

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre 4

Théorie de l'état des déformations

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 Dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, les composantes du champ de déplacement $\bar{u}$ d'un point matériel d'un solide déformable sont :

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = k(x_2 + x_3) \\ u_2 = k(x_3 + x_1) \\ u_3 = k(x_1 + x_2) \end{cases},$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- A. Déterminer le gradient de transformation $\bar{\bar{F}}$, le tenseur des dilatations de Cauchy $\bar{\bar{C}}$, le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{L}}$, le tenseur des déformations $\bar{\bar{S}}$, le tenseur de dilatation pure $\bar{\bar{D}}$ et le tenseur des rotations $\bar{\bar{R}}$. Dédurre les parties symétrique $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et antisymétrique $\bar{\bar{\omega}}$ du gradient de transformation. Commenter les résultats trouvés.
- B. Déterminer par calcul direct, dans l'hypothèse d'une transformation infinitésimale, le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}$, les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Rép. 1

A1. Gradient de transformation : $\bar{\bar{F}}$

Sachant que : $\bar{x} = \bar{x}_o + \bar{u}(\bar{x}_o, t) \Rightarrow \bar{\bar{F}}(t) = \bar{\bar{\delta}} + \overline{\text{grad}}[\bar{u}(t)] \Leftrightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad F_{11} &= 1 + u_{1,1} = 1 & \bullet \quad F_{12} &= 0 + u_{1,2} = k & \bullet \quad F_{13} &= 0 + u_{1,3} = k \\ \bullet \quad F_{21} &= 0 + u_{2,1} = k & \bullet \quad F_{22} &= 1 + u_{2,2} = 1 & \bullet \quad F_{23} &= 0 + u_{2,3} = k \\ \bullet \quad F_{31} &= 0 + u_{3,1} = k & \bullet \quad F_{32} &= 0 + u_{3,2} = k & \bullet \quad F_{33} &= 1 + u_{3,3} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{F}} = [F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Remarque : } \bar{\bar{F}} - \text{symétrique}$$

A2. Tenseur des dilatations de Cauchy : $\bar{\bar{C}}$

Sachant que : $\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}} \Leftrightarrow C_{ij} = F_{ki} F_{kj} \mid \bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad {}^t\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2k^2 & 2k + k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 1 + 2k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 2k + k^2 & 1 + 2k^2 \end{bmatrix}$$

A3. Tenseur des déformations de Green-Lagrange : $\bar{\bar{L}}$

Sachant que : $\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{\delta}}) \Leftrightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$

$$\Rightarrow \bar{\bar{L}} = [L_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 + 2k^2 & 2k + k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 1 + 2k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 2k + k^2 & 1 + 2k^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{L}} = [L_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2k^2 & 2k + k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 2k^2 & 2k + k^2 \\ 2k + k^2 & 2k + k^2 & 2k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & k + \frac{1}{2}k^2 & k + \frac{1}{2}k^2 \\ k + \frac{1}{2}k^2 & k^2 & k + \frac{1}{2}k^2 \\ k + \frac{1}{2}k^2 & k + \frac{1}{2}k^2 & k^2 \end{bmatrix}$$

A4. Tenseur des déformations : $\bar{\bar{S}}$

Sachant que : $\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}} \mid \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{S}}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = {}^t(\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{S}}) \cdot (\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{S}}) = {}^t\bar{\bar{S}} \cdot ({}^t\bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{R}}) \cdot \bar{\bar{S}} = {}^t\bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{\delta}} \cdot \bar{\bar{S}} = {}^t\bar{\bar{S}} \cdot \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{S}}^2 \Rightarrow \bar{\bar{C}} = \bar{\bar{S}}^2 \Leftrightarrow C_{ij} = S_{ij}S_{ij}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 1+2k^2 & 2k+k^2 & 2k+k^2 \\ 2k+k^2 & 1+2k^2 & 2k+k^2 \\ 2k+k^2 & 2k+k^2 & 1+2k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{S}} = [S_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$$

A5. Tenseur de dilatation pure : $\bar{\bar{\Delta}}$

Autre approche 1 : $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Delta}} \Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{S}} - \bar{\bar{\delta}}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = [\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

Autre approche 2 : $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{S}}^2$ & $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Delta}}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = (\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Delta}})^2 = \bar{\bar{\delta}}^2 + 2\bar{\bar{\delta}}\bar{\bar{\Delta}} + \bar{\bar{\Delta}}^2 = \bar{\bar{\delta}} + 2\bar{\bar{\Delta}} + \bar{\bar{\Delta}}^2 \mid \bar{\bar{\delta}}^2 = \bar{\bar{\delta}} \text{ & } \bar{\bar{\delta}}\bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{\Delta}}$$

Par ailleurs : $\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{\delta}}) \Rightarrow \bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}[\bar{\bar{\delta}} + 2\bar{\bar{\Delta}} + \bar{\bar{\Delta}}^2 - \bar{\bar{\delta}}]$

$$\Rightarrow \bar{\bar{L}} = \bar{\bar{\Delta}} + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Delta}}^2 \Leftrightarrow L_{ij} = \Delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_{ij}\Delta_{ij}$$

D'où : $\bar{\bar{L}} = [L_{ij}] = \begin{bmatrix} k^2 & k+\frac{1}{2}k^2 & k+\frac{1}{2}k^2 \\ k+\frac{1}{2}k^2 & k^2 & k+\frac{1}{2}k^2 \\ k+\frac{1}{2}k^2 & k+\frac{1}{2}k^2 & k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2k^2 & k^2 & k^2 \\ k^2 & 2k^2 & k^2 \\ k^2 & k^2 & 2k^2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{L}} = [L_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = [\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

Autre approche 3 : $\bar{\bar{F}}$ – symétrique ($F_{ij} = F_{ji}$) $\Rightarrow {}^t\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}^2 = \bar{\bar{S}}^2 \Rightarrow \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}$$

Sachant que : $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\Delta}} \Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{S}} - \bar{\bar{\delta}} \Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{\delta}} \Leftrightarrow \Delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Delta}} = [\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

A6. Tenseur des rotations : $\bar{\bar{R}}$

Sachant que : $\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{S}}$ & $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{F}}$ (Voir § A.4) $\Rightarrow \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{\delta}} \Rightarrow \bar{\bar{R}} = [R_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A7. Partie symétrique $\bar{\bar{\varepsilon}}$ du gradient de transformation se rattachant à $\bar{\bar{S}}$:

Sachant que : $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\varepsilon}} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{S}} - \bar{\bar{\delta}} = \bar{\bar{\Delta}} \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$

A8. Partie antisymétrique $\bar{\bar{\omega}}$ du gradient de transformation se rattachant à $\bar{\bar{R}}$

Sachant que : $\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\omega}} \Rightarrow \bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{R}} - \bar{\bar{\delta}} \mid \bar{\bar{R}} = \bar{\bar{\delta}} \Rightarrow \bar{\bar{\omega}} \equiv \bar{\bar{0}}$

A9. Commentaire : Il s'agit d'une transformation homogène de déformation pure sans rotation.

B1. Tenseur des déformations linéarisé : $\bar{\bar{\varepsilon}}$

Comme la transformation est infinitésimale, on peut alors adopter l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et calculer le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ en utilisant la relation suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{\mathbf{u}}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{\mathbf{u}})] \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} = 0$
- $\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (u_{2,2} + u_{2,2}) = u_{2,2} = 0$
- $\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} (u_{3,3} + u_{3,3}) = u_{3,3} = 0$
- $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} (k + k) = k \Rightarrow \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma_{21} = \varepsilon_{21} = k$
- $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23} = \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2} (k + k) = k \Rightarrow \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \gamma_{32} = \varepsilon_{23} = k$
- $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2} (k + k) = k \Rightarrow \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{31} = \varepsilon_{13} = k$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

B2. Déformations principales : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

Sachant que : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_i \delta_{ij}) \mathbf{n}_j = \mathbf{0} \Rightarrow \det(\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow k \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = k \left[(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow (-\lambda)[\lambda^2 - 1] - [-\lambda - 1] + [1 + \lambda] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)[- \lambda(\lambda - 1) + 2] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2k \\ \varepsilon_2 = -k \\ \varepsilon_3 = -k \end{cases}$$

Remarque : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0 \Rightarrow$ Contraction cylindrique (ou triaxiale de révolution)

B3. Directions principales : $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\varepsilon_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{pmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{pmatrix} \quad | \quad l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \varepsilon_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \varepsilon_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad | \quad \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

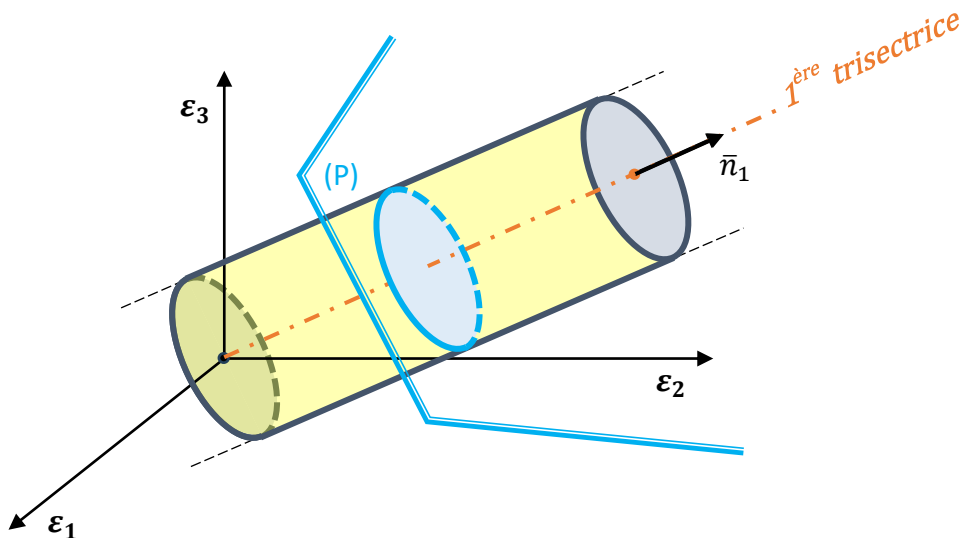
$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_1 = 2k & \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix} - 2k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2kl_1 + km_1 + kn_1 = 0 \\ kl_1 - 2km_1 + kn_1 = 0 \\ kl_1 + km_1 - 2n_1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (3) \end{cases} & \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4) \end{aligned}$$

$$(2) - (3) : 0l_1 - 3m_1 + 3n_1 = 0 \Rightarrow m_1 = n_1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (1) \& (5) : -2l_1 + 2m_1 = 0 & \Rightarrow l_1 = m_1 \\ & \Rightarrow l_1 = m_1 = n_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

$\Rightarrow$ La déformation étant une contraction cylindrique (ou triaxiale de révolution) caractérisée par : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0$, toute direction orthogonale au plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale associée à la valeur double : $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -k$.



$$\begin{aligned} \bullet \quad \varepsilon_2 = -k & \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} kl_2 + km_2 + kn_2 = 0 \\ kl_2 + km_2 + kn_2 = 0 \\ kl_2 + km_2 + kn_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Solution indéterminée.

$\Rightarrow$ Idem pour : $\varepsilon_3 = k \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$

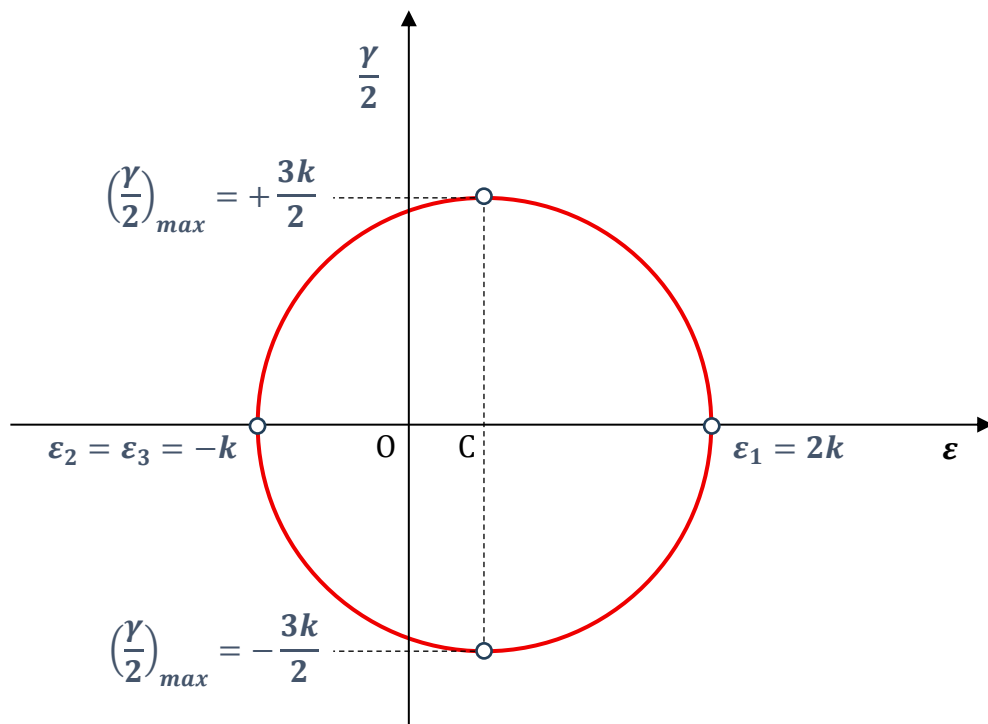
$\Rightarrow$ Tout direction contenue dans le plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale.

B4. Tricercle de Mohr des déformations

Le tricercle de Mohr des déformations se réduit à un seul cercle passant par $(2k, 0)$ et $(-k, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad | \quad C \left(x_c = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = \frac{2k - k}{2} = \frac{k}{2}, y_c = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{2k + k}{2} = \frac{3k}{2}$$

On est donc en présence d'un état de contraction cylindrique : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 < 0$.



B5. Distorsion maximale γ_{max} correspondante

$$\gamma_{max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{max} = |2k - (-k)| = \pm 3k$$

Ex. 2 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ d'un point matériel d'un solide déformable défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = kx_2 \\ u_2 = kx_3 \\ u_3 = kx_1 \end{cases},$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

- A. Calculer le gradient de transformation $\bar{F}$, le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$ et le tenseur des rotations $\bar{\omega}$. Déterminer ensuite le vecteur polaire $\bar{\omega}$, l'angle de rotation θ et l'axe $\bar{h}$ correspondant. Commenter les résultats trouvés.
- B. Calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ du tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Rép. 1

A1. Gradient de transformation : $\bar{F}$

Sachant que : $\bar{x} = \bar{x}_o + \bar{u}(\bar{x}_o, t) \Rightarrow \bar{F}(t) = \bar{\delta} + \overline{\text{grad}}[\bar{u}(t)] \Leftrightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + u_{i,j}$

- $F_{11} = 1 + u_{1,1} = 1$
- $F_{12} = 0 + u_{1,2} = k$
- $F_{13} = 0 + u_{1,3} = 0$
- $F_{21} = 0 + u_{2,1} = 0$
- $F_{22} = 1 + u_{2,2} = 1$
- $F_{23} = 0 + u_{2,3} = k$
- $F_{31} = 0 + u_{3,1} = k$
- $F_{32} = 0 + u_{3,2} = 0$
- $F_{33} = 1 + u_{3,3} = 1$

$$\Rightarrow \bar{F} = [F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A2. Tenseur des déformations linéarisé : $\bar{\varepsilon}$

Comme la transformation est infinitésimale, on peut alors adopter l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et calculer le tenseur $\bar{\varepsilon}$ en utilisant la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} = 0$
- $\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (u_{2,2} + u_{2,2}) = u_{2,2} = 0$
- $\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} (u_{3,3} + u_{3,3}) = u_{3,3} = 0$
- $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} k$
- $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23} = \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \gamma_{32} = \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} k$
- $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2} (0 + k) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} k$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A3. Tenseur des rotations : $\bar{\omega}$

Comme la transformation est infinitésimale, on peut alors adopter l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et calculer le tenseur $\bar{\omega}$ en utilisant la relation suivante :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) - {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] \Leftrightarrow \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i})$$

- $\omega_{11} = \frac{1}{2} (u_{1,1} - u_{1,1}) = 0$
- $\omega_{22} = \frac{1}{2} (u_{2,2} - u_{2,2}) = 0$
- $\omega_{33} = \frac{1}{2} (u_{3,3} - u_{3,3}) = 0$
- $\omega_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \omega_{21} = -\omega_{12} = -\frac{1}{2} k$
- $\omega_{23} = \frac{1}{2} (u_{2,3} - u_{3,2}) = \frac{1}{2} (k + 0) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \omega_{32} = -\omega_{23} = -\frac{1}{2} k$
- $\omega_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} - u_{3,1}) = \frac{1}{2} (0 + k) = \frac{1}{2} k \Rightarrow \omega_{31} = -\omega_{13} = -\frac{1}{2} k$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = [\omega_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & -k \\ -k & 0 & k \\ k & -k & 0 \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque : Tenseur antisymétrique car $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ pour $i \neq j$ et de trace nulle : $Tr(\bar{\omega}) = \omega_{ii} = 0$.

A4. Vecteur polaire : $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{\omega} = \begin{Bmatrix} p = -k/2 \\ q = -k/2 \\ r = -k/2 \end{Bmatrix} = -\frac{k}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vérification : $\overline{\text{rot}}(\bar{u}) = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \bar{e}_i = (u_{3,2} - u_{2,3}) \bar{e}_1 + (u_{1,3} - u_{3,1}) \bar{e}_2 + (u_{2,1} - u_{1,2}) \bar{e}_3$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_{3,2} - u_{2,3} = 0 - k = -k \\ u_{1,3} - u_{3,1} = 0 - k = -k \\ u_{2,1} - u_{1,2} = 0 - k = -k \end{Bmatrix} = -\frac{k}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad Ok.$$

A5. L'angle de rotation θ et l'axe $\bar{h}$ correspondant

L'angle de rotation θ est défini par la norme du vecteur polaire $\bar{\omega}$. Soit donc :

$$\theta = \|\bar{\omega}\| \Rightarrow \theta = \sqrt{\left(-\frac{k}{2}\right)^2 + \left(-\frac{k}{2}\right)^2 + \left(-\frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{3 \left(-\frac{k}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} k \quad (\text{rad})$$

D'où l'on peut déterminer l'axe $\bar{h}$ correspondant via l'équation suivante :

$$\bar{\omega} = \theta \bar{h} \Rightarrow \bar{h} = \frac{1}{\theta} \bar{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{Bmatrix} \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

A6. Commentaire : Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), on peut vérifier que :

$$\bar{F} = \bar{\delta} + \bar{\varepsilon} + \bar{\omega} \Leftrightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

Soit donc :

$$\bar{F} = [F_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & k \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

B1. Déformations principales : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

Nota : Les calculs sont menés comme pour l'exercice Ex.1 à un coefficient près : on remplace le paramètre de chargement du 1^{er} exercice (k) par celui du 2^{ème} exercice ($k/2$).

$$\text{Ex.1 : } \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ex.2 : } \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = +2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +k \\ \varepsilon_2 = -\frac{k}{2} \\ \varepsilon_3 = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

Remarque : Contraction cylindrique (ou triaxiale de révolution).

B2. Directions principales : $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\varepsilon_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \quad | \quad l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \varepsilon_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \varepsilon_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad | \quad \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = k \quad \rightarrow \quad \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(2) - (3) : 0l_1 - 3m_1 + 3n_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = n_1 \quad (5)$$

$$(1) \& (5) : -2l_1 + 2m_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1$$

$$\Rightarrow l_1 = m_1 = n_1 \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{Bmatrix} \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

$\Rightarrow$ La déformation étant une contraction cylindrique ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 > 0$), toute direction orthogonale au plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale associée à la valeur double : $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{k}{2}$.

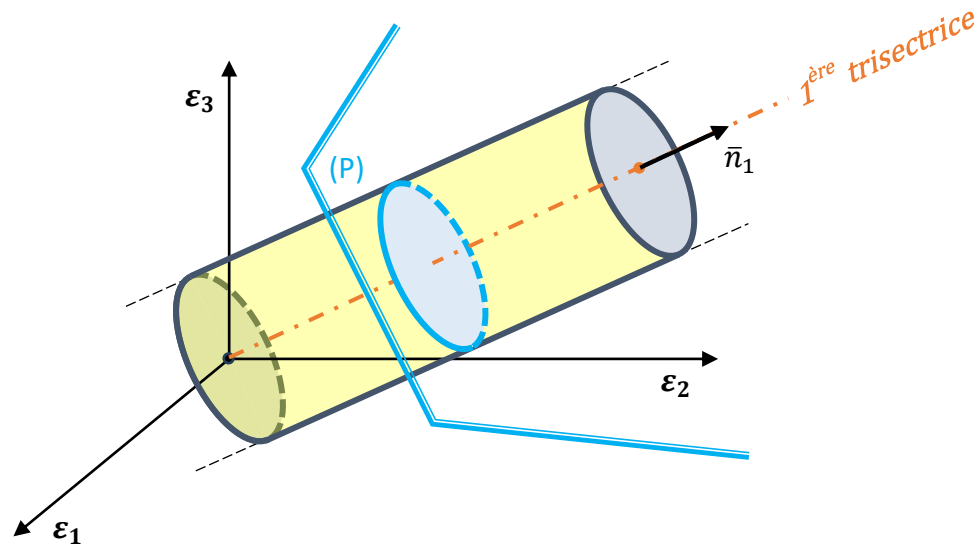
$$\bullet \quad \varepsilon_2 = -\frac{k}{2} \quad \rightarrow \quad \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & k & k \\ k & 0 & k \\ k & k & 0 \end{pmatrix} - \frac{k}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Solution indéterminée.

$$\Rightarrow \text{Idem pour : } \varepsilon_3 = -\frac{k}{2} \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$\Rightarrow$ Tout direction contenue dans le plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale.

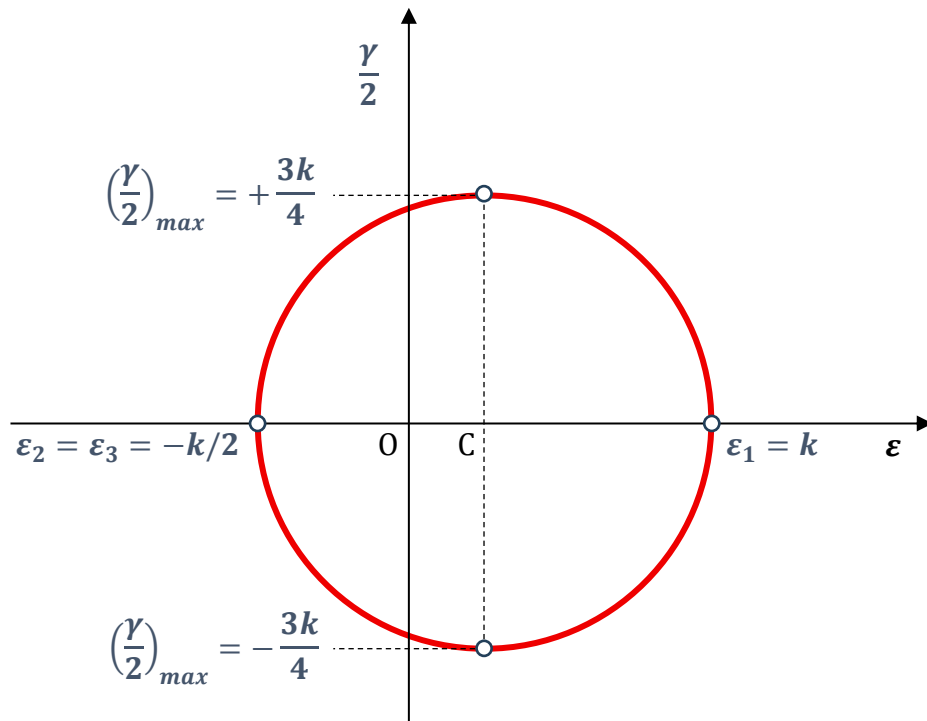


B3. Tricercle de Mohr des déformations

Le tricercle de Mohr des déformations se réduit à un seul cercle passant par $(k, 0)$ et $(-\frac{k}{2}, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \mid C \left(x_C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = \frac{2k - k}{4} = \frac{k}{4}, y_C = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{2k + k}{4} = \frac{3k}{4}$$

On est donc en présence d'un état de contraction cylindrique : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$.



B4. Distorsion maximale γ_{max} correspondante

$$\gamma_{max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{max} = \left| k - \left(-\frac{k}{2} \right) \right| = \pm \frac{3k}{2}$$

Ex. 3 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = kx_1x_2 \\ u_2 = kx_1x_2 \\ u_3 = 2k(x_1 + x_2)x_3 \end{cases},$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

Construire le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$, puis déterminer au point $P(1,0,0)$ les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Rép. 3

1. Tenseur des déformations linéarisé : $\bar{\varepsilon}$

Comme la transformation est infinitésimale, on peut alors adopter l'hypothèse des petites perturbations (HPP) et calculer le tenseur $\bar{\varepsilon}$ en utilisant la relation suivante :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

- $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (u_{1,1} + u_{1,1}) = u_{1,1} = kx_2$
- $\varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (u_{2,2} + u_{2,2}) = u_{2,2} = kx_1$
- $\varepsilon_{33} = \frac{1}{2} (u_{3,3} + u_{3,3}) = u_{3,3} = 2k(x_1 + x_2)$
- $\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}) = \frac{1}{2} k(x_1 + x_2) \Rightarrow \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma_{21} = \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} k(x_1 + x_2)$
- $\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \gamma_{23} = \frac{1}{2} (u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2} (0 + 2kx_3) = kx_3 \Rightarrow \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \gamma_{32} = \varepsilon_{23} = kx_3$
- $\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \gamma_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2} (0 + 2kx_3) = kx_3 \Rightarrow \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \gamma_{31} = \varepsilon_{13} = kx_3$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} kx_2 & \frac{1}{2}k(x_1 + x_2) & kx_3 \\ \frac{1}{2}k(x_1 + x_2) & kx_1 & kx_3 \\ kx_3 & kx_3 & 2k(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 2x_2 & x_1 + x_2 & 2x_3 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 & 2x_3 \\ 2x_3 & 2x_3 & 4(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

2. Tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$ au point $P(1, 0, 0)$

Au point $P(1,0,0)$, on a : $x_1 = 1, x_2 = 0$ et $x_3 = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. Déformations principales : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

Sachant que : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_i \delta_{ij}) n_j = 0 \Rightarrow \det(\varepsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \frac{k}{2} \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \frac{k}{2} \left[-\lambda \times \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 - \lambda \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right] = 0$$

$$\Rightarrow (-\lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) - (4 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (4 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (4 - \lambda)(\lambda - 1 + \sqrt{2})(\lambda - 1 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2k \\ \varepsilon_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}k \\ \varepsilon_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \end{cases}$$

Remarque : On peut remarquer que (Voir « Déformations planes ») :

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_3 \text{ est principal}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_I = \varepsilon_{33} = 2k \text{ est donc une déformation principale.}$$

Les deux autres déformations principales peuvent donc être déterminées à partir du tenseur pseudo plan suivant :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &\Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = \frac{k}{2} \left[\frac{0+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-2}{2}\right)^2 + (1)^2} \right] \\ &\Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = \frac{k}{2} [1 \pm \sqrt{2}] \\ &\Rightarrow \varepsilon_{II} = \varepsilon_{\max} = \frac{k}{2} [1 + \sqrt{2}] \quad \& \quad \varepsilon_{III} = \varepsilon_{\min} = \frac{k}{2} [1 - \sqrt{2}] \\ &\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_I = 2k \\ \varepsilon_{II} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}k \\ \varepsilon_{III} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2k \\ \varepsilon_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}k \\ \varepsilon_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \end{cases} \quad Ok. \end{aligned}$$

4. Directions principales : $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\varepsilon_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \quad | \quad l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \varepsilon_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \varepsilon_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p - axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que : $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad | \quad \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

$$\bullet \quad \varepsilon_1 = 2k \quad \rightarrow \quad \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{car l'axe } \bar{x}_3 \text{ est principal } (\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 2k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2kl_1 + \frac{k}{2}m_1 + 0n_1 = 0 \\ \frac{k}{2}l_1 - km_1 + 0n_1 = 0 \\ 0l_1 + 0m_1 - 0kn_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4l_1 - m_1 - 0n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - 2m_1 + 0n_1 = 0 & (2) \\ 0l_1 + 0m_1 - 0n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) : m_1 = 4l_1 \quad \& \quad (2) : l_1 = 2m_1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = m_1 = 0$$

$$(4) : l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = 1 \quad (\text{car } \varepsilon_1 = 4 \text{ est une dilatation})$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \varepsilon_2 &= \frac{1+\sqrt{2}}{2}k \quad \rightarrow \quad \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\
\Rightarrow \left[\frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(0 - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)kl_2 + \frac{1}{2}km_2 + 0n_2 = 0 \\ \frac{1}{2}kl_2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)km_2 + 0n_2 = 0 \\ 0l_2 + 0m_2 + \left(\frac{4}{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)kn_2 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} -(1+\sqrt{2})l_2 + m_2 + 0n_2 = 0 & (1) \\ l_2 + (1-\sqrt{2})m_2 + 0n_2 = 0 & (2) \\ 0l_2 + 0m_2 + (3-\sqrt{2})n_2 = 0 & (3) \end{cases} & \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4) \\
(3): \quad n_2 &= 0 \\
(1): \quad m_2 &= (1+\sqrt{2})l_2 \\
(2): \quad l_2 + (1-\sqrt{2})m_2 &= [1 + (1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})]l_2 = 0l_2 = 0 \\
\Rightarrow l_2 = t \quad \& \quad m_2 &= (1+\sqrt{2})t \quad \& \quad n_2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\
\Rightarrow \text{Solution particulière : } t = 1 &\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \varepsilon_3 &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \\
\left[\frac{k}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \left(0 - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)kl_3 + \frac{1}{2}km_3 + 0n_3 = 0 \\ \frac{1}{2}kl_3 + \left(\frac{2}{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)km_3 + 0n_3 = 0 \\ 0l_3 + 0m_3 + \left(\frac{4}{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)kn_3 = 0 \end{cases} \\
\begin{cases} -(1-\sqrt{2})l_3 + m_3 + 0n_3 = 0 & (1) \\ l_3 + (1+\sqrt{2})m_3 + 0n_3 = 0 & (2) \\ 0l_3 + 0m_3 + (3+\sqrt{2})n_3 = 0 & (3) \end{cases} & \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4) \\
(3): \quad n_3 &= 0 \\
(1): \quad m_3 &= (1-\sqrt{2})l_3 \\
(2): \quad l_3 + (1+\sqrt{2})m_3 &= [1 + (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})]l_3 = 0l_3 = 0 \\
\Rightarrow l_3 = t \quad \& \quad m_3 &= (1-\sqrt{2})t \quad \& \quad n_3 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\
\Rightarrow \text{Solution particulière : } t = 1 &\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Tricercle de Mohr des déformations

Les trois cercles de Mohr des déformations sont distincts et définis comme suit :

- Le cercle (I) passant par $(\varepsilon_1 = 2k, 0)$ et $(\varepsilon_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}k, 0)$, donc d'équation :

$$\begin{aligned}
(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= R^2 \quad | \quad C \left(x_C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{4+1+\sqrt{2}}{4}k = \frac{5+\sqrt{2}}{4}k, y_C = 0 \right) \\
&\& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{4-1-\sqrt{2}}{4}k = \frac{3-\sqrt{2}}{4}k
\end{aligned}$$

- Le cercle (II) passant par $(\varepsilon_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}k, 0)$ et $(\varepsilon_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}k, 0)$, donc d'équation :

$$\begin{aligned}
(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 &= R^2 \quad | \quad C \left(x_C = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} = \frac{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}}{4}k = \frac{k}{2}, y_C = 0 \right) \\
&\& \quad R = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} = \frac{1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}}{4}k = \frac{\sqrt{2}}{2}k
\end{aligned}$$

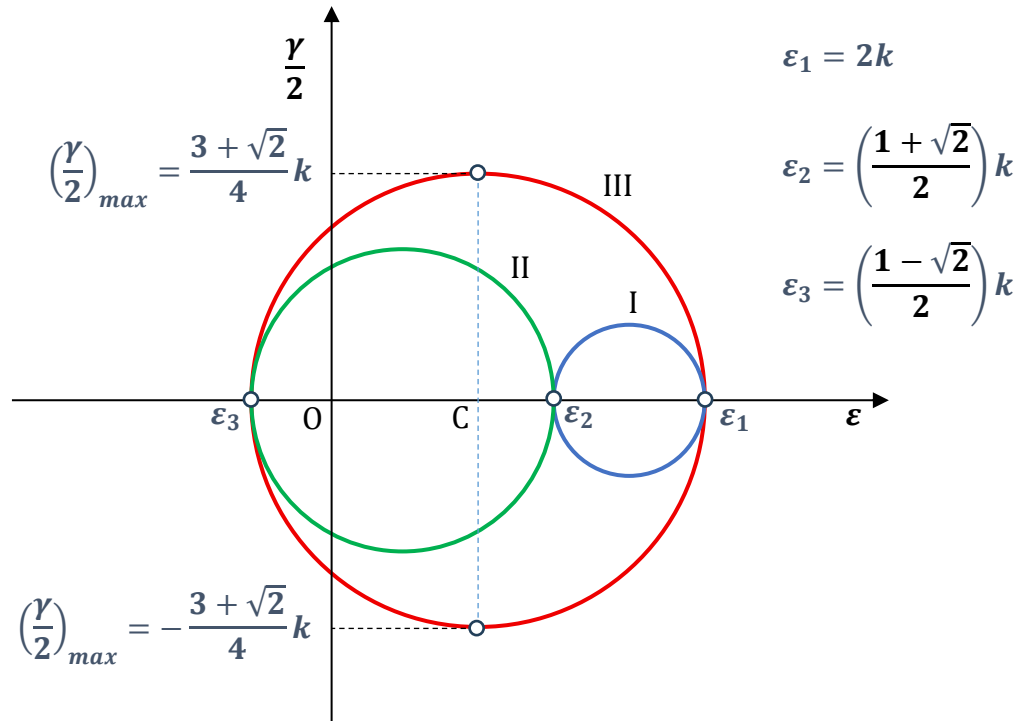
- Le cercle (III) passant par $(\varepsilon_1 = 2k, 0)$ et $(\varepsilon_3 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}k, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad | \quad C \left(x_c = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = \frac{4+1-\sqrt{2}}{4}k = \frac{5-\sqrt{2}}{4}k, y_c = 0 \right)$$

$$\& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{4-1+\sqrt{2}}{4}k = \frac{3+\sqrt{2}}{4}k$$

Ce cercle constitue le cercle enveloppe permettant de déterminer la distorsion maximale γ_{max} .

On est donc en présence d'un état de déformation véritablement triaxiale : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$.



5. Distorsion maximale γ_{max} correspondante

$$\gamma_{max} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_3| \quad \Rightarrow \quad \gamma_{max} = 2 \times \left| 2k - \frac{1-\sqrt{2}}{2}k \right| = \pm \frac{3+\sqrt{2}}{2}k$$

Ex. 4 Soit le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix},$$

où $k \geq 0$ désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique.

Calculer les invariants du tenseur des déformations linéarisé E_1 , E_2 et E_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante et déterminer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Rép. 4

1. Invariants du tenseur des déformations : E_1 , E_2 et E_3

- $E_1 = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$
 $\Rightarrow E_1 = k + k + k = 3k$
- $E_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ji}) = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{33}\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{13}^2$
 $\Rightarrow E_2 = k \times k + k \times k + k \times k - 0^2 - 0^2 - k^2 = 2k^2$
- $E_3 = |\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 - \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{13}$
 $\Rightarrow E_3 = k \times k \times k - k \times 0^2 - k \times k^2 - k \times 0^2 + 2 \times 0 \times 0 \times k = 0$

2. Equation caractéristique

$$-\lambda^3 + E_1\lambda^2 - E_2\lambda + E_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 3k\lambda^2 - 2k^2\lambda = 0$$

3. Déformations principales : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$

$$-\lambda^3 + 3k\lambda^2 - 2k^2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda^2 - 3k\lambda + 2k^2)\lambda = 0$$

On peut remarquer que $\lambda_1 = 0$ est une racine particulière de l'équation caractéristique qui peut se simplifier en l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3k\lambda + 2k^2 = 0 & \Rightarrow \Delta = (3k)^2 - 4 \times 1 \times 2k^2 = k^2 \\ & \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3k + \sqrt{k^2}}{2 \times 1} = 2k \quad \& \quad \lambda_3 = \frac{3k - \sqrt{k^2}}{2 \times 1} = k \\ \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 2k \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 0 \\ \varepsilon_2 = 2k \\ \varepsilon_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 1 : On peut retrouver ces résultats par calcul direct comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Sachant que } (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_i\delta_{ij})n_j = 0 & \Rightarrow \det(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} k - \lambda & 0 & k \\ 0 & k - \lambda & 0 \\ k & 0 & k - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3k\lambda^2 - 2k^2\lambda = 0 & \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2k \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 2k \\ \varepsilon_2 = k \\ \varepsilon_3 = 0 \end{cases} \quad Ok. \end{aligned}$$

Remarque 2 : On peut aussi remarquer que (Voir « Déformations planes ») :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0 &\Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal} \\ &\Rightarrow \varepsilon_I = \varepsilon_{22} = k \text{ est donc une déformation principale.}\end{aligned}$$

Les deux autres déformations principales peuvent donc être déterminées à partir du tenseur pseudo plan suivant :

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix} &\Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ &\Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = \frac{k+k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{k-k}{2}\right)^2 + (k)^2} \\ &\Rightarrow \varepsilon_{\max/\min} = k \pm k \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{II} = \varepsilon_{\max} = 2k \quad \& \quad \varepsilon_{III} = \varepsilon_{\min} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_I = k \\ \varepsilon_{II} = 2k \\ \varepsilon_{III} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 2k \\ \varepsilon_2 = k \\ \varepsilon_3 = 0 \end{cases} \quad Ok.\end{aligned}$$

4. Directions principales : $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\varepsilon_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \quad | \quad l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \varepsilon_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \varepsilon_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad | \quad \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\varepsilon_1 = 2k \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} - 2k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -kl_1 + 0m_1 + kn_1 = 0 \\ 0l_1 - km_1 + 0n_1 = 0 \\ kl_1 + 0m_1 - kn_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 - 0m_1 - n_1 = 0 & (1) \\ 0l_1 - m_1 + 0n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + 0m_1 - n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1): l_1 = n_1 \quad \& \quad (3): l_1 = n_1 \quad \& \quad (2): m_1 = 0$$

$$(4): l_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow l_1 = n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ car } \varepsilon_1 = 2k > 0 \text{ est une dilatation}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$
- $\sigma_2 = k \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ car l'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal } (\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0)$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0l_2 - 0m_2 + kn_2 = 0 \\ 0l_2 - 0m_2 + 0n_2 = 0 \\ kl_2 + 0m_2 + 0n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0l_2 - 0m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ 0l_2 - 0m_2 + 0n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + 0m_2 + 0n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) : n_2 = 0 \quad \& \quad (3) : l_2 = 0$$

$$(4) : m_2^2 = 1 \Rightarrow m_2 = 1 \text{ car } \sigma_2 = k > 0$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \varepsilon_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \end{pmatrix} - 0 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} kl_3 + 0m_3 + kn_3 = 0 \\ 0l_3 + km_3 + 0n_3 = 0 \\ kl_3 + 0m_3 + kn_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (1) \\ 0l_3 + m_3 + 0n_3 = 0 & (2) \\ l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \& (3) : l_3 = -n_3 \quad \& \quad (2) : m_3 = 0$$

$$(4) : 2l_3^2 = 2n_3^2 = 1 \Rightarrow l_3 = -n_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque :

1. Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$, on peut déduire $\bar{n}_3$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad Ok.$$

2. Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_3$, on peut déduire $\bar{n}_2$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_2 = \bar{n}_3 \wedge \bar{n}_1$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = 0 \bar{e}_1 + 1 \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ok.$$

5. Tricercle de Mohr des déformations

Les trois cercles de Mohr des déformations sont distincts et définis comme suit :

- Le cercle (I) passant par $(\varepsilon_1 = 2k, 0)$ et $(\varepsilon_2 = k, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \mid C \left(x_C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{2k + k}{2} = \frac{3k}{2}, y_C = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} = \frac{2k - k}{2} = \frac{k}{2}$$

- Le cercle (II) passant par $(\varepsilon_2 = k, 0)$ et $(\varepsilon_3 = 0, 0)$, donc d'équation :

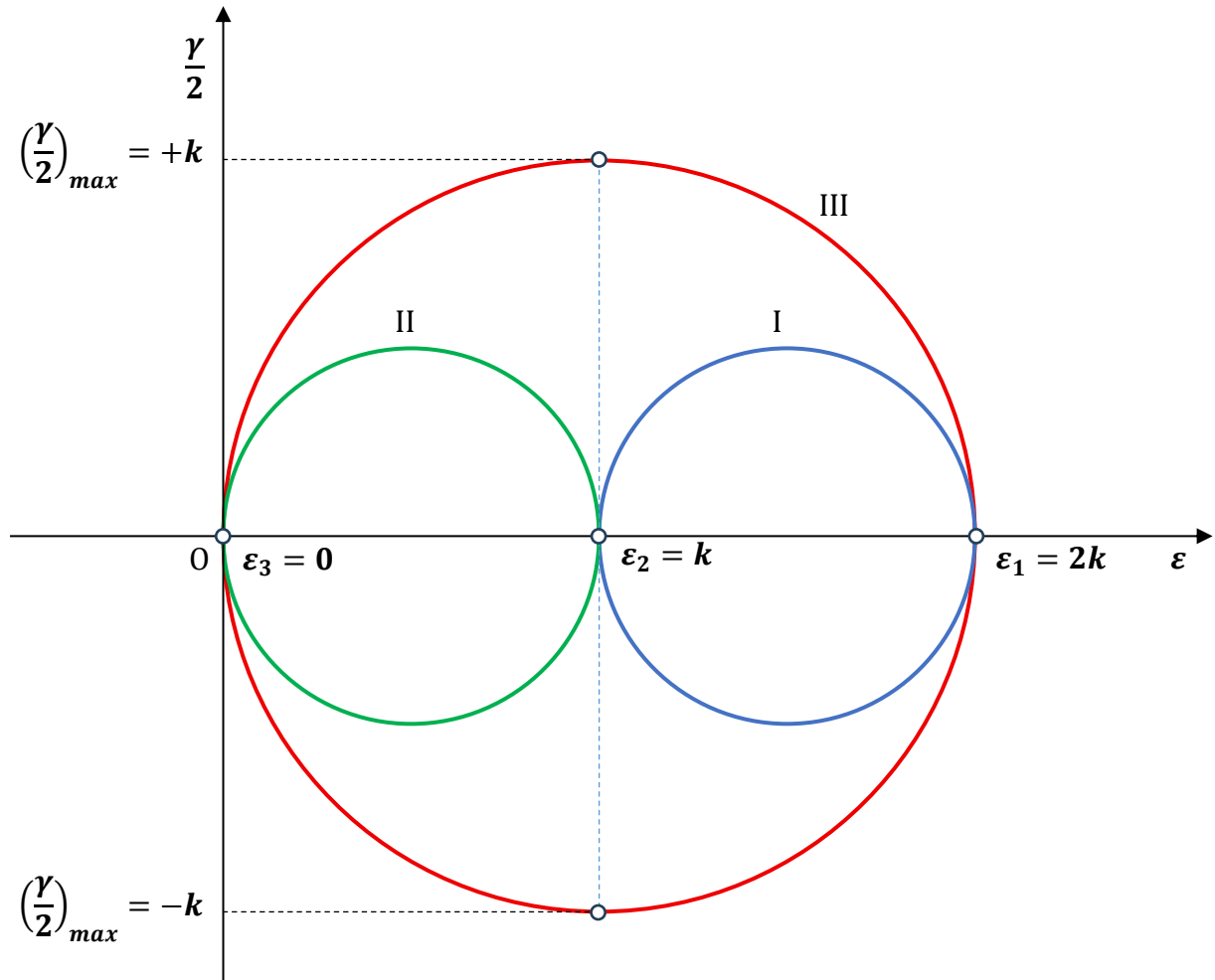
$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \mid C \left(x_C = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} = \frac{k + 0}{2} = \frac{k}{2}, y_C = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} = \frac{k - 0}{2} = \frac{k}{2}$$

- Le cercle (III) passant par $(\varepsilon_1 = 2k, 0)$ et $(\varepsilon_3 = 0, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \quad | \quad C \left(x_C = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} = \frac{2k + 0}{2} = k, y_C = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = \frac{2k - 0}{2} = k$$

Ce cercle constitue le cercle enveloppe permettant de déterminer la distorsion maximale γ_{max} .

On est donc en présence d'un état de déformation véritablement triaxiale : $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$.



6. Distorsion maximale γ_{max} correspondante

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{max} = |2k - 0| = \pm 2k$$

Ex. 5 Soit le champ de vitesse $\bar{v}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{v} = \begin{cases} v_1 = 2x_1 - x_2 \\ v_2 = x_1 + 3x_2 \\ v_3 = -2x_3 \end{cases},$$

Calculer le gradient du champ de vitesse $\bar{\bar{V}}$, le tenseur taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ et le tenseur taux de rotation $\bar{\bar{\Omega}}$. Déterminer ensuite le vecteur polaire $\bar{\omega}$, l'angle de rotation θ et l'axe $\bar{h}$ correspondant.

Rép. 5

1. Gradient du champ de vitesse : $\bar{\bar{V}}$

Sachant que : $\bar{x} = \bar{x}_o + \bar{u}(\bar{x}_o, t) \Rightarrow \bar{v} = \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}_o, t)}{\partial t} \Rightarrow \bar{\bar{V}}(t) = \overline{\text{grad}}[\bar{v}(t)] \Leftrightarrow V_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$

- $V_{11} = v_{1,1} = 2$
- $V_{12} = v_{1,2} = -1$
- $V_{13} = v_{1,3} = 0$
- $V_{21} = v_{2,1} = 1$
- $V_{22} = v_{2,2} = 3$
- $V_{23} = v_{2,3} = 0$
- $V_{31} = v_{3,1} = 0$
- $V_{32} = v_{3,2} = 0$
- $V_{33} = v_{3,3} = -2$

$$\Rightarrow \bar{\bar{V}} = [V_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Tenseur taux de déformation : $\bar{\bar{D}}$

Il est défini par la partie symétrique du gradient de vitesse. Soit donc : $\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}[\bar{\bar{V}} + {}^t\bar{\bar{V}}]$

$$\text{Sachant que : } \bar{\bar{V}} = [V_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\bar{\bar{V}} = [V_{ji}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{D}} = [D_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Autre approche :

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}[\overline{\text{grad}}(\bar{v}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{v})] \Leftrightarrow D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$$

- $D_{11} = \frac{1}{2}(v_{1,1} + v_{1,1}) = v_{1,1} = 2$
- $D_{22} = \frac{1}{2}(v_{2,2} + v_{2,2}) = v_{2,2} = 3$
- $D_{33} = \frac{1}{2}(v_{3,3} + v_{3,3}) = v_{3,3} = -2$
- $D_{12} = \frac{1}{2}(v_{1,2} + v_{2,1}) = \frac{1}{2}(-1 + 1) = 0 \Rightarrow D_{21} = D_{12} = 0$
- $D_{23} = \frac{1}{2}(v_{2,3} + v_{3,2}) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \Rightarrow D_{32} = D_{23} = 0$
- $D_{13} = \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \Rightarrow D_{31} = D_{13} = 0$

$$\Rightarrow \bar{\bar{D}} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

Remarque : Déformation pure (pas de cisaillement)

3. Tenseur taux de rotation : $\bar{\bar{\Omega}}$

Il est défini par la partie antisymétrique du gradient de vitesse. Soit donc : $\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} [\bar{\bar{V}} - {}^t\bar{\bar{V}}]$

$$\text{Sachant que : } \bar{\bar{V}} = [V_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\bar{\bar{V}} = [V_{ji}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Omega}} = [R_{ij}] = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autre approche :

$$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\mathbf{v}) - {}^t\overline{\text{grad}}(\mathbf{v})] \Leftrightarrow \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i})$$

$$\Rightarrow \Omega_{11} = \frac{1}{2} (v_{1,1} - v_{1,1}) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_{22} = \frac{1}{2} (v_{2,2} - v_{2,2}) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_{33} = \frac{1}{2} (v_{3,3} - v_{3,3}) = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_{12} = \frac{1}{2} (v_{1,2} - v_{2,1}) = \frac{1}{2} (-1 - 1) = -1 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{21} = -R_{12} = 1$$

$$\Rightarrow \Omega_{23} = \frac{1}{2} (v_{2,3} - v_{3,2}) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{32} = -R_{23} = 0$$

$$\Rightarrow \Omega_{13} = \frac{1}{2} (v_{1,3} - v_{3,1}) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega_{31} = -R_{13} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\Omega}} = [\Omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

4. Vecteur polaire : $\bar{\bar{\omega}}$

$$\bar{\bar{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{\omega}} = \begin{Bmatrix} p=0 \\ q=0 \\ r=1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vérification : $\overline{\text{rot}}(\mathbf{v}) = \epsilon_{ijk} v_{k,j} \bar{\mathbf{e}}_i = (v_{3,2} - v_{2,3}) \bar{\mathbf{e}}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1}) \bar{\mathbf{e}}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2}) \bar{\mathbf{e}}_3$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} v_{3,2} - v_{2,3} = 0 - 0 = 0 \\ v_{1,3} - v_{3,1} = 0 - 0 = 0 \\ v_{2,1} - v_{1,2} = 1 + 1 = 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad Ok.$$

5. L'angle de rotation θ et l'axe $\bar{\mathbf{h}}$ correspondant

L'angle de rotation θ est défini par la norme du vecteur polaire $\bar{\bar{\omega}}$. Soit donc :

$$\theta = \|\bar{\bar{\omega}}\| \Rightarrow \theta = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 \quad (\text{rad})$$

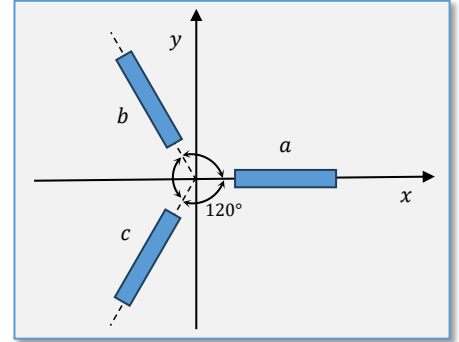
D'où l'on peut déterminer l'axe $\bar{\mathbf{h}}$ correspondant via l'équation suivante :

$$\bar{\bar{\omega}} = \theta \bar{\mathbf{h}} \Rightarrow \bar{\mathbf{h}} = \frac{1}{\theta} \bar{\bar{\omega}} = 1 \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \equiv \bar{x}_3 \quad (3^{\text{ème}} \text{ axe unitaire})$$

Ex. 6 Trois jauges de déformation a, b et c faisant entre-elles successivement un angle de 120° sont collées sur une plaque sollicitée dans son plan. On mesure les trois dilatations ε_a , ε_b et ε_c .

On demande de :

1. Déterminer les déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} , puis déduire le tenseur $\bar{\varepsilon}$ correspondant.
2. Calculer les déformations principales ε_{max} et ε_{min} , ainsi que leurs directions $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$.
3. Tracer le cercle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.



Application numérique :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 10 \% \quad ; \quad \varepsilon_b = \varepsilon_{120} = -1 \% \quad ; \quad \varepsilon_c = \varepsilon_{240} = 4.5 \%$$

Rép. 6

1. Déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} et tenseur $\bar{\varepsilon}$ correspondant

Sachant que :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = \varepsilon_x \quad (1)$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{120} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 120) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 120) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_{xy} \quad (2)$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{240} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 240) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 240) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_{xy} \quad (3)$$

D'où l'on peut calculer :

$$(1) : \quad \varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$(2) + (3) : \quad \varepsilon_b + \varepsilon_c = 2 \times \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - 2 \times \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} - 0 = \frac{\varepsilon_x + 3\varepsilon_y}{2} \Rightarrow \varepsilon_x + 3\varepsilon_y = 2(\varepsilon_b + \varepsilon_c)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a]$$

$$(2) - (3) : \quad \varepsilon_b - \varepsilon_c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$$

Soit donc :

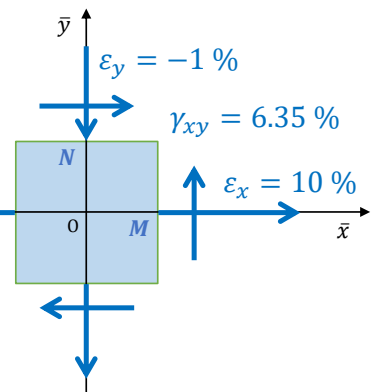
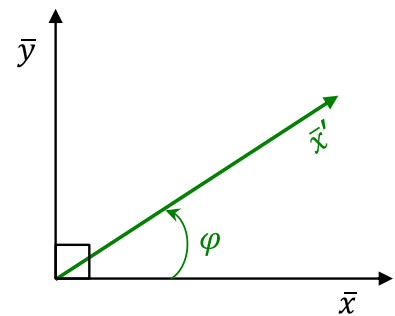
$$\varepsilon_x = \varepsilon_a = 10 \%$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{3}[2(\varepsilon_b + \varepsilon_c) - \varepsilon_a] = \frac{1}{3}[2 \times (-1 + 4.5) - 10] = -1 \%$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2}{\sqrt{3}}(\varepsilon_b - \varepsilon_c) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(-1 - 4.5) = 6.35 \%$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3.175 \\ 3.175 & -1.2 \end{bmatrix} (\%)$$

$$\Rightarrow M(10, 3.175) \quad \& \quad N(-1, -3.175)$$



2. Déformations principales : ε_{max} et ε_{min}

Le tenseur des déformations étant un tenseur plan, les contraintes principales sont donc :

$$\varepsilon_{max/min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Soit alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{max} &= \left[\frac{10-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{10+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6.35}{2}\right)^2} \right] = 10.85 \% \\ \varepsilon_{min} &= \left[\frac{10-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{10+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6.35}{2}\right)^2} \right] = -1.85 \% \end{aligned}$$

3. Directions principales : $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$

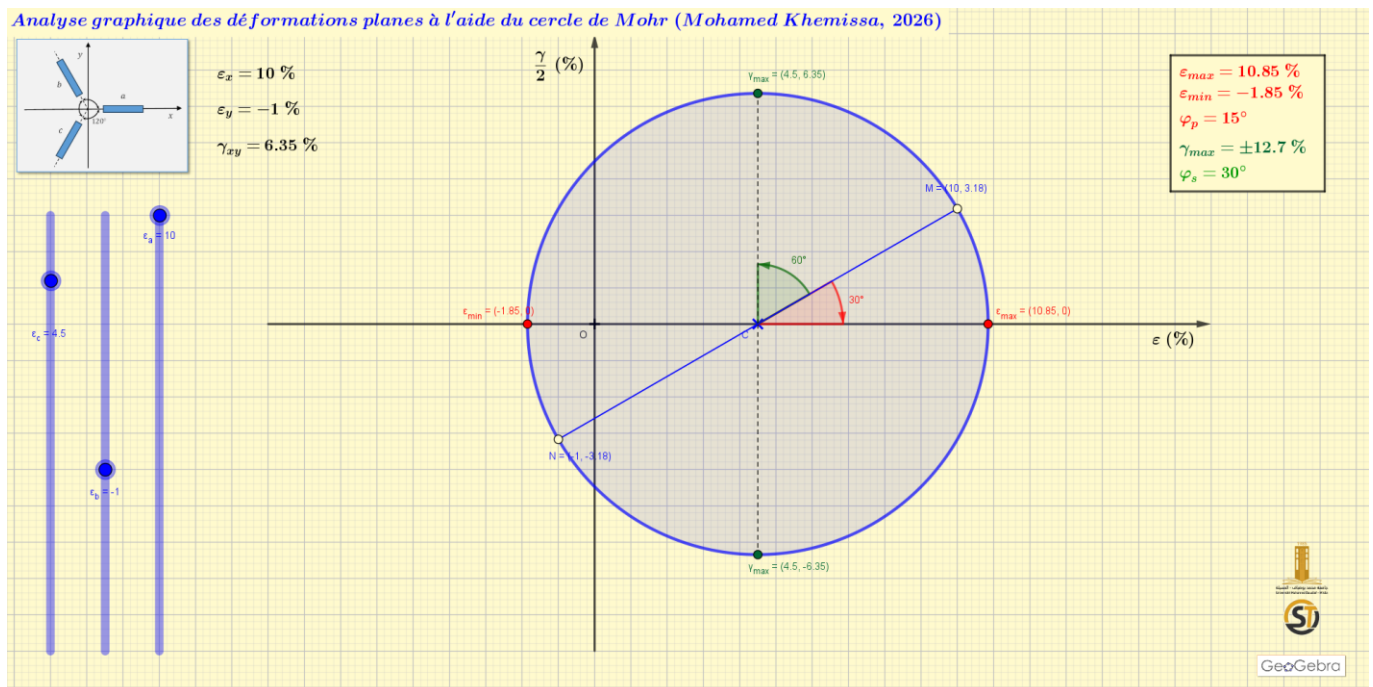
Les directions principales s'obtiennent par rotation θ_p définie comme suit :

$$\tan(2\varphi_p) = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{6.35}{10+1} = 0.577 \Rightarrow \varphi_p = 15^\circ$$

Soit donc :

$$\bar{n}_1 = \begin{cases} \cos(15^\circ) = 0.966 \\ -\sin(15^\circ) = -0.259 \end{cases} \quad \& \quad \bar{n}_2 = \begin{cases} \sin(15^\circ) = 0.259 \\ \cos(15^\circ) = 0.966 \end{cases}$$

4. Cercle de Mohr des déformations



5. Distorsion maximale γ_{max} correspondante

$$\gamma_{max} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} \Rightarrow \gamma_{max} = |10.85 - (-1.85)| = \pm 12.7 \%$$