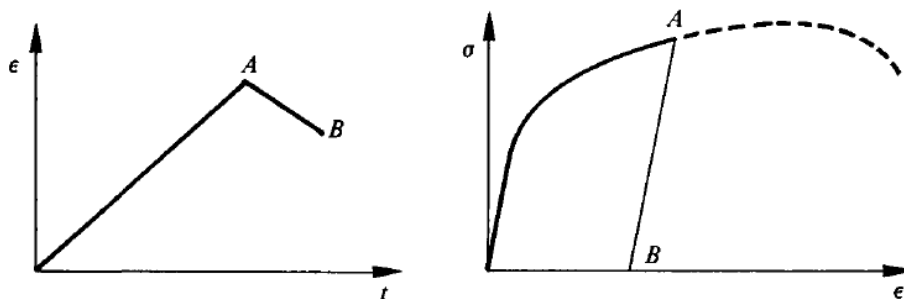


Fig. 2– Essai d'écrouissage.

B. Essai de fluage en traction ou compression uniaxiale - Essai de recouvrance :

On applique un échelon de contrainte (généralement une contrainte apparente) à l'éprouvette et on observe la variation de la déformation ϵ en fonction du temps t , permettant de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau (Fig. 3). Le temps d'attente à contrainte nulle (point B) correspond à l'essai de recouvrance. La recouvrance partielle de la déformation est représentée sur la partie droite de la figure 3.

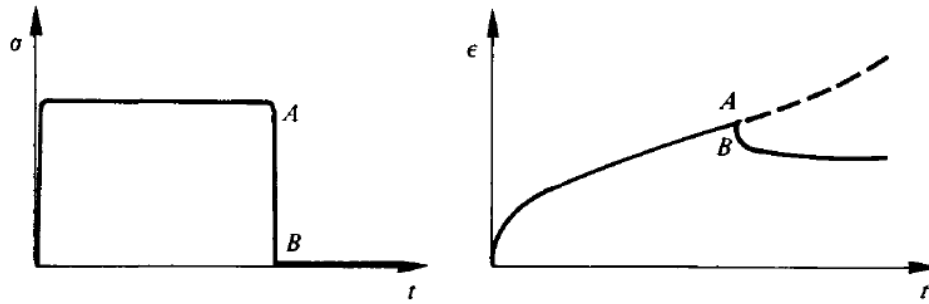


Fig. 3– Essai de fluage puis de recouvrance.

C. Essai de relaxation en traction ou compression uniaxiale :

Il s'agit de l'essai en mode dual par rapport à l'essai précédent. L'éprouvette est chargée à une vitesse de déformation $\dot{\epsilon}_0$ donnée jusqu'à atteindre la déformation d'essai ϵ , qui reste constante par la suite. Dans ce cas, l'évolution de la contrainte en fonction du temps est étudiée, ce qui est influencé à la fois par la viscosité du matériau et par son écrouissage lors de la première charge (Fig. 4).

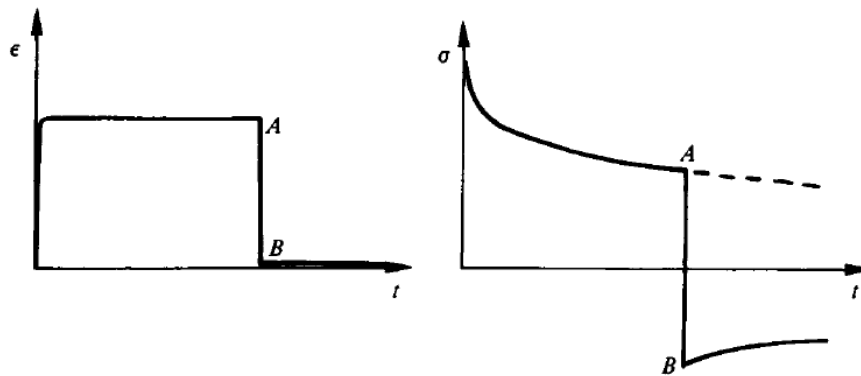


Fig. 4– Essai de relaxation.

D. Essai d'écrouissage-relaxation multiple :

Ce test, tel que son nom l'indique, associe deux types d'essais pour déterminer à la fois l'écrouissage du matériau et sa viscosité. En réalisant successivement des relaxations à différentes valeurs de déformation (Fig. 5) sur une seule éprouvette, il permet de caractériser ces deux propriétés en une seule mesure.

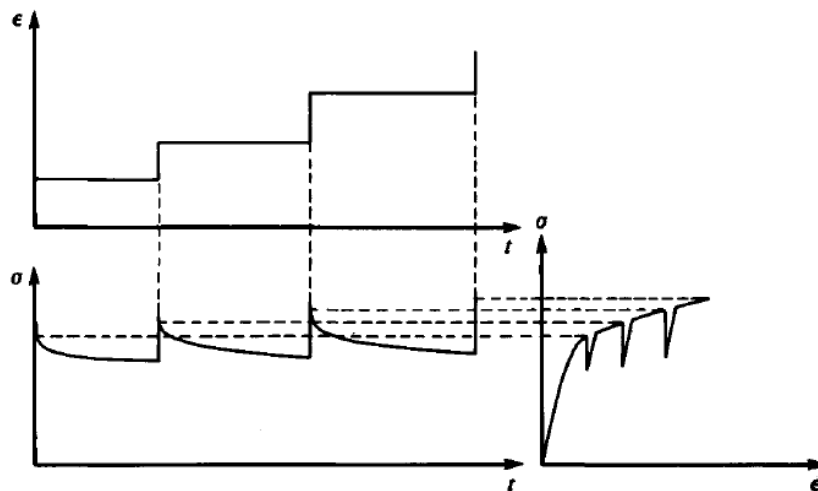


Fig. 5– Essai d'écrouissage-relaxation multiple.

E. Essais cycliques :

L'éprouvette est soumise à une sollicitation (contrainte ou déformation) périodique et l'on étudie l'évolution des cycles réponses dans le graphe (σ, ϵ) (Fig. 6).

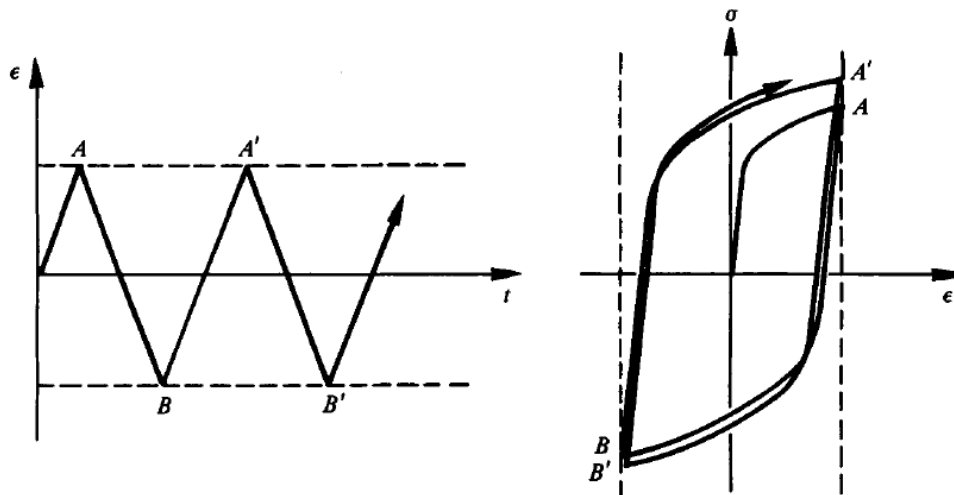


Fig. 6– Essai cyclique à déformation imposée.

En général la réponse tend à se stabiliser au bout d'un certain nombre de cycles. On utilise alors la courbe cyclique qui représente le lieu des sommets des boucles stabilisées correspondant à différents niveaux de contrainte ou de déformation.

F. Essais multiaxiaux :

Parmi les essais multiaxiaux homogènes les plus fréquemment utilisés, on peut mentionner :

- L'essai de traction-cisaillement (ou compression-cisaillement) ;
- L'essai de traction biaxiale (éventuellement équi-biaxiale) ;
- L'essai de compression triaxiale.

Ces essais peuvent être monotones ou cycliques, contrôlés en contrainte ou en déformation, et comporter des paliers de maintien pour une ou plusieurs des variables de contrôle. En outre, ils peuvent être proportionnels $\sigma(t) = \alpha(t)\sigma_0$ et $\varepsilon(t) = \alpha(t)\varepsilon_0$ ou non proportionnels.

G. Essais dynamiques :

Les essais dynamiques "homogènes" sont généralement réalisés en traction, compression et parfois en torsion, avec des vitesses de déformation moyennes à élevées. La réponse contrainte-déformation est observée, comme dans un essai d'écrouissage. Les vitesses de chargement supérieures à 1 s^{-1} (correspondant à 100 % de déformation par seconde) sont généralement considérées comme dynamiques. Les vitesses de chargement allant de 1 à 10 s^{-1} sont considérées comme un régime dynamique lent, tandis que les vitesses entre 10 et $1\,000 \text{ s}^{-1}$ sont considérées comme un régime moyen. Les vitesses supérieures à $1\,000 \text{ s}^{-1}$ sont qualifiées de dynamique rapide.

H. Essais de rupture :

On peut utiliser tous les types d'essais décrits précédemment (uniaxiaux ou multiaxiaux, quasi-statiques ou dynamiques, monotones ou cycliques, isothermes ou anisothermes) pour mesurer les conditions de rupture, notamment :

- La contrainte et la déformation à rupture ;
- Le temps ou le nombre de cycles jusqu'à la rupture ;
- L'énergie dissipée jusqu'à la rupture ;
- L'évolution des déformations permanentes jusqu'à la rupture (en utilisant des décharges élastiques).

2.2. Essais hétérogènes :

Les essais hétérogènes peuvent être très utiles pour caractériser le comportement des matériaux, mais présentent encore des difficultés. En effet, bien que les mesures de champ permettent d'accéder aux champs de déformation, les contraintes et éventuelles variables internes restent indéterminées. Pour analyser l'essai, il est nécessaire d'utiliser une loi de comportement qui est précisément l'objet de l'étude. Des procédures itératives peuvent être envisagées, mais elles sont complexes à mettre en place.

Lorsque l'on approche de la rupture, les essais deviennent hétérogènes. Cette hétérogénéité est essentielle pour comprendre les phénomènes de localisation et peut fournir des informations sur le modèle de comportement recherché grâce aux mesures de champ et à la corrélation d'images. Dans de nombreux cas, les phénomènes de rupture sont abordés a priori à travers des essais hétérogènes, comme dans le cas des matériaux quasi-fragiles avec l'essai brésilien (compression sur cylindre horizontal, figure 7).

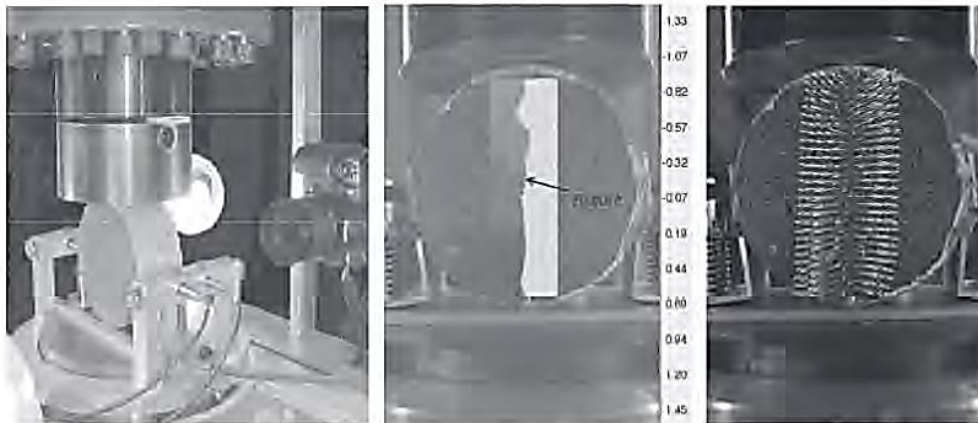


Fig. 7– Essai brésilien piloté en déplacement latéral (d'après C. Boulay).

2.3. Problème des matériaux anisotropes :

L'interprétation des essais est encore plus complexe dans le cas des matériaux anisotropes, c'est-à-dire ceux pour lesquels certaines directions sont privilégiées. Dans ce cas :

- L'essai de traction ou de compression est facile à interpréter lorsqu'il est réalisé dans la direction principale d'anisotropie.
- L'essai de torsion sur éprouvette creuse est plus délicat : pour une éprouvette taillée dans une tôle anisotrope, par exemple, les déformations de cisaillement ne sont plus uniformes sur la circonférence, car les modules de cisaillement en travers long et en travers court sont différents.

3. Éléments sur les techniques expérimentales :

Les dispositifs utilisés pour caractériser le comportement mécanique des matériaux se composent généralement de quatre types de moyens :

- Une éprouvette préparée selon les sollicitations envisagées ;
- Un dispositif d'essai pour appliquer des forces mécaniques et déformer le matériau, voire le rompre. Différents systèmes de chargement sont utilisés en fonction de la sollicitation (quasi-statique ou dynamique). Dans l'étude de phénomènes multiphysiques, d'autres types de sollicitation peuvent être appliqués (thermiques, électromagnétiques, etc.) dans différents environnements (chimique, à hygrométrie contrôlée, vide, etc.) ;
- Des instruments de mesure pour recueillir des grandeurs physiques, notamment mécaniques ;
- Éventuellement, des dispositifs d'observation durant ou après l'essai.

3.1. Machines d'essais et éprouvettes :

Chaque type de chargement mécanique nécessite généralement des éprouvettes de forme spécifique. La méthode phénoménologique exige la réalisation d'expériences sur un volume élémentaire de matériau. Dans la mesure du possible, les éprouvettes doivent être soumises à des champs de contrainte, de déformation et de température uniformes ou toute autre grandeur physique utilisée. Cela pose l'un des défis des essais mécaniques de caractérisation.

Les mesures de champs permettent de quantifier les états hétérogènes et sont déjà utilisées pour vérifier, au cours des essais, l'homogénéité ou l'hétérogénéité des états de déformation et pour connaître les conditions aux limites réelles d'un essai.

A. Cas de la traction-compression :

Machine de traction : Une installation moderne pour la caractérisation des matériaux sous contrainte uniaxiale est composée des éléments suivants, comme illustré sur la figure 8 :

- Un système d'application des efforts ;
- Un système d'amarrage des têtes d'éprouvettes ;
- Un dynamomètre mesurant l'effort appliqué à l'éprouvette ;
- Un capteur de mesure de l'allongement de l'éprouvette, équipé de jauges de contrainte ou d'une caméra de mesure par corrélation d'images ;
- Un bâti rigide de la machine ;
- Un système de chauffage ;
- Un système de mesure de la température, tel qu'un thermocouple ou une caméra infrarouge.

Selon le type de chargement appliqué, les efforts sont généralement appliqués de différentes manières : un système de masse pour les machines de fluage, un système d'écrou-vis sans fin entraîné par un moteur électrique ou encore un système hydraulique à servocommande. Les machines hydrauliques modernes à commande numérique sont pilotées par ordinateur.

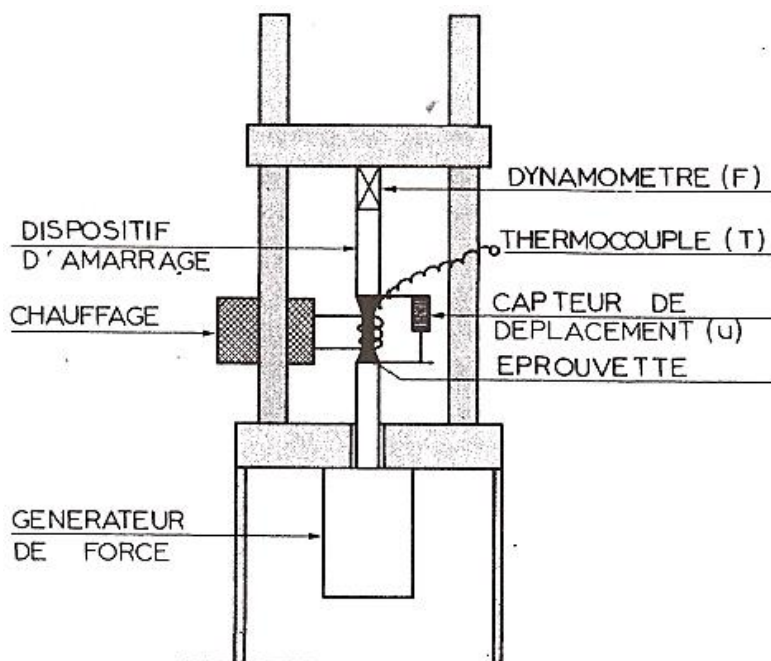


Fig. 8– Machine d'essais en traction-compression.

Éprouvettes de traction : La partie utile de l'éprouvette est constituée d'un fût cylindrique (Fig. 9), de têtes de fixation, ainsi que de raccords entre les deux éléments, conçus pour minimiser les concentrations de contrainte.

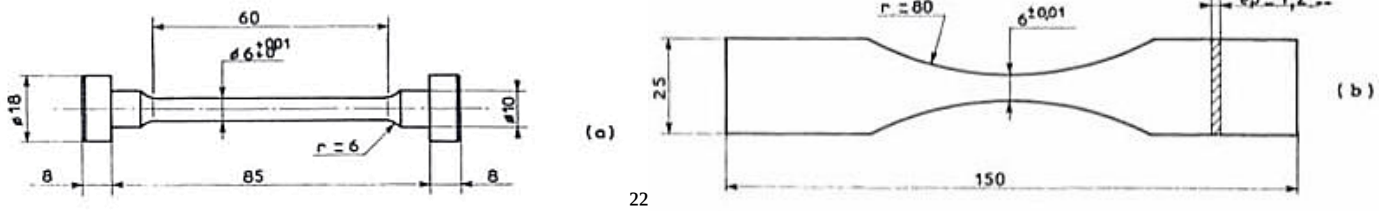


Fig. 9– Éprouvettes de traction à section circulaire (a) et plate (b).

Les essais de traction peuvent nécessiter une partie utile de l'éprouvette très longue, tandis que les essais de compression requièrent des éprouvettes beaucoup plus compactes afin de prévenir les problèmes de flambement.

L'essai de traction :

L'état uniaxial est défini par un état unidimensionnel en contrainte mais bidimensionnel en déformation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{pmatrix}$$

où ν^* est le coefficient de contraction, égal au coefficient de Poisson en élasticité. En élasto-plasticité ou élasto-visco-plasticité, les hypothèses de partition de la déformation et d'incompressibilité, toutes deux très bien vérifiées expérimentalement pour les métaux, permettent d'exprimer simplement le coefficient de contraction ν^* :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \varepsilon_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p \end{pmatrix}$$

d'où l'on peut tirer facilement l'expression :

$$\nu^* = \nu \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}$$

Par la loi d'élasticité linéaire on a $\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E}$, ce qui conduit à :

$$\nu^* = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{E \varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$$

bien vérifiée par l'expérience.

B. Essais multidimensionnels :

L'objectif est de produire des états de contrainte complexes sur un volume élémentaire qui peut être considéré comme isostatique. L'état de contrainte doit être déterminable uniquement à partir des équations d'équilibre globales, indépendamment du comportement. Pour atteindre cet objectif, diverses techniques sont utilisées :

- Les essais de traction-compression-pressure interne ou externe d'éprouvettes cylindriques creuses sont couramment utilisés en mécanique des sols et des roches.

Cependant, dans ce domaine, ces essais sont souvent effectués sur des éprouvettes pleines avec une pression externe produite par une cellule de pression.

- Les essais de traction-compression-torsion sont réalisés sur des éprouvettes cylindriques creuses.
- Les essais biaxiaux sont effectués sur des éprouvettes cruciformes.
- Les essais de compression triaxiale sont principalement utilisés en mécanique des sols et des roches, mais ils nécessitent des machines très précises pour leur mise en place.

3.2. Techniques de mesure des variables caractéristiques :

A. Forces et contraintes :

Les contraintes peuvent être déduites des forces sollicitatrices en utilisant les équations de la statique pour les cas isostatiques.

Les forces ou les couples appliqués aux éprouvettes sont mesurés à l'aide de dynamomètres **montés en série** avec les éprouvettes. Les dynamomètres à jauges de déformation sont couramment utilisés et permettent d'atteindre une précision relative de 10^{-3} , ce qui est généralement suffisant pour la caractérisation des matériaux.

B. Déplacements et déformations :

La mesure du déplacement relatif de deux points d'une éprouvette est plus complexe que la mesure de la force sollicitatrice car il est nécessaire de monter un capteur en parallèle avec l'éprouvette, et non en série. Deux techniques principales sont couramment utilisées : les mesures locales par jauges électriques de déformation et les mesures globales de déplacement.

Jauges extensométriques : Lorsqu'un fil résistant est solidement collé sur une éprouvette, il subit le même allongement que cette dernière, entraînant ainsi une variation de la résistance électrique proportionnelle à la déformation. ε (plus les extensomètres s'étirent, plus leurs résistances augmentent).

Capteurs de déplacement : La déformation peut également être déterminée à partir des équations de la mécanique des milieux continus en mesurant le déplacement de deux points spécifiques de l'éprouvette. Le déplacement axial peut être mesuré en utilisant un extensomètre fixé soit sur le fût cylindrique de l'éprouvette à l'aide de couteaux, soit sur les têtes d'amarrage de l'éprouvette. Les extensomètres inductifs ou à jauges de déformation offrent une précision absolue de l'ordre de $1\ \mu\text{m}$. Les extensomètres optiques permettent d'atteindre une précision encore plus élevée de $0,2\ \mu\text{m}$, mais ils sont plus coûteux et leur manipulation est plus délicate.

C. Déformation plastique. Longueur utile des éprouvettes :

La longueur utile d'une éprouvette est définie comme étant la longueur L_0 qui subit une sollicitation pour devenir L , permettant ainsi de calculer la déformation longitudinale ε par une relation simple :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

Pour mesurer la déformation plastique, on soustrait la déformation élastique de la déformation totale ε (mesurée, par exemple, à l'aide d'une jauge électrique). En traction (compression), cela s'exprime comme suit :

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \frac{F}{ES}$$

Le module d'élasticité est déterminé au début de l'essai lorsque l'effort est suffisamment faible pour que l'éprouvette reste dans le domaine élastique. Dans ce cas, on a :

$$E = \frac{F}{S\varepsilon_e}$$

Si l'extensométrie ne peut être installée directement sur la partie cylindrique de l'éprouvette, une longueur utile équivalente est utilisée, corrigée pour tenir compte de la déformation plastique dans les zones de raccordement. En utilisant les notations de la figure 10, cette longueur utile équivalente est définie par :

$$L_p = \frac{u_p}{\varepsilon_{p(0)}} = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\varepsilon_p(x)}{\varepsilon_{p(0)}} dx$$

Dans le chapitre suivant, il sera démontré que la déformation plastique peut être exprimée comme une fonction puissance de la contrainte, c'est-à-dire $\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{M}}$. En utilisant une méthode de tranches et en négligeant les effets de triaxialité dans la zone de raccordement, il est facile de montrer que :

$$L_p = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{S_0}{S(x)} \right)^M dx$$

Ainsi, afin de mesurer la déformation plastique, il convient de se référer à la géométrie de l'éprouvette (définie par la loi des sections $S(x)$) ainsi qu'à l'exposant d'écouissage, qui permettent de déterminer la longueur utile plastique. Voici la procédure à suivre pour réaliser cette mesure :

- Lors d'un essai de traction, il est possible d'établir la relation entre la force et le déplacement en procédant à un enregistrement direct.
- Afin d'obtenir le déplacement plastique, il convient de retrancher les jeux u_j ainsi que le déplacement élastique. Pour ce faire, la raideur R de l'ensemble éprouvette et amarrages peut être obtenue grâce à l'enregistrement initial dans le domaine élastique, comme illustré sur la figure 10.

$$u_p = u - u_j - \frac{F}{R}$$

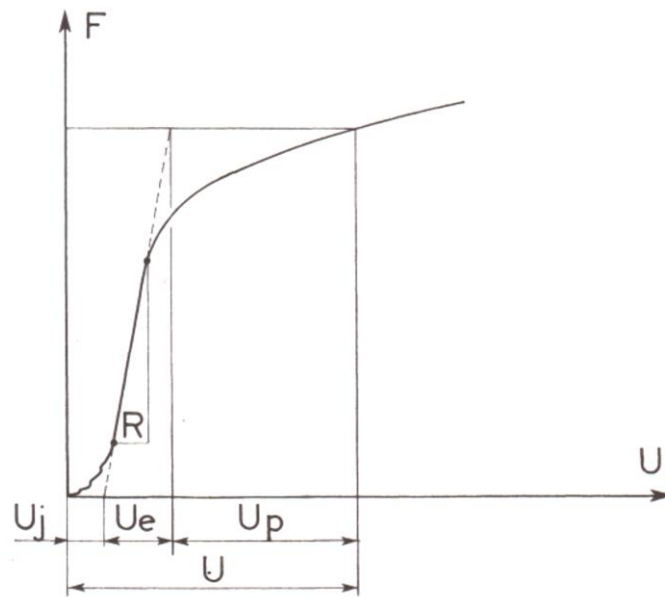


Fig. 10– Enregistrement brut d'un essai d'écrouissage.

- la relation $F(u)$ fournit une approximation de l'exposant d'écrouissage M . Il y a en effet identité entre les exposants des lois puissance :

$$\sigma = K \varepsilon_p^M \text{ et } F = K u_p^M$$

puisque :

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ et } \varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p}$$

- on en déduit la longueur utile équivalente L , et donc :

$$L_p = \frac{u_p}{\varepsilon_p}$$

Il convient de remarquer que la longueur utile peut être déterminée en effectuant un essai préalable sur une éprouvette, un matériau et à une température spécifiée.

D. Température :

La méthode la plus couramment employée consiste à utiliser des thermocouples. On utilise alors une formule basée sur la relation de Dorn, qui décrit la variation de la vitesse de déformation plastique en fonction de la température :

$$\dot{\varepsilon}_p = f(\sigma, \dots) \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right)$$

Il est possible de déduire de cette méthode que la précision requise pour la température doit être de l'ordre de 15 à 70 fois plus élevée que la précision souhaitée pour la déformation :

$$\frac{\delta \varepsilon_p}{\varepsilon_p} \simeq 15 \text{ à } 70 \frac{\delta T}{T}$$

Pour obtenir une mesure de déformation précise de l'ordre de 2 %, il est nécessaire de maintenir une température uniforme sur l'éprouvette à environ 0,5 °C près à une température de 500 °C. Cependant, les thermocouples doivent être soudés sur l'éprouvette, ce qui peut altérer sa structure et causer des fissures. Par conséquent, ils ne conviennent qu'aux essais visant à étudier le comportement sous déformation. Pour les essais de rupture statique ou de fatigue, des capteurs optiques peuvent être utilisés pour mesurer l'émission infrarouge de l'éprouvette. Toutefois, il convient de noter que le pouvoir émissif des éprouvettes peut varier en fonction de leur état de dommage.

E. Endommagement :

L'évaluation globale de l'endommagement ne nécessite que des mesures de contraintes et de déformations enregistrées en fonction du temps ou du nombre de cycles.

F. Longueur ou surface de fissure :

Ces mesures sont souvent complexes car la pointe ou le front de fissure ne sont pas toujours physiquement bien définis et se situent dans des zones fortement endommagées, contenant de nombreuses microfissures.

Mesures optiques : La méthode de mesure visuelle directe ou, plus précisément, par procédé photographique est utilisée.

Jauges à fil coupés.

Méthode du potentiel.

G. Eprouvettes :

La mise en forme d'une éprouvette est une tâche complexe et chronophage, car si elle n'est pas réalisée avec précaution, la rupture peut survenir prématurément et à des endroits imprévus. Cette opération nécessite toujours un compromis entre les contraintes liées aux caractéristiques de la machine utilisée (type de chargement, force maximale, rigidité, système de chauffage) et celles relatives aux mesures à effectuer (sensibilité du dynamomètre, mesure des allongements par extensométrie, mesure locale sur la partie utile de l'éprouvette ou externe sur les têtes d'amarrage).

4. Schématisation des comportements réels :

L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques permet de les classer à l'aide des qualificatifs : rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique.

4.1. Solide rigide - Fluide parfait :

La distinction entre solide et fluide dépend du choix de l'échelle de temps appropriée :

- un solide déformable atteint un état d'équilibre sous sollicitation ;
- un solide rigide ne peut pas se déformer ;
- et un fluide s'écoule pour toute sollicitation, même minime.

Différencier un écoulement infiniment lent d'un équilibre atteint pour un temps infini est difficile. Une échelle de temps adaptée peut aider, mais cela peut entraîner une ambiguïté quant aux notions de fluide et de solide. Ainsi, un polymère peut être considéré comme un solide pour des problèmes de chocs et comme un fluide pour des problèmes de stabilité de longue durée.

Un corps qui présente les réponses caractéristiques illustrées dans la Figure 12 est appelé un "fluide visqueux". Ce corps peut également être qualifié de "solide viscoplastique" dans certains cas :

- Il y a écoulement pour toute valeur de contrainte : $\dot{\epsilon} = f(\sigma)$.
- La loi de comportement de type Maxwell et sa généralisation par Norton :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \text{ou} \quad \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \left(\frac{\sigma}{K_N} \right)^N$$

traduisent le comportement aux petites déformations d'un fluide visqueux (E est le module d'élasticité, η la viscosité, K_N et N les paramètres de Norton).

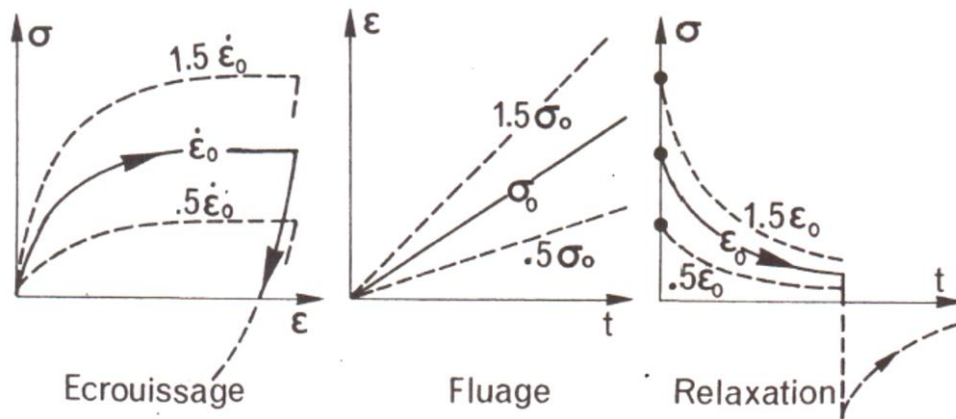


Fig. 12– Fluide visqueux.

- Applications aux solides « mous » :
 - Polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion ;
 - Béton frais en négligeant son vieillissement ;
 - De nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

4.2. Solides élastiques :

La déformation est essentiellement réversible. L'état de contrainte et de déformation ne dépend pas du trajet de chargement suivi.

4.2.1. Solide élastique parfait :

Les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes (Fig. 13).

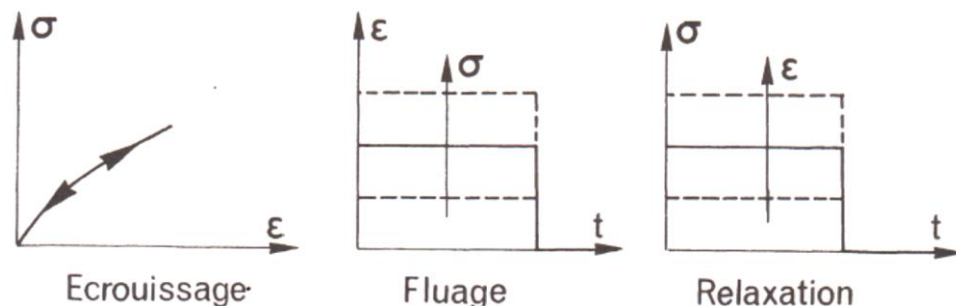


Fig. 13– Solide parfaitement élastique.

- La réversibilité est instantanée. La relation contrainte-déformation est la loi biunivoque :

$$\sigma = f(\epsilon)$$
- Le modèle analogique de l'élasticité linéaire est la loi de Hooke :

$$\sigma = E\varepsilon$$

- *Applications* : les métaux, les bétons, les roches pour des sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.

4.2.2. Solide viscoélastique :

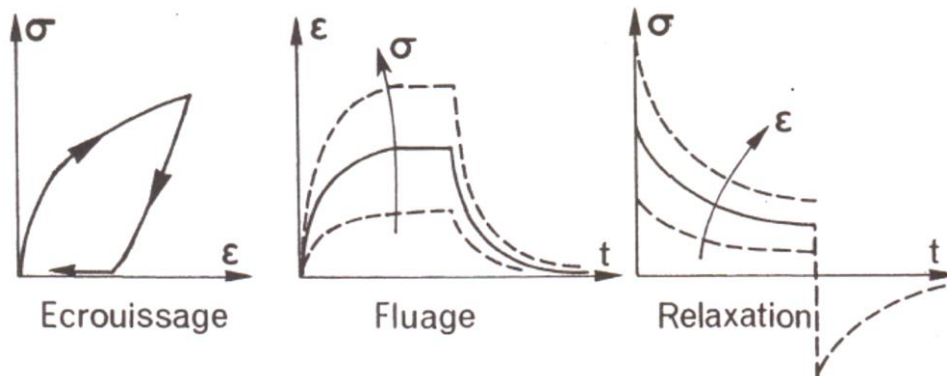


Fig. 14– Solide viscoélastique.

- La réversibilité est « retardée » et n'intervient qu'après un temps infini

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

- Un modèle analogique simple est le modèle de Kelvin-Voigt étant la viscosité :

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

- Le solide viscoélastique présente souvent du vieillissement.
- *Applications* : les polymères organiques, le caoutchouc, le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

4.3. Solides plastiques :

On appelle ainsi des solides qui, après la cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Leur comportement n'est pas explicitement dépendant du temps.

Par définition, la déformation plastique ε_p est celle qui correspond à la configuration relâchée :

$$\varepsilon_p = \varepsilon(\sigma = 0)$$

4.3.1. Solide rigide parfaitement plastique :

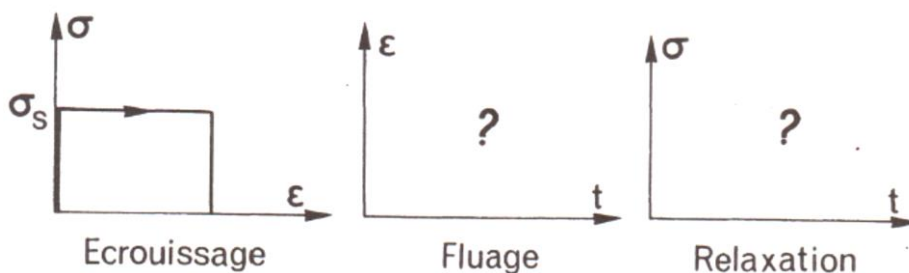


Fig. 15– Solide rigide parfaitement plastique.

- La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte σ_s et arbitraire pour cette valeur, quelle que soit la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ dans les essais d'écouvissage ou le temps dans les essais de fluage et de relaxation :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = 0$$

$$\sigma = \sigma_s \text{ Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \text{ (arbitraire).}$$

- *Applications :*
 - Mécanique des sols.
 - Analyse de la mise en forme des métaux.

4.3.2. Solide élastique parfaitement plastique :

- La déformation est élastique linéaire en deçà du seuil σ_s et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte (modèle de Saint Venant) :

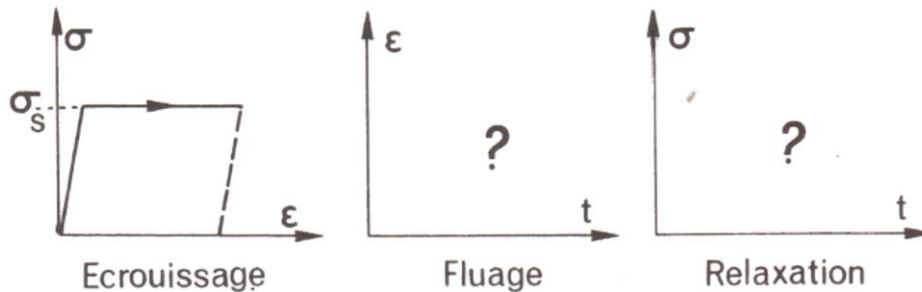


Fig. 16– Solide élastique parfaitement plastique.

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma = \sigma_s \text{ Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \text{ (arbitraire).}$$

- *Applications :*
 - Aciers à faible teneur en carbone (présentant un « palier ») pour : $\varepsilon < 2 \cdot 10^{-2}$ et $T < \frac{1}{4} T_M$ (T_M étant la température absolue de fusion en °K).
 - Analyse limite.

4.3.3. Solide élastoplastique écrouissable :

La déformation totale est la somme d'une déformation élastique linéaire et d'une déformation permanente, nulle en deçà du seuil σ_s :

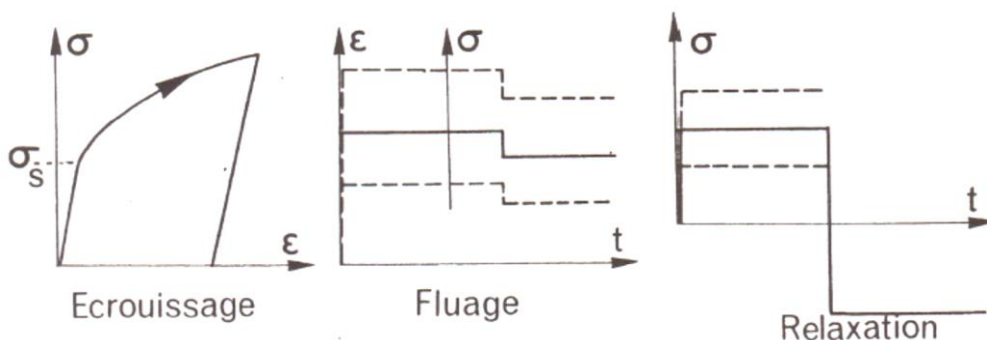


Fig. 17– Solide élastoplastique écrouissable.

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\sigma \geq \sigma_s \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma)$$

où g traduit l'écrouissage (isotrope ici) du matériau.

- Pour les chargements cycliques, il est nécessaire de modéliser l'écrouissage cinématique (modèles de Prager, d'Annstrong-Frédéric ou encore de Mroz).

- *Applications* : métaux et alliages aux températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion (températures exprimées en °K).

4.4. Solides viscoplastiques :

Les solides viscoplastiques sont caractérisés par des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques), mais également par un écoulement de fluage dépendant du temps sous sollicitation, ce qui les rend incapables d'atteindre un état d'équilibre.

4.4.1. Solide parfaitement viscoplastique :

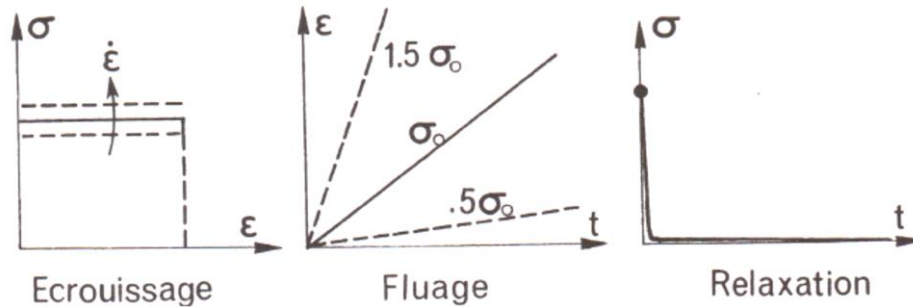


Fig. 18– Solide parfaitement viscoplastique.

- La vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux : $\sigma(\dot{\epsilon})$.
- Le modèle de Norton est $\sigma = K_N \dot{\epsilon}^{\frac{1}{N}}$
- *Applications* : métaux et alliages aux températures supérieures au quart de leur température absolue de fusion (schématisation négligeant l'élasticité et l'écrouissage très grossière aux températures « moyennes », bien meilleure aux très hautes températures).

4.4.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique :

L'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écrouissage.

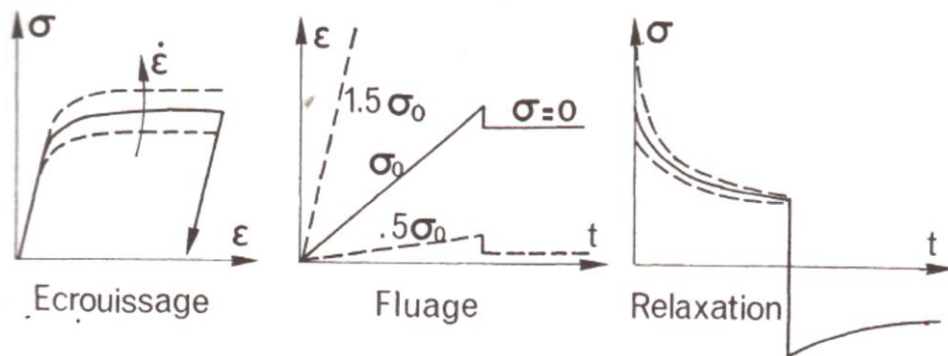


Fig. 19– Solide élastique parfaitement viscoplastique.

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$|\sigma| \geq \sigma_s \rightarrow \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \text{ et } \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + f(\sigma)$$

4.4.3. Solide élasto-visco-plastique écrouissable :

- C'est la modélisation la plus complexe puisque la contrainte dépend de la vitesse de déformation plastique et de la déformation plastique elle-même ou d'une autre variable d'écrouissage.

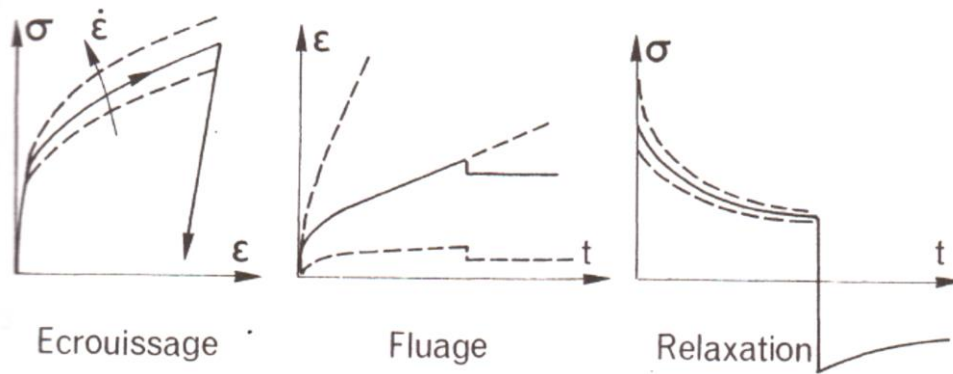


Fig. 20– Solide élastoviscoplastique.

- *Applications :*

- métaux et alliages aux températures moyennes et élevées.
- le bois pour des sollicitations élevées.

4.5. Vieillessement :

Les matériaux considérés dans les paragraphes précédents sont supposés stables, c'est-à-dire que leurs propriétés caractéristiques ne varient pas avec le temps. Les effets de vieillissement d'un matériau se jugent par comparaison des réponses à des tests caractéristiques :

- l'essai de référence est réalisé avant tout vieillissement du matériau (essai de traction par exemple),
- le même essai est réalisé sur une éprouvette, identique initialement, après une attente de plus ou moins longue durée. Si les réponses aux essais (a) et (b) sont différentes on dit qu'il y a eu vieillissement. Les matériaux qui vieillissent sont les bétons, les polymères, mais aussi les alliages métalliques sous certaines conditions de température.

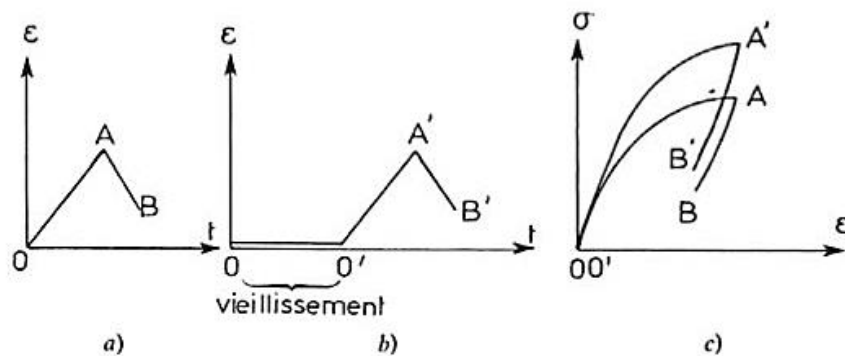


Fig. 21– Essai caractéristique pour étudier le vieillissement d'un matériau : (a) avant, (b) après vieillissement, (c) réponses.

Chapitre III : ELASTICITÉ ET VISCOÉLASTICITÉ

Introduction :

L'objectif principal des essais mécaniques est de déterminer une loi qui peut être utilisée pour prédire le comportement du matériau. Cette loi de comportement peut être appliquée dans divers contextes, tels que la mise en forme d'une pièce, où elle permet de calculer les forces nécessaires, de choisir les outillages et la presse, ainsi que d'évaluer l'aptitude du matériau à la mise en forme, y compris le remplissage des formes. Dans certains cas, des relations simples suffisent pour décrire le comportement du matériau dans des situations particulières, sans avoir recours à des lois complexes.

III.1. Elasticité linéaire en HPP (hypothèse des petites perturbations) :

Presque tout a déjà été dit sur le comportement élastique linéaire des matériaux, par des auteurs tels que R. Hooke (1676), T. Young (1807), A. L. Cauchy (1822), Kirchhoff (1852) et Timoshenko (1934). Dans ce chapitre, nous nous limiterons donc à rappeler les concepts importants, en mettant l'accent sur l'élasticité linéaire. Le terme "élasticité" est utilisé ici pour décrire la réversibilité des déformations, tel que présenté dans le chapitre II, et ne signifie pas l'absence de dissipation thermique. La thermoélasticité introduit plusieurs coefficients supplémentaires dans la loi de comportement, tels que le coefficient de dilatation, et permet de résoudre les problèmes liés aux variations de température, tels que les contraintes thermiques.

III.1.1. Aspects phénoménologiques :

Pour les solides, à condition que la température ne soit pas trop proche de la température de fusion et que la vitesse de sollicitation ne soit pas trop élevée, il est possible d'observer un comportement réversible de contrainte-déformation, initialement linéaire puis potentiellement non linéaire. Comme expliqué dans le chapitre I, ce phénomène correspond à des mouvements réversibles d'atomes, de molécules ou de cellules, qui induisent des déformations ne dépassant pas généralement $0,2$ à $0,5 \cdot 10^{-2}$ pour les matériaux métalliques, les bétons et les céramiques. Cette observation justifie l'**hypothèse des petites déformations** pour ces types de matériaux.

La limite du domaine d'élasticité est influencée par la température et les sollicitations mécaniques antérieures, que ce soit lié aux procédés d'élaboration ou à l'utilisation de la pièce mécanique. La température, en favorisant les mouvements irréversibles, diminue la taille de ce domaine, jusqu'à le rendre nul à la température de fusion. À l'inverse, les sollicitations mécaniques peuvent augmenter considérablement la taille de ce domaine grâce au phénomène d'écrouissage.

L'élasticité linéaire ne s'applique qu'aux déformations élastiques infinitésimales et linéaires, impliquant une relation linéaire entre contraintes et déformations. L'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques (polycristallins) et les céramiques, mais elle est légèrement moins applicable pour le béton.

III.1.2. Loi de Hooke généralisée :

La loi de Hooke exprime chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. Cette loi est souvent exprimée sous la forme suivante :

$$\sigma = R \varepsilon$$

où R : appelé tenseur des rigidités ou d'élasticité, est un tenseur du quatrième ordre qui fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De manière similaire, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon = S \sigma$$

où S : est un tenseur des compliances élastiques du matériau.

III.1.2. 1. Loi de Hooke d'élasticité 3D :

Les relations entre contraintes et déformations mentionnées dans le paragraphe précédent peuvent être exprimées sous forme matricielle. Les déformations et les contraintes sont représentées par des vecteurs colonnes à 6 composantes. La matrice qui permet de passer des contraintes aux déformations est appelée matrice des compliances (ou des souplesses).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

L'écriture classique de la loi de Hooke est couramment utilisée. Toutefois, en introduisant un facteur devant les déformations de cisaillement et les contraintes de cisaillement, une expression particulièrement simple de l'énergie de déformation élastique peut être obtenue (paragraphe suivant).

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{yz} \\ \sqrt{2} \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xz} \\ \sqrt{2} \sigma_{yz} \\ \sqrt{2} \sigma_{xy} \end{Bmatrix},$$

$$S = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix}$$

La matrice des compliances (souplesse) S possède toutes les propriétés d'un tenseur symétrique du quatrième ordre. Dans certains cas, il peut être plus pratique d'utiliser la notation indicielle d'Einstein pour définir la loi de comportement :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (i = j = k = l = 1, 2, 3)$$

Le tenseur S , mentionné précédemment, est un tenseur symétrique du 4ème ordre. En utilisant la notation d'Einstein, on peut définir la loi de comportement sous une forme plus pratique. Le tenseur S est alors représenté par une matrice, et son inverse est le tenseur R , également appelé tenseur de rigidité.

$$\sigma_{ij} = R_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (i = j = k = l = 1, 2, 3)$$

Pour un matériau isotrope et homogène, la relation entre contraintes et déformations s'écrit de manière explicite sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = 2G \left\{ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right\} \quad (i = j = 1, 2, 3), \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = 2G \left\{ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{22} = 2G \left\{ \varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{33} = 2G \left\{ \varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ \sigma_{13} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \\ \sigma_{23} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \\ \sigma_{12} = 2G \{ \varepsilon_{ij} \} \end{array} \right\},$$

III.1.2.2. Loi de Hooke d'élasticité plane 2D :

Les équations de la théorie de l'élasticité peuvent être simplifiées dans le cas particulier où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Cette situation se présente dans deux types de problèmes distincts.

- Etat plan de contrainte :

Il est indéniable que les trois composantes non nulles du tenseur des contraintes, à savoir σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} , ne varient pratiquement pas en fonction de z , ce qui implique qu'elles demeurent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Cela signifie que le tenseur des contraintes ne possède que trois composantes non nulles.

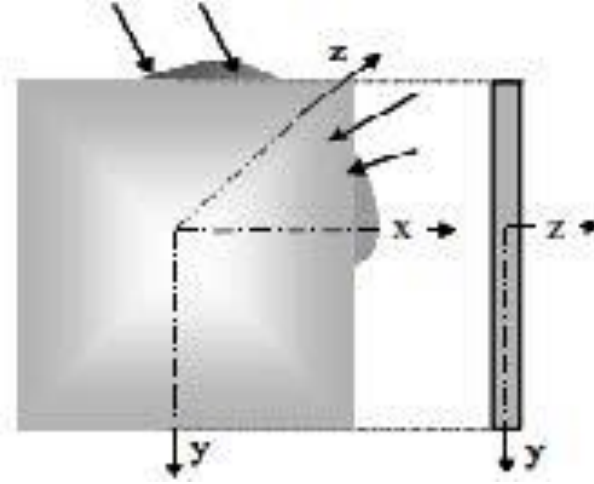


Fig. 01– Exemple de structure en contrainte plane.

La loi de Hooke d'un matériau élastique isotrope et homogène exprime que la déformation ε_{zz} est différente de zéro.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{bmatrix}.$$

En procédant à l'inversion des expressions de et dans l'équation précédente, on parvient à obtenir :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases}$$

- Etat plan de déformation :

Si l'on prend en considération un tunnel ou un puits de mine (comme illustré sur la figure) qui s'étend sur une très grande distance selon l'axe z , et que les sections perpendiculaires à cet axe ont toutes les mêmes dimensions, alors deux sections distantes d'une distance dz se déforment de manière identique.

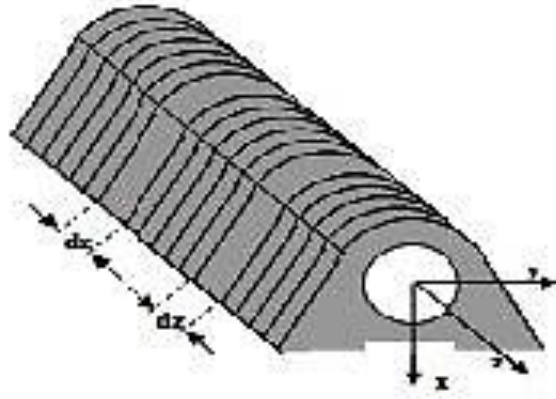


Fig. 02– Exemple de structure en déformation plane.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de Hooke permet de déterminer la composante non nulle du tenseur des contraintes dans un matériau élastique, isotrope et homogène. Cette composante est égale à :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = 0 \Rightarrow \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \begin{cases} \sigma_{xx} = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] \\ \sigma_{yy} = 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}] \end{cases} \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{(1+\nu)}{E} [(1-\nu)\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{(1+\nu)}{E} [-\nu\sigma_{xx} + (1-\nu)\sigma_{yy}] \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque :

Pour transformer des contraintes planes en déformations planes :

$$E \rightarrow \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1-\nu)}.$$

Pour transformer des déformations planes en contraintes planes :

$$E \rightarrow \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}, \quad \nu \rightarrow \frac{\nu}{(1+\nu)}$$

Les deux expressions précédentes maintiennent l'expression du module de cisaillement ou de Coulomb G en fonction de E et ν inchangée :

$$G = \frac{E}{(1-\nu)}$$

III.1.3. énergie de déformation élastique :

Jusqu'à présent, nous avons exploité la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations ainsi que leur relation linéaire grâce à la loi de Hooke. Désormais, nous pouvons tirer parti de l'autre propriété de la déformation élastique, à savoir sa réversibilité. En fin de compte, l'énergie de déformation par unité de volume peut être exprimée sous forme de la forme quadratique définie positive suivante :

$$W = \frac{1}{2} R \varepsilon^2$$

L'expression de l'énergie en fonction des contraintes et des déformations revêt une importance considérable en mécanique des matériaux, car elle permet de distinguer la partie irréversible de la partie réversible d'une déformation. Pour les matériaux élastoplastiques, une extension du concept d'énergie, appelée potentiel des contraintes, permet de définir la relation entre la vitesse de déformation et les contraintes. Dans le paragraphe suivant, nous procédons au calcul de l'énergie emmagasinée dans un matériau élastique isotrope et homogène.

III.1.3.1. L'énergie par unité de volume :

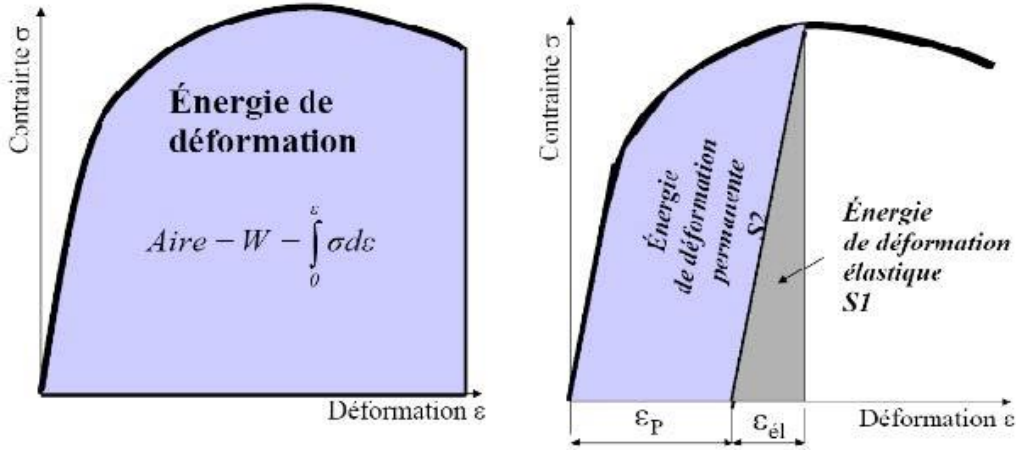


Fig. 03– Exemple de structure en déformation plane.

L'expression de l'énergie par unité de volume correspond au travail des contraintes sur les déformations :

$$W_{vol} = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

La linéarité entre les contraintes et les déformations permet d'écrire que :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Il est possible d'exprimer l'énergie par unité de volume en fonction soit des déformations seules, soit des contraintes seules grâce à la loi de Hooke :

$$W_{vol} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} R_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

On peut décomposer l'énergie élastique en une partie qui correspond à l'augmentation de volume du solide, et une autre partie qui correspond aux distorsions angulaires à volume constant :

$$\begin{aligned} W_{vol} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\text{dev } \sigma_{ij} + \sigma_m \delta_{ij}) (\text{dev } \varepsilon_{ij} + \varepsilon_m \delta_{ij}) \\ \text{dev } \sigma_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = 2G \text{dev } \varepsilon_{ij} \\ \sigma_m &= 3K \varepsilon_m, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ (module de compressibilité cubique)} \end{aligned}$$

III.1.4. Thermo-élasticité linéaire :

Les structures des matériaux sont souvent soumises à des chargements thermiques qui entraînent une dilatation. Les déformations thermiques sont proportionnelles à la variation de température ΔT par le coefficient de dilatation thermique α :

$$\varepsilon^{th} = \alpha \Delta T I$$

Si la structure n'est pas mécaniquement liée à l'extérieur, un champ de déformation thermique ne produira pas de contraintes s'il satisfait les équations de compatibilité. Il a été démontré qu'une telle condition nécessite un

champ de températures linéaire dans la structure. En revanche, si la structure est liée mécaniquement à l'extérieur (on parle alors de dilatation contrariée), des contraintes seront engendrées dans le solide.

Prenons l'exemple d'une barre métallique chauffée de manière uniforme : la barre se dilate sans que des contraintes ne soient créées à l'intérieur. Toutefois, si on impose la même longueur à la barre, une contrainte de compression sera générée pour répondre à cette condition. D'autres méthodes permettent également de créer des contraintes dans la barre, comme la chauffe non uniforme. Par exemple, lors d'un chauffage par induction à haute fréquence, le diamètre extérieur de la barre se dilate plus que le centre. Par conséquent, la partie extérieure de la barre est mise en compression par la partie intérieure.

De manière plus générale, lorsqu'un matériau est soumis à une sollicitation thermomécanique, les déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, qui sont elles-mêmes liées aux contraintes par la loi de comportement du matériau. Pour un matériau élastique linéaire isotrope, la relation entre les déformations et les contraintes peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} \sigma + \left(\alpha \Delta T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \right) I$$

En inversant cette relation, on obtient la loi de comportement dite "thermoélastique" du matériau :

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{tr}(\varepsilon) I \right) - \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha \Delta T I$$

III.2. Viscoélasticité linéaire en HPP :

Dès la fin du XVII^e siècle, Newton a défini la viscosité comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la vitesse de déformation. Au XVIII^e siècle, des physiciens tels que J.C. Maxwell, L. Boltzmann et Lord Kelvin ont mené des recherches théoriques et expérimentales sur le fluage et la relaxation de divers matériaux (verre, métaux et polymères à différentes températures), conduisant à la modélisation rhéologique de ces matériaux. Dans cette modélisation, la vitesse de déformation joue un rôle fondamental et est considérée comme une variable indépendante. Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, les modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell sont décrits ici.

III.2.1. Aspects phénoménologiques :

Au chapitre II, nous avons distingué (parfois subjectivement) les solides et les fluides, et classifié les solides en fonction de leur comportement rhéologique.

Les polymères, les composites à matrice organique, le bitume et, dans une moindre mesure, le béton et le bois, présentent des phénomènes dissipatifs liés à l'élasticité, que l'on peut globalement traduire par une viscosité (un paramètre reliant la contrainte et la vitesse de déformation). Les caractéristiques principales du comportement viscoélastique d'un solide sont sa réponse dépendante de la vitesse de sollicitation et sa capacité à revenir (à une contrainte nulle et à des temps longs) à son état initial non déformé. Cela se traduit par l'absence de déformation permanente, ce qui est appelé "réversibilité" de la déformation.

Enfin, il convient de souligner que la viscosité entraîne un fluage sous contrainte constante et une relaxation sous déformation constante.

Il est évident que la maîtrise des effets du comportement différé des matériaux dépend largement de la qualité de la modélisation de ce comportement. Dans le contexte unidimensionnel de la sollicitation et de la réponse, nous nous concentrerons ici sur des modèles adaptés aux applications courantes en calcul de structures, dans l'**hypothèse de petites perturbations "HPP"** et dans un cadre **isotherme**.

III.2.2. Modèles rhéologiques analogiques de base :

Une approche courante pour modéliser le comportement viscoélastique linéaire non-vieillissant en dimension unidimensionnelle consiste à utiliser des modèles rhéologiques composés d'éléments simples élastiques (ressorts) et visqueux (amortisseurs). Ces modèles permettent de reproduire qualitativement les comportements physiques unidimensionnels observés.

Le comportement viscoélastique linéaire est généralement représenté par un modèle composé d'un assemblage de ressorts et d'amortisseurs, qui est un modèle symbolique et analogue. Pour représenter le matériau viscoélastique, une association de ressorts et d'amortisseurs en série et en parallèle plus ou moins complexe est utilisée. **L'équation rhéologique du matériau** est obtenue en utilisant les équations rhéologiques des constituants élémentaires (ressort et amortisseur) et en respectant les lois d'association en série et en parallèle des différents éléments.