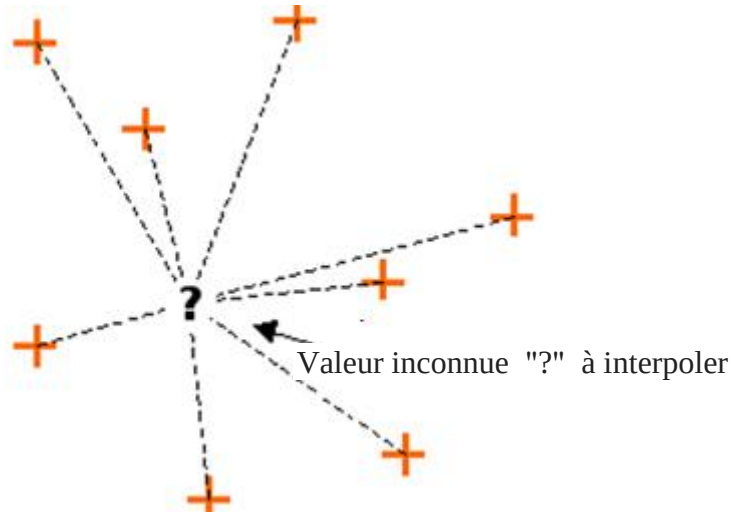


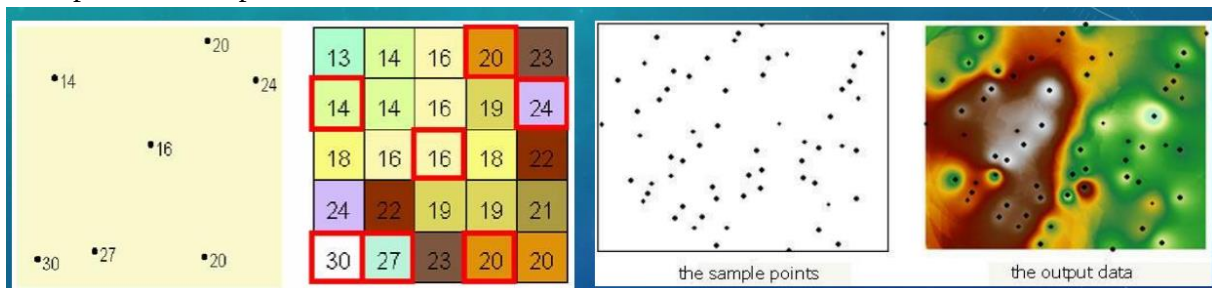
Quatrième Chapitre : **Le Krigeage****4.1 L'interpolation****4.1.1 Définitions**

- L'interpolation est un processus (ou une opération mathématique) consistant à utiliser des points ayant des valeurs **connues** pour estimer la valeur pour d'autres points (**inconnus**).



Dans l'exemple ci-dessus, supposez que vous avez prélevé des valeurs aux 8 emplacements et que vous souhaitez prévoir la valeur de l'emplacement inconnu (?).

- C'est la traduction d'une information disponible pour un nombre de lieux limités vers une information disponible pour tout l'espace.

**4.1.2. Exemples de nécessité d'interpolation**

- Exploration minière : concentration, réserves et anomalies
- Qualité de l'eau : Concentration chimique
- Paramètres socio-économiques : densité de la population
- Conditions météorologiques : rayonnement, évapotranspiration, pluie, température.

**4.1.3. Méthodes d'interpolation déterministes et géostatistiques :**

Les outils d'interpolation IDW (Pondération par l'inverse de la distance) et Spline sont considérés comme des méthodes d'interpolation déterministe, car ils sont directement basés sur des valeurs relevées avoisinantes ou des formules mathématiques spécifiques qui déterminent le lissé de la surface résultante.

La seconde famille de méthodes d'interpolation comprend les techniques géostatistiques (telles que la méthode de **krigeage**) qui sont basées sur des modèles statistiques comprenant l'autocorrélation, c'est-à-dire les relations statistiques entre les points mesurés. Par conséquent, les techniques géostatistiques ont non seulement la capacité de produire une surface de prévision, mais elles peuvent aussi fournir des mesures quant à la certitude ou l'exactitude de ces prévisions.

## 4.2. Qu'est-ce que le krigeage ?

Le krigeage est un processus multiple ; il comprend l'analyse statistique exploratoire des données, la modélisation des variogrammes, la création de la surface et éventuellement l'exploration de la surface de variance. L'outil Krigeage est particulièrement adapté aux cas où l'on sait qu'il existe dans les données une corrélation spatiale de distance ou une déviation directionnelle. Elle est souvent utilisée en science géologique et minière.

### 4.2.1. Définition du krigeage :

Le krigeage est la méthode **d'estimation** linéaire, sans **biais**, **minimisant** la variance d'estimation telle que calculée à l'aide du variogramme pour des données spatialisées dont la covariance spatiale est connue (ou peut être estimée). La variance d'estimation  $z$  est la valeur vraie inconnue que l'on cherche à estimer par  $\hat{z}$ , l'erreur commise est  $(z - \hat{z})$

### 4.2.2. Approche théorique du krigeage

Le krigeage est comparable à l>IDW dans la mesure où il déduit, par pondération des relevés existants, les valeurs probables d'emplacements non métres. La formule générale utilisée par les deux méthodes d'interpolation consiste en une somme pondérée des données :

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$$

où :  $Z(x_i)$  = valeur relevée à l'emplacement  $i$  ;  $\lambda_i$  = pondération inconnue de la valeur relevée à l'emplacement  $i$  ;  $x_0$  = emplacement de prévision ;  $n$  = nombre de valeurs relevées

Avec la méthode IDW, la pondération,  $\lambda_i$ , dépend uniquement de la distance par rapport à l'emplacement de prévision. En revanche, avec la méthode de krigeage, les pondérations ne s'appuient pas seulement sur la distance entre les points relevés et l'emplacement de prévision, mais aussi sur **l'organisation spatiale** générale des points relevés. Pour utiliser la disposition spatiale dans la pondération, il faut **quantifier l'autocorrélation spatiale**. Ainsi, dans le krigeage ordinaire, la pondération  $\lambda_i$  dépend d'un modèle ajusté selon les points relevés, de la distance par rapport à l'emplacement de prévision et des relations spatiales entre les valeurs relevées autour de celui-ci.

Les sections suivantes expliquent comment la formule de krigeage générale est utilisée pour créer une carte de la surface de prévision et une carte de l'exactitude des prévisions.

## 4.3. Création d'une carte de surface de prévision par krigeage

Pour effectuer une prévision à l'aide de la méthode d'interpolation par krigeage, deux tâches sont nécessaires :

- La découverte des règles de dépendance.
- La formulation des prévisions.

Pour réaliser ces deux tâches, le krigeage procède en deux étapes :

1. Il crée les variogrammes et les fonctions de covariance pour évaluer les valeurs de dépendance statistique (appelée autocorrélation spatiale), dépendant du modèle d'autocorrélation (ajustage du modèle).
2. Il prédit les valeurs inconnues (formulation d'une prévision).

En raison de ces deux tâches distinctes, le krigeage a été décrit comme utilisant les données deux fois ; la première pour estimer l'autocorrélation spatiale des données et la seconde pour formuler les prévisions.

#### 4.4. Détermination d'une prévision

Après avoir découvert une **dépendance** ou **autocorrélation** dans vos données et terminé le traitement du premier jeu de données, à l'aide des informations spatiales contenues dans les données pour calculer les distances et modéliser l'autocorrélation spatiale, vous êtes prêt à déterminer une prévision en utilisant le modèle ajusté. Par la suite, le semi-variogramme empirique est mis de côté.

Vous pouvez à présent utiliser les données pour formuler des prévisions. Comme dans l'interpolation IDW, le krigeage génère des pondérations à partir des valeurs relevées avoisinantes pour prédire des emplacements non mesurés. Comme avec l'interpolation IDW, les valeurs mesurées les plus proches des emplacements non mesurés ont l'influence la plus forte. Toutefois, les facteurs de pondération du krigeage pour les points relevés avoisinants sont plus sophistiqués que ceux de l'IDW.

#### 4.5. Méthodes de krigeage

Le **krigeage simple**, le **krigeage ordinaire**, le **krigeage universel** (prise en compte d'une dérive) et le **cokrigeage** (lorsque l'on considère différents phénomènes liés).

Dans le cadre stationnaire, il y a 2 formes particulières de krigeage :

a- **Le krigeage simple** : la moyenne **m** du processus est connue, c'est le krigeage simple.

$$\hat{Z}_v = m + \sum_{i=1}^n \lambda_i (Z_i - m)$$

b- **Le krigeage ordinaire** : la moyenne est inconnue, c'est le krigeage ordinaire. Ce dernier est, de loin, le plus fréquemment utilisé.

$$\hat{Z}_v = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i$$

Le krigeage **ordinaire** est la méthode la plus générale et la plus couramment utilisée. Il s'agit également de la méthode par défaut. Elle part du principe que la moyenne **constante est inconnue**. Il s'agit là d'une hypothèse a priori valide, à moins qu'une raison scientifique aille à l'encontre de cette dernière.

La forme matricielle s'écrit :  $K \cdot \Lambda = K_0$

$$K = \begin{vmatrix} \text{Var}(Z_1) & \text{Cov}(Z_1, Z_2) & \text{Cov}(Z_1, Z_3) & \dots & \text{Cov}(Z_1, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_2, Z_1) & \text{Var}(Z_2) & \text{Cov}(Z_2, Z_3) & \dots & \text{Cov}(Z_2, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_3, Z_1) & \text{Cov}(Z_3, Z_2) & \text{Var}(Z_3) & \dots & \text{Cov}(Z_3, Z_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Cov}(Z_n, Z_2) & \text{Cov}(Z_n, Z_3) & \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Var}(Z_n) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$\lambda$  est la matrice des poids de krigeage :  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \dots \\ \mu \end{bmatrix}$

K est la matrice de covariance du point krigé avec les sites d'échantillonnage

$$K_0 = \begin{bmatrix} \text{Cov}(Z_0, Z_1) \\ \text{Cov}(Z_0, Z_2) \\ \text{Cov}(Z_0, Z_3) \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que :  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

La solution est donnée par :  $\Lambda = K^{-1} \cdot K_0$  pour obtenir (les  $\lambda_i$  et  $\mu$ )

**Remarque :**  $\text{Cov}(z, z) = \text{var}(z)$

### La variance d'estimation :

L'idée est de choisir les  $\lambda_i$  de façon à minimiser la variance d'estimation.

La variance d'estimation minimale  $\sigma_{k0}^2$ , appelée variance de krigeage, a pour expression :

$$\sigma_{k0}^2 = \text{Var}[Z_v] - \Lambda \cdot k = \sigma_v^2 - \Lambda \cdot k$$

$$\text{Ou par } \sigma_{k0}^2 = \text{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{Cov}[Z_v - Z_i] - \mu$$

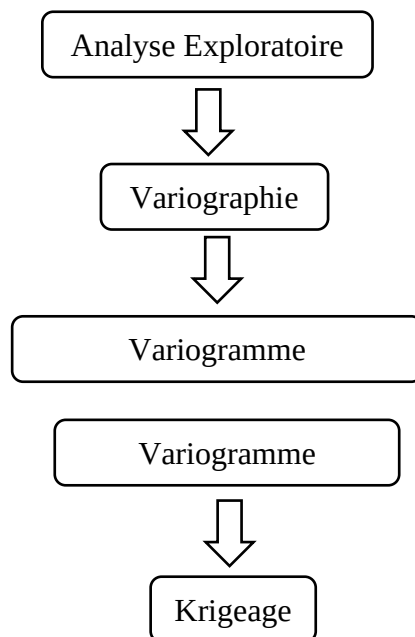
Le krigeage permet d'estimer directement un bloc ( $Z_v$ ) ou un point ( $Z_0$ ) Tout ce qui change c'est le membre de droite  $K_0$ . Le krigeage d'un bloc est égal à la moyenne des Krigeage ponctuels dans le bloc.

**Note :** la variance de krigeage ne dépend pas des valeurs observées, elle ne dépend que du variogramme et de la configuration des points servant à l'estimation par rapport au point (ou bloc) à estimer.

### 4.6. Mise en oeuvre du krigeage

La mise en oeuvre du krigeage s'effectue en suivant certaines étapes :

- la première est l'analyse exploratoire qui permet de se familiariser avec les données et d'éclairer le choix du modèle ;
- ensuite, l'estimation du variogramme expérimentale, l'analyse variographique et le variogramme modélisé par une fonction standard ;
- finalement, l'interpolation est effectuée par krigeage.



Organigramme d'interpolation par krigeage

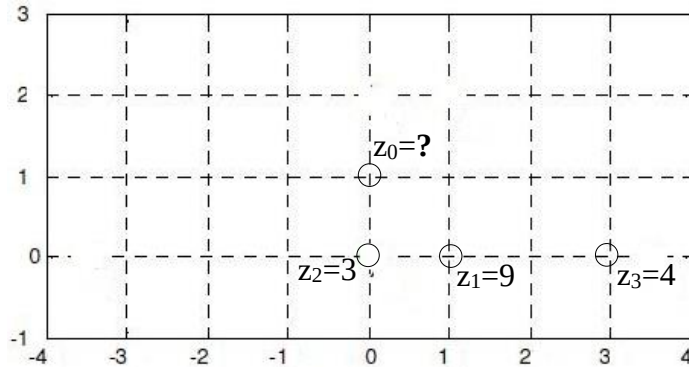
### 4.7 Logiciels informatiques

La pratique du krigeage n'est pas envisageable sans ordinateur. Certains choisissent de programmer la méthode, car les calculs intervenant dans la démarche sont relativement simples. Cependant, une bonne analyse variographique requiert un support graphique assez puissant. Il est donc certainement plus simple d'utiliser un logiciel.

### 4.8 Série d'exercices sur le krigeage

#### Exercice 10 :

Le diagramme suivant montre l'emplacement de trois données ( $x_1$  à  $x_3$ ) où l'on a mesuré la teneur en Fe.



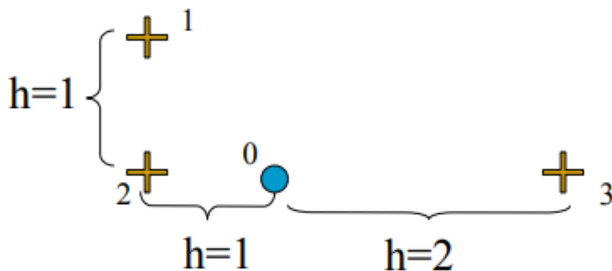
On désire effectuer un krigeage ordinaire au point  $x_0$  situé en (0,1). Le variogramme est sphérique et isotrope. La portée est de 3m. L'effet de pépité est de  $1\%^2$ , le palier est de  $10\%^2$  (palier total  $11\%^2$ ).

1. Fournissez, sous forme matricielle, les équations du krigeage ordinaire du point  $x_0$  avec  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ .
2. Solutionnez ce système d'équations.
3. Quelle serait la variance de krigeage obtenue ?

#### Exercice 11 :

Soient les points suivants :

$$x_1 = (0; 1); x_2 = (0; 0); x_3 = (3; 0)$$



Les teneurs correspondantes dans l'ordre sont  $Z_1 = 9$  ;  $Z_2 = 3$  ;  $Z_3 = 4$

On veut estimer la teneur au point  $x_0$  situé à (1; 0).

Supposons que l'on a un modèle sphérique, avec effet de pépité  $C_0=1$ , palier  $C_0+ C_1=11$  et portée  $a=3$ .