

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre 3

Théorie de l'état des contraintes

Exercices

Prof. Mohamed KHEMISSA

*Département de Génie Civil, Faculté de Technologie,
Université Mohamed Boudiaf – M'Sila*

Ex. 1 En un point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 15 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 5 \text{ kN/m}^2.$$

On demande de :

- Construire le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ correspondant.
- Calculer ses contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Calculer ses invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante. Commenter avec justification les résultats trouvés.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Rép. 1

1. Tenseur des contraintes

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Tenseur symétrique})$$

$$\text{Etant donné : } \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 15 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 5 \text{ kN/m}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 15 & 5 \\ 5 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad (\text{kN/m}^2) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2) \end{aligned}$$

2. Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\text{Sachant que } (\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}) n_j = 0 \Rightarrow \det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 - \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 1] + [0 - (3 - \lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 2] = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)(3 - \lambda - \sqrt{2})(3 - \lambda + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 3 + \sqrt{2} \\ \sigma_2 = 3 \\ \sigma_3 = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5 \times (3 + \sqrt{2}) = 22.1 \\ \sigma_2 = 5 \times 3 = 15 \\ \sigma_3 = 5 \times (3 - \sqrt{2}) = 7.9 \end{cases} \quad (\text{kN/m}^2)$$

3. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – *axe principal* (= 1, 2, 3)

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\sigma_1 = 3 + \sqrt{2} \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2) \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - (3 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 3 - \sqrt{2})l_1 + 0m_1 + n_1 = 0 \\ 0l_1 + (3 - 3 - \sqrt{2})m_1 + n_1 = 0 \\ l_1 + m_1 + (3 - 3 - \sqrt{2})n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}l_1 + 0m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ 0l_1 - \sqrt{2}m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + m_1 - \sqrt{2}n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) : n_1 = \sqrt{2}l_1 \quad \& \quad (2) : n_1 = \sqrt{2}m_1 \Rightarrow l_1 = m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}n_1$$

$$(4) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right)n_1^2 = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l_1 = m_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

- $\sigma_2 = 3 \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2) \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 3)l_2 + 0m_2 + n_2 = 0 \\ 0l_2 + (3 - 3)m_2 + n_2 = 0 \\ l_2 + m_2 + (3 - 3)n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0l_2 + 0m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ 0l_2 + 0m_2 + n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + m_2 + 0n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \text{ ou } (2) : n_2 = 0$$

$$(3) : l_2 = -m_2$$

$$(4) : (1 + 1 + 0)l_2^2 = 1 \Rightarrow l_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_2 = -l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = 3 - \sqrt{2} \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2) \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - (3 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 3 + \sqrt{2})l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 \\ 0l_3 + (3 - 3 + \sqrt{2})m_3 + n_3 = 0 \\ l_3 + m_3 + (3 - 3 + \sqrt{2})n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}l_3 + 0m_3 + n_3 = 0 & (1) \\ 0l_3 + \sqrt{2}m_3 + n_3 = 0 & (2) \\ l_3 + m_3 + \sqrt{2}n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) : \sqrt{2}l_3 + n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_3 = -\sqrt{2}l_3$$

$$(2) : \sqrt{2}m_3 + n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_3 = -\sqrt{2}m_3$$

$$\Rightarrow \quad l_3 = m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}n_3$$

$$(4) : (1 + 1 + 2)l_3^2 = 4l_3^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_3 = m_3 = -\frac{1}{2} \quad \& \quad n_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque :

Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$, on peut déduire $\bar{n}_3$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\bar{e}_1 - \left(+\frac{1}{2}\right)\bar{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\bar{e}_3 = -\frac{1}{2}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad Ok.$$

4. Invariants des contraintes I_1, I_2 et I_3

$$\bullet \quad I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$\bullet \quad I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$$

$$\Rightarrow \quad I_2 = 3 \times 3 + 3 \times 3 + 3 \times 3 - 1^2 - 1^2 - 1^2 = 25$$

- $I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$
 $\Rightarrow I_3 = 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 1^2 - 3 \times 1^2 - 3 \times 0^2 + 2 \times 0 \times 1 \times 1 = 21$
 $\Leftrightarrow I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 8 - 0 - 3 = 21 \quad Ok$

Vérification :

- $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
 $\Rightarrow I_1 = 3 + \sqrt{2} + 3 + 3 - \sqrt{2} = 9 \quad Ok$
- $I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$
 $\Rightarrow I_2 = (3 + \sqrt{2}) \times 3 + 3 \times (3 - \sqrt{2}) + (3 + \sqrt{2}) \times (3 - \sqrt{2})$
 $= 9 + 3\sqrt{2} + 9 - 3\sqrt{2} + 9 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2 = 25 \quad Ok$
- $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
 $\Rightarrow I_3 = (3 + \sqrt{2}) \times 3 \times (3 - \sqrt{2}) = 3 \times (9 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2) = 3 \times 7 = 21 \quad Ok$

5. Equation caractéristique

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21 = 0$$

On peut remarquer que $\lambda_1 = 3$ est une racine particulière.

$\begin{array}{r} -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21 \\ \underline{-\lambda^3 + 3\lambda^2} \\ 0 + 6\lambda^2 - 25\lambda + 21 \\ \underline{6\lambda^2 - 18\lambda} \\ 0 - 7\lambda + 21 \\ \underline{-7\lambda + 21} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \lambda - 3 \\ \underline{-\lambda^2 + 6\lambda - 7} \end{array}$
---	---

$$-\lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 7 = 8$$

$$\lambda_2 = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}$$

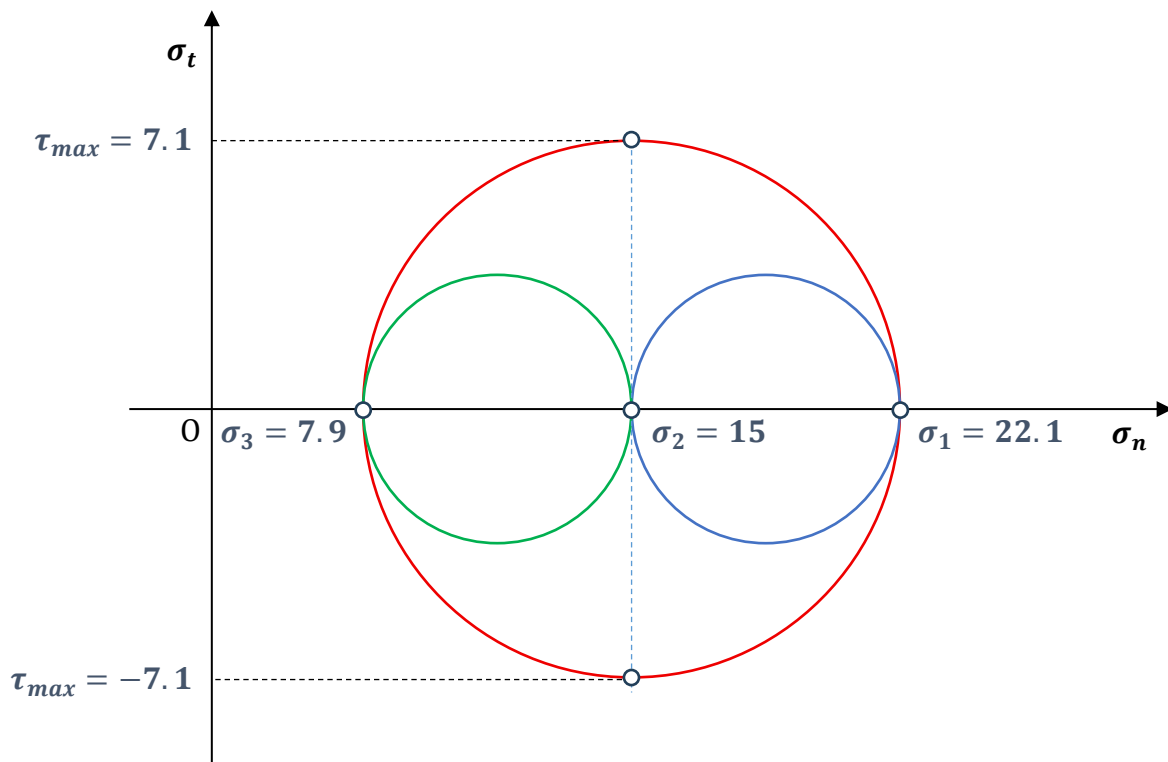
$$\lambda_3 = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{2} = 3 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 21 &= (\lambda - 3)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 3 - \sqrt{2})(\lambda - 3 + \sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 3 + \sqrt{2} \\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (\times 5 \text{ kN/m}^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 5 \times (3 + \sqrt{2}) = 22.1 \\ \sigma_2 = 5 \times 3 = 15 \\ \sigma_3 = 5 \times (3 - \sqrt{2}) = 7.9 \end{cases} \quad (\text{kN/m}^2) \quad Ok.$$

6. Tricerкле de Mohr des contraintes



7. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|5 \times (3 + \sqrt{2}) - 5 \times (3 - \sqrt{2})|}{2} = 5\sqrt{2} = 7.1 \text{ kN/m}^2$$

Ex. 2 En un point M d'un milieu continu, les composantes du tenseur des contraintes sont définies dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\sigma_{ij} = \lambda + \mu \delta_{ij},$$

où λ et μ désignent deux constantes positives non nulles (paramètres de Lamé) et $\bar{\delta} = [\delta_{ij}]$ le tenseur de Kronecker.

On demande de :

- Construire le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ correspondant.
- Calculer les invariants de contraintes I_1 , I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Tracer le tricerle de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Rép. 2

1. Tenseur des contraintes

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{Tenseur symétrique})$$

$$\text{Etant donné : } \sigma_{ij} = \lambda + \mu \delta_{ij} \quad | \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

2. Invariants des contraintes I_1 , I_2 et I_3

- $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
 $\Rightarrow I_1 = \lambda + \mu + \lambda + \mu + \lambda + \mu = 3(\lambda + \mu)$
- $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$
 $\Rightarrow I_2 = (\lambda + \mu)(\lambda + \mu) + (\lambda + \mu)(\lambda + \mu) + (\lambda + \mu)(\lambda + \mu) - \lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^2$
 $= 3(\lambda + \mu)^2 - 3\lambda^2$
 $= 3(\lambda + \mu + \lambda)(\lambda + \mu - \lambda)$
 $= 3(2\lambda + \mu)\mu$
- $I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$
 $\Rightarrow I_3 = (\lambda + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda + \mu) - (\lambda + \mu)\lambda^2 - (\lambda + \mu)\lambda^2 - (\lambda + \mu)\lambda^2 + 2\lambda^3$
 $= (\lambda + \mu)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2) - 3(\lambda + \mu)\lambda^2 + 2\lambda^3$
 $= (\lambda + \mu)(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2) - 3\lambda^3 - 3\lambda^2\mu + 2\lambda^3$
 $= \lambda^3 + 2\lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + \lambda^2\mu + 2\lambda\mu^2 + \mu^3 - \lambda^3 - 3\lambda^2\mu$
 $= 3\lambda\mu^2 + \mu^3$
 $= (3\lambda + \mu)\mu^2$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow I_3 &= \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + \mu \end{vmatrix} = (\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \lambda + \mu \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + \mu)[(\lambda + \mu)^2 - \lambda^2] - \lambda[\lambda(\lambda + \mu) - \lambda^2] + \lambda[\lambda^2 - \lambda(\lambda + \mu)] \\
&= (\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)\mu - 2\lambda^2\mu \\
&= [2\lambda^2 + \lambda\mu + 2\lambda\mu + \mu^2 - 2\lambda^2]\mu \\
&= (3\lambda + \mu)\mu^2
\end{aligned}$$

3. Equation caractéristique

$$\begin{aligned}
-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 &= 0 \\
\Rightarrow -\sigma^3 + 3(\lambda + \mu)\sigma^2 - 3(2\lambda + \mu)\mu\sigma + (3\lambda + \mu)\mu^2 &= 0
\end{aligned}$$

4. Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

On peut remarquer que $\sigma = \mu$ est une racine particulière de l'équation caractéristique.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (3\lambda + \mu - \sigma)(\sigma - \mu)^2 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda + \mu \\ \lambda_2 = \mu \\ \lambda_3 = \mu \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 3\lambda + \mu \\ \sigma_2 = \mu \\ \sigma_3 = \mu \end{cases}
\end{aligned}$$

Remarque : On peut aussi déterminer les racines de l'équation caractéristique à l'aide des applications de l'IA comme ChatGPT, Copilot, etc.

5. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\sigma_1 = 3\lambda + \mu \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} \lambda + \mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix} - (3\lambda + \mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu - 3\lambda - \mu)l_1 + \lambda m_1 + \lambda n_1 = 0 \\ \lambda l_1 + (\lambda + \mu - 3\lambda - \mu)m_1 + \lambda n_1 = 0 \\ \lambda l_1 + \lambda m_1 + (\lambda + \mu - 3\lambda - \mu)n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda l_1 + \lambda m_1 + \lambda n_1 = 0 \\ \lambda l_1 - 2\lambda m_1 + \lambda n_1 = 0 \\ \lambda l_1 + \lambda m_1 - 2\lambda n_1 = 0 \end{cases}$$

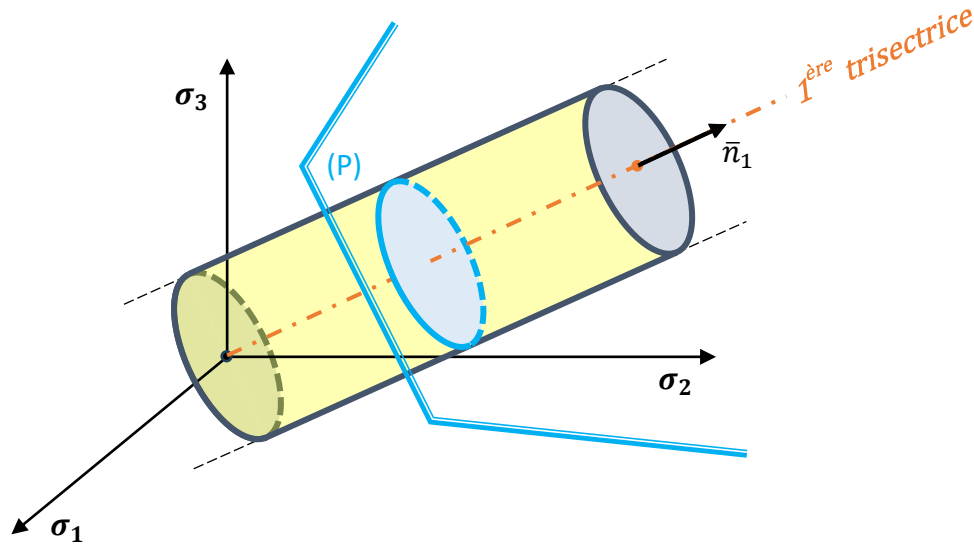
$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(2) - (3) : 0l_1 - 3m_1 + 3n_1 = 0 \Rightarrow m_1 = n_1 \quad (5)$$

$$(1) \& (5) : -2l_1 + 2m_1 = 0 \Rightarrow l_1 = m_1$$

$$\Rightarrow l_1 = m_1 = n_1 \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{Bmatrix} \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

$\Rightarrow$ La sollicitation étant cylindrique ($\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 > 0$), toute direction orthogonale au plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale.



$$\bullet \quad \sigma_2 = \mu \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} \lambda + \mu & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda + \mu & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda + \mu \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda + \mu - \mu)l_2 + \lambda m_2 + \lambda n_2 = 0 \\ \lambda l_2 + (\lambda + \mu - \mu)m_2 + \lambda n_2 = 0 \\ \lambda l_2 + \lambda m_2 + (\lambda + \mu - \mu)n_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda l_2 + \lambda m_2 + \lambda n_2 = 0 \\ \lambda l_2 + \lambda m_2 + \lambda n_2 = 0 \\ \lambda l_2 + \lambda m_2 + \lambda n_2 = 0 \end{cases}$$

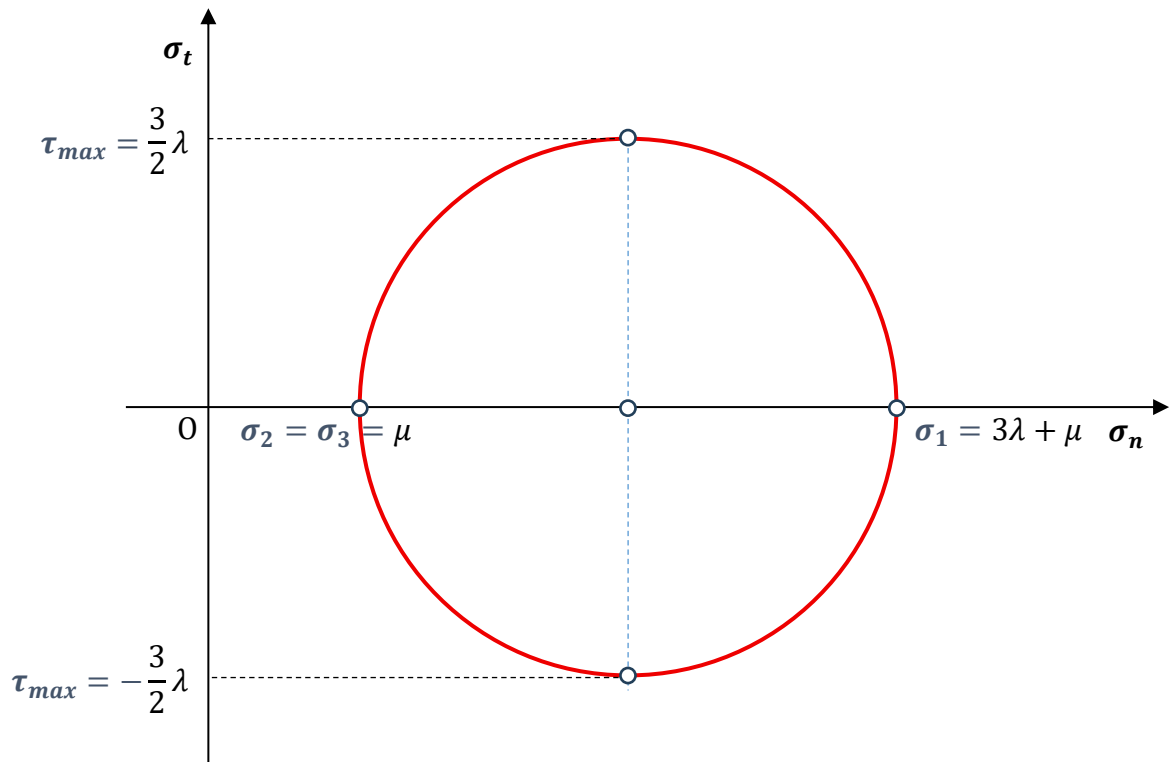
$$\Rightarrow \begin{cases} l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Solution indéterminée.

$$\Rightarrow \text{Idem pour } \sigma_3 = \mu \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$\Rightarrow$ Toute direction contenue dans le plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale.

6. Tricerclé de Mohr des contraintes



Remarque : La sollicitation étant de type cylindrique (triaxiale de révolution), le tricerclé de Mohr des contraintes se réduit donc en un seul cercle passant par $(3\lambda + \mu, 0)$ et $(\mu, 0)$, donc d'équation :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad | \quad C \left(x_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{3\lambda + \mu + \mu}{2} = \frac{3}{2}\lambda + \mu, y_c = 0 \right)$$

$$\& \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{3\lambda + \mu - \mu}{2} = \frac{3}{2}\lambda$$

7. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|3\lambda + \mu - \mu|}{2} = \frac{3}{2}\lambda$$

Ex. 3 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) .$$

On demande de :

- Calculer ses invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer ses contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.

Rép. 3

1. Invariants des contraintes I_1, I_2 et I_3

- $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
 $\Rightarrow I_1 = 1 + 1 + 4 = 6$
- $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$
 $\Rightarrow I_2 = 1 \times 1 + 1 \times 4 + 4 \times 1 - (-3)^2 - (-\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = -4$
- $I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$
 $\Rightarrow I_3 = 1 \times 1 \times 4 - 1 \times (-\sqrt{2})^2 - 1 \times (\sqrt{2})^2 - 4 \times (-3)^2 + 2 \times (-3) \times (-\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}) = -24$

2. Equation caractéristique

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24 = 0$$

3. Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

On peut remarquer que $\lambda = 6$ est une racine particulière de l'équation caractéristique :

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24 & \lambda - 6 \\ \hline -\lambda^3 + 6\lambda^2 & -\lambda^2 + 4 \\ \hline 0 + 4\lambda - 24 & \\ 4\lambda - 24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 6)(-\lambda^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_2 = 2 \\ \sigma_3 = -2 \end{cases} \quad (N/mm^2)$$

Remarque : On peut retrouver ces résultats par le calcul direct comme suit :

$$\text{Sachant que } (\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}) n_j = \mathbf{0} \Rightarrow \det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 - \lambda & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_2 = 2 \\ \sigma_3 = -2 \end{cases} \quad (N/mm^2)$$

4. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij}) n_p = \mathbf{0} \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\sigma_1 = 6 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5l_1 - 3m_1 + \sqrt{2}n_1 = 0 & (1) \\ -3l_1 - 5m_1 - \sqrt{2}n_1 = 0 & (2) \\ \sqrt{2}l_1 - \sqrt{2}m_1 - 2n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) + (2) : -8l_1 - 8m_1 = 0 \Rightarrow l_1 = -m_1$$

$$(3) : \sqrt{2}l_1 + \sqrt{2}l_1 - 2n_1 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}l_1 - 2n_1 = 0 \Rightarrow n_1 = \sqrt{2}l_1$$

$$(4) : l_1^2 + (-l_1)^2 + (\sqrt{2}l_1)^2 = 1 \Rightarrow 4l_1^2 = 1 \Rightarrow l_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

- $\sigma_2 = 2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -l_2 - 3m_2 + \sqrt{2}n_2 = 0 & (1) \\ -3l_2 - m_2 - \sqrt{2}n_2 = 0 & (2) \\ \sqrt{2}l_2 - \sqrt{2}m_2 + 2n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) + (2) : -4l_2 - 4m_2 = 0 \Rightarrow l_2 = -m_2$$

$$(3) : \sqrt{2}l_2 + \sqrt{2}l_2 + 2n_2 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}l_2 + 2n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = -\sqrt{2}l_2$$

$$(4): \quad l_2^2 + (-l_2)^2 + (-\sqrt{2}l_2)^2 = 1 \Rightarrow 4l_2^2 = 1 \Rightarrow l_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = -2 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} - (-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3l_3 - 3m_3 + \sqrt{2}n_3 = 0 & (1) \\ -3l_3 + 3m_3 - \sqrt{2}n_3 = 0 & (2) \\ \sqrt{2}l_3 - \sqrt{2}m_3 + 6n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(2) + (3): \quad \begin{cases} -3\sqrt{2}l_3 + 3\sqrt{2}m_3 - 2n_3 = 0 & (\times \sqrt{2}) & (5) \\ 3\sqrt{2}l_3 - 3\sqrt{2}m_3 + 18n_3 = 0 & (\times 3) & (6) \end{cases}$$

$$\frac{(5) - (6)}{16n_3 = 0} \Rightarrow n_3 = 0$$

$$(2): \quad 3l_3 + 3m_3 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2}l_2 + 2n_2 = 0 \Rightarrow l_3 = m_3$$

$$(4): \quad l_3^2 + l_3^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow 2l_3^2 = 1 \Rightarrow l_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

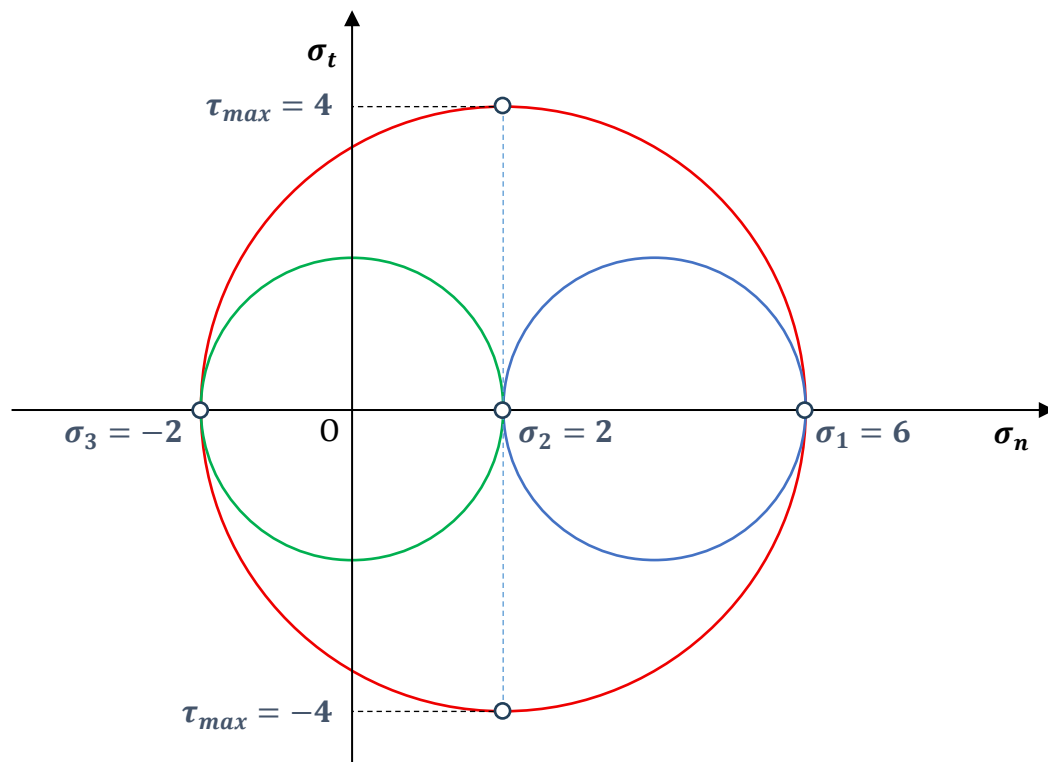
Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$, on peut déduire $\bar{n}_3$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \bar{e}_1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) \bar{e}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad Ok.$$

5. Tricerclé de Mohr des contraintes



Remarque : Le tricerclé de Mohr des contraintes se compose de trois cercles distincts caractéristiques d'une sollicitation véritablement triaxiale.

6. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|6 - (-2)|}{2} = 4 \text{ N/mm}^2$$

Ex. 4 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) .$$

On demande de :

- Quelle est la particularité de ce tenseur ? Justifier la réponse donnée.
- Calculer les invariants de contraintes, puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer les contraintes principales et leurs directions.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale correspondante.

Rép. 4

1. Particularité du tenseur

Sachant que : $Tr(\sigma_{ii}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 0 + 0 + 0 \equiv 0$, le tenseur $\bar{\sigma}$ est donc déviatorique.

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \bar{s} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2)$$

2. Invariants des contraintes J_1, J_2 et J_3

$$\bullet \quad J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33}$$

$$\Rightarrow J_1 = 0 + 0 + 0 \equiv 0$$

$$\bullet \quad J_2 = -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}) = -s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2$$

$$\Rightarrow J_2 = -0 - 0 - 0 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

$$\bullet \quad J_3 = |s_{ij}| = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2 - s_{33}s_{12}^2 + 2s_{12}s_{23}s_{13}$$

$$\Rightarrow J_3 = 0 \times 0 \times 0 - 0 \times 1^2 - 0 \times 1^2 - 0 \times 1^2 + 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1) - 1 \times (-1) + 1 \times (1) = 2$$

3. Equation caractéristique

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 - J_2\lambda - J_3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 0\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

4. Contraintes principales $s_1 \geq s_2 \geq s_3$

On peut remarquer que $\lambda = 2$ est une racine particulière de l'équation caractéristique :

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|l}
 \lambda^3 - 3\lambda - 2 & \lambda - 2 \\
 \hline
 \lambda^3 - 2\lambda^2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\
 2\lambda^2 - 3\lambda - 2 & \\
 \hline
 2\lambda^2 - 4\lambda - 2 & \\
 \hline
 \lambda - 2 & \\
 \hline
 \lambda - 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

$$\lambda_3 = \frac{-2 - 0}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1 = 2 \\ s_2 = -1 \\ s_3 = -1 \end{cases} \quad (N/mm^2)$$

5. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

***p* – axe principal (= 1, 2, 3)**

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

$$\bullet \quad s_1 = 2 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2l_1 + m_1 + n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - 2m_1 + n_1 = 0 & (2) \\ l_1 + m_1 - 2n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

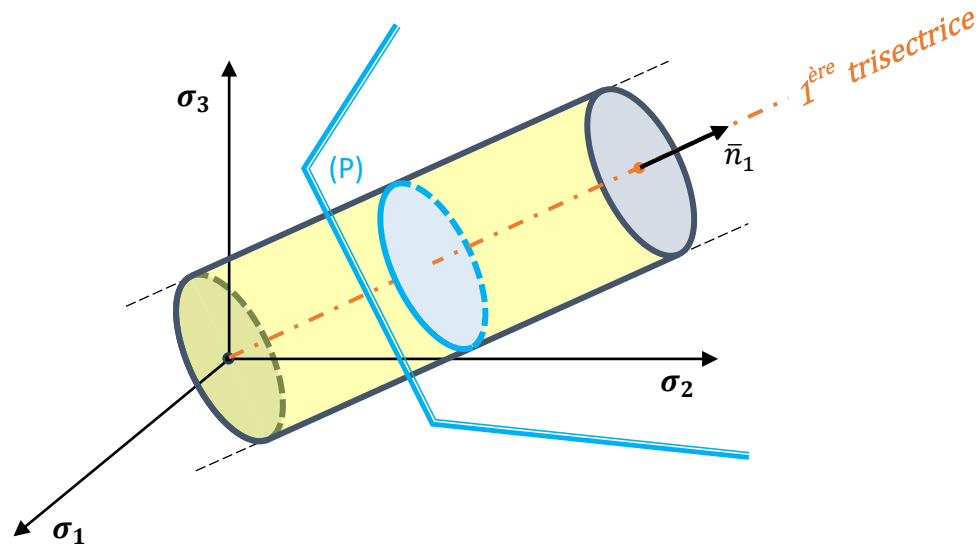
$$(1) - (2) : -3l_1 + 3m_1 = 0 \Rightarrow l_1 = m_1$$

$$(2) - (3) : -3m_1 + 3n_1 = 0 \Rightarrow m_1 = n_1$$

$$\Rightarrow l_1 = m_1 = n_1$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{Bmatrix} \quad (1^{\text{ère}} \text{ trisectrice})$$

$\Rightarrow$ La sollicitation étant cylindrique ($s_1 \neq s_2 = s_3 \neq 0$), toute direction orthogonale au plan (P) d'équation : $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et de normale $\bar{n}_1$ est également principale.



- $s_2 = -1 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (1) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (2) \\ l_2 + m_2 + n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \text{Solution indéterminée.}$$

$$\Rightarrow \text{Idem pour } s_3 = -1 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}.$$

$$\Rightarrow \text{Tout direction contenue dans le plan (P) d'équation : } x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et de normale } \bar{n}_1 \text{ est également principale.}$$

6. Tricerle de Mohr des contraintes

Le tricerle de Mohr des contraintes se réduit à un seul cercle passant par $(-1,0)$ et $(2,0)$, donc d'équation :

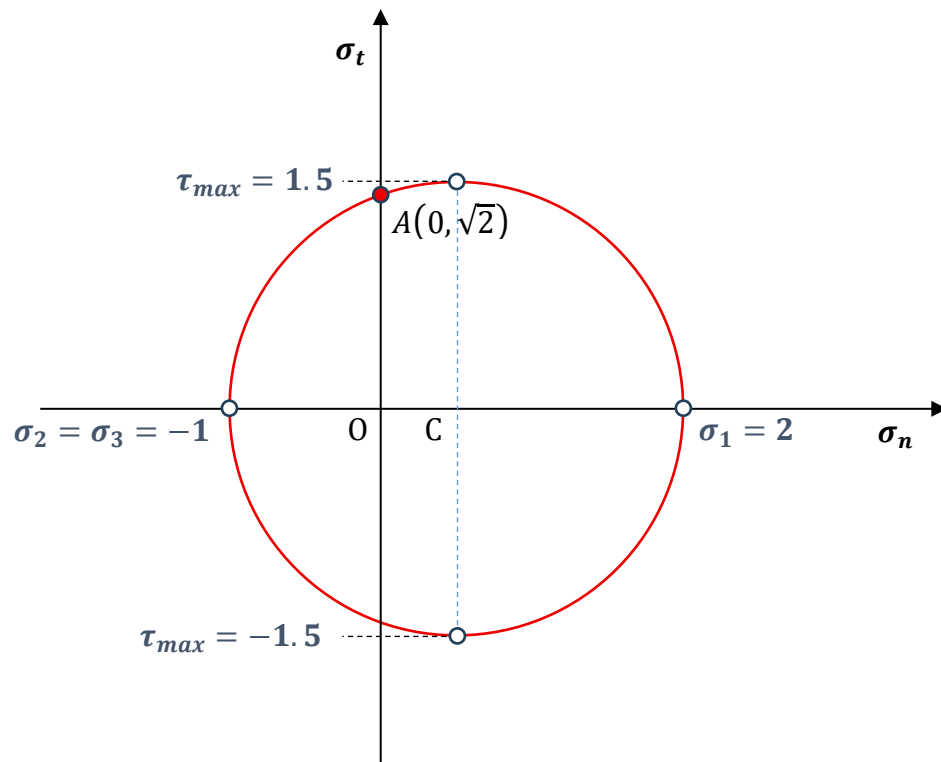
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad | \quad C \left(x_c = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}, y_c = 0 \right) \quad \& \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Les états de contraintes sont donc représentés par des points appartenant à ce cercle.

Or pour les trois directions, la composante normale de la contrainte est nulle. Ainsi, le point figuratif pour ces trois facettes est le point A de coordonnées :

- $x_A = 0$
- $y_A = y_c + \sqrt{R^2 - (x_A - x_c)^2} = 0 + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

On est donc en présence d'un cisaillement pur spatial dans le repère $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.



7. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|2 - (-1)|}{2} = 1.5 \text{ N/mm}^2$$

Ex. 5 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2),$$

où $\alpha \in [0,1]$ désigne un paramètre de chargement.

On demande de :

- Déterminer l'état des contraintes en ce point pour $\alpha = 0$? Préciser la direction de la sollicitation correspondante.
- Calculer en fonction de α les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$, ainsi que les invariants des contraintes I_1, I_2 et I_3 . Commenter avec justification les résultats trouvés en précisant le type de sollicitation correspondante.
- Pour quelle valeur de α , notée α_0 , le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, devient-t-il déviatorique ? En déduire les invariants des contraintes J_1, J_2 et J_3 correspondants.

Rép. 5

1. Etat des contraintes pour $\alpha = 0$

Pour $\alpha = 0$, le tenseur des contraintes est égal à $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$.

$\Rightarrow$ C'est un état de traction simple dont la contrainte $\sigma = 3 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$ est dirigée suivant l'axe $\bar{x}_1 = {}^t\{1,0,0\}$.

2. Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij})n_j = 0 \Rightarrow \det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha - \lambda & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 2\alpha - \lambda & 0.75\alpha \\ 0.75\alpha & \alpha - \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0.75\alpha \\ 0 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2\alpha - \lambda \\ 0 & 0.75\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)[(2\alpha - \lambda)(\alpha - \lambda) - (0.75\alpha)^2] - 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)[2\alpha^2 - 2\alpha\lambda - \alpha\lambda + \lambda^2 - (0.75\alpha)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\alpha\lambda + 1.438\alpha^2) = 0$$

$$(1): 3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$$

$$(2): \lambda^2 - 3\alpha\lambda + 1.438\alpha^2 = 0 \Rightarrow \Delta = (3\alpha)^2 - 4 \cdot 1.438\alpha^2 = 9\alpha^2 - 5.75\alpha^2 = 3.25\alpha^2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3.25\alpha^2}}{2} = 2.401\alpha \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{3\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3.25\alpha^2}}{2} = 0.599\alpha \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$$

Sachant que $\alpha \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 2.401\alpha \\ \sigma_3 = 0.599\alpha \end{cases} \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$

Remarque : On peut remarquer que (Voir « Contraintes planes ») :

$$\begin{aligned}\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 &\Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_1 \text{ est principal} \\ &\Rightarrow \sigma_{11} = 3 \times 10^2 \text{ N/mm}^2 \text{ est donc une contrainte principale.}\end{aligned}$$

Les deux autres contraintes principales peuvent donc être déterminées à partir du tenseur pseudo plan suivant :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0.75\alpha & \alpha \end{bmatrix} &\Rightarrow \sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &\Rightarrow \sigma_{\max/\min} = \frac{2\alpha + \alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\alpha - \alpha}{2}\right)^2 + (0.75\alpha)^2} \\ &\Rightarrow \sigma_{\max/\min} = 1.5\alpha \pm \sqrt{(0.5\alpha)^2 + (0.75\alpha)^2} \\ &\Rightarrow \sigma_{\max} = 1.5\alpha + 0.901\alpha = 2.401\alpha \\ &\Rightarrow \sigma_{\min} = 1.5\alpha - 0.901\alpha = 0.599\alpha\end{aligned}$$

$$\text{Soit donc pour } \alpha \in [0,1] : \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_2 = 2.401\alpha \\ \sigma_3 = 0.599\alpha \end{cases} \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2) \quad Ok.$$

3. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

$p - \text{axe principal } (= 1, 2, 3)$

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\bullet \quad \sigma_1 = 3 \times 10^2 \text{ N/mm}^2 &\rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha \end{pmatrix} - (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} (3-3)l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 \\ 0l_1 + (2\alpha-3)m_1 + 0.75\alpha n_1 = 0 \\ 0l_1 + 0.75\alpha m_1 + (\alpha-3)n_1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (1) \\ 0l_1 + (2\alpha-3)m_1 + 0.75\alpha n_1 = 0 & (2) \\ 0l_1 + 0.75\alpha m_1 + (\alpha-3)n_1 = 0 & (3) \end{cases} &\& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)\end{aligned}$$

$$(2) \& (3): m_1 = n_1 = 0$$

$$(4): l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow l_1 = 1 \quad (\text{car } \sigma_1 = 3 \times 10^2 \text{ N/mm}^2 \text{ est une traction prise conventionnellement positive})$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \quad \sigma_2 = 2.401\alpha \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha \end{pmatrix} - (2.401\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 2.401\alpha)l_2 + 0m_2 + 0n_2 = 0 \\ 0l_2 + (2\alpha - 2.401\alpha)m_2 + 0.75\alpha n_2 = 0 \\ 0l_2 + 0.75\alpha m_2 + (\alpha - 2.401\alpha)n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 2.401\alpha)l_2 = 0 & (1) \\ -0.401\alpha m_2 + 0.75\alpha n_2 = 0 & (2) \\ 0.75\alpha m_2 - 1.401\alpha n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) : l_2 = 0$$

$$(2) : m_2 = \frac{0.75}{0.401} n_2 = 1.87 n_2$$

$$(3) : \left[\left(\frac{0.75}{0.401} \right)^2 + 1 \right] n_2^2 = 1 \Rightarrow n_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{0.75}{0.401} \right)^2 + 1}} = 0.472 \Rightarrow m_2 = \frac{0.75}{0.401} \times 0.472 = 0.882$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.882 \\ 0.472 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = 0.599\alpha \text{ N/mm}^2 \quad \rightarrow \quad \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha \end{pmatrix} - (0.599\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 0.599\alpha)l_3 + 0m_3 + 0n_3 = 0 \\ 0l_3 + (2\alpha - 0.599\alpha)m_3 + 0.75\alpha n_3 = 0 \\ 0l_3 + 0.75\alpha m_3 + (\alpha - 0.599\alpha)n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 - 2.401\alpha)l_3 = 0 & (1) \\ 1.401\alpha m_3 + 0.75\alpha n_3 = 0 & (2) \\ 0.75\alpha m_3 - 0.401\alpha n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(4) : l_3 = 0$$

$$(5) : m_3 = -\frac{0.75}{1.401} n_3 = -0.535 n_3$$

$$(6) : \left[\left(-\frac{0.75}{1.401} \right)^2 + 1 \right] n_3^2 = 1 \Rightarrow n_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{0.75}{1.401} \right)^2 + 1}} = 0.882 \Rightarrow m_3 = -\frac{0.75}{1.401} \times 0.882 = -0.472$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.472 \\ 0.882 \end{pmatrix}$$

Remarque : Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$, on peut déduire $\bar{n}_3$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.882 & 0.472 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0.882 & 0.472 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.472 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.882 \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = 0\bar{e}_1 - 0.472\bar{e}_2 + 0.882\bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{0, -0.472, 0.882\} \quad Ok.$$

4. Invariants des contraintes I_1, I_2 et I_3

- $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
 $= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
 $\Rightarrow I_1 = 3 + 2\alpha + \alpha = 3(1 + \alpha)$
 $\Leftrightarrow I_1 = 3 + 2.401\alpha + 0.599\alpha = 3(1 + \alpha) \quad Ok.$
- $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$
 $= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$
 $\Rightarrow I_2 = 3 \times 2\alpha + 2\alpha \times \alpha + \alpha \times 3 - 0^2 - (0.75\alpha)^2 - 0^2 = 9\alpha + 1.438\alpha^2$
 $\Leftrightarrow I_2 = 3 \times 2.401\alpha + 2.401\alpha \times 0.599\alpha + 0.599\alpha \times 3 = 9\alpha + 1.438\alpha^2 \quad Ok.$
- $I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$
 $\Rightarrow I_3 = 3 \times 2\alpha \times \alpha - 3 \times (0.75\alpha)^2 - 2\alpha \times 0^2 - \alpha \times 0^2 + 2 \times 0 \times (0.75\alpha) \times 0 = 4.315\alpha^2$
 $\Leftrightarrow I_3 = 3 \times 2.401\alpha \times 0.599\alpha = 4.315\alpha^2 \quad Ok.$

5. Equation caractéristique

$$\begin{aligned}
 -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad 3\lambda^2 - 9\alpha\lambda + 4.391\alpha^2 - \lambda^3 + 3\alpha\lambda^2 - 1.438\alpha^2\lambda \\
 &\Rightarrow \quad -\lambda^3 + 3(1 + \alpha)\lambda^2 - (9\alpha + 1.438\alpha^2)\lambda + 4.391\alpha^2 \\
 &\Rightarrow \quad I_1 = 3(1 + \alpha) \quad Ok. \\
 &\Rightarrow \quad I_2 = 9\alpha + 1.438\alpha^2 \quad Ok. \\
 &\Rightarrow \quad I_3 = 4.391\alpha^2 \quad Ok.
 \end{aligned}$$

6. Tenseur déviatorique

- Valeur de $\alpha = \alpha_o$ pour que $\bar{\sigma}$ devienne déviatorique :
 $\bar{\sigma} = \bar{s} \Rightarrow Tr(\bar{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \equiv 0$
 $\Rightarrow Tr(\bar{\sigma}) = 3 + 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_o = -1$
- Contraintes principales correspondantes :
 - $s_1 = \sigma_1(\alpha = \alpha_o = -1) = 3 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$
 - $s_2 = \sigma_2(\alpha = \alpha_o = -1) = 2\alpha_o = 2 \times (-1) = -2.401 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$
 - $s_3 = \sigma_3(\alpha = \alpha_o = -1) = 0.599\alpha_o = 0.599 \times (-1) = -0.599 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$
- Invariants des contraintes correspondants :
 - $J_1 = I_1(\alpha = \alpha_o = -1) = 3(1 + \alpha_o) = 3(1 - 1) \equiv 0 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$
 - $J_2 = -I_2(\alpha = \alpha_o = -1) = 9\alpha_o + 1.438\alpha_o^2 = -9 + 1.438 = -7.562 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$
 - $J_3 = I_3(\alpha = \alpha_o = -1) = 4.315\alpha^2 = 4.315 = 4.315 \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2)$

Ex. 6 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \quad (daN/mm^2) .$$

On demande de :

- Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Calculer les composantes du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} correspondante.
- Déterminer le tenseur des contraintes dans le repère direct $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ défini par $\bar{x}_1 \equiv \bar{y}_1$ et $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 30^\circ$.

Rép. 6

1. Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$\text{Sachant que } (\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij})n_j = 0 \Rightarrow \det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 - \lambda & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda) \begin{vmatrix} 25 - \lambda & 0 \\ 0 & 13 - \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 13 - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$-3\sqrt{3} \begin{vmatrix} 0 & 25 - \lambda \\ -3\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (7 - \lambda)[(25 - \lambda)(13 - \lambda) - 0] - 0 - 3\sqrt{3} \times [0 + 3\sqrt{3}(25 - \lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (7 - \lambda)(25 - \lambda)(13 - \lambda) - 27(25 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (25 - \lambda)[(7 - \lambda)(13 - \lambda) - 27] = 0$$

$$\Rightarrow (25 - \lambda)[\lambda^2 - 20\lambda + 64] = 0$$

$$\Rightarrow (25 - \lambda)(4 - \lambda)(16 - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 25 \\ \sigma_2 = 16 \\ \sigma_3 = 4 \end{cases} \quad (daN/mm^2)$$

Remarque : On peut remarquer que (Voir « Contraintes planes ») :

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow \text{L'axe } \bar{x}_2 \text{ est principal}$$

$$\Rightarrow \sigma_{22} = 25 \text{ daN/mm}^2 \text{ est donc une contrainte principale.}$$

Les deux autres contraintes principales peuvent donc être déterminées à partir du tenseur pseudo plan suivant :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_{max/min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sigma_{max/min} &= \frac{7+13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7-13}{2}\right)^2 + (-3\sqrt{3})^2} \\
\Rightarrow \sigma_{max/min} &= 10 \pm \sqrt{(3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} \\
\Rightarrow \sigma_{max/min} &= 10 \pm 6 \\
\Rightarrow \sigma_{max} &= 16 \\
\Rightarrow \sigma_{min} &= 4 \\
\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 25 \\ \sigma_2 = 16 \\ \sigma_3 = 4 \end{cases} & \quad (daN/mm^2) \quad Ok.
\end{aligned}$$

2. Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

***p* – axe principal (= 1, 2, 3)**

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\sigma_1 = 25 \text{ dN/mm}^2 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} - (25) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (7 - 25)l_1 + 0m_1 - 3\sqrt{3}n_1 = 0 \\ 0l_1 + (25 - 25)m_1 + 0n_1 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_1 + 0m_1 + (13 - 25)n_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6l_1 + 0m_1 - \sqrt{3}n_1 = 0 & (1) \\ 0l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (2) \\ -\sqrt{3}l_1 + 0m_1 - 4n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) : l_1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}n_1 \\ (3) : l_1 = -\frac{4\sqrt{3}}{3}n_1 \end{cases} \Rightarrow l_1 = n_1 = 0$$

$$(4) : l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow 0l_1^2 + m_1^2 + 0n_1^2 = 1 \Rightarrow m_1 = 1$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- $\sigma_2 = 16 \text{ dN/mm}^2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} - (16) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (7-16)l_2 + 0m_2 - 3\sqrt{3}n_2 = 0 \\ 0l_2 + (25-16)m_2 + 0n_2 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_2 + 0m_2 + (13-16)n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9l_2 + 0m_2 - 3\sqrt{3}n_2 = 0 & (1) \\ 0l_2 + 9m_2 + 0n_2 = 0 & (2) \\ -3\sqrt{3}l_2 + 0m_2 - 3n_2 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \text{ ou } (3) : l_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}n_2$$

$$(2) : m_2 = 0$$

$$(4) : l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 n_2^2 + 0m_2^2 + n_2^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}n_2^2 = 1 \Rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \sigma_3 = 4 \, dN/mm^2 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix} - (4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (7-4)l_3 + 0m_3 - 3\sqrt{3}n_3 = 0 \\ 0l_3 + (25-4)m_3 + 0n_3 = 0 \\ -3\sqrt{3}l_3 + 0m_3 + (13-4)n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 + 0m_3 - \sqrt{3}n_3 = 0 & (1) \\ 0l_3 + 21m_3 + 0n_3 = 0 & (2) \\ -\sqrt{3}l_3 + 0m_3 + 3n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \text{ ou } (3) : l_3 = \sqrt{3}n_3$$

$$(2) : m_3 = 0$$

$$(4) : l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow 3n_3^2 + 0m_3^2 + n_3^2 = 1 \Rightarrow 4n_3^2 = 1 \Rightarrow n_3 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque : Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$, on peut déduire $\bar{n}_3$ directement à partir du produit vectoriel. Soit donc : $\bar{n}_3 = \bar{n}_1 \wedge \bar{n}_2$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{e}_1 + 0 \bar{e}_2 + \frac{1}{2} \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \quad Ok.$$

3. Composantes du vecteur contrainte dans la direction de la 1^{ère} bissectrice du plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \quad (daN/mm^2) \quad \& \quad \text{1^{ère} bissectrice : } \bar{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La contrainte vectorielle correspondant au tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ suivant la 1^{ère} bissectrice $\bar{n}$ est égal à :

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{3} \times 0 \\ 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 \\ -3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 13 \times 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où : } \Rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 349.5$$

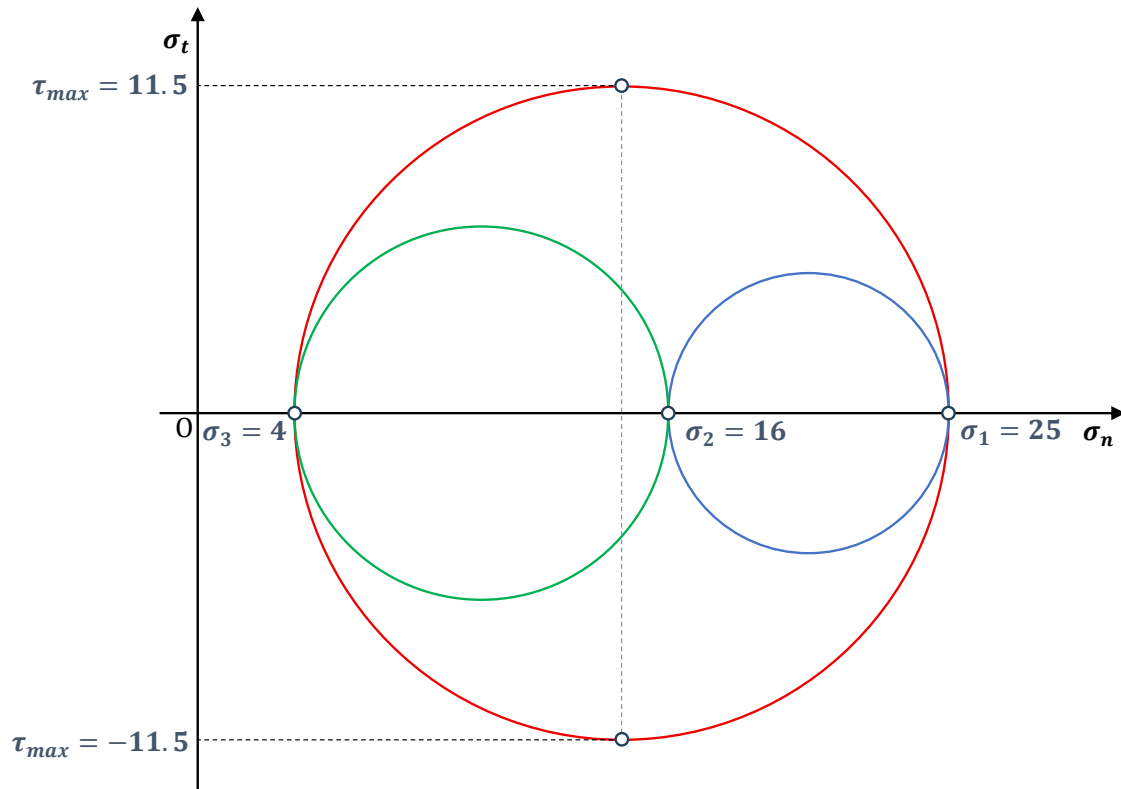
- **Contrainte normale σ_n**

$$\sigma_n = t n_i \sigma_i = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{25\sqrt{2}}{2} - 0 \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = 16 \, daN/mm^2$$

- **Contrainte tangentielle σ_t**

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{349.5 - 16^2} = 9.72 \, daN/mm^2$$

4. Tricercler de Mohr des contraintes



5. Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|25 - 4|}{2} = 11.5 \text{ N/mm}^2$$

6. Tenseur des contraintes dans le repère direct $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ défini par $\bar{x}_1 \equiv \bar{y}_1$ et $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 30^\circ$

Les vecteurs unitaires du repère direct $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ s'écrivent :

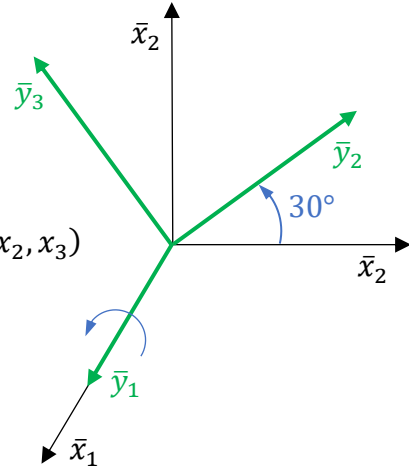
- $\bar{x}_1 \equiv \bar{y}_1 \Rightarrow \bar{y}_1 = \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \bar{x}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} / (\bar{x}_1, x_2, x_3)$

- $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 30^\circ$

$$\Rightarrow \bar{y}_2 = \begin{Bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{Bmatrix} = 0\bar{x}_1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\bar{x}_2 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\bar{x}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} / (\bar{x}_1, x_2, x_3)$$

- $\bar{y}_3 = \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0\bar{x}_1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\bar{x}_2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\bar{x}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} / (\bar{x}_1, x_2, x_3)$

$$\Leftrightarrow \bar{y}_3 = \bar{y}_1 \wedge \bar{y}_2 = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0\bar{x}_1 - \frac{1}{2}\bar{x}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} / (\bar{x}_1, x_2, x_3) \quad Ok.$$



La matrice de passage associée et sa transposée s'écrivent :

$$\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\bar{\bar{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

En utilisant la matrice de passage du repère $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ au repère $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$, le tenseur dans ce dernier repère s'écrira :

$$\bar{\sigma}' = {}^t\bar{\bar{P}}\bar{\sigma}\bar{\bar{P}} \Rightarrow \sigma'_{ij} = {}^tP_{ki}\sigma_{kl}P_{lj}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 22 & -3\sqrt{3} \\ -\frac{9}{2} & -3\sqrt{3} & 16 \end{bmatrix}$$