

FILIERE : Génie Civil

SPECIALITE : Master Géotechnique (M1/S1)

COURS : Mécanique des milieux continus

INTERROGATION N°2

(Date : 14/12/2025 – Durée : 1 heure)

En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) ,$$

où k désigne le paramètre de chargement ($k > 0$).

- Q1 (04 points). Calculer les invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Q2. (09 points). Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Q3. (03 points). Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis commenter le graphique obtenu. Déduire ensuite la contrainte de cisaillement τ_{max} correspondante.
- Q4. (04 points). Calculer les composantes normale σ_n et tangentielle σ_t du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

N.B. : Seules les notes de cours sont autorisées. Ne pas oublier d'encadrer les résultats.

Bonne chance

Prof. Mohamed KHEMISSA

Corrigé

Q1.1 Invariants des contraintes I_1, I_2 et I_3

- $I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
 $\Rightarrow I_1 = 0 + 0 + k = k$ #1
- $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2$
 $\Rightarrow I_2 = 0 \times 0 + 0 \times k + k \times 0 - (k)^2 - (0)^2 - (0)^2 = -k^2$ #1
- $I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}$
 $\Rightarrow I_3 = 0 \times 0 \times k - 0 \times 0^2 - 0 \times 0^2 - k \times k^2 + 2 \times k \times 0 \times 0 = -k^3$ #1

Q1.2 Equation caractéristique

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0 \quad \#1$$

Q2.1 Contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

On peut remarquer que $\lambda = k$ est une racine particulière de l'équation caractéristique :

$$-\lambda^3 + k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 & \lambda - k \\ \hline -\lambda^3 + k\lambda^2 & -\lambda^2 + k^2 \\ \hline 0 + k^2\lambda - k^3 & \\ k^2\lambda - k^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\lambda^3 + k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda - k)(-\lambda^2 + k^2) &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda - k)(\lambda - k)(\lambda + k) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = k \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_3 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k \\ \sigma_2 = k \\ \sigma_3 = -k \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad \begin{matrix} \#2 \\ \#2 \\ \#2 \end{matrix}$$

Remarque : On peut retrouver ces résultats par le calcul direct comme suit :

$$\text{Sachant que } (\sigma_{ij} - \sigma_i\delta_{ij})n_j = 0 \Rightarrow \det(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 - \lambda & k & 0 \\ k & 0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & k - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = k \\ \lambda_2 = k \\ \lambda_3 = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k \\ \sigma_2 = k \\ \sigma_3 = -k \end{cases} \quad (N/mm^2)$$

On peut aussi retrouver ces résultats en remarquant que : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow$ L'axe $\bar{x}_3$ est donc principal $\sigma_I = \sigma_{33} = k$ est une contrainte principale. D'où :

$$\sigma_{II/III} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} = \frac{0+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0-0}{2}\right)^2 + k^2} = \pm k$$

$$\Rightarrow \sigma_{II} = k \text{ \& } \sigma_{III} = -k \Rightarrow \begin{cases} \sigma_I = k \\ \sigma_{II} = k \\ \sigma_{III} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = k \\ \sigma_2 = k \\ \sigma_3 = -k \end{cases} \quad (N/mm^2) \quad Ok.$$

Q2.2 Directions principales $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$

$$\sigma_p \rightarrow \bar{n}_p = \begin{Bmatrix} l_p \\ m_p \\ n_p \end{Bmatrix} \mid l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\} \\ \sigma_2 \rightarrow \bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\} \\ \sigma_3 \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\} \end{cases}$$

p – axe principal (= 1, 2, 3)

Sachant que $(\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \mid \bar{n}_p = {}^t\{l_p, m_p, n_p\}$, on peut alors écrire :

- $\sigma_1 = k \rightarrow \bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0 - k)l_1 + km_1 + 0n_1 = 0 \\ kl_1 + (0 - k)m_1 + 0n_1 = 0 \\ 0l_1 + 0m_1 + (k - k)n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -l_1 + m_1 + 0n_1 = 0 & (1) \\ l_1 - m_1 + 0n_1 = 0 & (2) \\ 0l_1 + 0m_1 + 0n_1 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \& (2) : l_1 = m_1 = 0$$

$$(4) : l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \Rightarrow n_1 = 1 \quad (\sigma_{33} = \sigma_1 = k \mid k > 0) \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \#1$$

- $\sigma_3 = -k \rightarrow \bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} - (-k) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (0 + k)l_3 + km_3 + 0n_3 = 0 \\ kl_3 + (0 + k)m_3 + 0n_3 = 0 \\ 0l_3 + 0m_3 + (k + k)n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_3 + m_3 + 0n_3 = 0 & (1) \\ l_3 + m_3 + 0n_3 = 0 & (2) \\ 0l_3 + 0m_3 + 2n_3 = 0 & (3) \end{cases} \quad \& \quad l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \quad (4)$$

$$(1) \text{ ou } (2) : l_3 = -m_3$$

$$(3) : n_3 = 0$$

$$(4) : l_3^2 + (-l_3)^2 + 0^2 = 1 \Rightarrow 2l_3^2 = 1 \Rightarrow l_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \bar{n}_3 = \begin{Bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \#1$$

Remarque 1 : Connaissant $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_3$, on peut déduire $\bar{n}_2$ directement à partir du produit vectoriel.

Soit donc : $\bar{n}_2 = \bar{n}_3 \wedge \bar{n}_1$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{e}_2 + 0 \bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \#1$$

Remarque 2 : Sachant que : $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \Rightarrow$ L'axe $\bar{x}_3$ est donc principal $\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les deux autres axes s'obtiennent par rotation autour de l'axe $\bar{x}_3$. Soit donc :

$$\begin{cases} \bar{X}_1 \equiv \bar{x}_3 \\ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (\bar{x}_2, \bar{x}_3) = \text{artg}(\theta_p) \end{cases} \quad | \quad \tan(2\theta_p) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{2k}{0-0} = \frac{2k}{0} \Rightarrow 2\theta_p = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_p = \frac{\pi}{4}$$

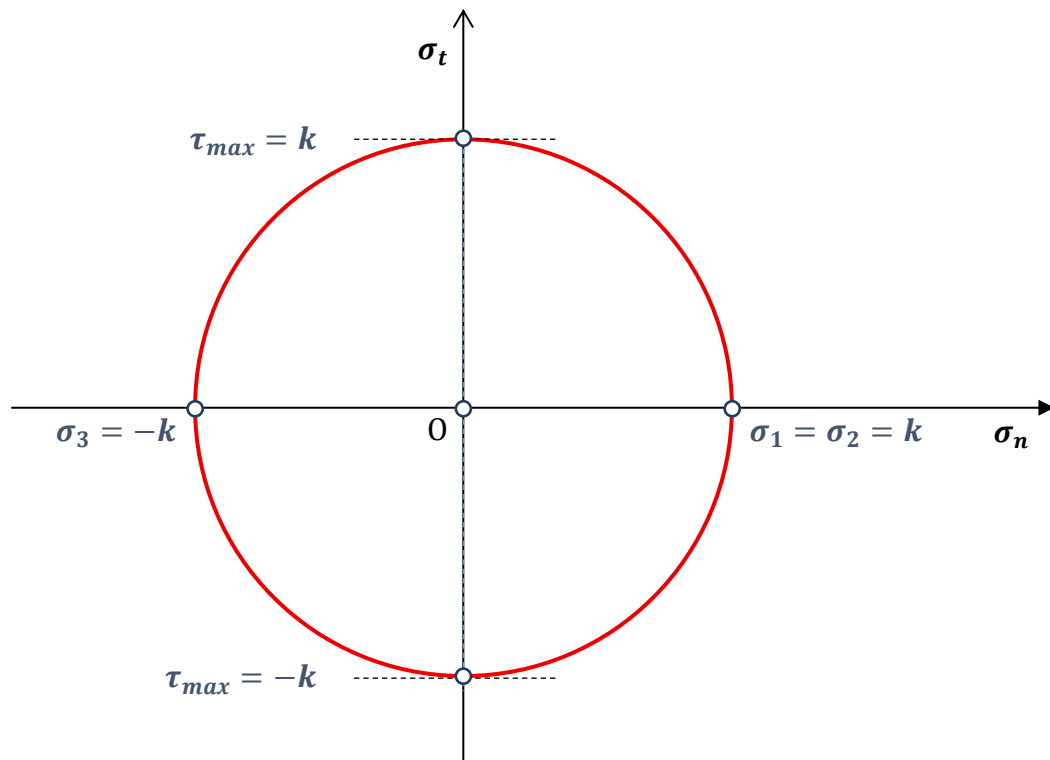
$$\text{D'où : } \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{n}_1 = 0\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \bar{e}_3 = 0\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + 1\bar{e}_3 \Rightarrow \bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Ok.$$

N.B. La sollicitation correspondante est de type : Cisaillement pur.

Q3.1 Tricercle de Mohr des contraintes



#1

Q3.2 Commentaire : Le tricercle de Mohr se réduit à un seul cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R = k$ caractéristique d'un cisaillement pur. #1

Q3.3 Contrainte de cisaillement maximale

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{|k - (-k)|}{2} = k \quad (N/mm^2) \quad \#1$$

Q4 Composantes du vecteur contrainte dans la direction de la 1^{ère} bissectrice du plan ($\bar{x}_1, \bar{x}_2$)

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) \quad \& \quad 1^{\text{ère}} \text{ bissectrice : } \bar{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La contrainte vectorielle correspondant au tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ suivant la 1^{ère} bissectrice $\bar{n}$ est égale à :

$$\sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + k \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 \\ k \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 \\ 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + k \times 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} k\right)^2 + 0^2 = k^2$$

Soit donc :

- **Contrainte normale σ_n**

$$\sigma_n = {}^t n_i \sigma_i = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ \frac{\sqrt{2}}{2} k \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} k + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} k + 0 \times 0 = k \quad (N/mm^2) \quad \text{\textcolor{red}{\#2}}$$

- **Contrainte tangentielle σ_t**

$$\sigma_t = \sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{k^2 - k^2} = 0 \quad (N/mm^2) \quad \text{\textcolor{red}{\#2}}$$