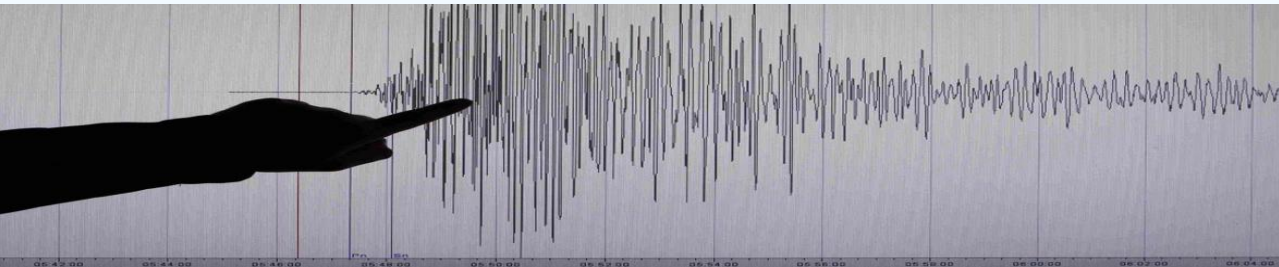


Chapitre Deux

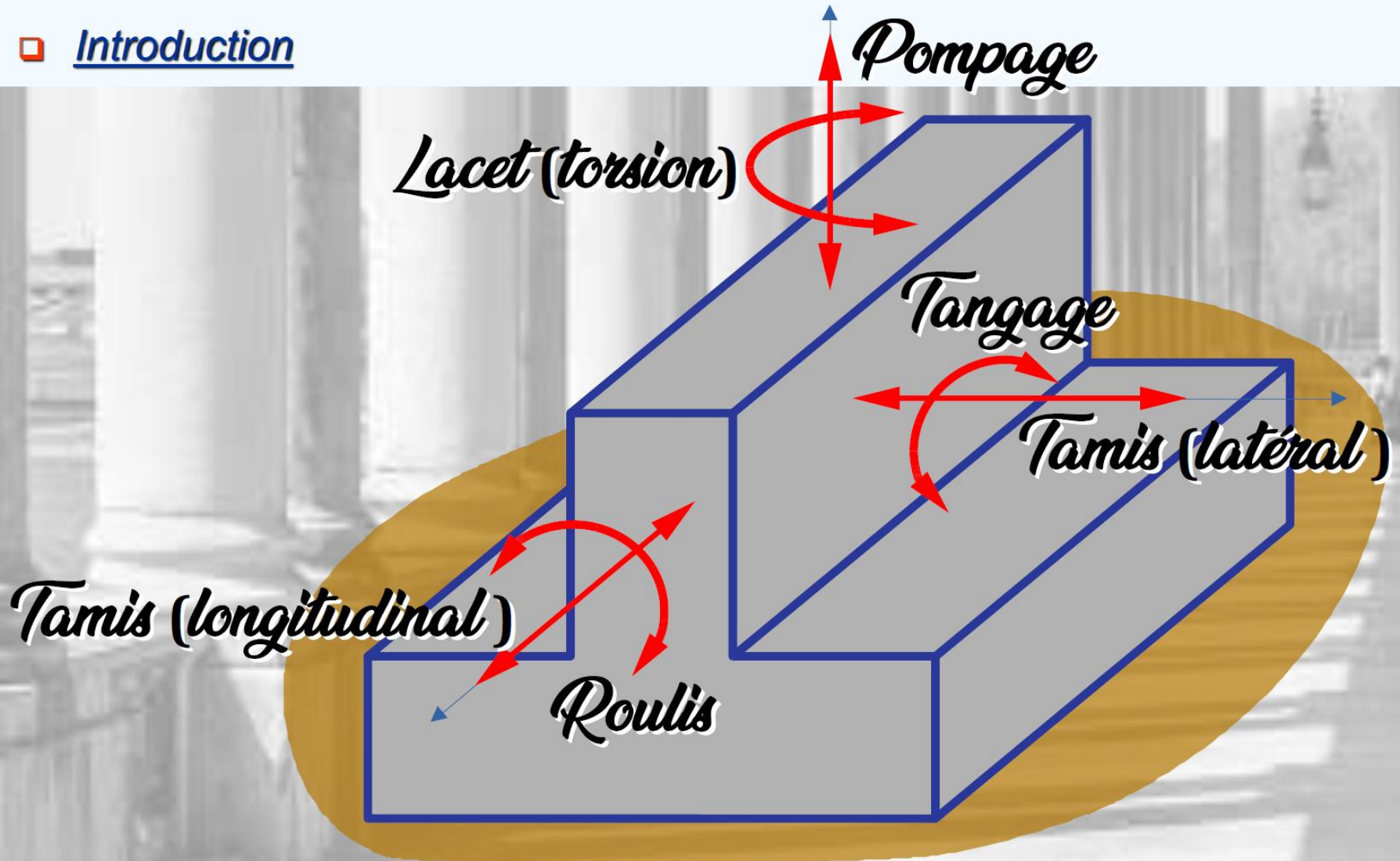
Comportement des sols sous chargement cyclique

- ❑ *Introduction*
- ❑ *Rappels sur la théorie des vibrations*
- ❑ *Formulation du comportement cyclique des sols*
- ❑ *Paramètres de comportement cyclique des sols*
- ❑ *Modèles de comportement cyclique des sols*
- ❑ *Travail personnel*



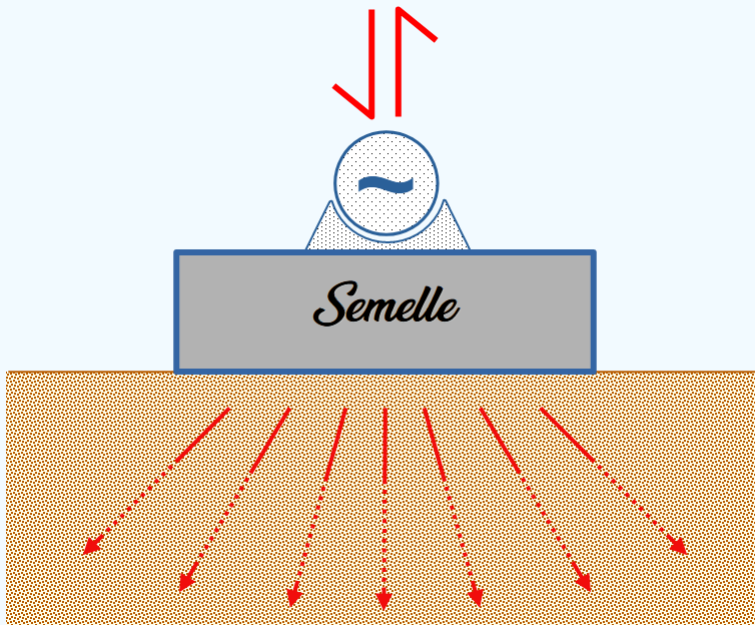
INTRODUCTION

□ Introduction

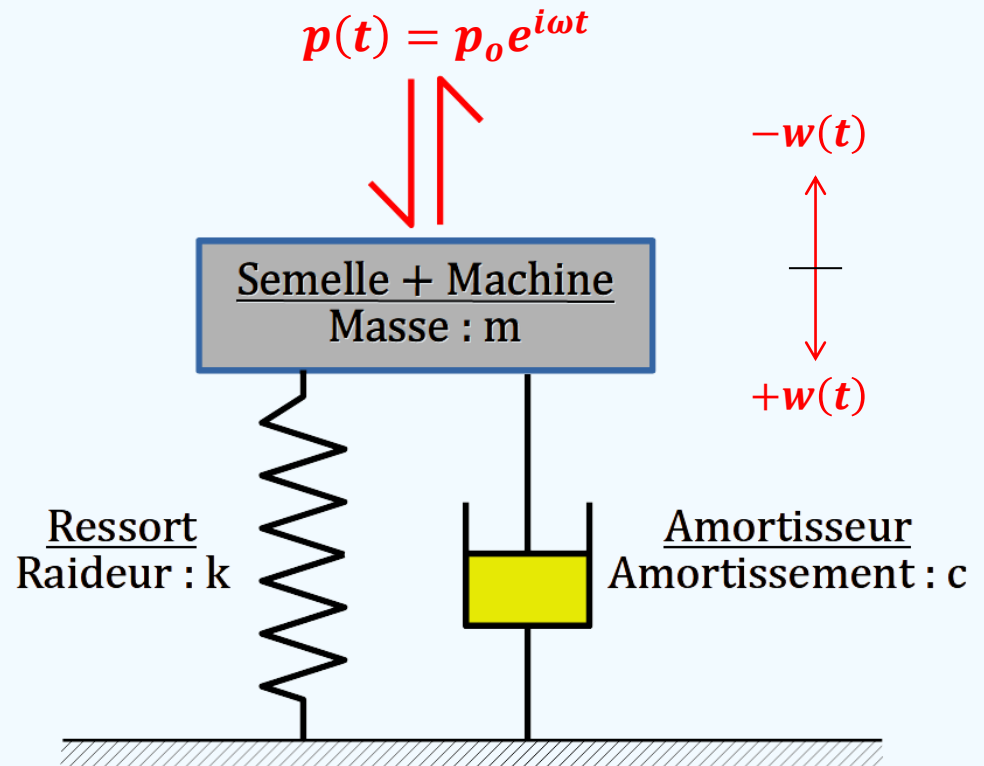


Modes de vibration des fondations

□ Introduction



a/ Modèle physique



b/ Modèle rhéologique : Kelvin-Voigt

Modélisation des fondations sous chargement vibratoire

❑ Notion d'amortisseurs

- Propriétés des amortisseurs de structures

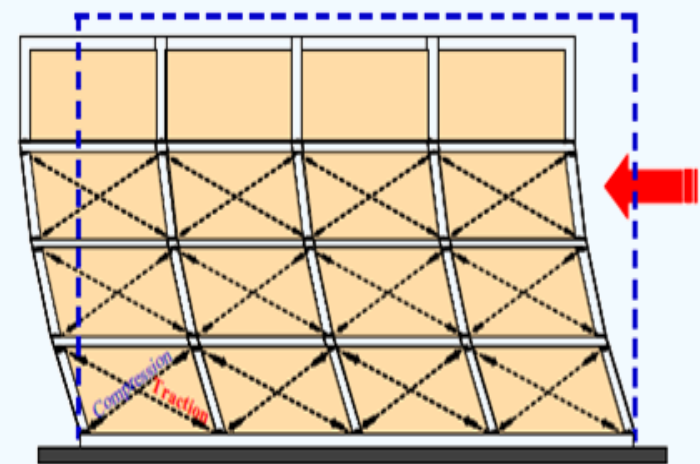
L'amortissement des ouvrages de génie-civil peut provenir de :

- ✓ ouverture / fermeture des fissures (μ -fissures),
- ✓ déformation des éléments secondaires (cloisons),
- ✓ frottements des interfaces structure principale – éléments secondaires,
- ✓ comportement anélastique des matériaux liés à leur viscosité.



- Valeurs typiques du taux d'amortissement ξ selon le PS 92

Matériau	ξ (%)
Béton précontraint	2
Charpente métallique	2 - 4
Béton non armé	3
Béton armé	4
Bois	4 - 5
Maçonnerie	5 - 6
Sol de fondation	5



❑ Notion d'amortisseurs

- Propriétés des amortisseurs de structures

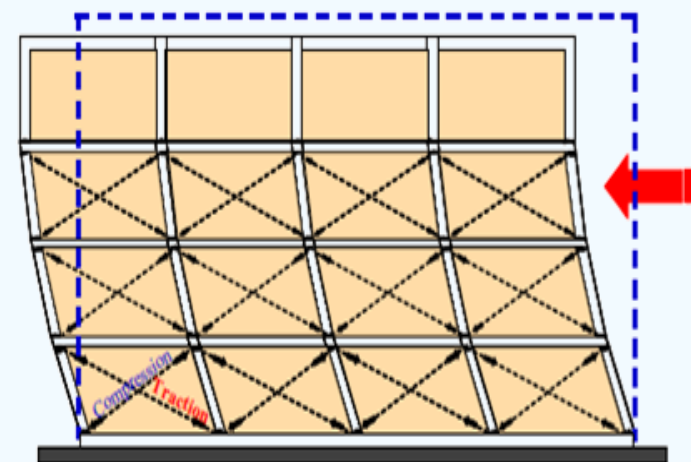
L'amortissement des ouvrages de génie-civil peut provenir de :

- ✓ ouverture / fermeture des fissures (μ -fissures),
- ✓ déformation des éléments secondaires (cloisons),
- ✓ frottements des interfaces structure principale – éléments secondaires,
- ✓ comportement anélastique des matériaux liés à leur viscosité.



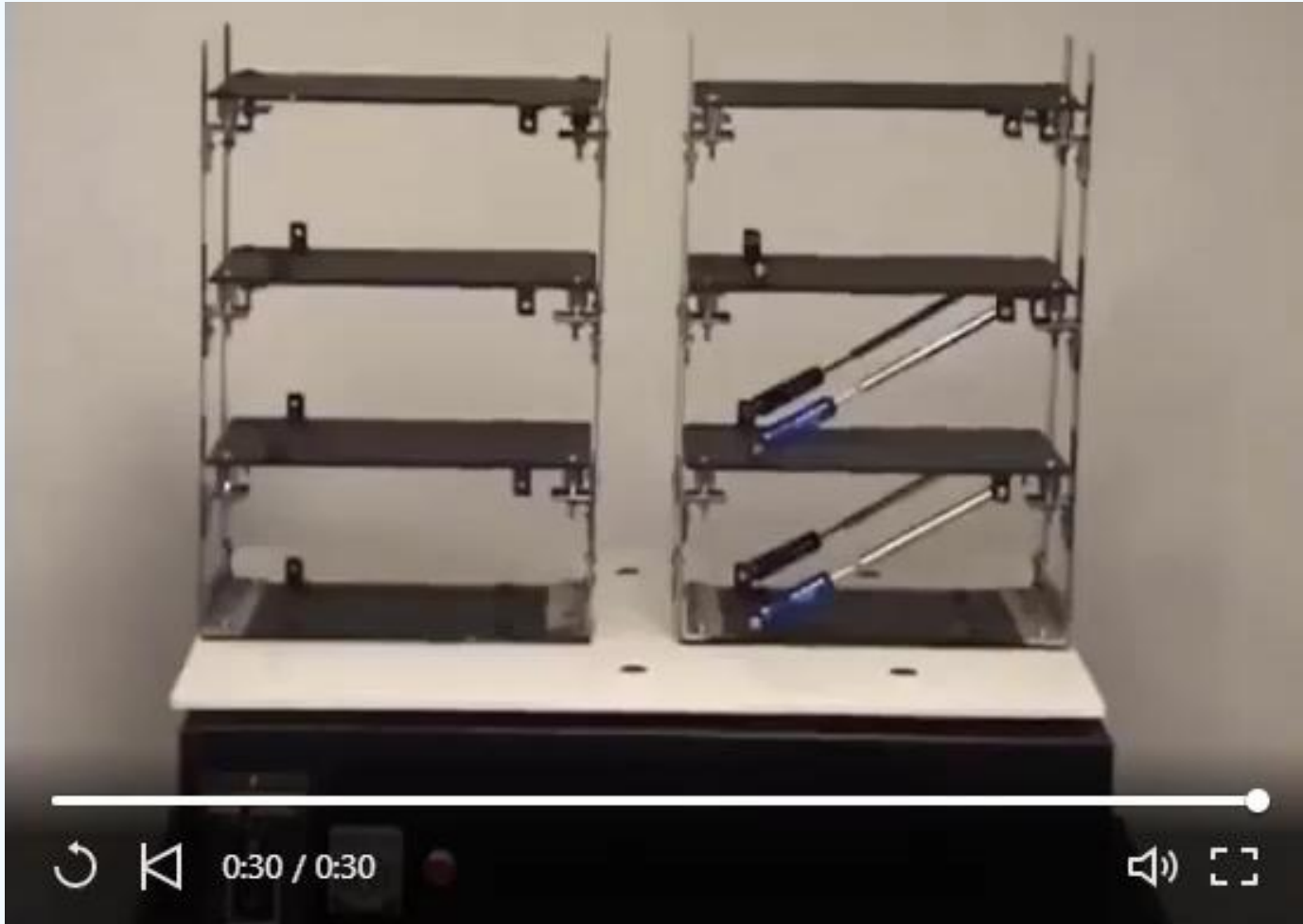
- Valeurs typiques du taux d'amortissement ξ selon le RPA 2024

Matériau		ξ (%)	
Portiques	Remplissage	<i>Léger</i>	<i>Dense</i>
	Béton armé	6	7
	Acier	4	5
Voiles en béton armé		10	
Murs en maçonnerie			



❑ Notion d'amortisseurs

- *Rôle de l'amortissement dans la stabilité des structures*



❑ Notion d'amortisseurs

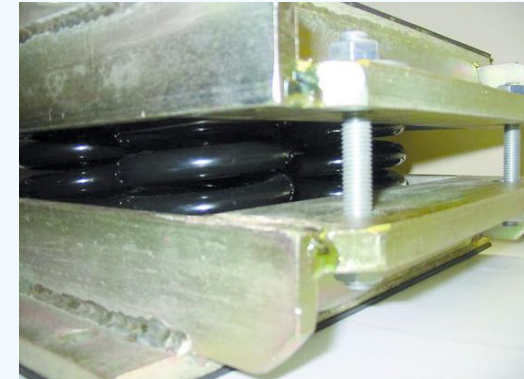
- Exemples d'amortisseurs de structures



Amortisseur viscoélastique



Ressort-Amortisseur parasismique



Boîte à ressort antivibratoire



Amortisseur viscoélastique



Amortisseur harmonique



Simulateur, Kobé, Japon, 2010

❑ Notion d'amortisseurs

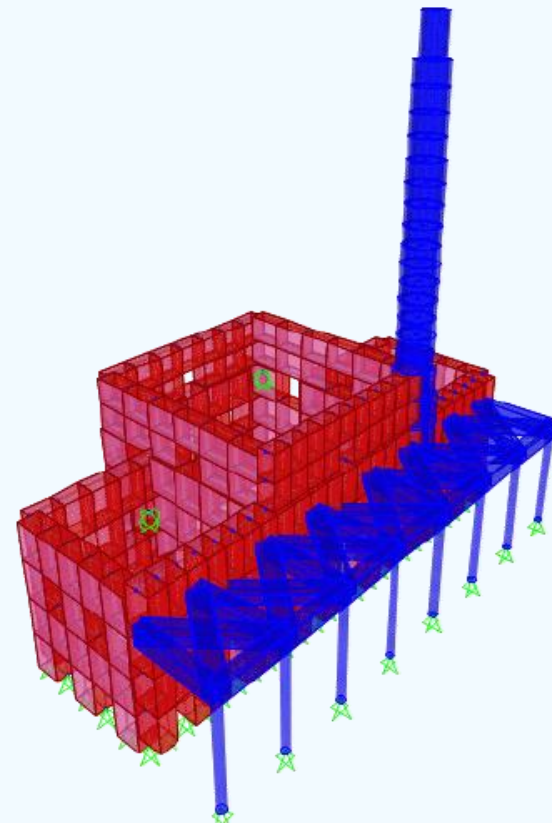
- Exemples d'amortisseurs de structures



Système parasismique : Djamaâ El-Djazair جامع الجزائر

RAPPELS SUR LA THÉORIE DES VIBRATIONS

□ Notion d'oscillateurs



Medieval City of Rhodes, Greece: Numerical modeling of Suleiman Mosque (a) a single cantilever column and (b) modeling of the whole structure. Sensors configuration is also shown

Exemples d'oscillateurs simples (Auvent) et multiples (Bâtiment et Minaret)

❑ Cas de l'oscillateur simple



Exemples d'oscillateurs simples

❑ Cas de l'oscillateur simple



Exemples d'oscillateurs simples : Insolite

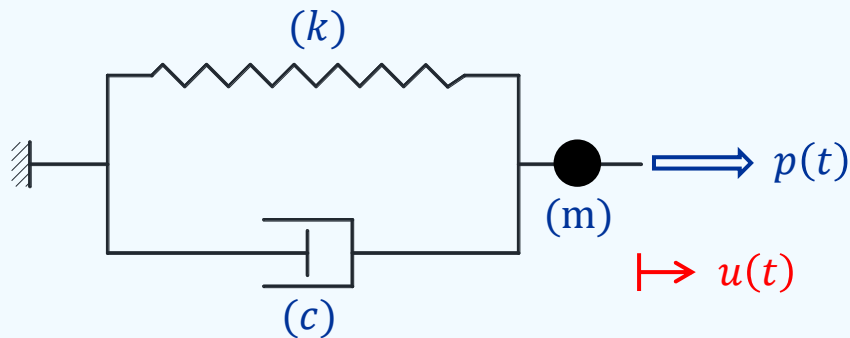
□ Cas de l'oscillateur simple

- **Modèle physique : Console**

$$\Rightarrow p(t) = p_o e^{i\omega t}$$



- **Modèle rhéologique : Kelvin-Voigt**



- **Bilan des forces**

$$\begin{array}{l} F_1 = ku \leftarrow \\ F_i = m\ddot{u} \leftarrow \\ F_2 = c\dot{u} \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \end{array} \Rightarrow p(t) \rightarrow \oplus$$

- **Equation du mouvement : $\sum \bar{F} = \bar{0}$**

$$\Rightarrow -F_1 - F_2 - F_i + p(t) = 0$$

$$\Rightarrow F_1 + F_2 + F_i = p(t)$$

$$\Rightarrow m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Soit $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation naturelle
(Pulsation propre du système)

$$\Rightarrow \ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

❑ Cas de l'oscillateur simple

De façon équivalente, on introduit les paramètres suivants :

✓ La fréquence propre :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{Hertz})$$

✓ La période propre :

$$T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{sec})$$

✓ Le taux d'amortissement* :

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{c_c}$$

où $c_c = 2m\omega_n$ désigne le coefficient d'amortissement critique, tel que :

$$\xi = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & (\text{Système sous-amorti}) \\ = 1 & (\text{Système à amortissement critique}) \\ > 1 & (\text{Système sur-amorti}) \end{cases}$$

D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{1}{m} p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ est la pulsation propre amortie (Pseudo-pulsation propre).

* Facteur ou coefficient d'amortissement, Amortissement réduit, Pourcentage d'amortissement critique (RPA 2024)

□ Cas de l'oscillateur simple

$$\xi = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & \text{(Système sous-amorti)} \\ = 1 & \text{(Système à amortissement critique)} \\ > 1 & \text{(Système sur-amorti)} \end{cases}$$

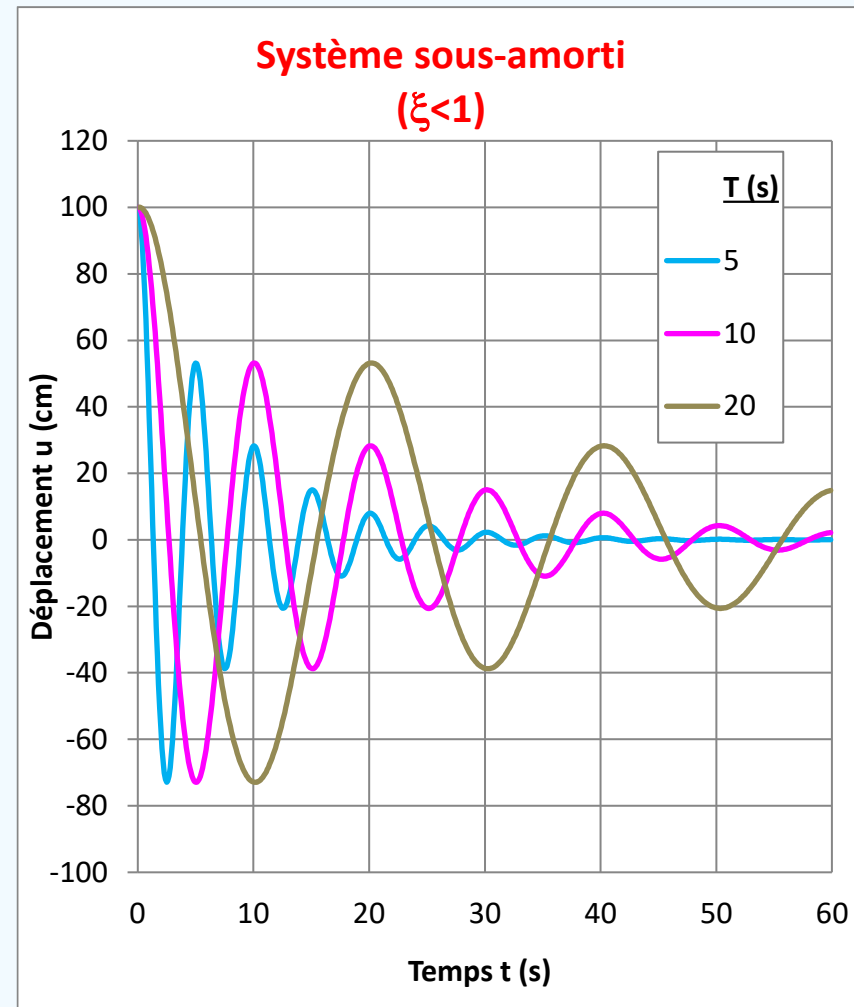
D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ est la pulsation propre amortie (Pseudo-pulsation propre).



□ Cas de l'oscillateur simple

$$\xi = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & \text{(Système sous-amorti)} \\ = 1 & \text{(Système à amortissement critique)} \\ > 1 & \text{(Système sur-amorti)} \end{cases}$$

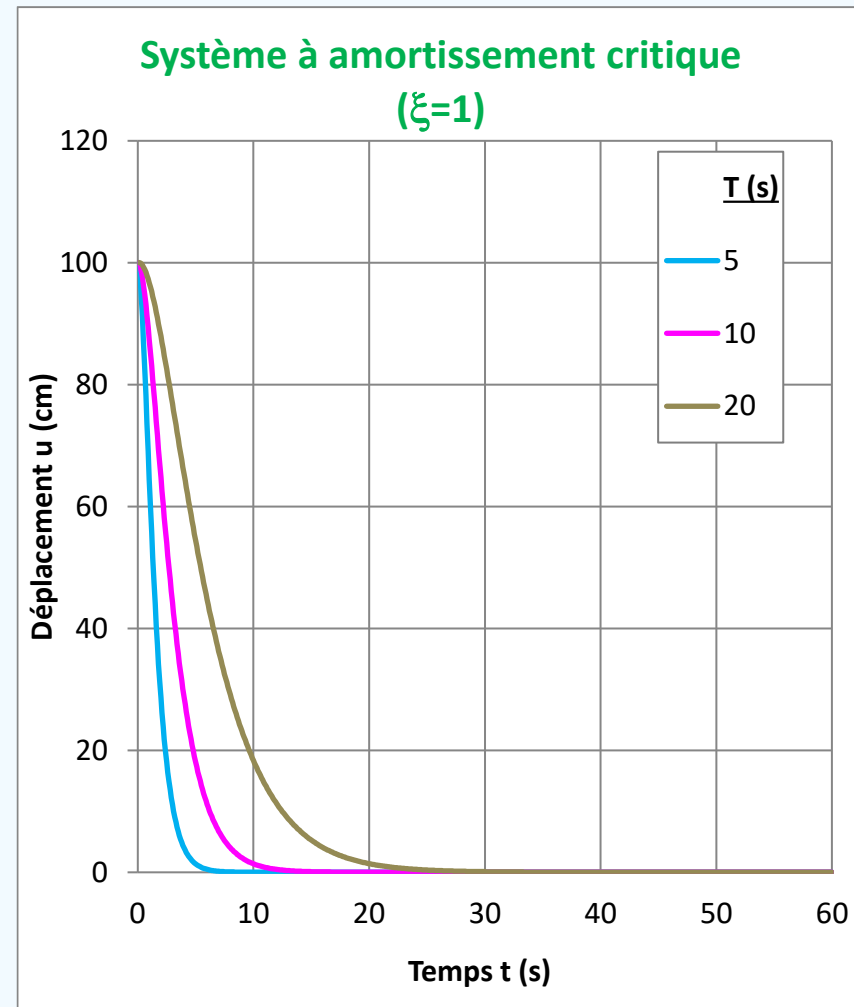
D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ est la pulsation propre amortie (Pseudo-pulsation propre).



❑ Cas de l'oscillateur simple

$$\xi = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & \text{(Système sous-amorti)} \\ = 1 & \text{(Système à amortissement critique)} \\ > 1 & \text{(Système sur-amorti)} \end{cases}$$

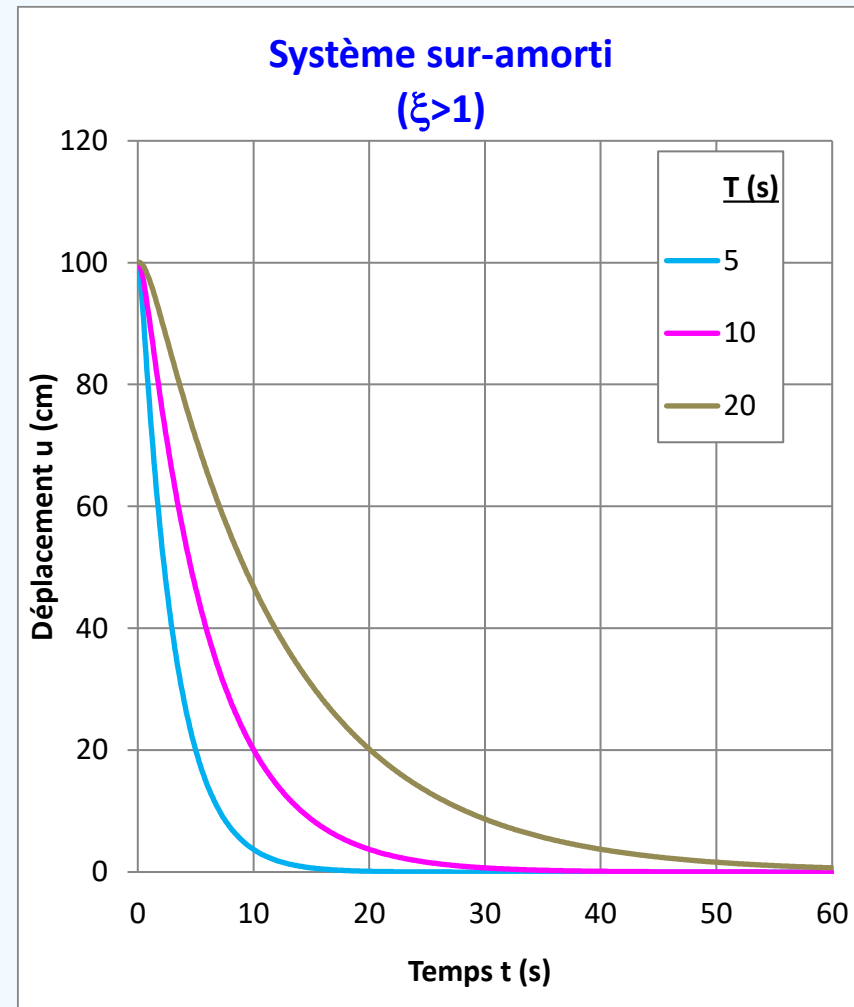
D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ est la pulsation propre amortie (Pseudo-pulsation propre).



□ Cas de l'oscillateur simple

$$\xi = \frac{c}{c_c} \begin{cases} < 1 & \text{(Système sous-amorti)} \\ = 1 & \text{(Système à amortissement critique)} \\ > 1 & \text{(Système sur-amorti)} \end{cases}$$

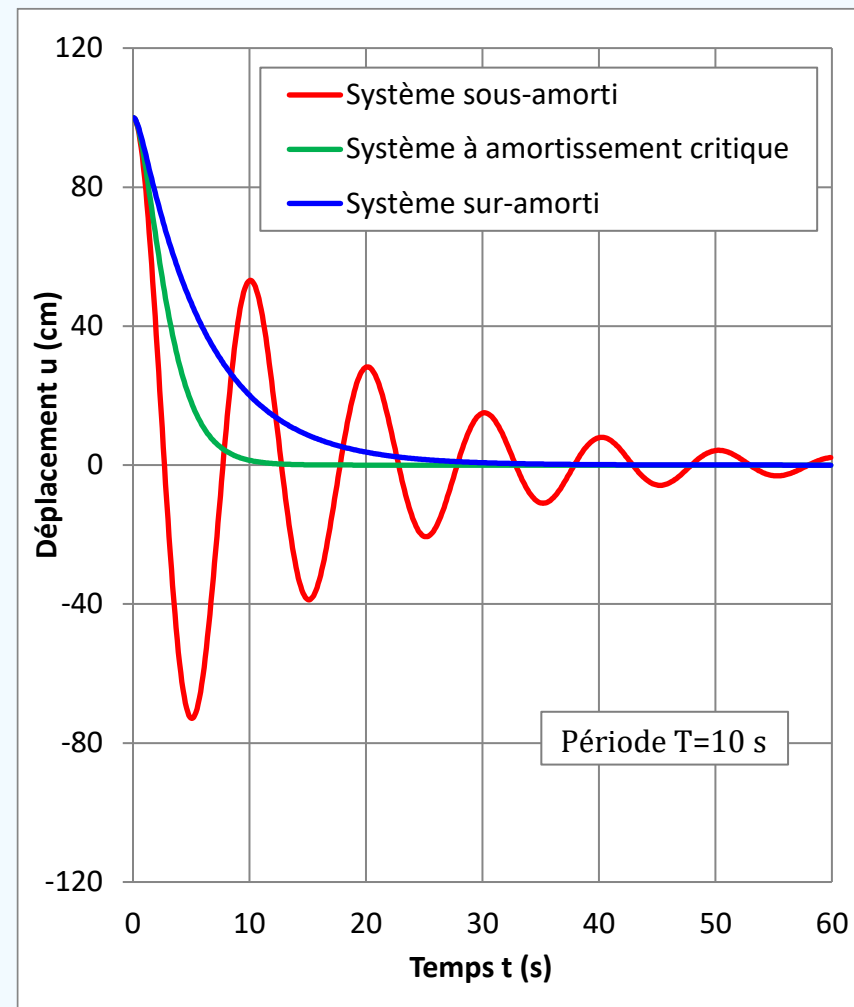
D'où l'équation générale du mouvement :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = \frac{1}{m}p(t)$$

La solution générale de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel :

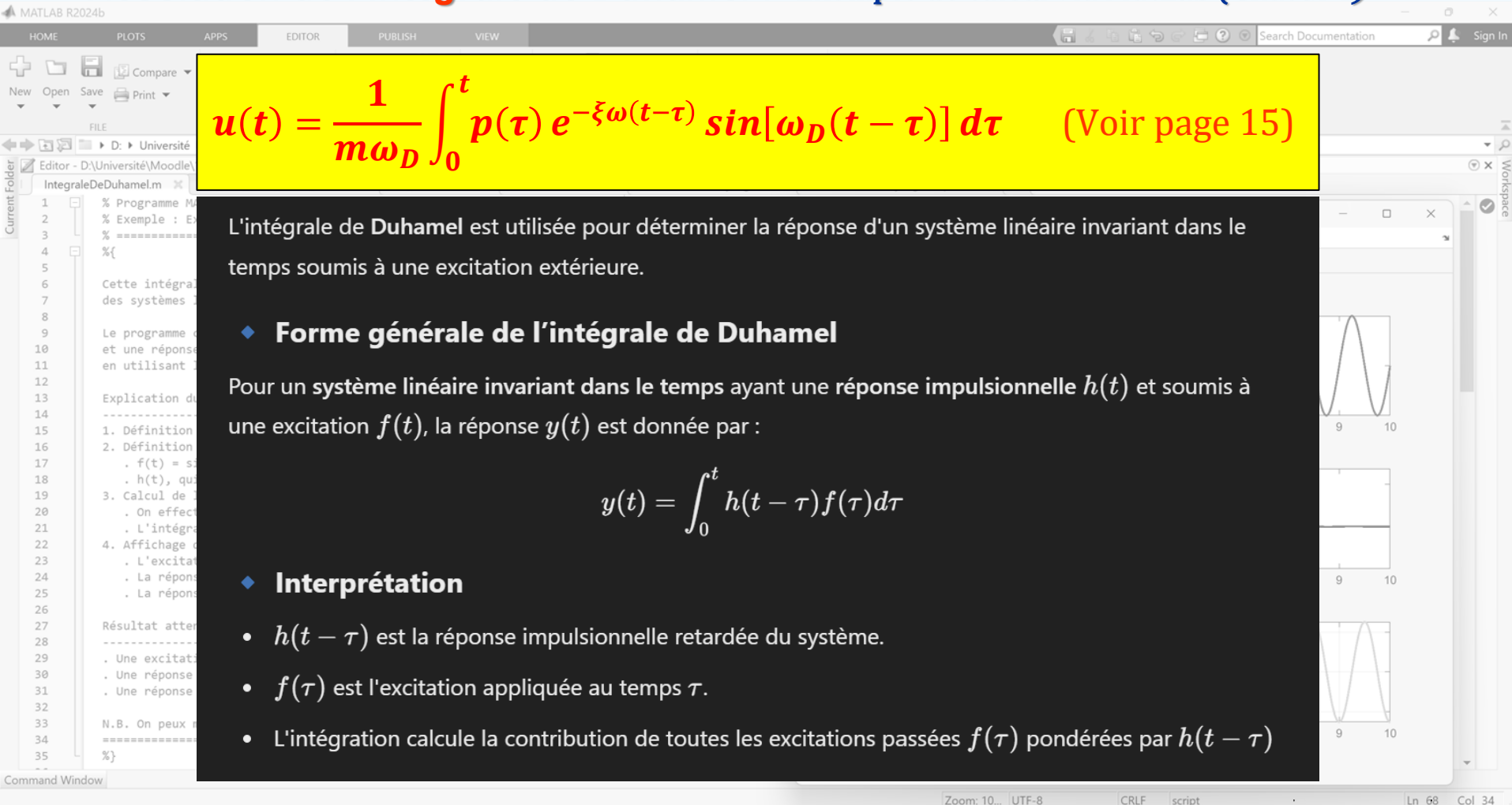
$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où $\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ est la pulsation propre amortie (Pseudo-pulsation propre).



❑ Cas de l'oscillateur simple

- **Résolution de l'intégrale de Duhamel** : Exemple de calcul via MatLab (*ChatGPT*)



The image shows a MATLAB R2024b interface. The main window displays a script titled 'IntegraleDeDuhamel.m'. The script contains comments in French explaining the purpose of the program and the steps involved in calculating the Duhamel integral. The script is as follows:

```

1 % Programme M
2 % Exemple : Ex
3 % =====
4 %{
5
6 Cette intégrale
7 des systèmes
8
9 Le programme
10 et une réponse
11 en utilisant
12
13 Explication du
14
15 1. Définition
16 2. Définition
17   . f(t) = s
18   . h(t), qu
19 3. Calcul de
20   . On effect
21   . L'intégr
22 4. Affichage
23   . L'excit
24   . La répons
25   . La répons
26
27 Résultat att
28 -----
29 . Une excitat
30 . Une réponse
31 . Une réponse
32
33 N.B. On peut
34 -----
35 %}
  
```

The script is executed, and the results are displayed in the Command Window and the Workspace. The Command Window shows the following output:

```

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
  
```

The Workspace shows three variables: 'f', 'h', and 'y'. The 'f' variable is a vector of size 1x10. The 'h' variable is a vector of size 1x10. The 'y' variable is a vector of size 1x10. The 'f' variable is plotted in the first plot, showing a sinusoidal wave. The 'h' variable is plotted in the second plot, showing a constant value. The 'y' variable is plotted in the third plot, showing a sinusoidal wave.

The main window also displays the following text:

L'intégrale de Duhamel est utilisée pour déterminer la réponse d'un système linéaire invariant dans le temps soumis à une excitation extérieure.

◆ **Forme générale de l'intégrale de Duhamel**

Pour un système linéaire invariant dans le temps ayant une réponse impulsionnelle $h(t)$ et soumis à une excitation $f(t)$, la réponse $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

◆ **Interprétation**

- $h(t - \tau)$ est la réponse impulsionnelle retardée du système.
- $f(\tau)$ est l'excitation appliquée au temps τ .
- L'intégration calcule la contribution de toutes les excitations passées $f(\tau)$ pondérées par $h(t - \tau)$

❑ Cas de l'oscillateur simple

- Résolution de l'intégrale de Duhamel : Exemple de calcul via MatLab (*ChatGPT*)

◆ Cas d'un système du second ordre

Un système masse-ressort-amortisseur suit l'équation différentielle :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

Sa réponse est obtenue en utilisant l'intégrale de Duhamel avec la fonction de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

où :

- $\omega_n = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre.
- $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ est le coefficient d'amortissement.
- $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ est la pulsation amortie.

La réponse du système est alors :

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) f(\tau) d\tau$$

❑ Cas de l'oscillateur simple

- **Résolution de l'intégrale de Duhamel** : Exemple de calcul via MatLab (*ChatGPT*)

MATLAB R2024b

HOME PLOTS APPS EDITOR PUBLISH VIEW

Search Documentation Sign In

FILE

New Open Save Print

Editor - D:\Université\Moodle\1_RDS\1_RDS_Chapitre 4 - Lois de comportement et résolution numérique\MDP_MEF\IntegraleDeDuhamel.m

IntegraleDeDuhamel

1 % Progr
2 % Exemp
3 % =====
4 % {
5
6 Cette i
7 des sys
8
9 Le prog
10 et une
11 en util
12
13 Explica
14 -----
15 1. Défi
16 2. Défi
17 . f(
18 . h(
19 3. Calc
20 . Or
21 . L'
22 4. Affi
23 . L'
24 . La
25 . La
26
27 Résulta
28 -----
29 . Une e
30 . Une r
31 . Une r
32
33 N.B. Or
34 =====
35 %}

L'intégrale de Duhamel est un **outil fondamental** en dynamique des structures et en traitement du signal pour calculer la réponse d'un système linéaire à une excitation quelconque.

Le calcul de l'intégrale de **Duhamel** nécessite une **intégration numérique** car elle est généralement impossible à résoudre analytiquement pour des fonctions d'excitation complexes. Voici quelques méthodes numériques courantes utilisées pour son calcul :

- ◆ **1. Méthode des trapèzes**
 - 📌 Approche : Approximations successives de l'intégrale en découpant l'intervalle en petits trapèzes.
 - 📌 Formule :

$$I \approx \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(t_{i-1})h(t_i) + f(t_i)h(t_{i-1})]$$

- 📌 Avantage : Simple à implémenter, bon compromis entre précision et complexité.
- 📌 Inconvénient : Moins précis pour des fonctions très variables.

Zoom: 10... UTF-8 CRLF script Ln 68 Col 34

❑ Cas de l'oscillateur simple

- Résolution de l'intégrale de Duhamel : Exemple de calcul via MatLab (ChatGPT)

```

MATLAB R2024b
HOME PLOTS APPS EDIT
+ New Open Save Print Go To Find
FILE NAVIGATE
D:\Université\Moodle\1 RDS\1 RDS
Editor - D:\Université\Moodle\1 RDS\1 RDS_Chapitre 4
IntegraleDeDuhamel.m TP2_DDS_Karbi_M1S1
1 % Programme MATLAB permettant
2 % Exemple : Excitation sinusoïdale
3 %
4 %
5
6 Cette intégrale est couramment
7 des systèmes linéaires pour ob
8
9 Le programme ci-dessous suppose
10 et une réponse impulsionnelle
11 en utilisant la méthode des tr
12
13 Explication du code :
14 -----
15 1. Définition du temps : Un vecteur
16 2. Définition des fonctions :
17 . f(t) = sin(2*pi*t), qui est l'excitation
18 . h(t), qui est la réponse impulsionnelle
19 3. Calcul de l'intégrale de Duhamel
20 . On effectue une intégration par
21 . L'intégration se fait par la méthode
22 4. Affichage des résultats :
23 . L'excitation f(t).
24 . La réponse impulsionnelle h(t).
25 . La réponse y(t) obtenue par
26
27 Résultat attendu :
28 -----
29 . Une excitation sinusoïdale.
30 . Une réponse impulsionnelle
31 . Une réponse y(t) qui combine
32
33 N.B. On peut modifier les fonctions
34
35 %}

```

- ♦ **2. Méthode des rectangles (gauche/droite/milieu)**
- ✦ Approche : Approximation en sommant des aires de petits rectangles.
- ✦ Formules :

- Rectangle gauche :

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) h(t_{i+1}) \cdot \Delta t$$

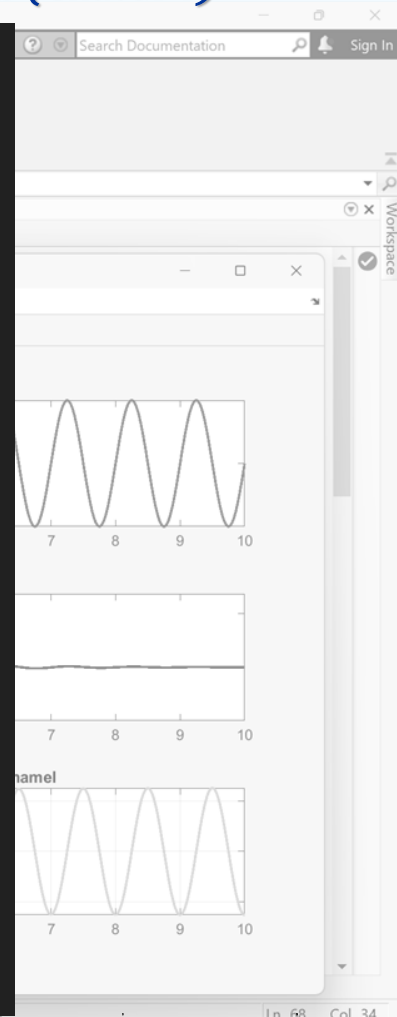
- Rectangle droit :

$$I \approx \sum_{i=1}^n f(t_i) h(t_i) \cdot \Delta t$$

- Rectangle milieu :

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) h(t_{i+1}) \cdot \Delta t$$

- ✦ Avantage : Très simple à mettre en œuvre.
- ✦ Inconvénient : Peu précis sauf si Δt est très petit.



❑ Cas de l'oscillateur simple

- Résolution de l'intégrale de Duhamel : Exemple de calcul via MatLab (ChatGPT)

◆ 3. Méthode de Simpson

✚ Approche : Approximation par interpolation quadratique (polynômes du second degré).

✚ Formule :

$$I \approx \frac{h}{3} \sum_{i=0,2,4,\dots}^{n-2} [f(t_i)h(t_i) + 4f(t_{i+1})h(t_{i+1}) + f(t_{i+2})h(t_{i+2})]$$

✚ Avantage : Plus précis que les trapèzes pour une même discrétisation.

✚ Inconvénient : Fonctionne mieux pour un nombre pair de points.

◆ 4. Méthode de quadrature de Gauss

✚ Approche : Approximations basées sur des poids et des points optimaux pour réduire l'erreur.

✚ Formule générale :

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_i f(t_i) h(t_i)$$

où w_i sont des poids pré-calculés.

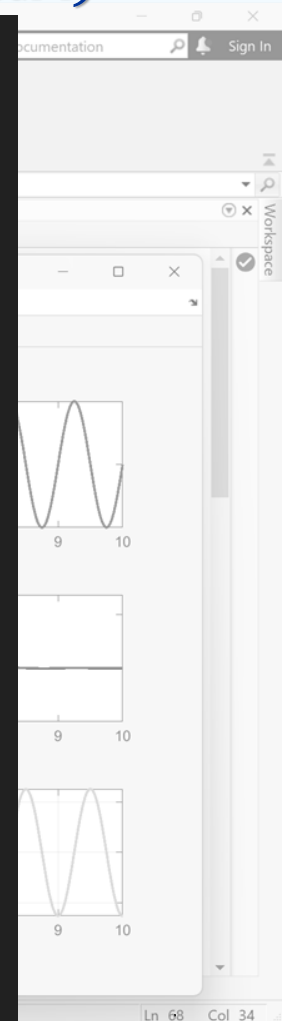
✚ Avantage : Très précis même avec peu de points.

✚ Inconvénient : Plus complexe à mettre en œuvre

```

MATLAB R2024b
HOME PLOTS
+ [ ] [ ] [ ] Compare
New Open Save Print
FILE
D:\Université\
Editor - D:\Université\Moodle\1
IntegraleDeDuhamel.m
1 % Programme MAT
2 % Exemple : Exc
3 % =====
4 %{
5
6 Cette intégrale
7 des systèmes li
8
9 Le programme ci
10 et une réponse
11 en utilisant la
12
13 Explication du
14
15 1. Définition d
16 2. Définition d
17 . f(t) = sin
18 . h(t), qui
19 3. Calcul de l'
20 . On effectu
21 . L'intégrat
22 4. Affichage de
23 . L'excitati
24 . La réponse
25 . La réponse
26
27 Résultat attend
28 -----
29 . Une excitatio
30 . Une réponse i
31 . Une réponse y
32
33 N.B. On peut mo
34 -----
35 %}
Command Window

```



❑ Cas de l'oscillateur simple

- **Résolution de l'intégrale de Duhamel** : Exemple de calcul via MatLab (*ChatGPT*)

The screenshot shows the MATLAB R2024b environment. The background displays a MATLAB script titled 'IntegraleDeDuhamel.m' with comments in French and a calculation of the Duhamel integral. Overlaid on this is a dark ChatGPT-style window containing the following text:

◆ **5. Méthodes avancées : Algorithmes d'intégration adaptative**

- Romberg : Raffinement progressif en combinant la méthode des trapèzes avec une extrapolation de Richardson.
- Runge-Kutta pour intégration cumulative : Utilisé pour des problèmes où $h(t)$ évolue avec un système dynamique.

🎯 **Conclusion**

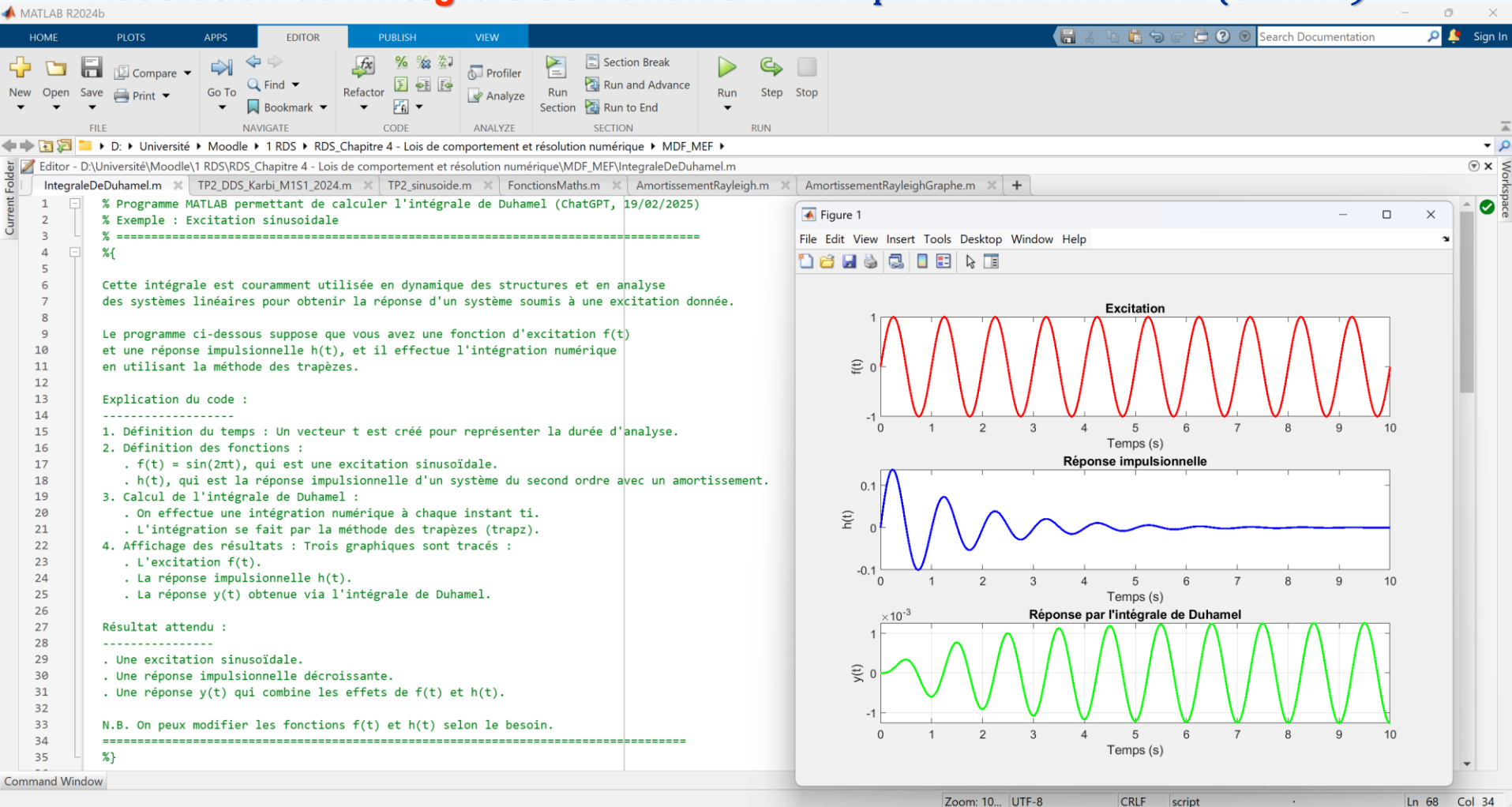
- Méthodes simples (rectangles, trapèzes) : Faciles à programmer, adaptées pour un calcul rapide.
- Méthodes plus avancées (Simpson, Gauss, Romberg) : Plus précises, recommandées si $f(t)$ et $h(t)$ varient rapidement.

Si tu veux une implémentation en MATLAB ou Python, fais-moi signe ! 🚀

The background MATLAB script includes comments like '% Programme MATLAB', '% Exemple : Ex', and '% {', followed by a description of the Duhamel integral and its application to dynamic systems. It also shows a table of contents for the script's sections.

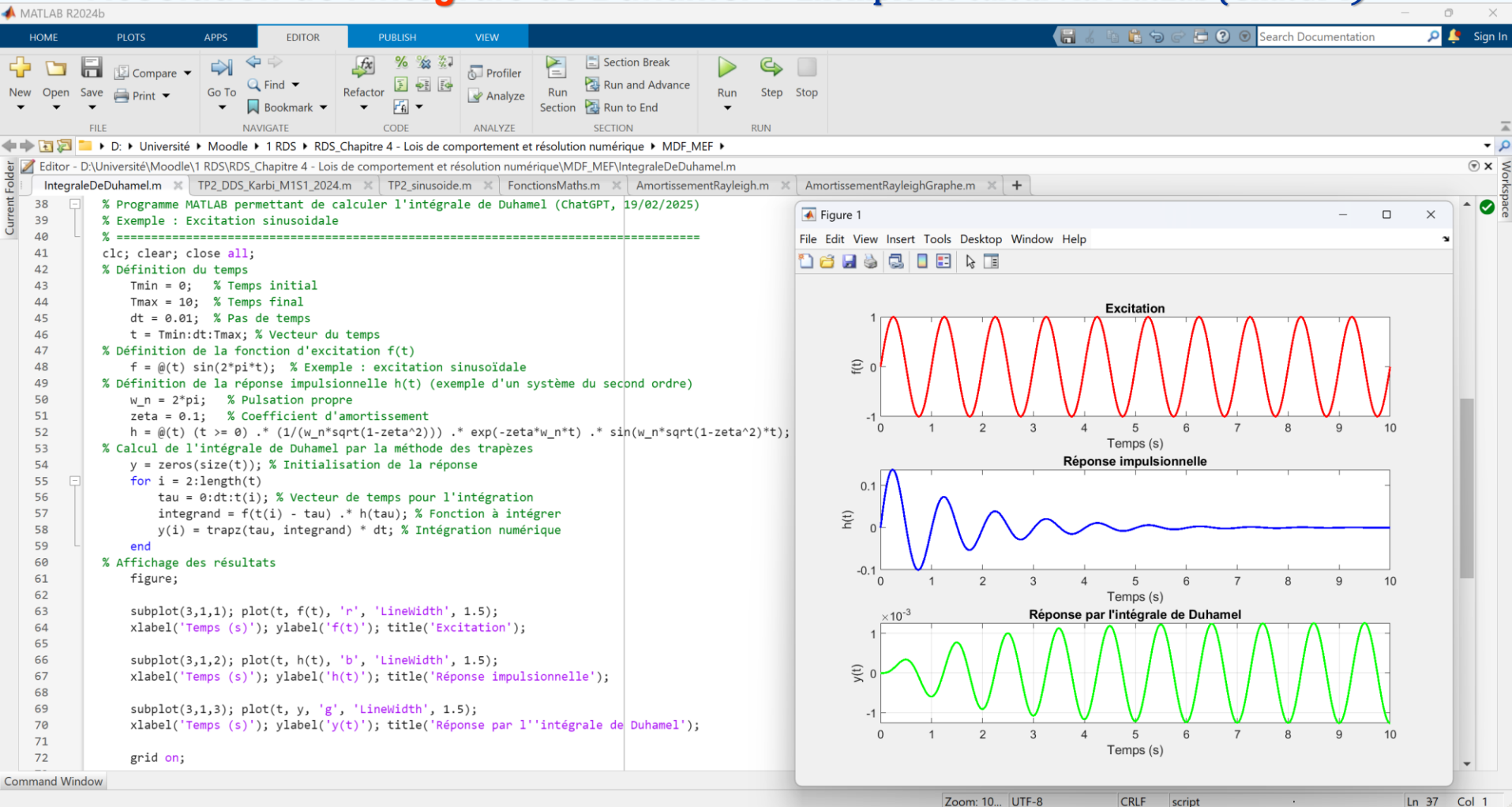
❑ Cas de l'oscillateur simple

- Résolution de l'intégrale de Duhamel : Exemple de calcul via MatLab (ChatGPT)



❑ Cas de l'oscillateur simple

- Résolution de l'intégrale de Duhamel : Exemple de calcul via MatLab (ChatGPT)

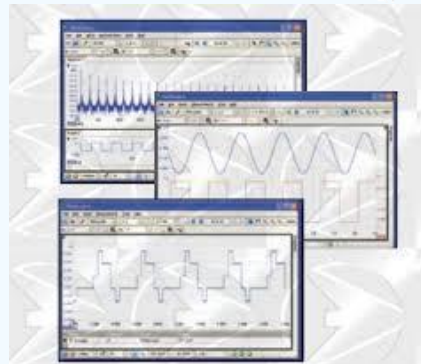
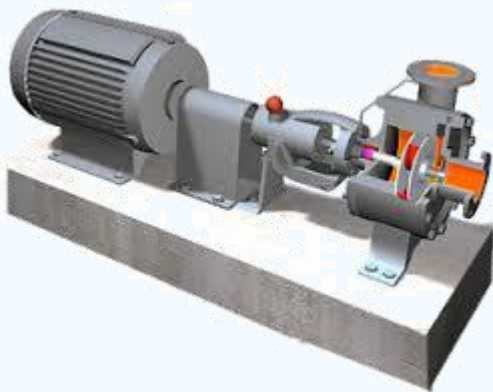


❑ Cas de l'oscillateur simple

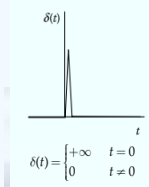
- Formes de la force $p(t)$ appliquée

Force périodique
engendrée par une machine

$$p(t) = p_o e^{i\omega t}$$



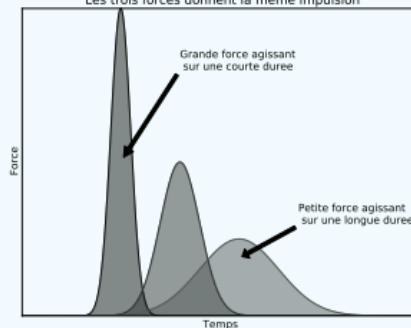
Impulsion due à un choc
(Battage des pieux et palplanches)



$$p(t) = \delta(t)$$

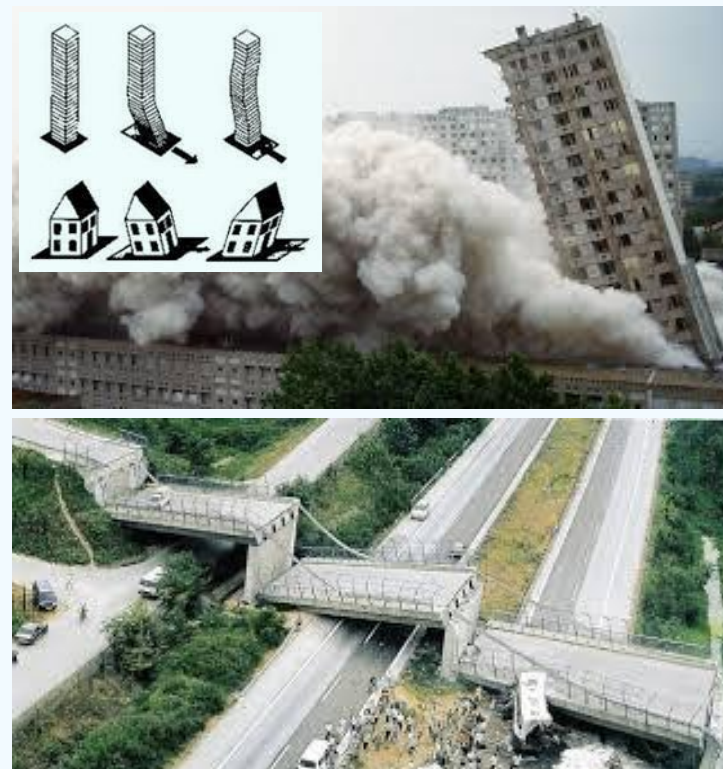


Les surfaces sous les trois courbes sont identiques
Les trois forces donnent la même impulsion



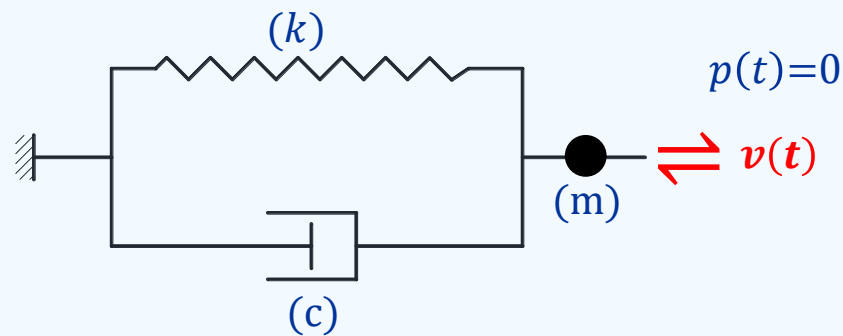
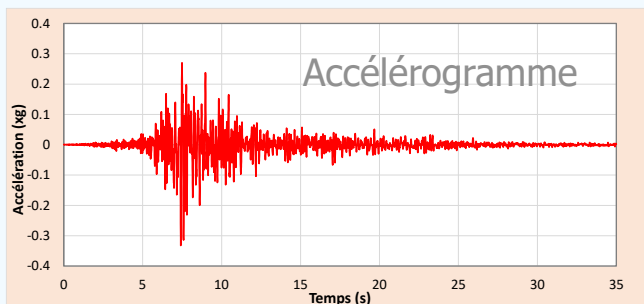
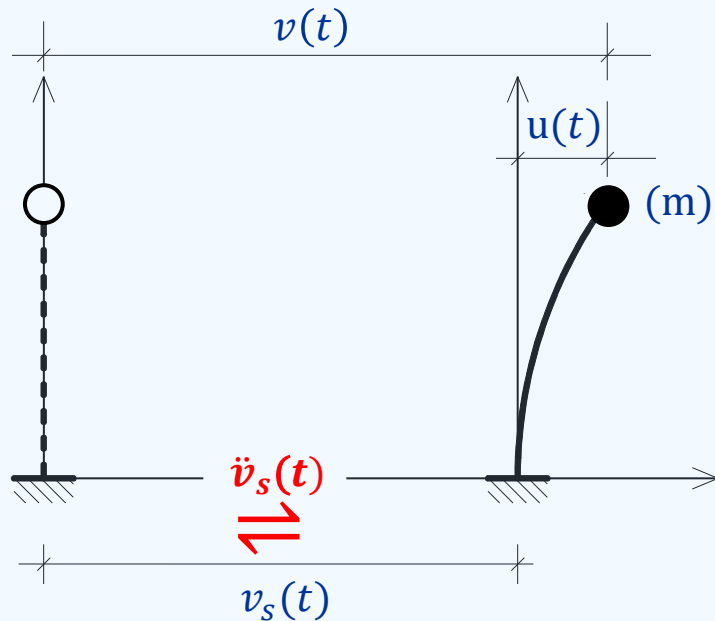
Séisme
(Déplacement d'appui)

$$p(t) = 0$$



□ Cas de l'oscillateur simple

- Cas d'une excitation sismique (Vibrations forcées par déplacement d'appui)



Oscillateur libre

- $v_s(t)$ - Déplacement horizontal d'appui
 - $u(t)$ - Déplacement propre de la masse
- $\Rightarrow v(t) = u(t) + v_s(t)$ - Déplacement total

$$\Rightarrow \ddot{v}(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{v}_s(t)$$

❑ Cas de l'oscillateur simple

- Cas d'une excitation sismique (Vibrations forcées par déplacement d'appui)

Sachant que : $\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{1}{m}p(t)$ (Cas général de l'oscillateur forcé)

Et que : $\ddot{u}(t) + \ddot{v}_s(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$ (Oscillateur libre : Déplacement d'appui)

D'où, l'on déduit que : $p(t) = -m\ddot{v}_s(t)$

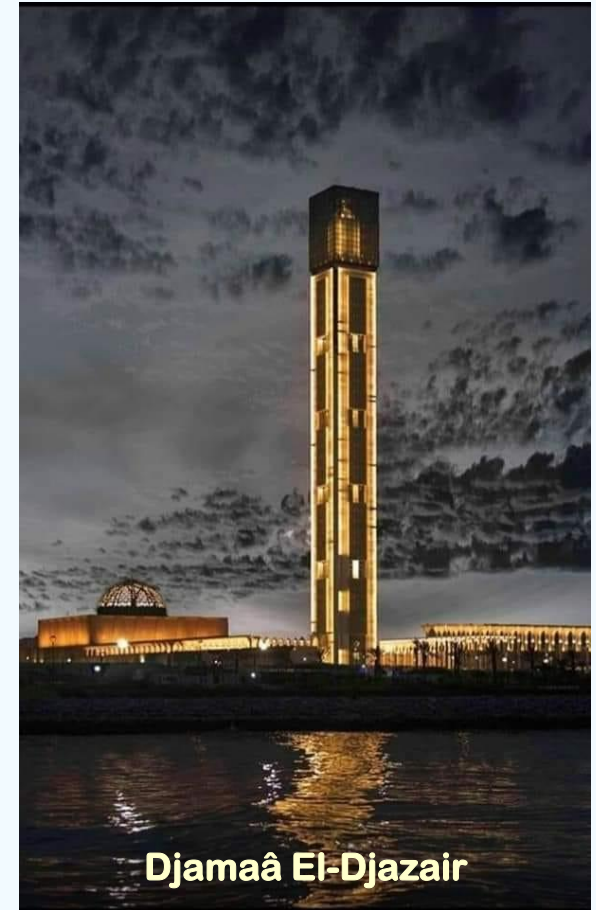
⇒ Tout se passe comme s'il s'agit d'un oscillateur libre soumis à une force fictive égale à la force d'inertie $p(t) = -m\ddot{v}_s(t)$, où $\ddot{v}_s(t)$ désigne l'accélération sismique appliquée.

La solution de l'équation est donnée par l'intégrale de Duhamel qui prend la forme

particulière suivante : $u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$

avec $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ (Pulsation propre amortie).

❑ Cas de l'oscillateur multiple



Exemples d'oscillateurs multiples

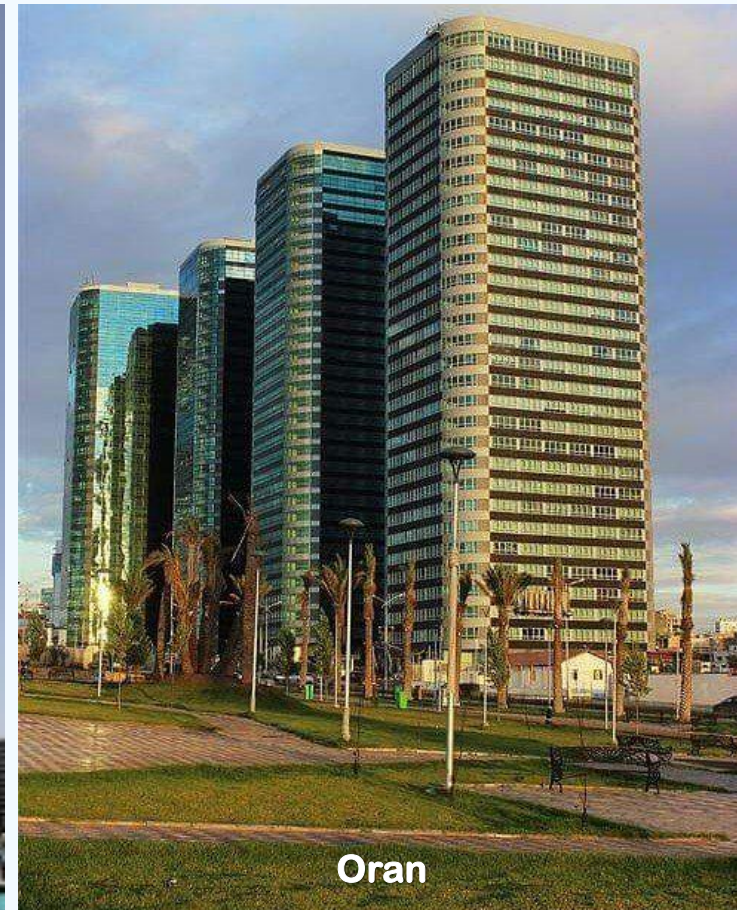
❑ Cas de l'oscillateur multiple



Dar El Beïda, Alger



Dubaï, EAU



Oran

Exemples d'oscillateurs multiples

❑ Cas de l'oscillateur multiple



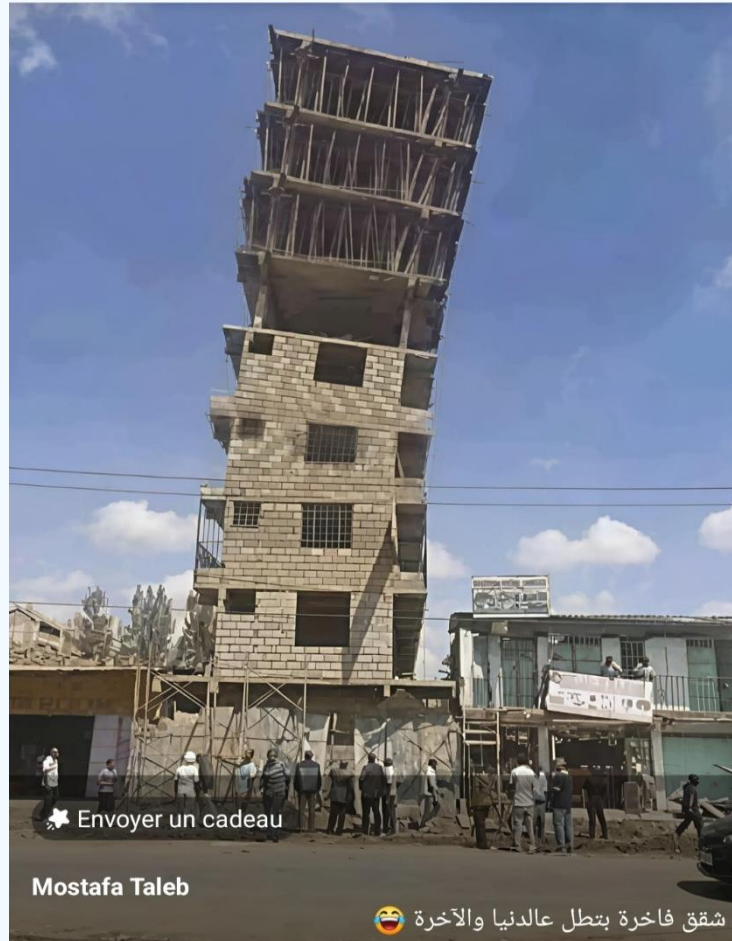
Exemples d'oscillateurs multiples

❑ Cas de l'oscillateur multiple



Exemples d'oscillateurs multiples : *Insolite*

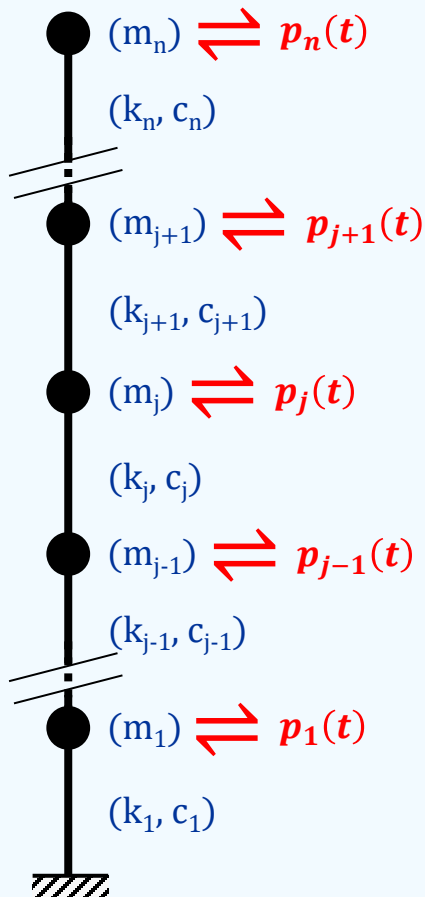
❑ Cas de l'oscillateur multiple



Exemples d'oscillateurs multiples : *Insolite*

□ Cas de l'oscillateur multiple

- **Modèle de console**



- **Formulation de l'équation du mouvement**

Par généralisation de l'équation du mouvement de l'oscillateur simple au cas de l'oscillateur multiple, on peut écrire :

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\bar{u}} + \bar{\bar{C}}\dot{\bar{u}} + \bar{\bar{K}}\bar{u} = \bar{P}(t)$$

avec :

$\bar{\bar{M}}$ - Matrice des masses

$\bar{\bar{K}}$ - Matrice des rigidités (ou des raideurs)

$\bar{\bar{C}}$ - Matrice des amortissements

⇒ C'est l'équation d'un oscillateur multiple pouvant se déformer par rapport à sa base qui reste fixe.

❑ Cas de l'oscillateur multiple

- Amortissement de Rayleigh

Il est défini par la relation suivante :

$$\bar{C} = \alpha_R \bar{M} + \beta_R \bar{K}$$

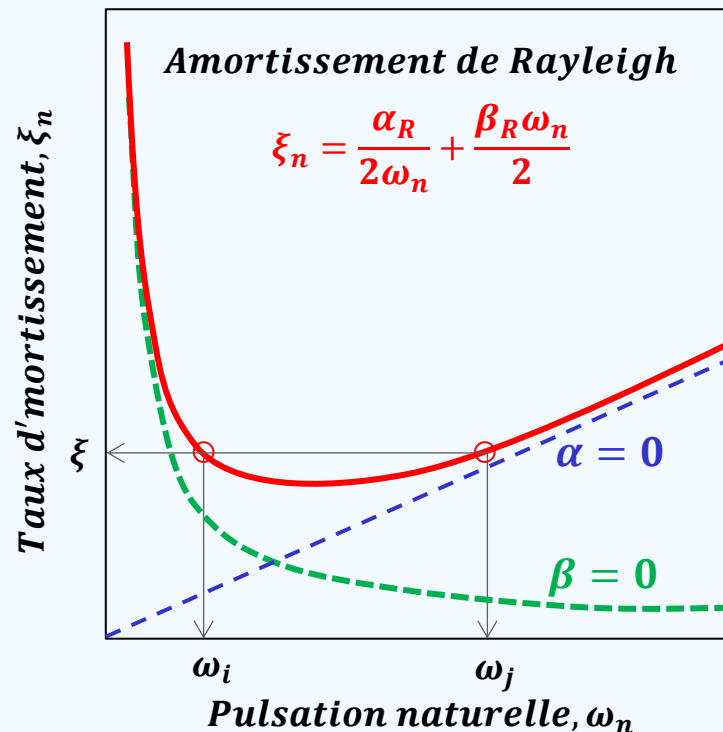
où α_R et β_R désignent des constantes qui peuvent être déterminées par la résolution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha_R + \beta_R \omega_i^2 = 2\omega_i \xi \\ \alpha_R + \beta_R \omega_j^2 = 2\omega_j \xi \end{cases}$$

Soit donc :

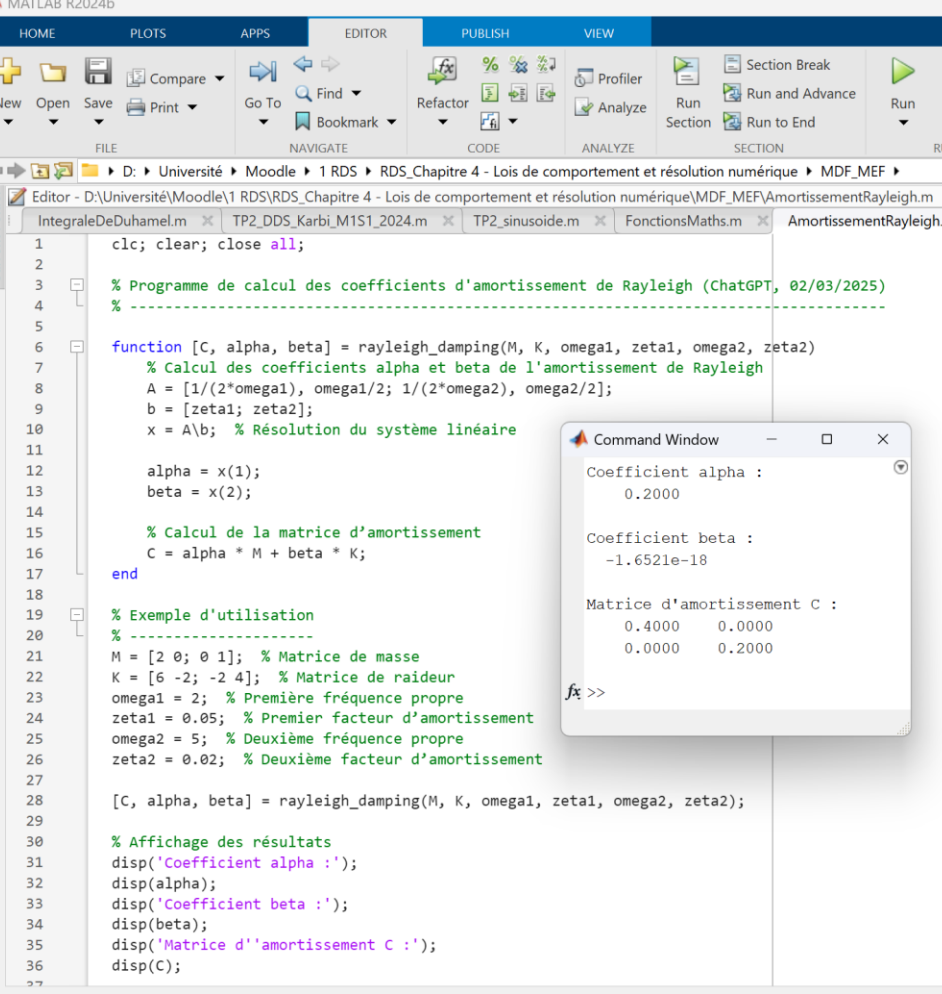
$$\alpha_R = \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \xi \quad \text{et} \quad \beta_R = \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \xi$$

où ω_i et ω_j désignent les pulsations propres correspondant aux $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ modes de vibration du système liés à l'intervalle de fréquences $[f_i, f_j]$ pour lequel l'amortissement visqueux est inférieur ou égal à ξ .



❑ Cas de l'oscillateur multiple

- Amortissement de Rayleigh : Exemple de calcul via MatLab (ChatGPT)



```

1 clc; clear; close all;
2
3 % Programme de calcul des coefficients d'amortissement de Rayleigh (ChatGPT, 02/03/2025)
4 %
5
6 function [C, alpha, beta] = rayleigh_damping(M, K, omega1, zeta1, omega2, zeta2)
7 % Calcul des coefficients alpha et beta de l'amortissement de Rayleigh
8 A = [1/(2*omega1), omega1/2; 1/(2*omega2), omega2/2];
9 b = [zeta1; zeta2];
10 x = A\b; % Résolution du système linéaire
11
12 alpha = x(1);
13 beta = x(2);
14
15 % Calcul de la matrice d'amortissement
16 C = alpha * M + beta * K;
17
18 end
19
20 % Exemple d'utilisation
21 % -----
22 M = [2 0; 0 1]; % Matrice de masse
23 K = [6 -2; -2 4]; % Matrice de raideur
24 omega1 = 2; % Première fréquence propre
25 zeta1 = 0.05; % Premier facteur d'amortissement
26 omega2 = 5; % Deuxième fréquence propre
27 zeta2 = 0.02; % Deuxième facteur d'amortissement
28
29 [C, alpha, beta] = rayleigh_damping(M, K, omega1, zeta1, omega2, zeta2);
30
31 % Affichage des résultats
32 disp('Coefficient alpha :');
33 disp(alpha);
34 disp('Coefficient beta :');
35 disp(beta);
36 disp('Matrice d''amortissement C :');
37 disp(C);

```

$$\bar{C} = \alpha_R \bar{M} + \beta_R \bar{K}$$

Données

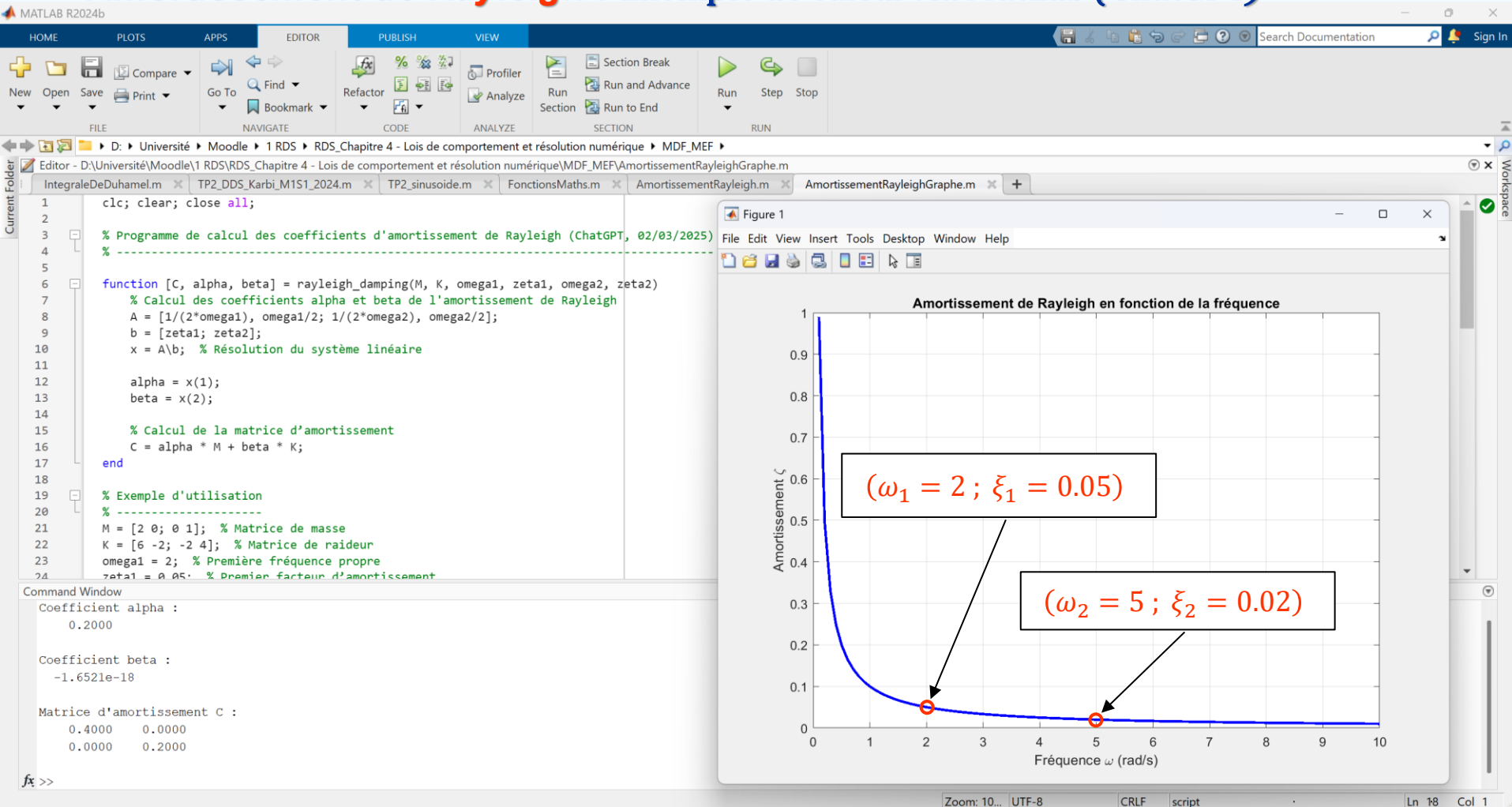
$\bar{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - Matrice des masses
 $\bar{K} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ - Matrice des rigidités
 1^{ère} pulsation propre : $\omega_1 = 2 \text{ rad/s}$
 1^{er} taux d'amortissement : $\xi_1 = 0.05$
 2^{ème} pulsation propre : $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$
 2^{ème} taux d'amortissement : $\xi_2 = 0.02$

Résultats

$\alpha_R = 0.2000$
 $\beta_R = -1.6521 \times 10^{-18}$
 $\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ - Matrice des amortissements

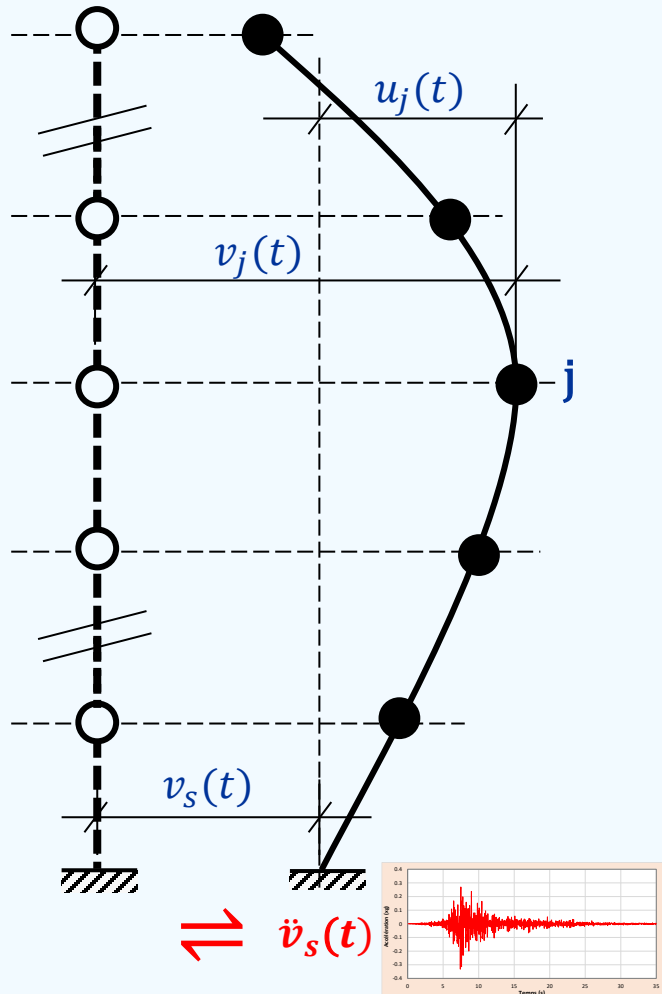
❑ Cas de l'oscillateur multiple

- **Amortissement de Rayleigh** : Exemple de calcul via MatLab (*ChatGPT*)



❑ Cas de l'oscillateur multiple

- Cas d'une excitation sismique (Vibrations forcées par déplacement d'appui)



On peut écrire :

$$v_j(t) = u_j(t) + \delta_j v_s(t)$$

avec :

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{pour le degré de liberté correspondant à une translation de même sens que celle de la base} \\ 0 & \text{pour les autres degrés de liberté} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\bar{V} = \bar{U} + \bar{\Delta} v_s(t)$$

D'où :

$$\bar{M}\ddot{u} + \bar{C}\dot{u} + \bar{K}u = \bar{P}(t)$$

avec :

$$\bar{P}(t) = -\bar{M}\bar{\Delta}\ddot{v}_s(t)$$

❑ Cas de l'oscillateur multiple

- Cas d'une excitation sismique (Vibrations forcées par déplacement d'appui)

- Si l'on définit les paramètres suivants :

- ✓ Masse généralisée : $\mathbf{m}_i = {}^t\bar{\mathbf{D}}_i \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{D}}_i$

- ✓ Raideur généralisée : $\mathbf{k}_i = {}^t\bar{\mathbf{D}}_i \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{D}}_i$

- ✓ Amortissement généralisé : $\xi_i = \frac{{}^t\bar{\mathbf{D}}_i \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{D}}_i}{2\mathbf{m}_i \omega_{ni}}$

- ✓ Pulsation généralisée : $(\omega_n)_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$

- ✓ Chargement généralisé : $\mathbf{p}_i(t) = -{}^t\bar{\mathbf{D}}_i \bar{\mathbf{M}} \bar{\Delta} \ddot{v}_s(t)$

- Sachant que :

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{u}}_i(t)$$

- Si l'on pose : $\bar{\mathbf{u}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) \bar{\Phi}_i$

$\bar{\mathbf{M}}$ - Matrice des masses

$\bar{\mathbf{K}}$ - Matrice des rigidités

$\bar{\mathbf{C}}$ - Matrice des amortissements

$\bar{\mathbf{D}}$ - Vecteur déplacement des noeuds
(coordonnées généralisées)

$\bar{\Delta}$ - Vecteur unité

ω_n - Pulsation naturelle

$\ddot{v}_s(t)$ - Accélération sismique

□ Cas de l'oscillateur multiple

- **Cas d'une excitation sismique (Vibrations forcées par déplacement d'appui)**

D'où l'équation du mouvement donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$\bar{u}(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \bar{\Phi}_i$$

tel que :

$$u_i(t) = -\frac{1}{(\omega_D)_i} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi_i(\omega_n)_i(t-\tau)} \sin[(\omega_D)_i(t-\tau)] d\tau$$

et que :

$$\bar{\Phi}_i = -a_i \bar{D}_i \quad a_i = \frac{{}^t\bar{D}_i \bar{M} \bar{\Delta}}{{}^t\bar{D}_i \bar{M} \bar{D}_i} \quad (\omega_D)_i = (\omega_n)_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

⇒ C'est l'étude d'un oscillateur simple de masse m_i , de raideur k_i et de coefficient d'amortissement c_i dont la base est soumise à une accélération sismique $\ddot{v}_s(t)$, où i désigne le $i^{\text{ème}}$ mode de vibration du système.

❑ Exemple de calcul

Minaret (R+5) fondé sur différents types d'appuis

✓ Cas 1 : Modèle de ressorts

➤ Type de fondations

- Semelles
- Radier

➤ Type d'appuis

- Encastrement (Calcul de référence : sans ISS)
- Ressorts (Calcul avec ISS)

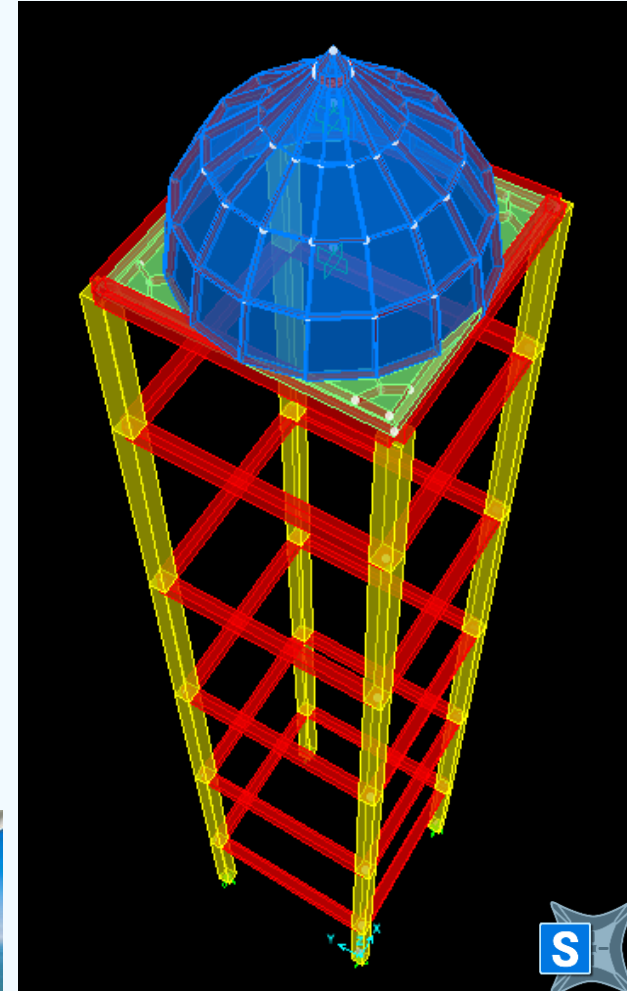
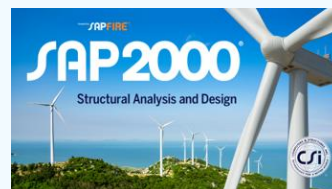
✓ Cas 2 : Modèle de sol

➤ Type de fondations

- Semelles
- Radier
- Pieux

➤ Type d'appuis

- Massif sableux
- Massif argileux



❑ Exemple de calcul

Caractéristiques des matériaux : Béton & Acier

SAP2000 v23.3.1 Ultimate 64-bit - minaret

S Material Property Data

General Data

Material Name and Display Color: Beton

Material Type: Concrete

Material Grade: fc28

Material Notes: Modify/Show Notes...

Weight and Mass

Weight per Unit Volume: 24.0

Mass per Unit Volume: 2.4473

Units: KN, m, C

Isotropic Property Data

Modulus Of Elasticity, E: 32164195.

Poisson, U: 0.2

Coefficient Of Thermal Expansion, A: 9.900E-06

Shear Modulus, G: 13401748.

Other Properties For Concrete Materials

Specified Concrete Compressive Strength, f_c: 19613.3

Expected Concrete Compressive Strength: 19613.3

☐ Lightweight Concrete

Shear Strength Reduction Factor:

☐ Switch To Advanced Property Display

OK Cancel

S Material Property Data

General Data

Material Name and Display Color: Acier

Material Type: Steel

Material Grade: S355

Material Notes: Modify/Show Notes...

Weight and Mass

Weight per Unit Volume: 76.9729

Mass per Unit Volume: 7.849

Units: KN, m, C

Isotropic Property Data

Modulus Of Elasticity, E: 2.100E+08

Poisson, U: 0.3

Coefficient Of Thermal Expansion, A: 1.170E-05

Shear Modulus, G: 80769231.

Other Properties For Steel Materials

Minimum Yield Stress, F_y: 355000.

Minimum Tensile Stress, F_u: 510000.

Expected Yield Stress, F_{ye}: 390500.

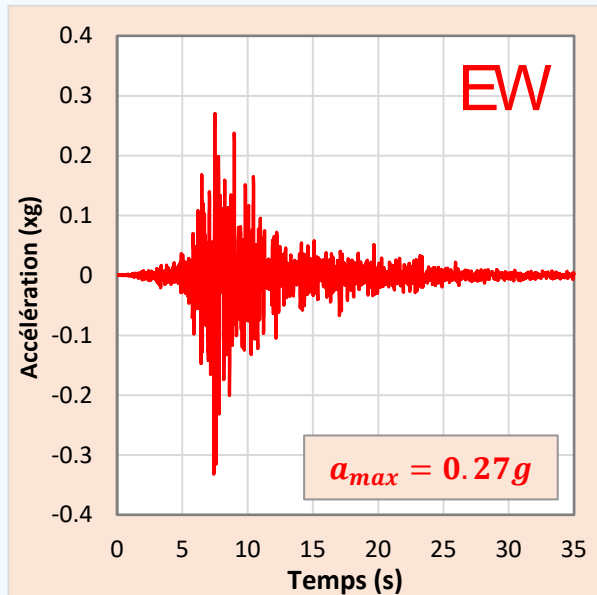
Expected Tensile Stress, F_{ue}: 561000.

☐ Switch To Advanced Property Display

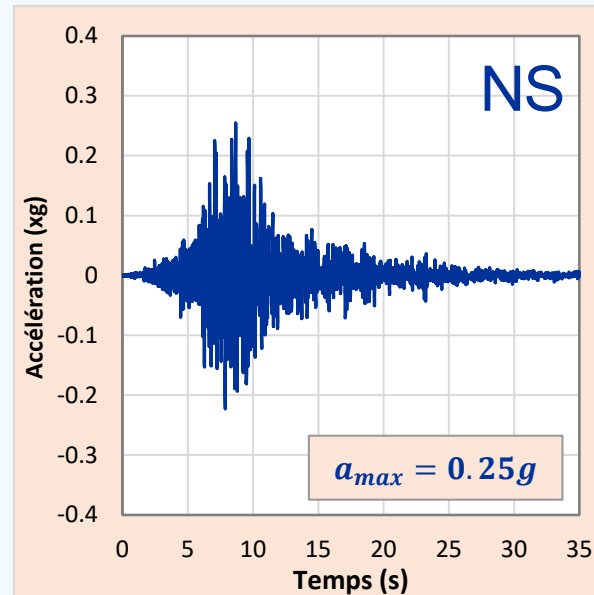
OK Cancel

❑ Exemple de calcul

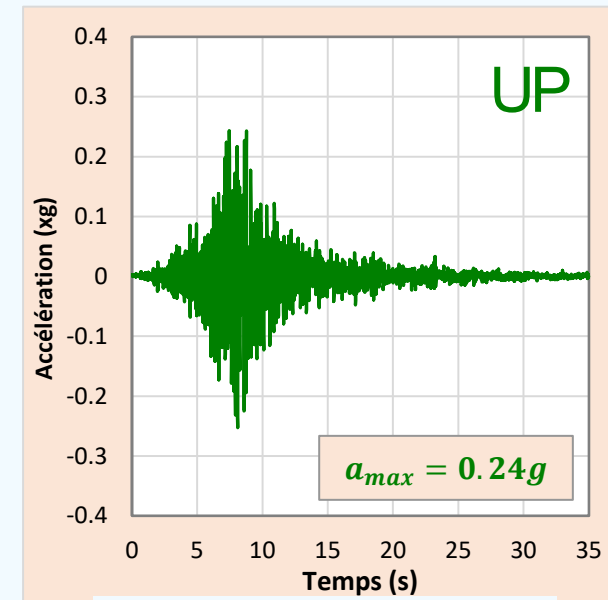
Séisme de Boumerdès (21 mai 2003) - $M_w=6.8$
(Accélérogrammes sismiques considérés)



**Boumerdès-EW, Algeria
(21/05/2003)**



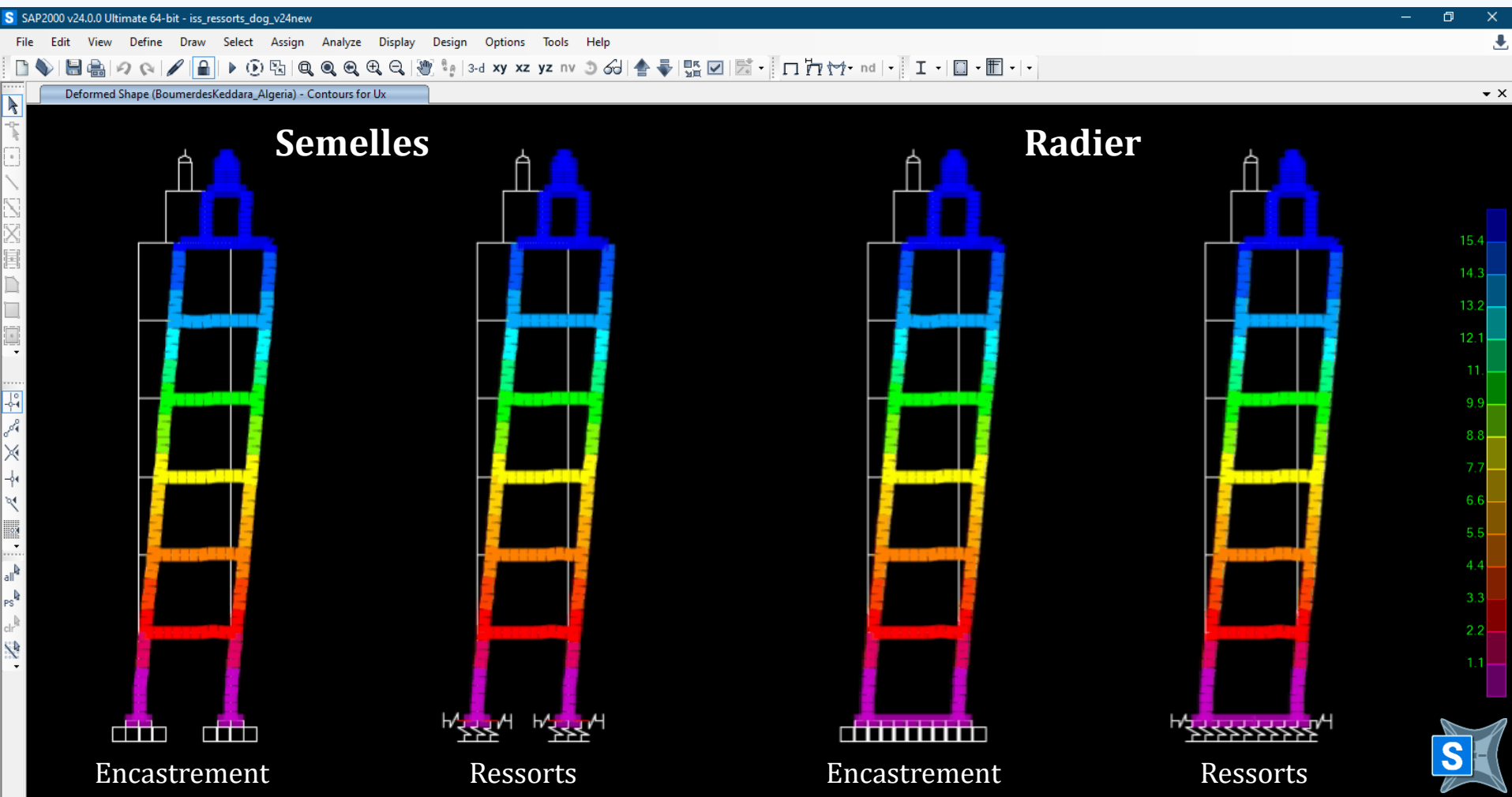
**Boumerdès-NS, Algeria
(21/05/2003)**



**Boumerdès-UP, Algeria
(21/05/2003)**

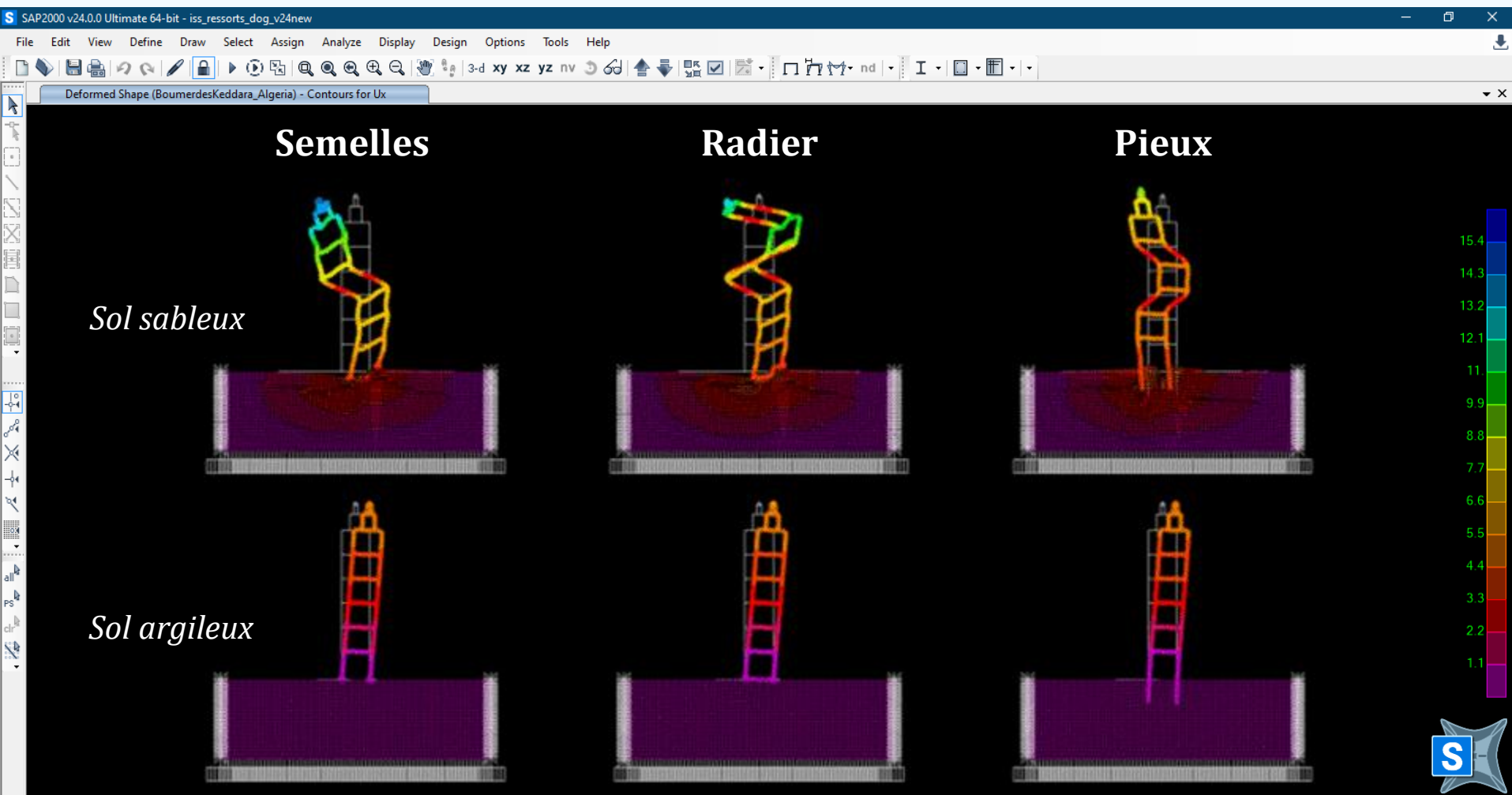
❑ Exemple de calcul

- **Modèle de ressorts** : Déformée sous séisme (Boumerdès, Algérie)



❑ Exemple de calcul

- **Modèle de sol** : Déformée sous séisme (Boumerdès, Algérie)



FORMULATION DU COMPORTEMENT CYCLIQUE DES SOLS

□ Formulation du comportement cyclique des sols

- **But**

Etudier le comportement d'un sol en un point donné vis-à-vis des sollicitations cycliques qui lui sont imposées conformément aux principes de la mécanique des milieux continus (Voir cours de MMC - M1/S1 - Géotechnique).

⇒ *Recherche d'une relation fonctionnelle entre les contraintes, les taux de contraintes, les déformations, les taux de déformations et le temps : c'est l'équation du mouvement.*

- **Forme générale de l'équation du mouvement**

Cette relation fonctionnelle est de forme générale :

$$\mathcal{F}(\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\sigma}}, \dot{\bar{\varepsilon}}, t) = 0$$

telles que $\dot{\bar{\sigma}} = d\sigma/dt$ et $\dot{\bar{\varepsilon}} = d\varepsilon/dt$.



Remarque : En Dynamique des sols et des structures, le temps intervient indirectement par le biais de l'accélération.

❑ Formulation du comportement cyclique des sols

- **Procédure d'élaboration**

L'élaboration d'un modèle de comportement obéit aux étapes suivantes :

- ✓ Relation fonctionnelle entre les tenseurs des contraintes et des déformations.
- ✓ Analyse des données expérimentales (résultats d'essais triaxiaux et œdométriques conventionnels et spéciaux).
- ✓ Mise en évidence des mécanismes physiques de déformation.

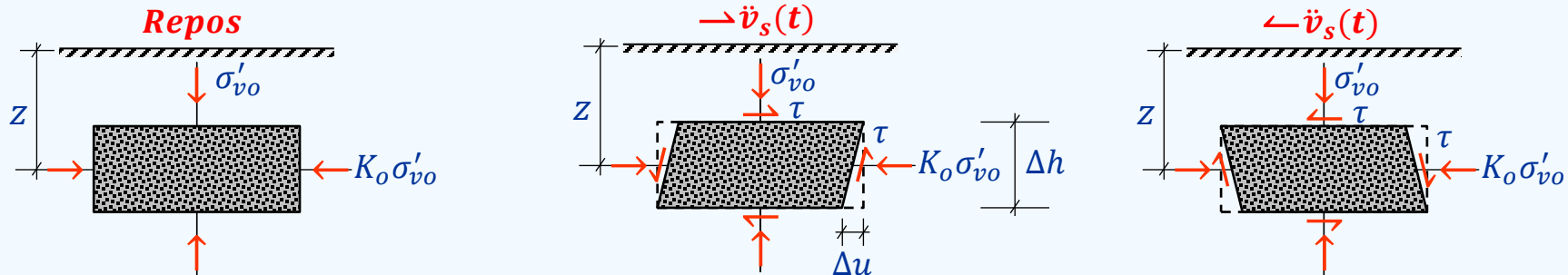
- **Forme et paramètres constitutifs**

- De manière générale, les modèles de comportement sont de forme incrémentale en petites déformations (*HPP*).
- Un bon modèle de comportement doit avoir une forme suffisamment simple et adaptée à son implémentation dans un code de calcul numérique.
- Un modèle de comportement doit comporter un nombre restreint de paramètres (*10 paramètres semblent être une limite plus que raisonnable*).
- Les paramètres du modèle de comportement doivent être facilement identifiables sur des résultats d'essais classiques et/ou d'essais spécifiques de laboratoire.

PARAMÈTRES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE DES SOLS

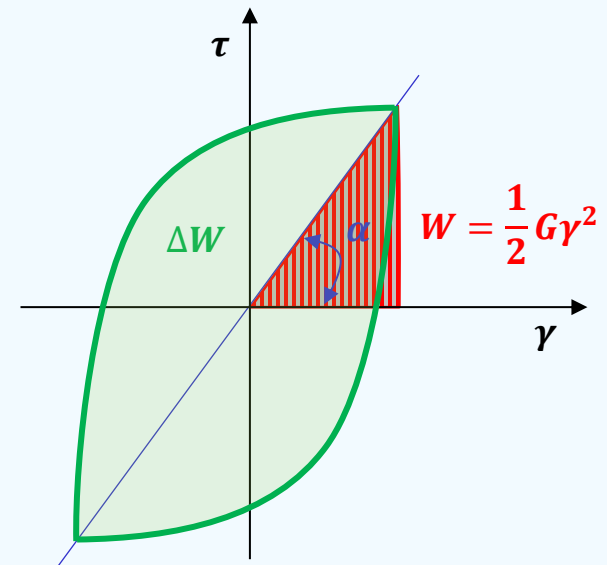
□ Paramètres de comportement cyclique des sols

• Séquences de cisaillement cyclique



• Boucle d'hystérésis

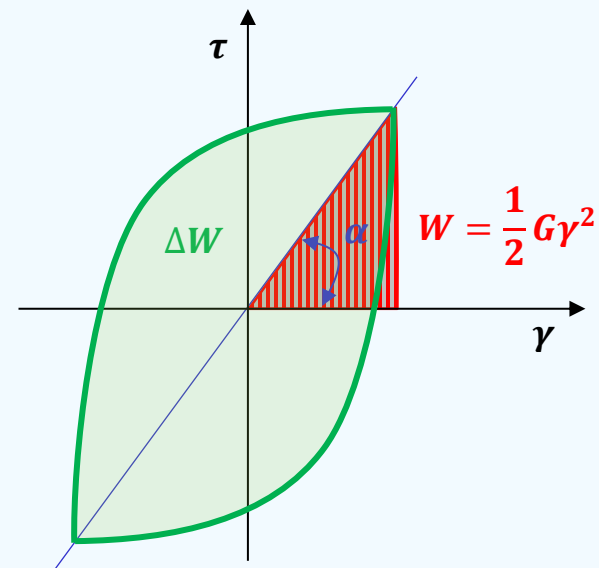
- Distorsion : $\gamma = \frac{\Delta u}{\Delta h}$
- Contrainte de cisaillement cyclique : τ
- Energie dissipée pendant un cycle : ΔW
- Energie élastique pendant un cycle : W



□ Paramètres de comportement cyclique des sols

• Paramètres de cisaillement cyclique

- Module de cisaillement cyclique : $G = \tan(\alpha)$
- Coefficient d'amortissement : $\beta = \frac{\Delta W}{4\pi W}$
- Coefficient de perte : $\eta = \frac{\Delta W}{2\pi W} = 2\beta$
- Facteur de qualité : $Q = 1/\eta$

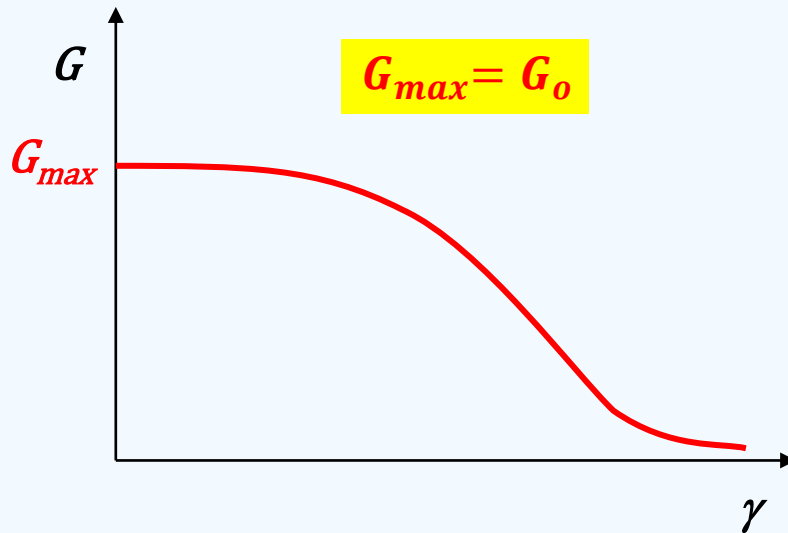


• Remarques

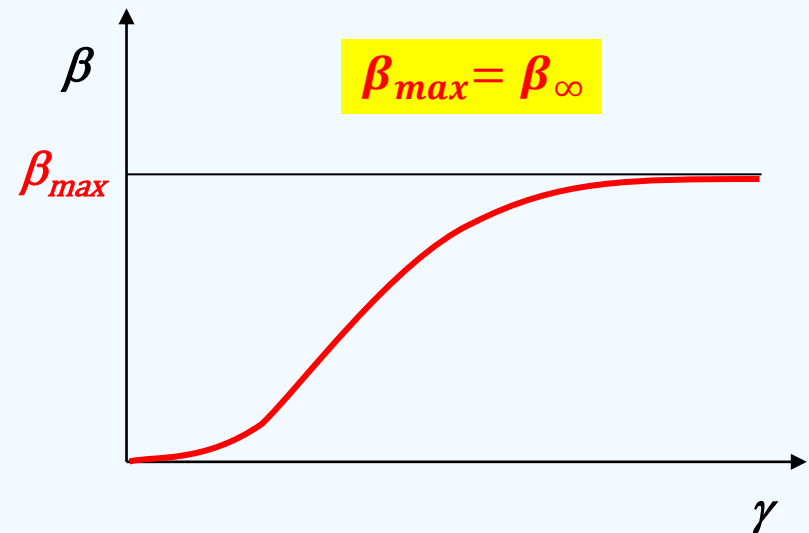
- ✓ L'aire de la boucle, notée ΔW , caractérise l'énergie dissipée pendant un cycle de chargement.
- ✓ Plus la boucle d'hystérésis $\nearrow$, plus $\gamma \nearrow$
- ✓ Plus $\gamma \nearrow$, plus $G \searrow \Rightarrow$ Non-linéarité de comportement des sols
- ✓ Plus $\gamma \nearrow$, plus $\beta \nearrow$

□ Paramètres de comportement cyclique des sols

- **Evolution typique des paramètres**



Module de cisaillement



Coefficient d'amortissement

G_{max} – Module de cisaillement maximal

β_{max} – Coefficient d'amortissement maximal

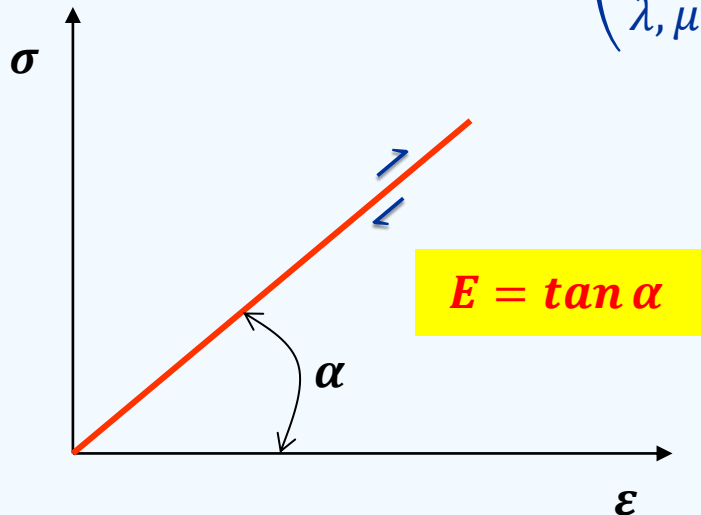
} Voir Chapitre 3 de ce cours

MODÈLES DE COMPORTEMENT CYCLIQUE DES SOLS

❑ Modèle élastique

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{C}}} \bar{\bar{\epsilon}} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$\bar{\bar{\bar{C}}}$ - Tenseur de souplesse = $f \left(\begin{matrix} E, \nu \\ K, G \\ \lambda, \mu \end{matrix} \right)$

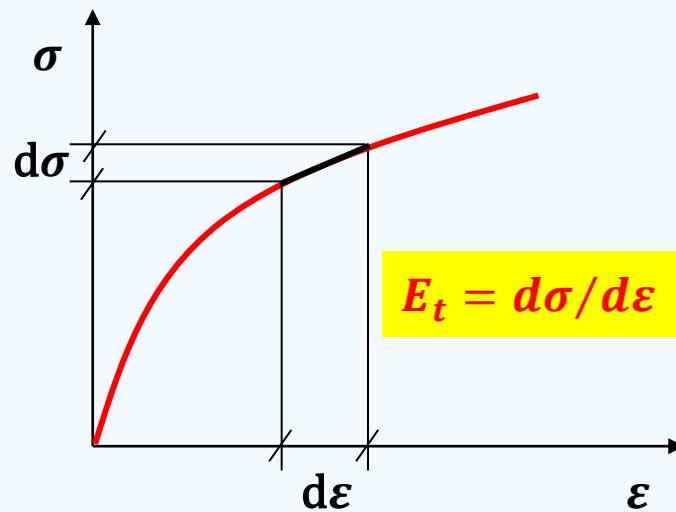


$$\sigma = E \epsilon$$

Modèle élastique linéaire
(Voir cours de MMC et de RDS)

$$d\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\bar{C}}}^*(\bar{\bar{\sigma}}) d\bar{\bar{\epsilon}} \Leftrightarrow d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^*(\sigma_{rs}) d\epsilon_{kl}$$

$\bar{\bar{\bar{C}}}^*$ - Tenseur de souplesse variable = $f(\bar{\bar{\sigma}})$

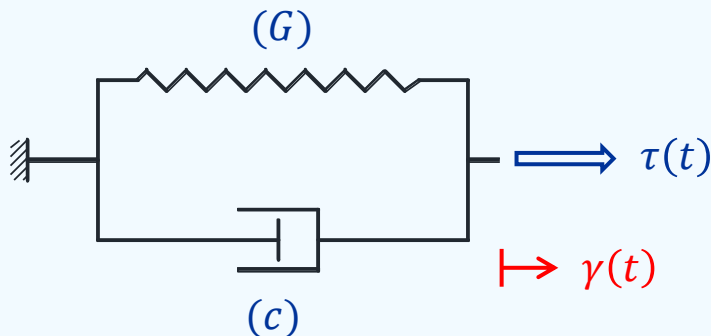


$$\sigma = f(\epsilon)$$

Modèle élastique non-linéaire
(Voir cours de RDS)

□ Modèle visco-élastique linéaire équivalent

- **Modèle rhéologique : Kelvin-Voigt**



- **Loi de comportement**

Elle est donnée par l'expression suivante :

$$\tau(t) = G\gamma(t) + c\dot{\gamma}(t)$$

avec : $\gamma(t) = \gamma_o e^{i\omega t}$

Sachant que : $\dot{\gamma}(t) = \gamma_o i\omega e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \tau(t) = (G + i\omega c)\gamma_o e^{i\omega t}$$

Soit encore :

$$\tau(t) = G \left(1 + \frac{i\omega c}{G} \right) \gamma_o e^{i\omega t}$$

Si l'on pose : $G^* = G(1 + i\eta)$

tel que $\eta = \frac{\omega c}{G} = 2\beta$

$$\Rightarrow \tau = G^* \gamma$$

G^* - Module de cisaillement complexe

□ Modèle visco-élastique linéaire équivalent

- **Exemple : Modèle hyperbolique de Hardin-Drnevich (1972)**

Ce modèle est défini par la relation suivante (*Voir cours de RDS – M1/S2*) :

$$\tau = \frac{\gamma}{\frac{1}{G_{max}} + \frac{\gamma}{\tau_{max}}}$$

où G_{max} désigne le module de cisaillement tangent initial et τ_{max} la contrainte de cisaillement maximale.

Les paramètres de cisaillement cyclique sont donnés par les relations suivantes :

$$G = \frac{1}{1+\gamma_h} G_{max}$$

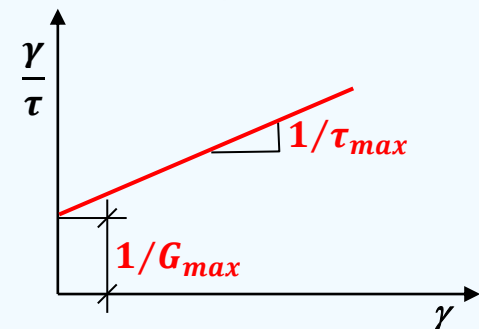
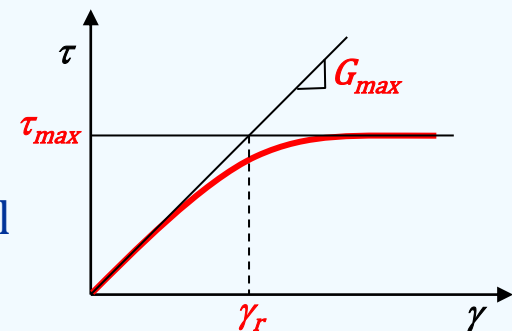
et

$$\beta = \frac{\gamma_h}{1+\gamma_h} \beta_{max}$$

telle que $\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} [1 + a e^{-b(\gamma/\gamma_r)}]$

avec $\gamma_r = \tau_{max}/G_{max}$ (*Déformation de référence*),

a , b et β_{max} étant des paramètres expérimentaux.



❑ Modèle visco-élastique linéaire équivalent

- Exemple : Modèle hyperbolique de Hardin-Drnevich (1972)**

Sol	Paramètre	a	b	$\beta_{\max}$
Sable sec	G	-0.5	0.16	-
	β	$0.6N^{-1/6} - 1$	$1 - N^{-1/12}$	$33 - 1.5 \log(N)$
Sable saturé	G	$-0.2 \log(N)$	0.16	-
	β	$0.54N^{-1/6} - 0.9$	$0.65(1 - N^{-1/2})$	$28 - 1.5 \log(N)$
Argile saturée	G	$1 + 0.25 \log(N)$	1.3	-
	β	$1 + 0.2\sqrt{f}$	$0.2fe^{-\sigma'_m/p_a} + 2.25 \left(\frac{\sigma'_m}{p_a} \right) + 0.3 \log(N)$	$31 + 1.5\sqrt{f} - 1.5 \log(N) - (3 + 0.03f) \sqrt{\frac{\sigma'_m}{p_a}}$

f – Fréquence (Hertz)

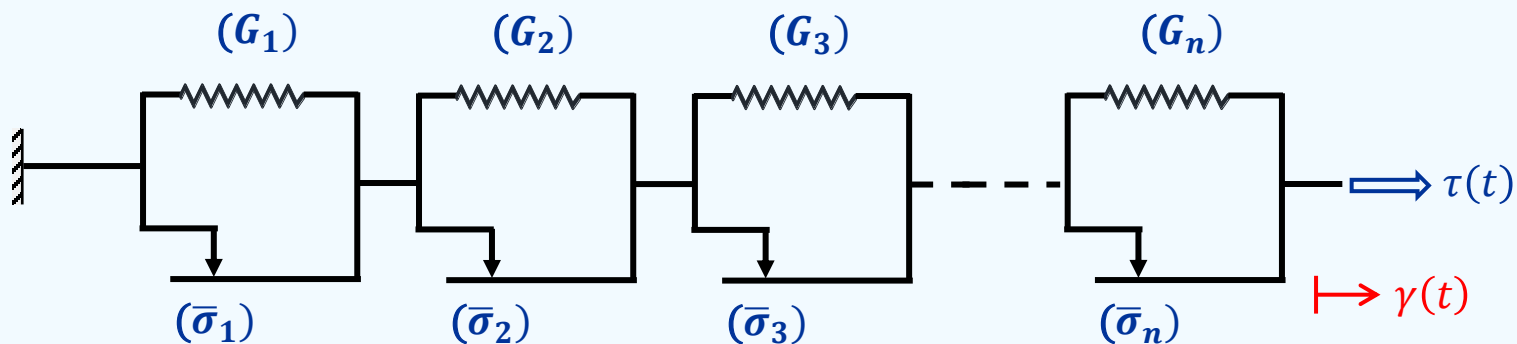
N – Nombre de cycles

σ'_m – Contrainte moyenne effective

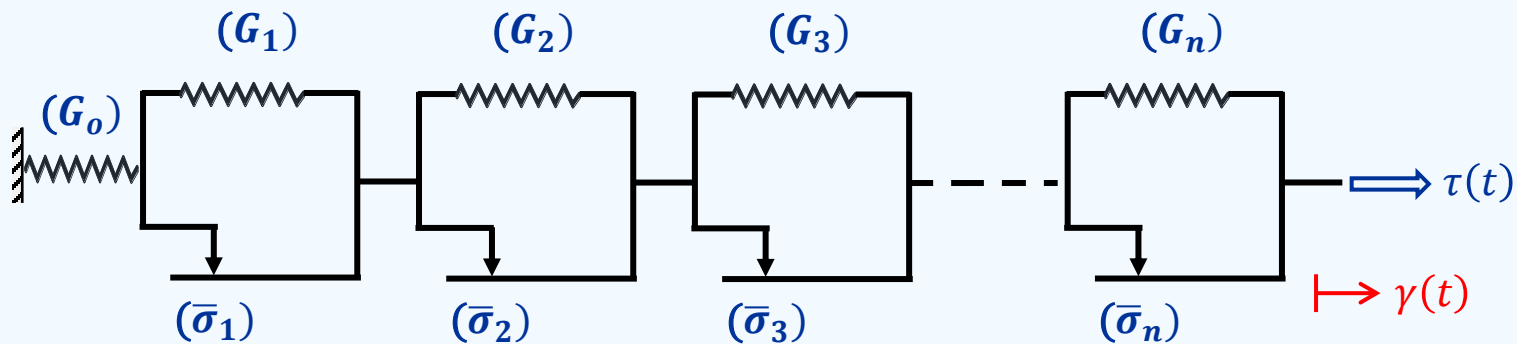
p_a – Pression de référence (prise égale à la pression atmosphérique)

❑ Modèle élasto-plastique

- Modèle de Masing



- Modèle de Iwan-Mroz



G - Module de cisaillement

$\bar{\sigma}$ - Seuil de plasticité

Merci de votre attention

Fin du Chapitre Deux