

Chapitre Quatre

Théorie de l'état des déformations

- ❑ *Description du mouvement*
- ❑ *Description des déformations*
- ❑ *Tenseur des déformations*
 - *Hypothèse des petites perturbations*
 - *Tenseur des déformations linéarisé*
 - *Décomposition polaire*
 - *Dilatations principales*
 - *Invariants du tenseur des déformations*
 - *Directions principales*
 - *Déviateur des déformations*
 - *Tricercle de Mohr des déformations*
 - *Equations de compatibilité*
- ❑ *Exemples d'états de déformations*
- ❑ *Mesure des déformations*
- ❑ *Applications typiques*
- ❑ *Exercices*



DESCRIPTION DU MOUVEMENT

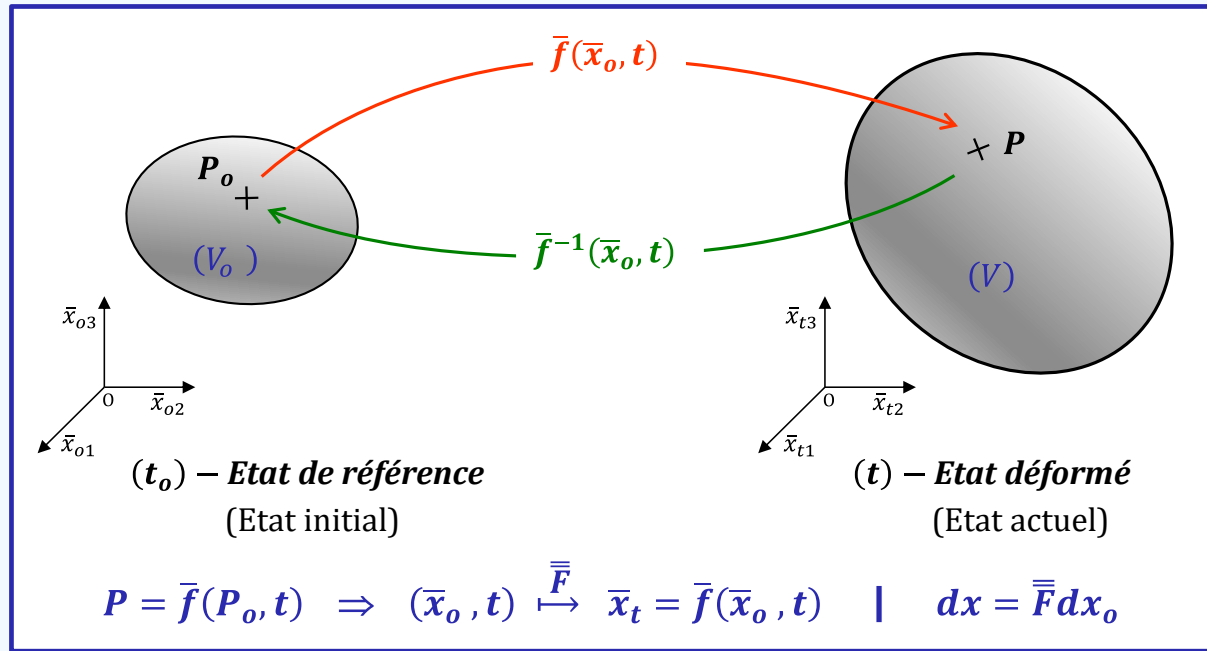
Description du mouvement

Description cinématique : Variable lagrangienne – Variable eulérienne

- $\bar{f}$: Fonction de transformation
- $\bar{f}^{-1}$: Fonction duale
- $\bar{F}$: Gradient de transformation

Propriétés :

- $\bar{f}$ est régulière
- $\bar{f}$ est bijective



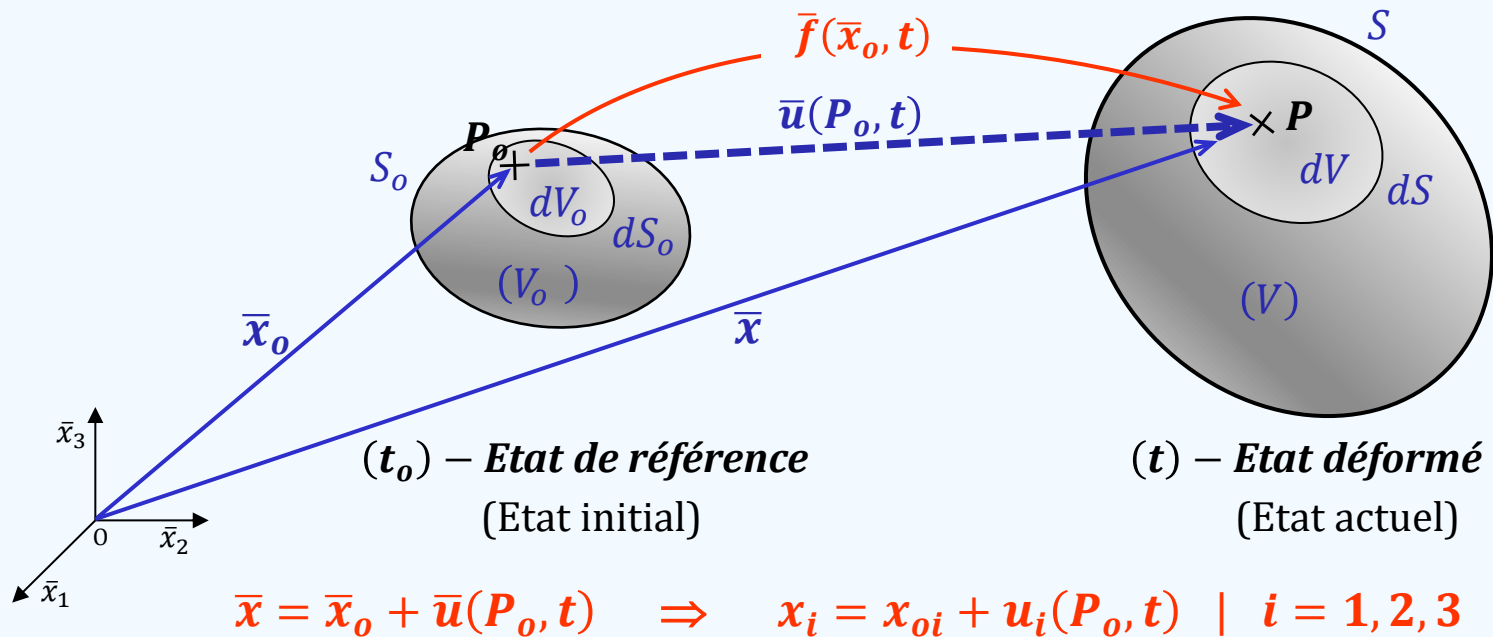
$\Rightarrow$ Au point P à l'instant t correspond un et un seul point P_o à l'instant t_o .

Description :

- Lagrangienne : $T(P_o, t) \mapsto T(P_o, t)$ ($\bar{x}_o$: Variable lagrangienne)
- Eulérienne : $\tilde{T}(P, t) \mapsto \tilde{T}(P, t) = T[\bar{F}^{-1}(P, t), t]$ ($\bar{x}_t$: Variable eulérienne)

□ Description du mouvement

- **Transport convectif :** Le transport convectif (ou transport par le mouvement) exprime que la position d'une même particule dans le repère $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ est différente dans les configurations initiale (t_o) et actuelle (t) .



La fonction vectorielle $\bar{f}(\bar{x}_o, t)$, à $\bar{x}_o$ et t fixés, explicite le transport convectif de la particule $\bar{x}_o$ entre les instants t_o et t :

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}_o, t) \Rightarrow \bar{x}_o = \bar{f}(\bar{x}_o, t_o)$$

□ Description du mouvement

- **Propriétés :** La fonction vectorielle de transport convectif $\bar{f}$ possède les propriétés suivantes :
 - $\bar{f}$, à t fixé, définit la transformation subie par le système étudié ou par une partie de celui-ci ; $\bar{x}_o$ parcourant le volume V_o occupé par le système étudié dans la configuration de référence (à t_o).
 - $\bar{f}$ est une fonction bijective : elle décrit la correspondance géométrique entre les configurations spatiales initiale et actuelle.
 - $\Rightarrow \bar{x}_o = \bar{f}(\bar{x}_o, t_o) : A \text{ un point } P \text{ de } t \text{ correspond un et un seul point } P_o \text{ de } t_o.$
 - $\bar{f}$ est continue pour l'ensemble des variables d'espace et de temps, c'est-à-dire l'application correspondante respecte la continuité de la matière : *ni cavitation, ni dislocation, ni déchirure*.
 - $\bar{f}^{-1}$ désigne la fonction duale à $\bar{f}$.

□ Description du mouvement

- **Gradient de transformation** : La transformation définie entre les instants t_0 et t est définie par le gradient de la fonction vectorielle de transport convectif $\bar{f}$ telle qu'elle s'explicite en une correspondance affine entre les coordonnées x_{oi} et x_i :

$$\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}_o, t) = \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{x}_o + \bar{a}(t) \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{F}}(0) = \bar{\bar{\delta}} \quad \text{et} \quad \bar{a}(0) = \bar{0} \quad ,$$

telle que :

$$\bar{\bar{F}}(t) = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_o, t)}{\partial \bar{x}_o} = \overline{\overline{\text{grad}}}[\bar{f}(\bar{x}_o, t)] = \bar{\bar{\nabla}} \bar{f}(\bar{x}_o, t) \quad (\text{Matrice jacobienne})$$

D'où l'on peut écrire : $x_i = F_{ij}(t)x_{oj} + a_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$
telle que :

$$F_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(\bar{x}_o, t)}{\partial x_{oj}}$$

Les composantes $F_{ij}(t)$ de cette application linéaire sont celles d'un tenseur du second ordre $\bar{\bar{F}}(t)$, appelé « **Gradient de transformation** ».

.../...

□ Description du mouvement

- **Gradient de transformation** : La transformation définie par la fonction vectorielle de transport convectif $\bar{f}$ est continue et différentiable par rapport à $\bar{x}_o$. Elle doit satisfaire la condition suivante :

$$0 \leq J(\bar{x}_o, t) = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_{o1}, x_{o2}, x_{o3})} < +\infty$$

où $J(\bar{x}_o, t)$ désigne le jacobien de la transformation.

Il apparaît qu'en tout point du milieu déformable :

$$J(\bar{x}_o, t) = J(t) = \det[\bar{\bar{F}}(t)] \neq 0$$

D'où la condition :

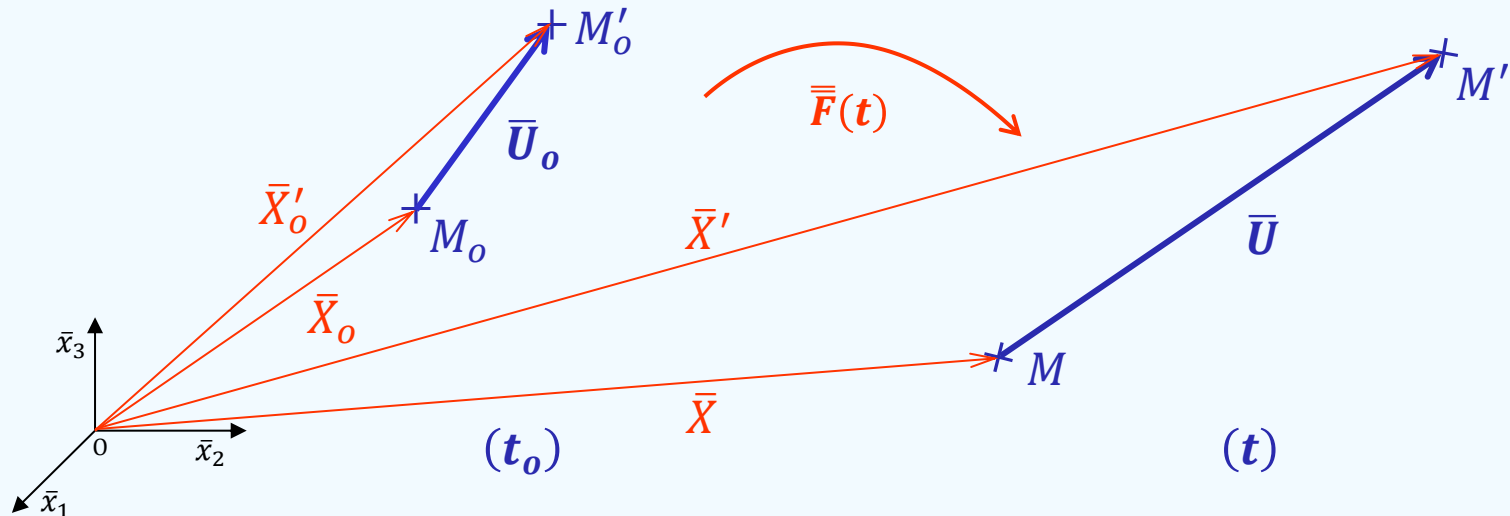
$$0 \leq \det[\bar{\bar{F}}(t)] < +\infty$$

$$\text{Sachant que : } x_i = F_{ij}(t)x_{oj} + a_i(t) \Rightarrow F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{oj}}$$

$$\text{Sachant que : } x_i = x_{oi} + u_i(\bar{x}_o, t) \Rightarrow \boxed{F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}}(\bar{x}_o, t)}$$

□ Description du mouvement

• Transformation d'un vecteur matériel :



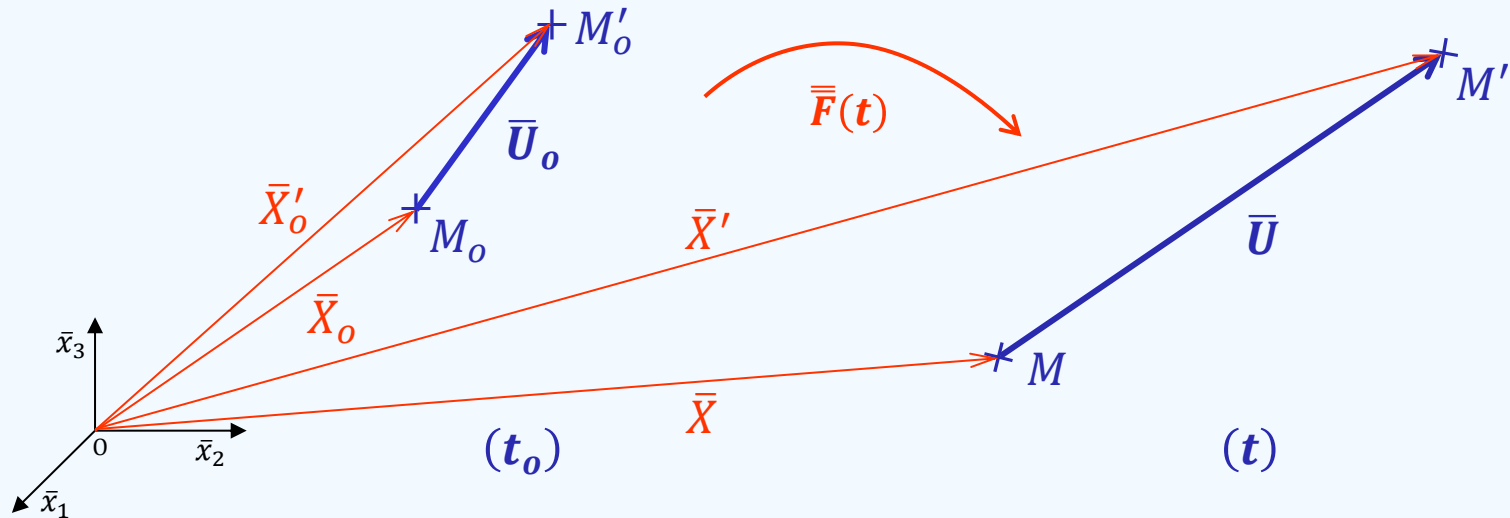
Le transport convectif dans une transformation homogène reliant les vecteurs matériels $\bar{U}$ à $\bar{U}_o$ définis dans le repère $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ s'écrit :

$$\bar{U} = \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{U}_o \quad \Leftrightarrow \quad U_i = F_{ij} U_{oj}$$

tels que : $\bar{U}_o = {}^t\{U_{01}, U_{02}, U_{03}\}$ et $\bar{U} = {}^t\{U_1, U_2, U_3\}$.

□ Description du mouvement

• Transformation d'un vecteur matériel :



Démonstration

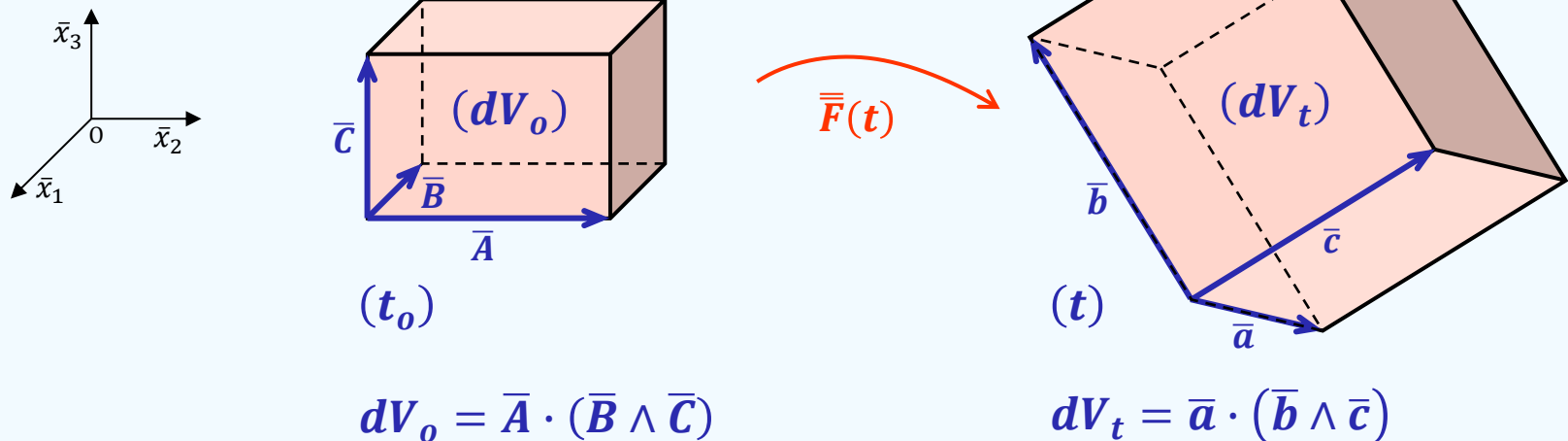
$$\text{Sachant que : } \begin{cases} \bar{U}_0 = \overline{OM'_0} - \overline{OM_0} = \bar{X}'_0 - \bar{X}_0 \\ \bar{U} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \bar{X}' - \bar{X} \end{cases} \quad | \quad \begin{cases} \bar{X} = \bar{F}(t) \cdot \bar{X}_0 + \bar{a}(t) \\ \bar{X}' = \bar{F}(t) \cdot \bar{X}'_0 + \bar{a}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \bar{X}' - \bar{X} = \bar{F}(t) \cdot \bar{X}'_0 + \cancel{\bar{a}(t)} - \bar{F}(t) \cdot \bar{X}_0 - \cancel{\bar{a}(t)} = \bar{F}(t) \cdot [\bar{X}'_0 - \bar{X}_0] = \bar{F}(t) \cdot \bar{U}_0$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \bar{F}(t) \cdot \bar{U}_0 \quad \Leftrightarrow \quad U_i = F_{ij} U_{0j}$$

□ Description du mouvement

- **Transformation d'un volume matériel :**



Le transport convectif dans une transformation homogène reliant les volumes matériels (V_0) à (V_t) s'écrit :

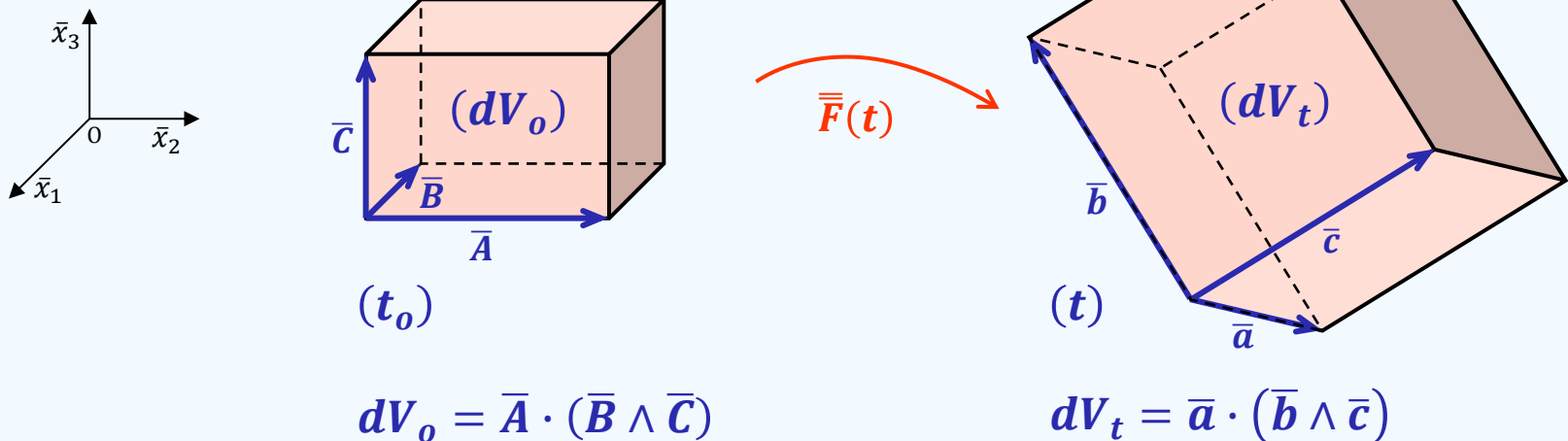
$$dV_t = dV_0 \times \det[\bar{\bar{F}}(t)] \Rightarrow J(t) = \det[\bar{\bar{F}}(t)] = \frac{dV_t}{dV_0}$$

$J(t)$ - Jacobien de la transformation

.../...

□ Description du mouvement

• Transformation d'un volume matériel :



Démonstration

- $\bar{\bar{F}}_A = \bar{A} \otimes \bar{e}_1 + \bar{B} \otimes \bar{e}_2 + \bar{C} \otimes \bar{e}_3$
- $\bar{\bar{F}}_a = \bar{a} \otimes \bar{e}_1 + \bar{b} \otimes \bar{e}_2 + \bar{c} \otimes \bar{e}_3 = \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{A} \otimes \bar{e}_1 + \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{B} \otimes \bar{e}_2 + \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{C} \otimes \bar{e}_3$
- $\Rightarrow \bar{\bar{F}}_a = \bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{\bar{F}}_A \quad \Leftrightarrow \quad (F_a)_{ij} = F_{ik} (F_A)_{kj}$
- $\Rightarrow \det[\bar{\bar{F}}_a] = \det[\bar{\bar{F}}(t)] \times \det[\bar{\bar{F}}_A] \quad \Leftrightarrow \quad dV_t = dV_o \times J(t) \quad | \quad J(t) = \det[\bar{\bar{F}}(t)]$

DESCRIPTION DES DÉFORMATIONS

□ Description des déformations

- **Position du problème :** Il s'agit de décrire la déformation du système considéré dans une transformation homogène :
 - La déformation entre les instants (t_o) et (t) retient le changement de forme, c'est-à-dire en quoi la transformation géométrique subie par le système matériel considéré entre les instants (t_o) et (t) diffère d'une isométrie directe (translation + rotation). Il est essentiel de retenir que c'est bien de la comparaison géométrique entre deux clichés, l'un choisi comme référence à (t_o) et l'autre choisi comme transformé à (t) . L'argument (t) est un paramètre et non une variable.
 - Intuitivement, la notion de déformation s'oppose à celle d'isométrie et plus précisément d'isométrie directe : il n'y a pas de déformation du système matériel dans la transformation de (t_o) à (t) si les distances entre les positions géométriques des points matériels dans ces deux configurations sont invariantes et/ou si l'orientation est conservée.
 - L'idée de déformation est donc associée à celle d'une variation des distances entre particules, c'est-à-dire une variation de forme donc de longueurs et d'angles.

□ Description des déformations

- **Décomposition polaire :** La transformation homogène caractérisée par le gradient $\bar{\bar{F}}$ de composantes $F_{ij} = \partial x_i / \partial x_{o i}$ peut être décomposée en une translation $\overline{P_o P}$ et une affinité du tenseur $\bar{\bar{F}}(t)$. Cette affinité est dite tangente à la transformation puisqu'elle n'intéresse qu'un petit voisinage de P_o et P .

Pour étudier cette affinité, procédons à la décomposition polaire de $\bar{\bar{F}}(t)$ (puisque $J(t) \neq 0$) en la relation suivante :

$$\bar{\bar{F}}(t) = \bar{\bar{R}}(t) \cdot \bar{\bar{S}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_{ij}(t) = R_{ik}(t) \times S_{kj}(t)$$

dans laquelle :

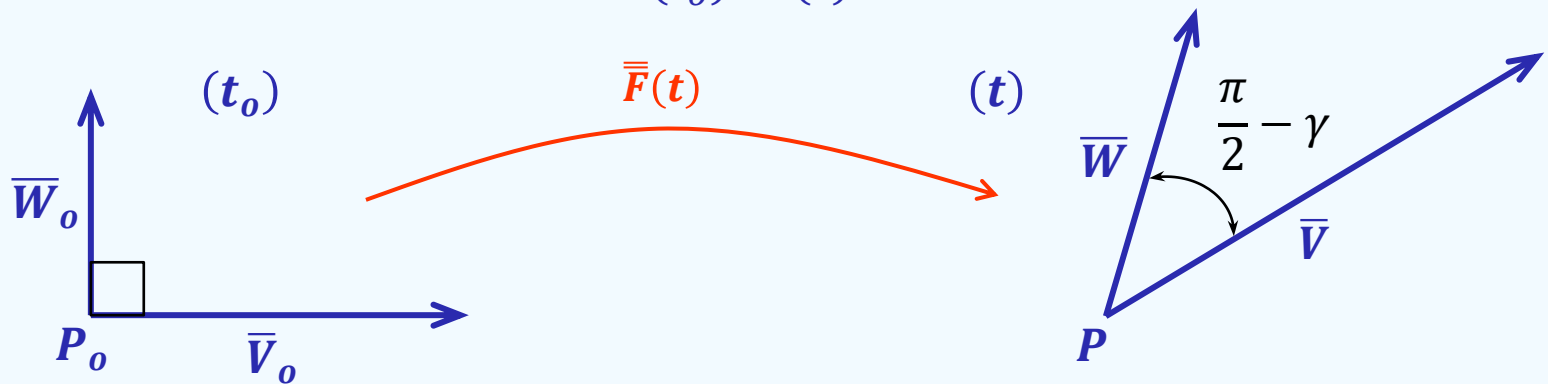
- $\bar{\bar{R}}(t)$: désigne un tenseur orthogonal associé à la rotation de l'espace euclidien « **Tenseurs des rotations** » tel que :

$$\bar{\bar{R}} = -{}^t\bar{\bar{R}} \quad (\bar{\bar{R}} - \text{antisymétrique}) \Rightarrow {}^t\bar{\bar{R}}\bar{\bar{R}} = \bar{\delta} \Rightarrow \det(\bar{\bar{R}}) = 1$$

- $\bar{\bar{S}}(t)$: désigne un tenseur symétrique associé à la déformation pure : « **Tenseur des déformations : Dilatations / Contractions** ».

□ Description des déformations

- **Tenseur des dilatations** : Pour mettre en évidence l'aspect « déformation » du système étudié, on s'intéressera à l'évolution du produit scalaire de deux vecteurs matériels considérés entre les instants (t_o) et (t) :



Le produit scalaire des vecteurs matériels $\bar{V}$ et $\bar{W}$ à l'instant (t) peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\bar{V}_o$ et $\bar{W}_o$ à l'instant (t_o) à l'aide de la relation suivante :

$$\bar{V} \cdot \bar{W} = \bar{V}_o \cdot \bar{\bar{C}}(t) \cdot \bar{W}_o$$

dans laquelle $\bar{\bar{C}}$ désigne un tenseur du second ordre, dit « **Tenseur des dilatations** » ou « **Tenseur de Cauchy** » défini par la relation suivante :

$$\bar{\bar{C}}(t) = {}^t\bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{\bar{F}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij}(t) = F_{ki}(t) \times F_{kj}(t)$$

□ Description des déformations

- **Tenseur des dilatations** : L'analyse des propriétés du tenseur symétrique associé à la déformation pure permet de définir les déformations suivantes :

➤ Dilatation dans une direction :

$$\lambda(\bar{V}_o) = \frac{|\bar{V}|}{|\bar{V}_o|} = \frac{\sqrt{\bar{V}_o \cdot \bar{C}(t) \cdot \bar{V}_o}}{|\bar{V}_o|}$$

➤ Allongement unitaire dans une direction :

$$\delta(\bar{V}_o) = \frac{|\bar{V}| - |\bar{V}_o|}{|\bar{V}_o|} = \lambda(\bar{V}_o) - 1 \quad \left| \begin{cases} \delta(\bar{V}_o) > 0 : \text{Dilatation} \\ \delta(\bar{V}_o) < 0 : \text{Contraction} \end{cases} \right.$$

➤ Glissement dans un couple de directions orthogonales :

$$\sin(\gamma) = \frac{\bar{V} \cdot \bar{W}}{|\bar{V}| \times |\bar{W}|} = \frac{\bar{V}_o \cdot \bar{C}(t) \cdot \bar{W}_o}{\sqrt{\bar{V}_o \cdot \bar{C}(t) \cdot \bar{V}_o} \sqrt{\bar{W}_o \cdot \bar{C}(t) \cdot \bar{W}_o}}$$

.../...

□ Description des déformations

- **Tenseur des dilatations** : L'analyse des propriétés du tenseur symétrique associé à la déformation pure permet de définir les déformations suivantes :

➤ **Dilatations principales** : $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

$$\bar{\bar{S}} = [S_{ij}] = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det[\bar{\bar{F}}(t)] = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{S}}^2 \Leftrightarrow C_{ij} = S_{ik} S_{kj} \quad | \quad k - \text{indice muet} \Rightarrow C_i = S_i S_i = S_i^2 \\ \Rightarrow S_i = \sqrt{C_i} = \lambda_i$$

➤ **Tenseur de dilatation pure** :

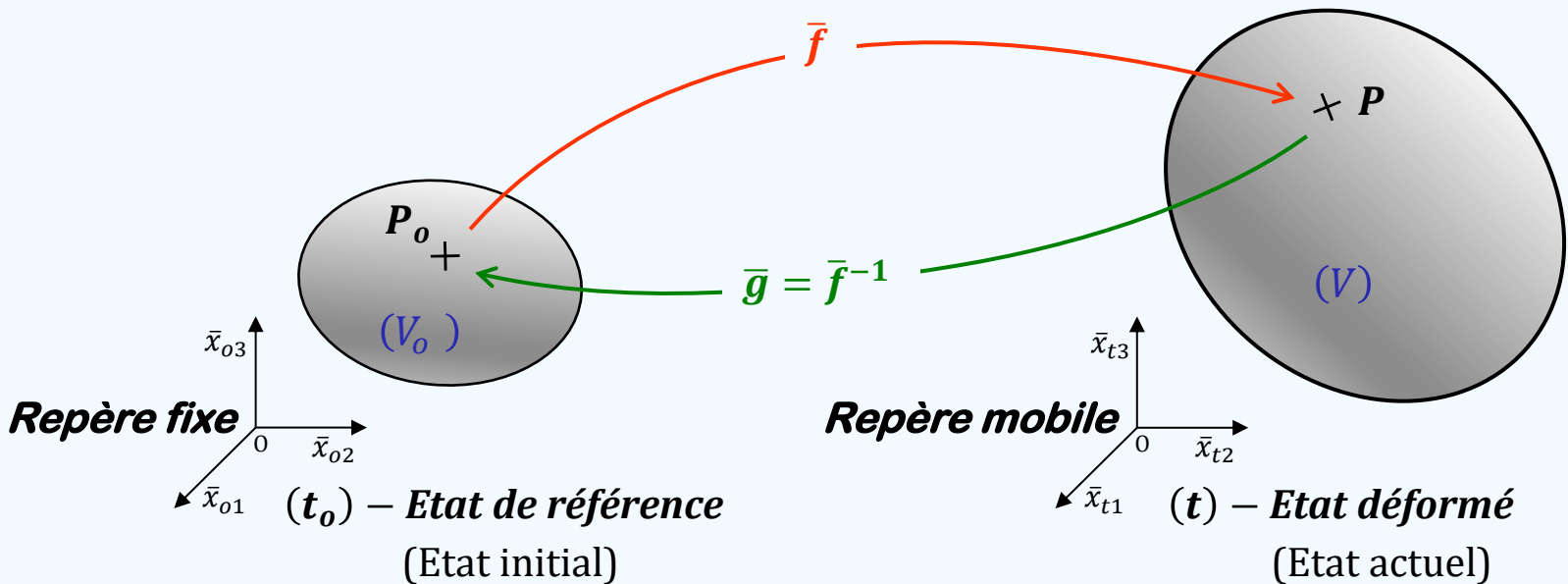
$$\bar{\bar{\Delta}}(t) = \bar{\bar{S}}(t) - \bar{\bar{\delta}} \Leftrightarrow \Delta_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij}$$

➤ **Tenseur de Cauchy simplifié** :

$$\bar{\bar{C}}_s(t) = 2\bar{\bar{\Delta}}(t) + \bar{\bar{\delta}} \Leftrightarrow (C_s)_{ij} = 2\Delta_{ij} + \delta_{ij}$$

Description des déformations

- Tenseur des contractions :** Désignons par $\bar{\bar{G}} = \bar{\bar{F}}^{-1}$ l'opérateur gradient inverse de $\bar{\bar{F}}$. La fonction vectorielle de transport convectif correspondante, notée $\bar{g} = \bar{f}^{-1}$, est donc duale à la fonction vectorielle de transport convectif $\bar{f}$.



Le tenseur des contractions est défini par la relation suivante :

$$\bar{\bar{H}}(t) = {}^t\bar{\bar{G}}(t) \cdot \bar{\bar{G}}(t) \quad \Leftrightarrow \quad H_{ij}(t) = G_{ki}(t) \times G_{kj}(t) \quad | \quad \bar{\bar{G}} = \bar{\bar{F}}^{-1}$$

□ Description des déformations

- **Tenseur des déformations de Green-Lagrange** : Les déformations subies par le système matériel considéré ne dépendent pas séparément de $\bar{x}$ et de $\bar{x}_o$, mais de leur différence seulement. Ainsi, si l'on compare le produit scalaire $\bar{V} \cdot \bar{W}$ à sa valeur dans la configuration initiale $\bar{V}_o \cdot \bar{W}_o$ (référence) en formant la différence, on obtient :

$$\bar{V} \cdot \bar{W} - \bar{V}_o \cdot \bar{W}_o = \bar{V}_o \cdot \bar{C}(t) \cdot \bar{W}_o - \bar{V}_o \cdot \bar{\delta} \cdot \bar{W}_o = \bar{V}_o \cdot [\bar{C}(t) - \bar{\delta}] \cdot \bar{W}_o$$

On définit alors un nouveau tenseur symétrique :

$$\bar{L}(t) = \frac{1}{2} [\bar{C}(t) - \bar{\delta}] \quad \Leftrightarrow \quad L_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij})$$

appelé « **Tenseur des déformations de Green-Lagrange** ».

Ainsi :

- Les termes diagonaux : $L_{ii} = \frac{1}{2} (C_{ii} - 1)$ sont appelés dilatations ($L_{ii} > 0$) ou contractions ($L_{ii} < 0$). Compte tenu du principe de conservation de la matière, on a : $L_{ii} \geq -1/2$ (une arrête du cube ne peut subir une contraction $> 1/2$).
- Les termes non diagonaux : $L_{ij} = \frac{1}{2} C_{ij} \mid i \neq j$ sont appelés distorsions.

.../...

Description des déformations

- **Tenseur des déformations de Green-Lagrange** : Les allongements unitaires et les glissements peuvent s'exprimer en fonction de $\bar{\bar{L}}(t)$. Soit donc :

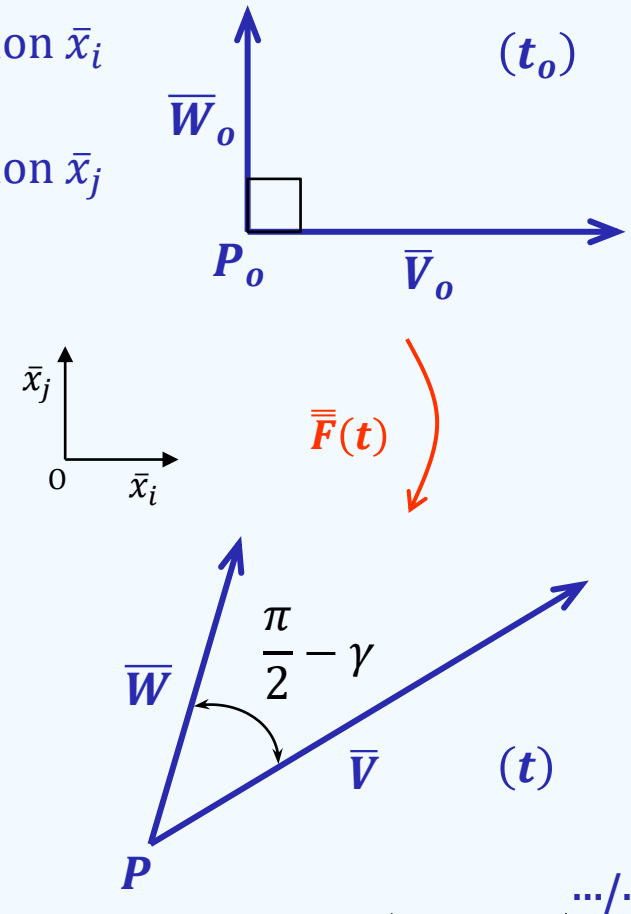
$$\blacksquare L_{ii} = \frac{1}{2}(C_{ii} - 1) \quad \Rightarrow \quad C_{ii} = 2L_{ii} + 1 \quad / \text{ Direction } \bar{x}_i$$

$$\blacksquare L_{jj} = \frac{1}{2}(C_{jj} - 1) \quad \Rightarrow \quad C_{jj} = 2L_{jj} + 1 \quad / \text{ Direction } \bar{x}_j$$

$$\blacksquare L_{ij} = \frac{1}{2}C_{ij} \quad | \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = 2L_{ij}$$

D'où alors :

$$\begin{aligned} \bar{V} : & \quad \lambda_{ii} = \sqrt{C_{ii}} = \sqrt{2L_{ii} + 1} \\ \bar{W} : & \quad \lambda_{jj} = \sqrt{C_{jj}} = \sqrt{2L_{jj} + 1} \\ (\bar{V}, \bar{W}) : & \quad \sin(\gamma_{ij}) = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}}\sqrt{C_{jj}}} = \frac{2L_{ij}}{\sqrt{2L_{ii}+1}\sqrt{2L_{jj}+1}} \end{aligned}$$



.../...

□ Description des déformations

- **Tenseur des déformations de Green-Lagrange** : Le tenseur $\bar{\bar{L}}(t)$ possède les propriétés suivantes :
 - Ce tenseur a évidemment les mêmes directions principales que le tenseur $\bar{\bar{C}}(t)$. Ses valeurs propres L_i sont appelées déformations principales et sont reliées de façon évidente à celles de $\bar{\bar{C}}(t)$ par la relation suivante :

$$L_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = \sqrt{2L_i + 1} > 0$$

tel que $\lambda_i > 0$ car le tenseur $\bar{\bar{S}}$ associé à la dilatation pure est symétrique défini positif ($\bar{\bar{S}} > 0$).

- Sachant que : $\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{\delta}})$ & $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{S}}^2$ & $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\Delta}} + \bar{\bar{\delta}}$

$$\Rightarrow \quad \bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}[(\bar{\bar{\Delta}} + \bar{\bar{\delta}})^2 - \bar{\bar{\delta}}] = \frac{1}{2}[\bar{\bar{\Delta}}^2 + 2\bar{\bar{\Delta}}\bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\delta}}^2 - \bar{\bar{\delta}}] = \bar{\bar{\Delta}} + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Delta}}^2 \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{L}} = \bar{\bar{\Delta}} + \frac{1}{2}\bar{\bar{\Delta}}^2}$$

- Les déformations de Green-Lagrange ne dépendent pas séparément de x_i et de x_{oi} , mais seulement de leur différence.

□ Description des déformations

- **Tenseur des déformations d'Almansi-Euler :** Ce tenseur est défini par la relation suivante :

$$\bar{\bar{E}}(t) = \frac{1}{2} [\bar{\bar{\delta}} - \bar{\bar{H}}(t)] \Leftrightarrow E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - H_{ij})$$

dans laquelle $\bar{\bar{H}}(t)$ désigne le tenseur des contractions :

$$\bar{\bar{H}}(t) = {}^t\bar{\bar{G}}(t) \cdot \bar{\bar{G}}(t) \Leftrightarrow H_{ij} = G_{ki} G_{kj} \quad | \quad \bar{\bar{G}} = \bar{\bar{F}}^{-1}$$

D'où la relation suivante entre le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{L}}(t)$ et celui d'Almansi-Euler $\bar{\bar{E}}(t)$:

$$\bar{\bar{L}}(t) = {}^t\bar{\bar{F}}(t) \cdot \bar{\bar{E}}(t) \cdot \bar{\bar{F}}(t) \Leftrightarrow L_{ij} = F_{ki} E_{kl} F_{lj}$$

□ Description des déformations

- **Tenseur des taux de déformation (Vitesses)** : Si l'on désigne la vitesse de transformation :

$$\bar{v}(\bar{x}_o, t) = \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}_o, t)}{\partial t} = \dot{\bar{u}}(\bar{x}_o, t) \quad ,$$

le « **tenseur des taux de déformation** » est ainsi défini par la relation suivante :

$$\bar{\bar{D}}(t) = \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{grad}}[\bar{v}(\bar{x}_o, t)] + {}^t\overline{\overline{grad}}[\bar{v}(\bar{x}_o, t)] \right] = \frac{1}{2} (\bar{\bar{V}}\dot{\bar{u}} + {}^t\bar{\bar{V}}\dot{\bar{u}})$$



$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_{oj}} + \frac{\partial v_j}{\partial x_{oi}} \right) = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

Propriétés : $\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \left[\dot{\bar{\bar{F}}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} + {}^t \left(\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}}^{-1} \right) \right] \quad | \quad \dot{\bar{\bar{F}}} = \frac{\partial \bar{\bar{F}}}{\partial t}$

Remarque : $\dot{\bar{\bar{L}}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}} \quad \& \quad \bar{\bar{D}} \neq \bar{\bar{L}}$

□ Description des déformations

- **Gradient du déplacement :** Il est commode d'introduire le déplacement $\bar{u}$ de la particule du milieu matériel considéré entre les configurations initiale (P_o à t_o) et actuelle (P à t). Ce vecteur déplacement s'obtient par :

$$\bar{u}(\bar{x}_o, t) = \overline{P_o P} = \bar{x} - \bar{x}_o \Leftrightarrow u_i = x_i - x_o \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_o + \bar{u}(\bar{x}_o, t)$$

On a ainsi un champ de vecteurs défini sur la configuration de référence. D'où :

$$\bar{\bar{F}}(t) = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x}_o, t)}{\partial \bar{x}_o} = \overline{\overline{grad}}[\bar{f}(\bar{x}_o, t)] = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}_o} = \partial_i \bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{F}}(t) = \bar{\bar{\delta}} + \overline{\overline{grad}}[\bar{u}(\bar{x}_o, t)] = \bar{\bar{\delta}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_o} \Leftrightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \partial_j u_i$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{grad}}[\bar{u}(\bar{x}_o, t)] = \partial_j u_i \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \partial_2 u_1 & \partial_3 u_1 \\ \partial_1 u_2 & \partial_2 u_2 & \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 & \partial_2 u_3 & \partial_3 u_3 \end{pmatrix}$$

Nota : L'emploi du déplacement de préférence à l'emplacement s'avère spécialement avantageux dans l'étude de la transformation infinitésimale des milieux continus déformables.

□ Description des déformations

- **Gradient du déplacement** : On en déduit les expressions suivantes :

➤ Tenseur des dilatations :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{\delta}} + \overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u}) \cdot \overline{\text{grad}}(\bar{u})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$C_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{oi}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{oi}} \frac{\partial u_k}{\partial x_{oj}}$$

➤ Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u}) \cdot \overline{\text{grad}}(\bar{u})]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{oi}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_{oi}} \frac{\partial u_k}{\partial x_{oj}} \right]$$

TENSEUR DES DÉFORMATIONS

□ Tenseur des déformations

- **Hypothèse des petites perturbations (HPP) :** S'agissant des solides, on peut remarquer que dans de nombreux cas, la déformation s'accompagne de petits déplacements et, qu'en conséquence, l'expression du tenseur des déformations de Green-Lagrange peut être simplifié. On notera que la définition adoptée pour les petits déplacements entraîne obligatoirement que les déformations subies sont également petites. On a ainsi :

Petits déplacements $\Rightarrow$ Petites déformations

(Les petites déformations sont donc un cas particulier des petits déplacements)

On a ainsi :

Grandes déformations $\Rightarrow$ Grands déplacements

(Problèmes d'instabilité des structures)

Par contre :

Grands déplacements $\nRightarrow$ Grandes déformations

(Un solide rigide peut subir un déplacement quelconque sans se déformer)

De même :

Petites déformations $\nRightarrow$ Petits déplacements

(Cas des solides élancés : Barres minces, Tiges, Plaques, Coques)

□ Tenseur des déformations

- **Décomposition polaire du gradient de transformation** : Sachant que le gradient de transformation affine peut s'écrire :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\delta}} + \overline{\text{grad}}(\bar{u}) = \bar{\bar{R}} \cdot \bar{\bar{S}}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\delta}} + \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] + \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) - {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})]$$

Posons :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) + {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \bar{\bar{\omega}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) - {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}}}$$

tels que :

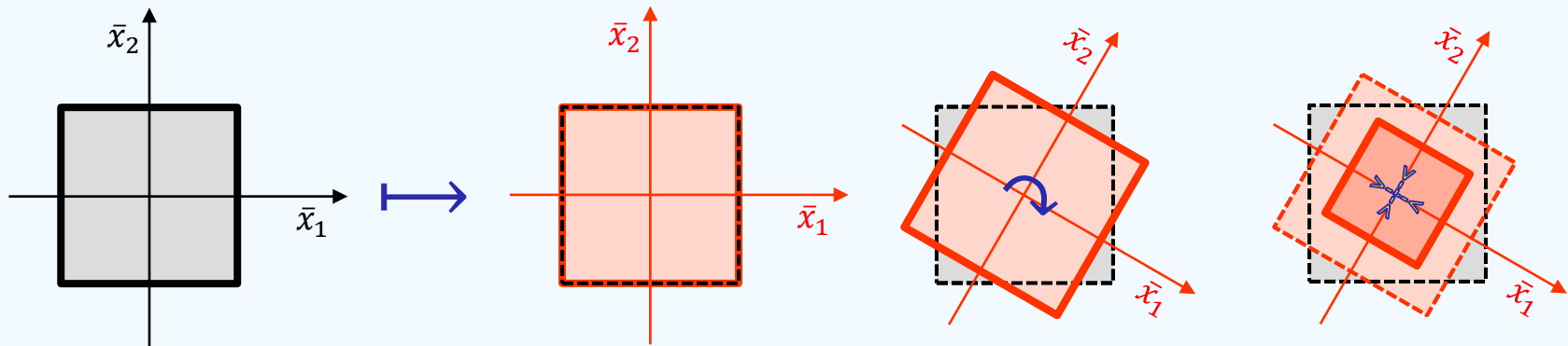
- $\bar{\bar{\varepsilon}}$: désigne le **Tenseur des déformations linéarisé** (Partie symétrique du gradient de transformation rattachée à la déformation $\bar{\bar{S}}$ de sorte que : $\bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\varepsilon}}$).
- $\bar{\bar{\omega}}$: désigne le **Tenseur des rotations** (Partie antisymétrique du gradient de transformation rattachée à la rotation $\bar{\bar{R}}$ de sorte que : $\bar{\bar{R}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\omega}}$).

.../...

□ Tenseur des déformations

- **Décomposition polaire du gradient de transformation** : Le gradient de transformation affine est ainsi composé d'une translation ($\bar{\bar{\delta}}$), d'une rotation ($\bar{\bar{\omega}}$) et d'une déformation ($\bar{\bar{\epsilon}}$) :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\delta}} + \bar{\bar{\omega}} + \bar{\bar{\epsilon}}$$



$$\text{Etat de référence} = \text{Translation } (\bar{\bar{\delta}}) + \text{Rotation } (\bar{\bar{\omega}}) + \text{Déformation } (\bar{\bar{\epsilon}})$$

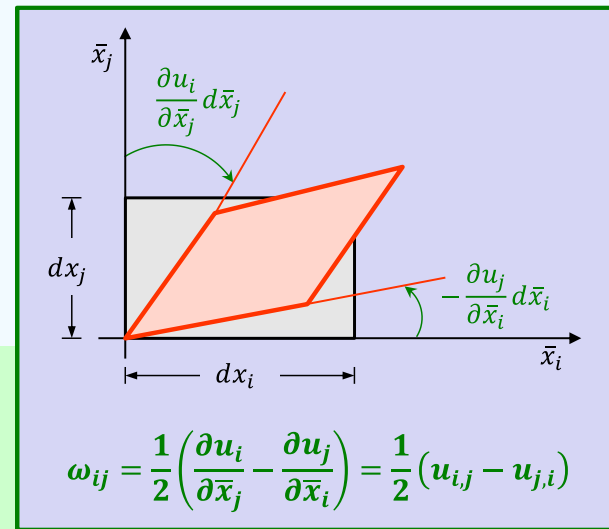
Nota : Dans le cas des petits déplacements, on peut remarquer que les translations, rotations et déformations peuvent se composer dans un ordre quelconque pour donner le déplacement dans le voisinage d'un point à la configuration de référence.

□ Tenseur des déformations

- **Tenseur des rotations :** Il lui est associé un pseudo-vecteur rotation appelé « vecteur polaire » ou « vecteur axial » défini comme suit :

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}}(\bar{u}) - {}^t\overline{\text{grad}}(\bar{u})] \Rightarrow \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}}(\bar{u})$$

$$\Rightarrow \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$



Vérification : $\bar{\omega} \cdot \bar{h} = \tilde{\omega} \wedge \bar{h}$

où $\bar{h} = {}^t\{h_1, h_2, h_3\}$ désigne un vecteur unitaire quelconque.

$$\Rightarrow \bar{\omega} \cdot \bar{h} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_{11}h_1 + \omega_{12}h_2 + \omega_{13}h_3 \\ \omega_{21}h_1 + \omega_{22}h_2 + \omega_{23}h_3 \\ \omega_{31}h_1 + \omega_{32}h_2 + \omega_{33}h_3 \end{Bmatrix} = \tilde{\omega} \wedge \bar{h} = \begin{Bmatrix} qh_3 - rh_2 \\ -ph_3 + rh_1 \\ ph_2 - qh_1 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{11} = 0 \\ \omega_{12} = -r \\ \omega_{13} = q \end{cases} ; \begin{cases} \omega_{21} = r \\ \omega_{22} = 0 \\ \omega_{23} = -p \end{cases} ; \begin{cases} \omega_{31} = -q \\ \omega_{32} = p \\ \omega_{33} = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad Ok.$$

□ Tenseur des déformations

- **Tenseur des déformations linéarisé :** On dit que le milieu matériel subit de petits déplacements entre P_o et P lorsque sa transformation est infinitésimale, c'est-à-dire lorsque :

$$\|\overline{\overline{grad}}[\bar{u}(\bar{x}_o, t)]\| = \left\| \frac{\partial \bar{u}(\bar{x}_o, t)}{\partial \bar{x}_o} \right\| \ll 1 \quad \forall P_o$$

Dans ces conditions, le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{e}}(t)$ se réduit au tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}(t)$ tel que :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varepsilon}}(t) &= \frac{1}{2} \left[\overline{\overline{grad}}[\bar{u}(\bar{x}_o, t)] + {}^t\overline{\overline{grad}}[\bar{u}(\bar{x}_o, t)] \right] \\ &\quad \Updownarrow \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{oi}} \right] = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{aligned}$$

Celui-ci apparait comme la partie symétrique du gradient du déplacement. Il est en particulier utilisé dans les problèmes usuels d'élasticité.

.../...

□ Tenseur des déformations

- **Tenseur des déformations linéarisé :** Le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\epsilon}$ est symétrique. Dans le repère général de coordonnées, il s'écrit :

$$\bar{\epsilon} = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

tels que :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} + \frac{\partial u_j}{\partial x_{oi}} \right] \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$

Soit donc :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &(Dilatations \\ &\text{ou} \\ &Contractions) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{12} \\ \epsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \gamma_{13} \end{aligned} \right\} (Distorsions)$$

.../...

□ Tenseur des déformations

- **Tenseur des déformations linéarisé :** Le tenseur des déformations linéarisé, défini dans le repère courant $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, est symétrique. On peut alors trouver un repère orthonormé $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, appelé repère principal, dans lequel ce tenseur est diagonal et les composantes $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes sont appelées dilatations principales.

➤ **Tenseur des déformations défini dans le repère courant $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:**

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \varepsilon_{ij} n_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$

➤ **Tenseur des déformations défini dans le repère principal $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$:**

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \varepsilon_i \delta_{ij} n_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$

Il en résulte que le glissement suivant un plan principal $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$, $(\bar{X}_2, \bar{X}_3)$ ou $(\bar{X}_1, \bar{X}_3)$ est nul. La dilatation (ou contraction) principale vectorielle correspondante est donc normale au plan principal sur lequel elle s'exerce.

□ Tenseur des déformations

- **Déformations principales :** Dans le repère de coordonnées pris suivant les directions principales (repère principal), le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\epsilon}}$ s'écrit en fonction de ses trois valeurs propres $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} / (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

Les trois déformations principales ($\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$) sont solutions du polynôme caractéristique :

$$\det(\epsilon_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} - \lambda & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} - \lambda & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

⇒ Le développement de ce déterminant fournit une équation du 3^{ème} degré en λ qui s'appelle : équation caractéristique du tenseur ϵ_{ij} . Elle s'écrit :

$$-\lambda^3 + E_1 \lambda^2 - E_2 \lambda + E_3 = 0$$

où E_1, E_2 et E_3 désignent les invariants du tenseur des déformations linéarisé.

□ Tenseur des déformations

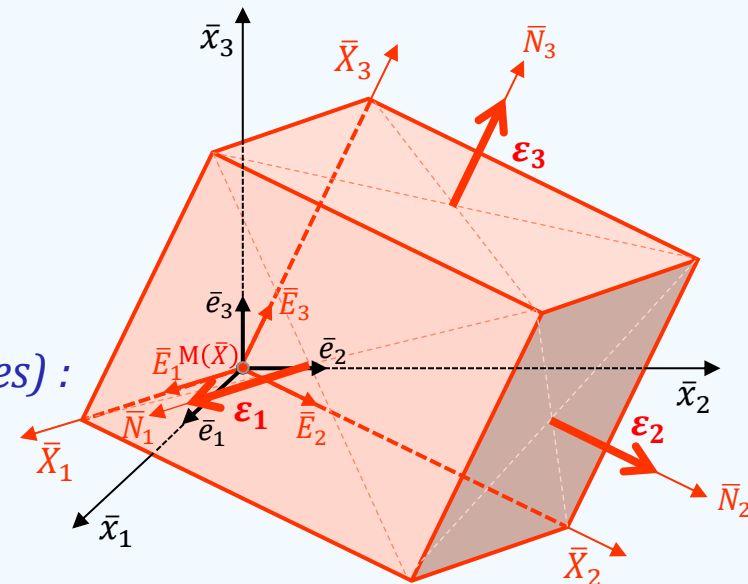
- **Déformations principales :** Comme ces déformations existent réellement, les 3 racines de l'équation caractéristique sont obligatoirement réelles. Appelons-les :

- ε_1 : Déformation principale majeure
- ε_2 : Déformation principale intermédiaire
- ε_3 : Déformation principale mineure

telles que : $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Etats de déformations particulières :

- *Dilatation ou Contraction simples (ou uniaxiales) :*
 $\varepsilon_1 \neq 0$ & $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$
- *Glissement simple :*
 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ & $\varepsilon_3 = 0$
- *Dilatation ou Contraction cylindriques (ou triaxiales de révolution) :*
 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$
- *Dilatation ou Contraction sphériques (ou triples ou isotropes) :*
 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$



□ Tenseur des déformations

- **Invariants du tenseur des déformations :** Les 3 coefficients E_1 , E_2 et E_3 de l'équation caractéristique, appelés invariants du tenseur des déformations $\bar{\epsilon}$, doivent garder une valeur constante quand on fait tourner le trièdre autour de l'origine des axes dans lequel il est défini. Ces trois invariants s'expriment ci-après en fonction des déformations courantes et en fonction des déformations principales :

➤ 1^{er} invariant E_1 :

$$\begin{aligned} E_1 = \epsilon_{ii} &\Rightarrow E_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

➤ 2^{ème} invariant E_2 :

$$\begin{aligned} E_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} - \epsilon_{ij}\epsilon_{ij}) &\Rightarrow E_2 = \epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{33}\epsilon_{11} - \epsilon_{12}^2 - \epsilon_{23}^2 - \epsilon_{13}^2 \\ &= \epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_1\epsilon_3 \end{aligned}$$

➤ 3^{ème} invariant E_3 :

$$\begin{aligned} E_3 = |\epsilon_{ij}| &\Rightarrow E_3 = \epsilon_{11}\epsilon_{22}\epsilon_{33} - \epsilon_{11}\epsilon_{23}^2 - \epsilon_{22}\epsilon_{13}^2 - \epsilon_{33}\epsilon_{12}^2 + 2\epsilon_{12}\epsilon_{23}\epsilon_{13} \\ &= \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \end{aligned}$$

□ Tenseur des déformations

- **Directions principales :** En remplaçant la déformation considérée $\varepsilon_i = \varepsilon_p$ par l'une des 3 déformations principales $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ou ε_3 dans la relation suivante :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_i \delta_{ij})n_i = 0 \quad | \quad i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad ,$$

on déduit un système de trois équations homogènes qui permet de déterminer les trois coordonnées de la direction n_p normale à la facette principale p , c'est-à-dire ses cosinus directeurs, notés ${}^t\{l_p, m_p, n_p\}$ à un facteur près. Ce facteur se détermine par la condition : $n_p n_p = l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1$. On obtient ainsi les 3 cosinus directeurs de la direction principale p considérée. Soit donc :

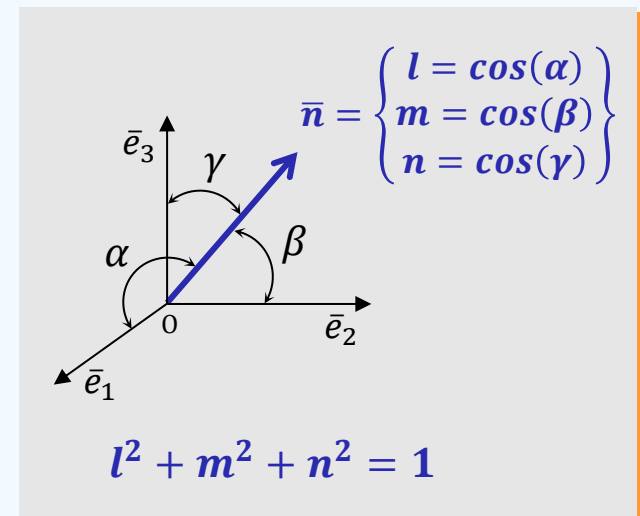
$$\begin{cases} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_p)l_p + \varepsilon_{12}m_p + \varepsilon_{13}n_p = 0 \\ \varepsilon_{12}l_p + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_p)m_p + \varepsilon_{23}n_p = 0 \\ \varepsilon_{13}l_p + \varepsilon_{23}m_p + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_p)n_p = 0 \end{cases}$$

avec la condition : $l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \quad | \quad p = 1,2,3$

D'où : $\bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$ associée à ε_1

$\bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$ associée à ε_2

$\bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$ associée à ε_3



□ Tenseur des déformations

- **Déviateur des déformations** : Il est souvent utile, notamment, dans les problèmes de mécanique des matériaux, en général, et de mécanique des sols, en particulier, de savoir décomposer la déformation en distinguant entre :
 - **Déformation sphérique** (sans distorsion, mais avec variation de volume),
 - **Déformation déviatorique** (sans variation de volume, mais avec distorsion).

On peut donc décomposer le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\epsilon}$ en deux tenseurs, l'un sphérique $\bar{\epsilon}^s$ et l'autre déviatorique $\bar{\epsilon}^d$:

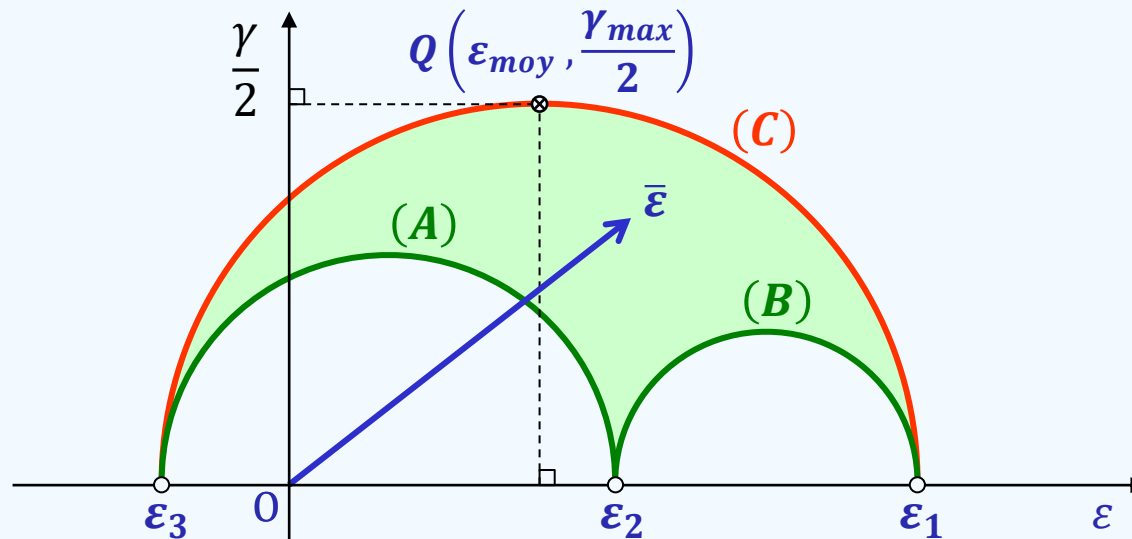
$$\bar{\epsilon}(t) = \bar{\epsilon}^s(t) + \bar{\epsilon}^d(t)$$

avec :

$$\begin{cases} \epsilon_{ij}^s = \frac{1}{3} E_1 \delta_{ij} = \frac{1}{3} \epsilon_v \delta_{ij} & | \quad \epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \text{ (Déformation volumique)} \\ Tr(\epsilon_{ij}^d) \equiv 0 \end{cases}$$

□ Tenseur des déformations

- **Tricerclle de Mohr des déformations :** Par analogie avec le tricerclle de Mohr des contraintes, on peut évidemment dessiner le tricerclle de Mohr des déformations représenté dans le plan $(\gamma/2 - \epsilon)$.



Ce tricerclle de Mohr permet de trouver la valeur de la distorsion maximale et sa direction. Sur la figure ci-dessus, on voit qu'elles correspondent au point Q en lequel :

- $\epsilon_{moy} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{2}$ (Dilatation ou Contraction moyenne)
- $\gamma_{max} = |\gamma_{13}| = |\epsilon_1 - \epsilon_3|$ (Distorsion maximale)

□ Tenseur des déformations

- **Equations de compatibilité des déformations :** La symétrie du tenseur des déformations n'est pas suffisante pour limiter ses propriétés. L'hypothèse de continuité du milieu déformable entraîne des limitations supplémentaires qui concernent la variation dans le milieu du champ des déformations. Il n'est donc pas possible d'imposer à un solide déformable des déformations arbitraires sans détruire la cohésion de la matière (vides ou recouvrements). Pour que cette cohésion soit respectée, il faut que le champ des déformations dérive d'un champ de déplacements qui doit vérifier l'équation de compatibilité des déformations suivante :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \quad | \quad i, j, k, l = 1, 2, 3$$

Cette équation représente 6 équations indépendantes devant être satisfaites en tout point du milieu afin de vérifier la continuité des déformations.

Propriété de continuité de la matière : En tout point du milieu continu déformable, on peut affirmer que : « *Pour un déplacement donné, il y a une et une seule déformation. De même, pour une déformation donnée correspond un et un seul déplacement* ».

□ Tenseur des déformations

- **Equations de compatibilité des déformations :** Le développement de l'équation de compatibilité des déformations fournit les 6 équations indépendantes suivantes :

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (1)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(+\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (2)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(+\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (3)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \right) \quad (4)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} \right) \quad (5)$$

$$\blacksquare \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} \right) \quad (6)$$

EXEMPLES D'ÉTATS DE DÉFORMATIONS

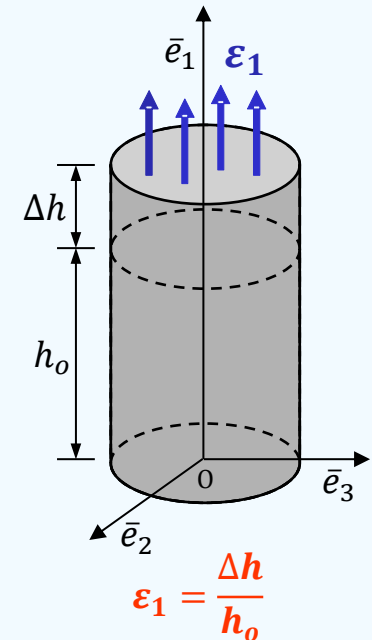
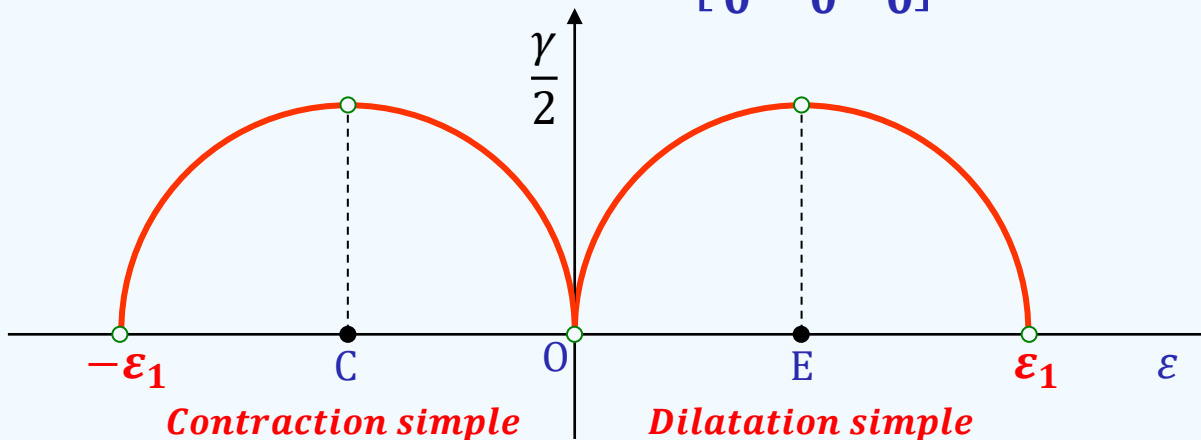
□ Exemples d'états de déformations

- **Dilatation ou Contraction simples** : C'est l'état de déformation subie en tout point d'une éprouvette lors d'essais de traction ou de compression simples. Deux déformations principales sont nulles, par exemple :

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$

⇒ Le vecteur déplacement $\bar{u} = (\Delta l)\bar{e}_1$ sur toute la facette est dirigé selon la direction principale $\bar{e}_1$. Le tenseur des déformations correspondant est alors dit uniaxial et s'écrit :

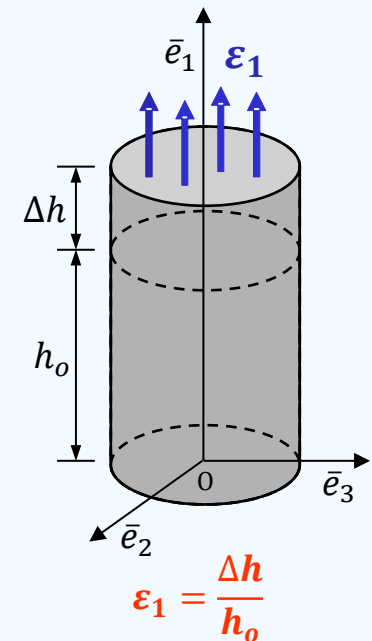
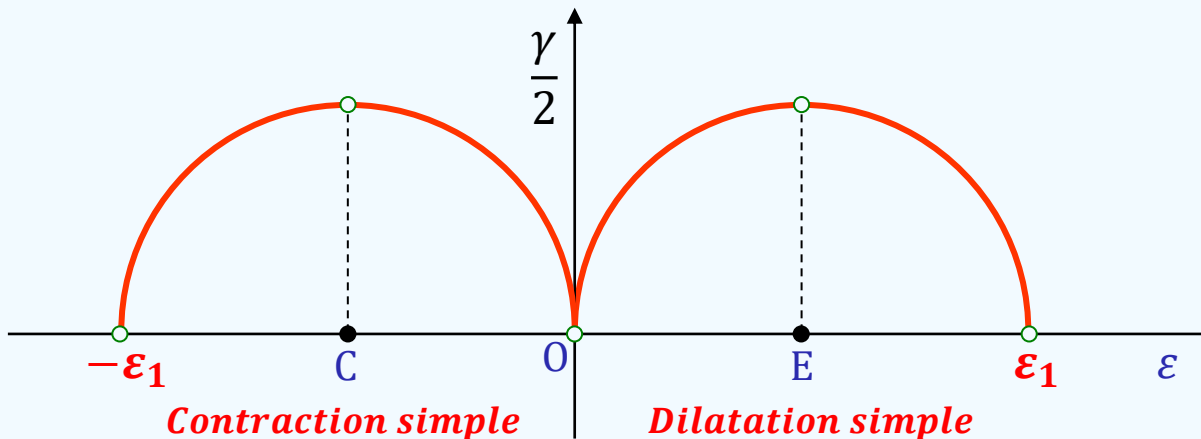
$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \varepsilon_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



Exemples d'états de déformations

- Dilatation ou Contraction simples :** C'est l'état de déformation subie en tout point d'une éprouvette lors d'essais de traction ou de compression simples. Deux déformations principales sont nulles, par exemple :

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$$



Convention de la MMC : $\varepsilon_1 > 0$ (Dilatation simple) & $\varepsilon_1 < 0$ (Contraction simple)

⇒ Les distorsions maximales sont $\gamma_{max} = \pm \varepsilon_1/2$ et sont obtenues pour les facettes inclinées à $\pi/4$ sur les génératrices du cylindre. Sur une facette parallèle à celle-ci, aucune déformation vectorielle ne s'y exerce.

□ Exemples d'états de déformations

- **Dilatation ou Contraction simples** : On donne ci-après quelques exemples d'états de déformations uniaxiales en laboratoire lors d'essais de traction ou de compression simples :



Essai de traction simple sur acier



Essai de compression simple sur béton



Essai de compression simple sur sol

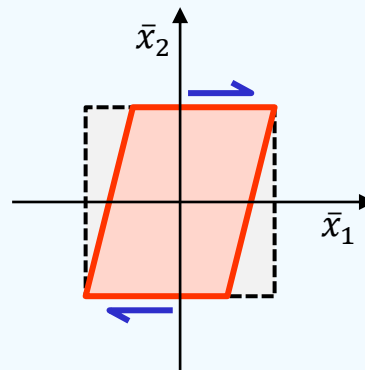
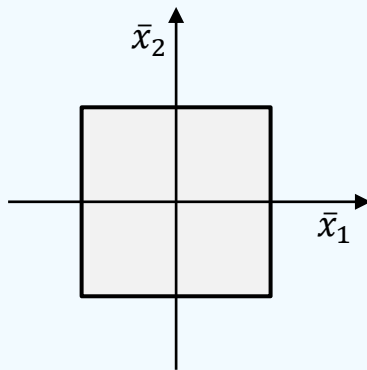
Exemples d'états de déformations

- Glissement simple :** L'état de déformation est dit glissement simple, noté g , si et seulement si l'un des allongements ou raccourcissements principaux est nul et les deux autres opposées :

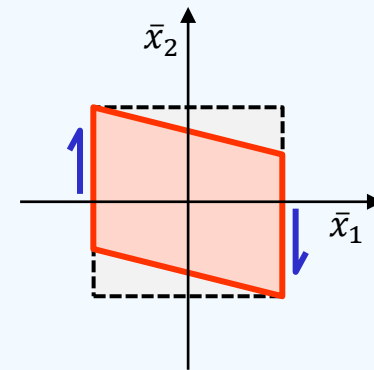
$$g = \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 = 0$$

Sa matrice représentative peut s'écrire :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



Glissement horizontal



Glissement vertical

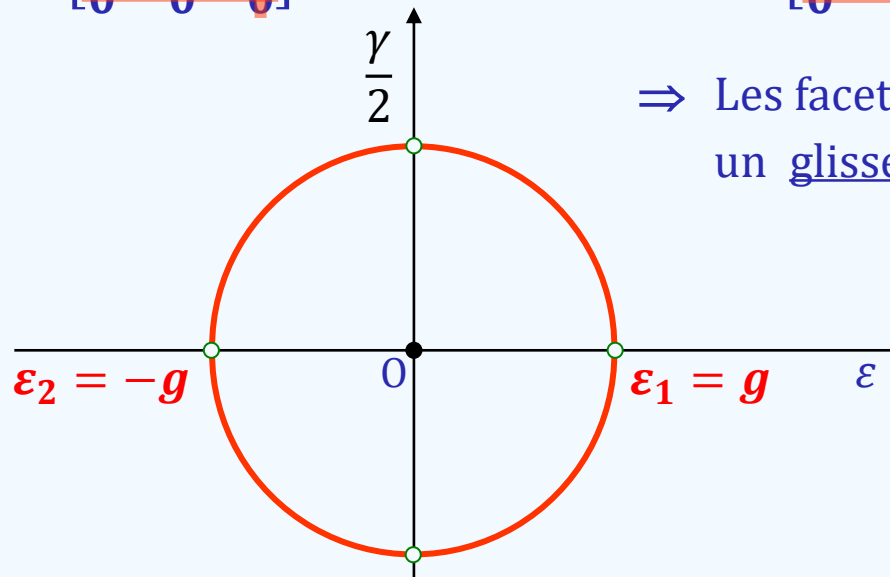
Exemples d'états de déformations

- Glissement simple :** L'état de déformation est dit glissement simple, noté g , si et seulement si l'un des allongements ou raccourcissements principaux est nul et les deux autres opposées :

$$g = \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \neq \varepsilon_3 = 0$$

Sa matrice représentative peut s'écrire :

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



$\Rightarrow$ Les facettes à $\pi/4$ correspondent à un glissement pur d'intensité g .

Exemples d'états de déformations

- Glissement simple :** On donne ci-après l'exemple type d'état de glissement simple lors d'essais de cisaillement direct des sols à la boîte de Casagrande :



□ Exemples d'états de déformations

- **Glissement simple :** On donne ci-après l'exemple type d'état de glissement simple lors d'essais de cisaillement direct des sols à la boîte de Casagrande.



Boîte de cisaillement

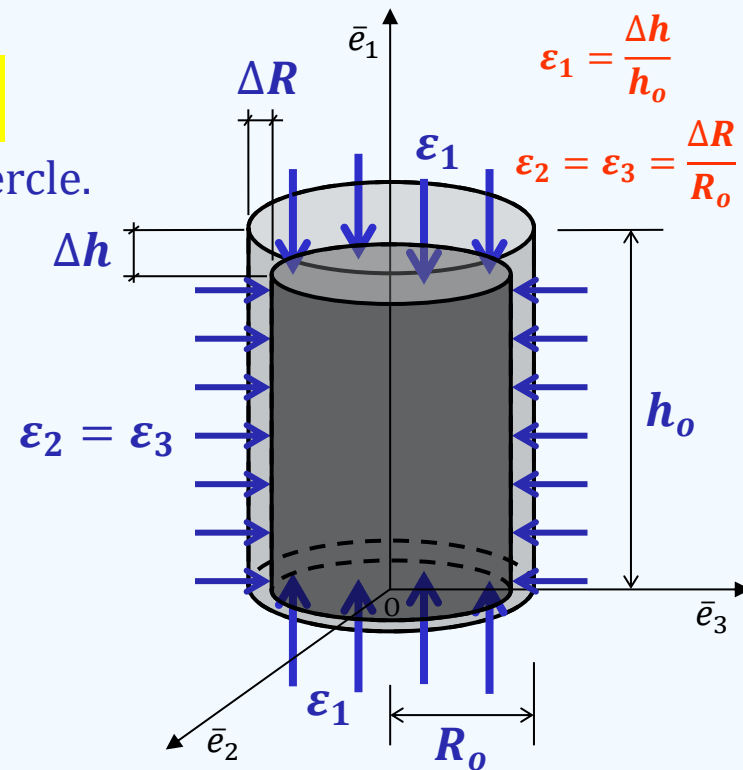
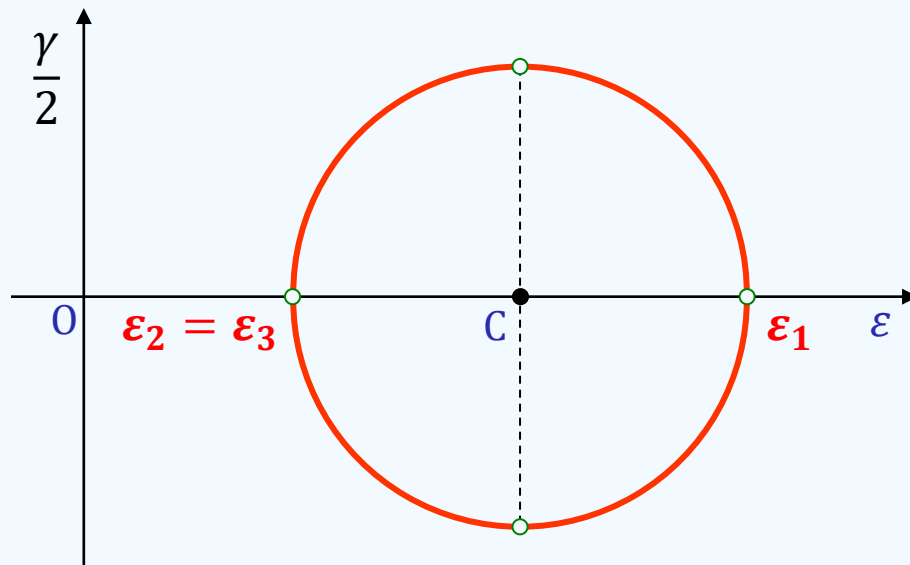
Laboratoire pédagogique, Département de Génie-Civil, Université de M'Sila

Exemples d'états de déformations

- Dilatation ou Contraction cylindriques** : C'est l'état triaxial de révolution des déformations subies en tout point d'une éprouvette dans un essai à l'appareil triaxial classique. Dans cet état de déformation, il y a une direction principale et une seule $\bar{e}_1$ associée à ε_1 et toute direction qui lui est perpendiculaire est elle-même direction principale associée à $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$:

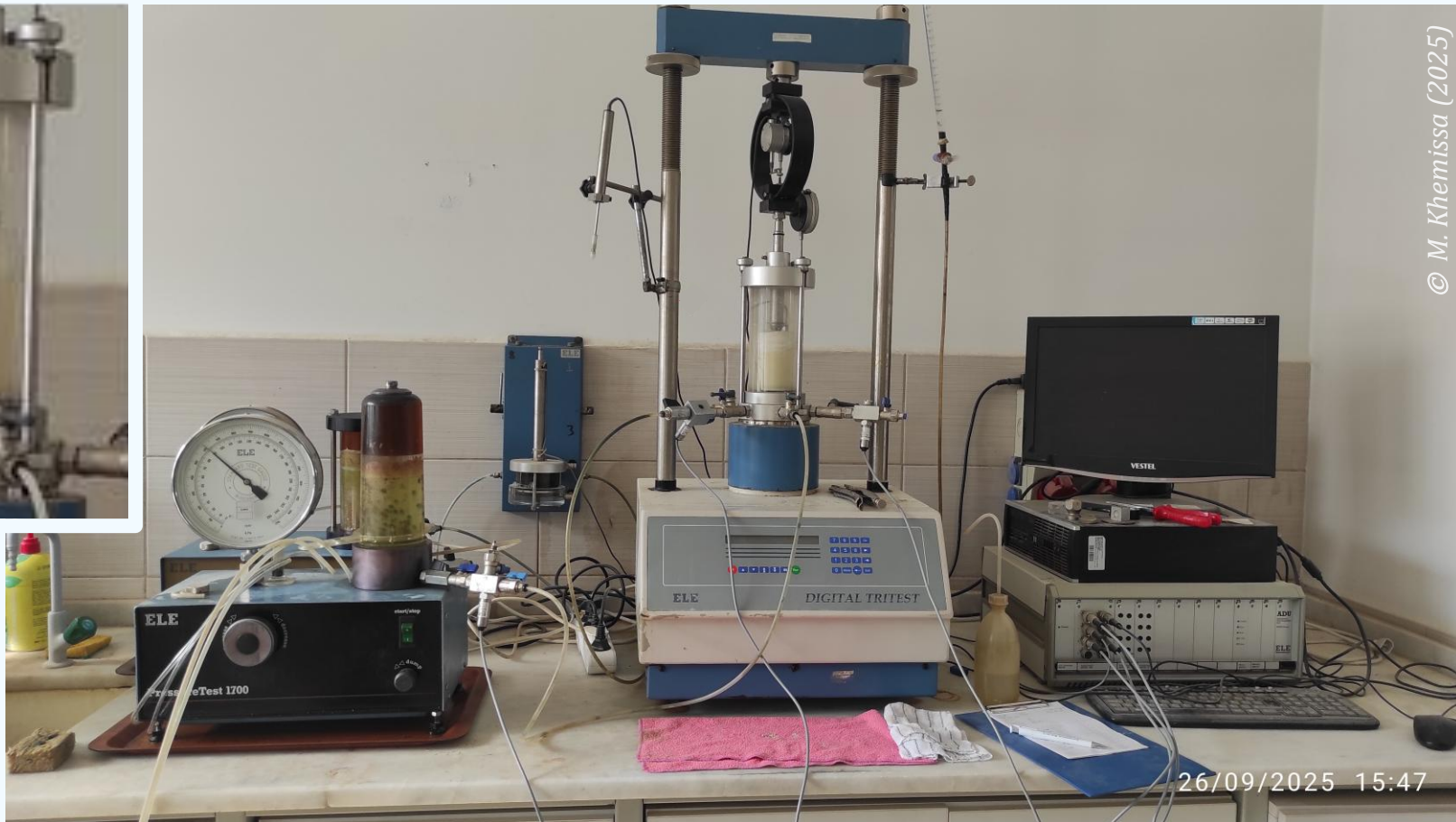
$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \neq 0$$

Le domaine correspondant se réduit à un seul cercle.



□ Exemples d'états de déformations

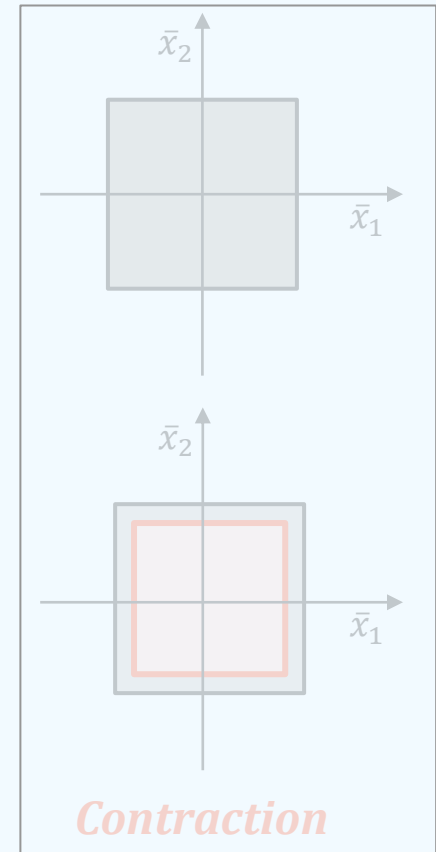
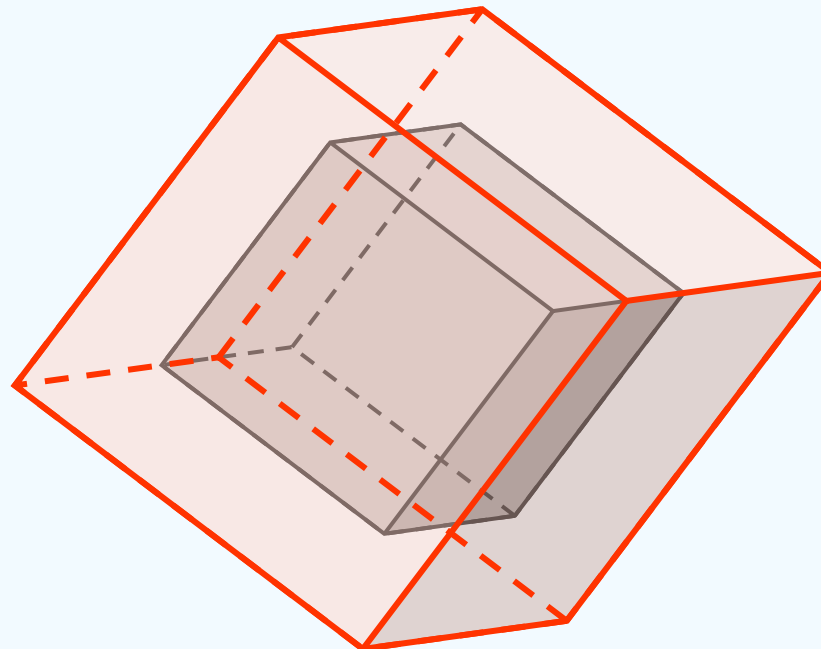
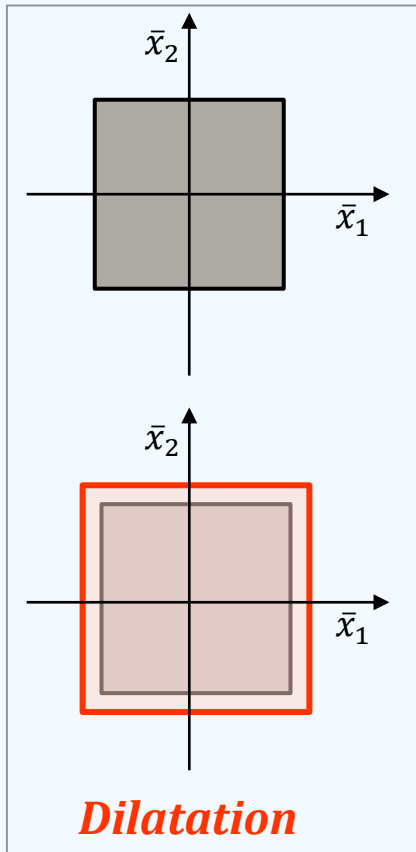
- **Dilatation ou Contraction cylindriques :** On donne ci-après l'exemple type d'essai triaxial de révolution en mécanique des sols.



Exemples d'états de déformations

- Dilatation ou Contraction uniformes :** Le tenseur des déformations est dit uniforme ou isotrope si sa composante déviatorique est nulle, c'est-à-dire $\bar{\varepsilon}_d = 0$. Les dilatations ou contractions principales unitaires sont donc égales :

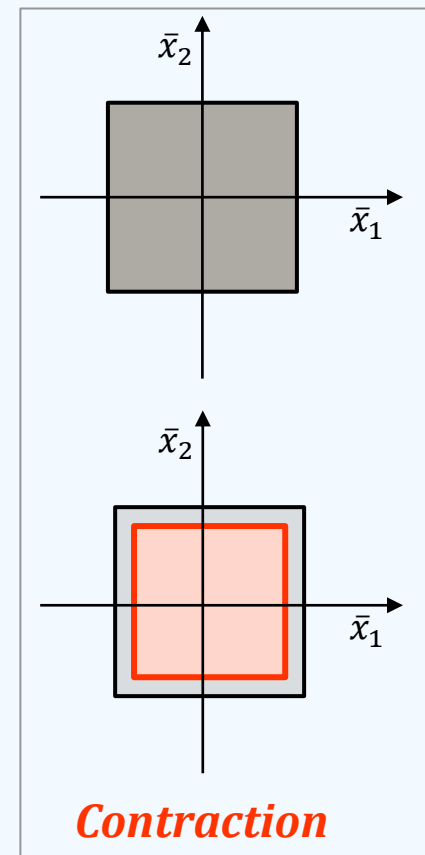
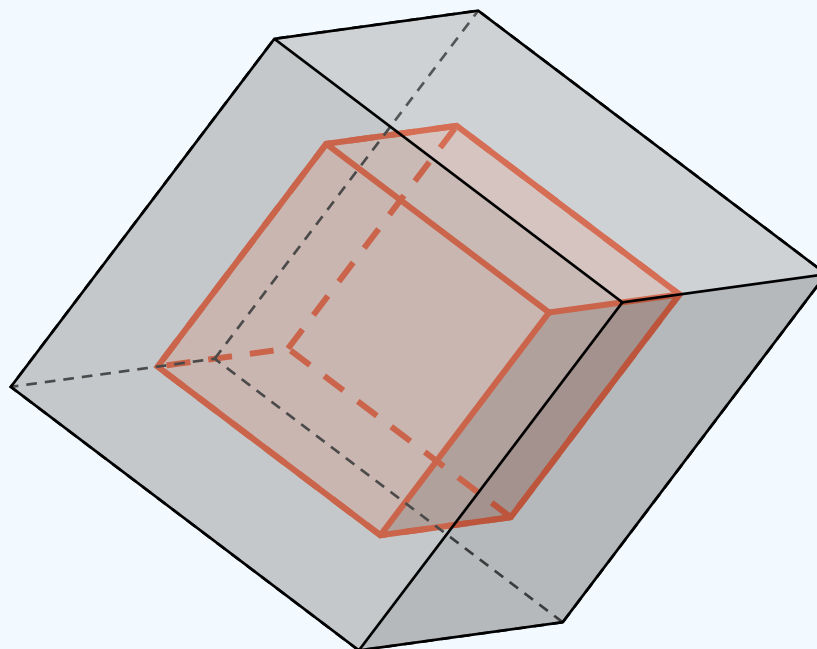
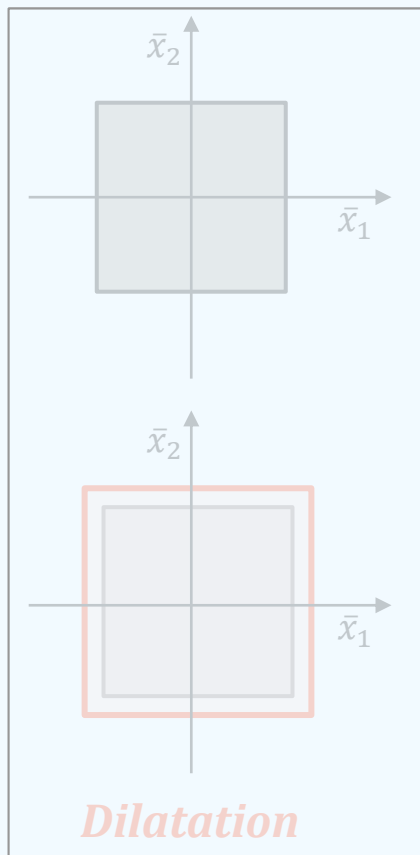
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon \neq 0$$



Exemples d'états de déformations

- Dilatation ou Contraction uniformes :** Le tenseur des déformations est dit uniforme ou isotrope si sa composante déviatorique est nulle, c'est-à-dire $\bar{\varepsilon}_d = 0$. Les dilatations ou contractions principales unitaires sont donc égales :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon \neq 0$$



Exemples d'états de déformations

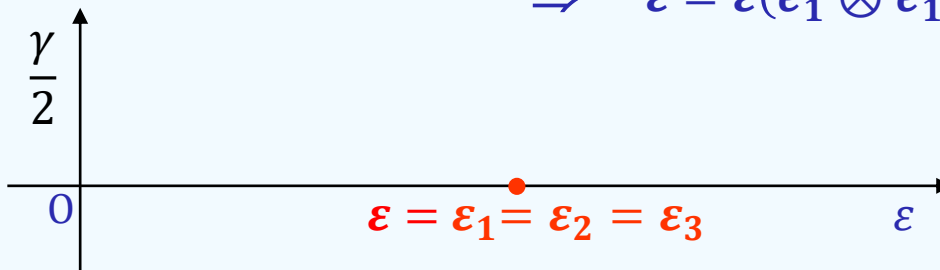
- Dilatation ou Contraction sphériques :** Le tenseur des déformations est dit sphérique ou isotrope lorsque les 3 déformations principales sont égales entre elles et toutes les directions sont principales. Ainsi, on peut écrire :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon \neq 0$$

Sa matrice représentative peut s'écrire :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon(\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3)$$



⇒ Le cercle de Mohr se réduit à un point d'abscisse :

$$\varepsilon = \varepsilon_{moy} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$



Exemples d'états de déformations

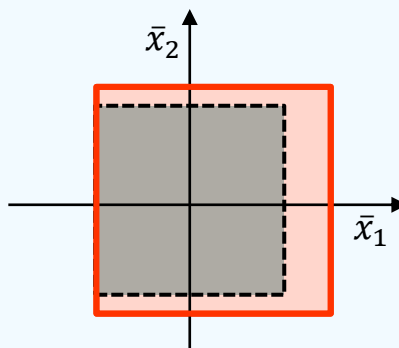
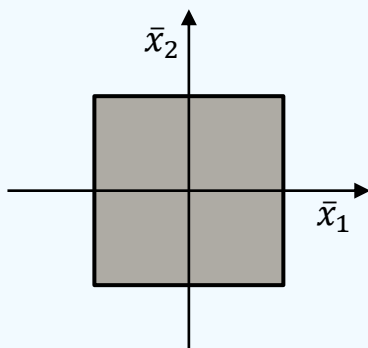
- Dilatation ou Contraction planes (biaxiales) :** Le tenseur des déformations planes est caractérisé par l'une des déformations unitaires principales nulle. Le plan de déformation est ainsi déterminé par les deux directions principales correspondant aux deux autres déformations principales unitaires non nulles :

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \neq 0 \text{ \& } \varepsilon_3 = 0$$

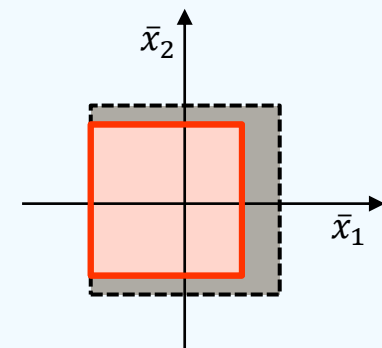
Sa matrice représentative peut s'écrire :

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

$$\Rightarrow \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \varepsilon_2 \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2$$



Allongement



Raccourcissement

□ Exemples d'états de déformations

- **Déformations thermiques :** Dans un solide soumis à un échauffement et laissé libre de sa dilatation, apparaissent des déformations thermiques dont les allongements principaux unitaires sont égaux :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \alpha \Delta T \neq 0$$

où α désigne le coefficient d'expansion (ou de dilatation) thermique et $\Delta T = T_t - T_o$ le gradient thermique avec T_t la température actuelle et T_o la température initiale.

Le tenseur des déformations thermiques correspondant est alors sphérique et représenté par :

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha \Delta T & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta T \end{bmatrix} = (\alpha \Delta T) \bar{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ij} = (\alpha \Delta T) \delta_{ij}$$

Remarque : Si la dilatation n'est pas libre, des contraintes peuvent être induites dans le solide. La déformation totale résultante est la somme des déformations thermiques et des déformations mécaniques. Toutefois, dans le cas où le gradient thermique dans le solide est constant, voire nul, aucune contrainte ne peut y être induite : les déformations se réduisent aux déformations thermiques.

MESURE DES DÉFORMATIONS

❑ Mesure des déformations : *Techniques de mesure*

Par définition même, les déformations sont sans dimension. Néanmoins, et pour faire apparaître qu'il s'agit généralement de variation relative de longueur, on les exprime souvent en m/m , mm/mm et $\mu m/\mu m$.

- **Unités et ordres de grandeur** : Les déformations usuellement utilisées dépendent du matériau considéré. On notera usuellement (BAEL 91) :
 - Acier : $\begin{cases} HAF_{eE}400 : 1.74 \text{ ‰} \\ RLF_{eE}235 : 1 \text{ ‰} \end{cases}$
 - Béton : $\begin{cases} \text{Déformation élastique} : 2 \text{ ‰} \\ \text{Déformation plastique} : 2 \text{ à } 3.5 \text{ ‰} \end{cases}$
- **Mesure des déplacements** : La mesure directe des déformations n'est pas possible. On mesure le déplacement suivant la direction considérée par l'une des techniques adéquates proposées ci-après, puis l'on déduit par calcul la déformation correspondante. Pour les distorsions, on mesure les déplacements suivant deux directions orthogonales, puis l'on calcule la variation angulaire correspondante.

❑ Mesure des déformations : *Techniques de mesure*

Elle s'effectue par l'une méthodes quantitatives et qualitatives suivantes :

- **Mesures quantitatives** : On distingue les techniques suivantes :

- **Extensométrie** :

- **Extensométrie directe** : en utilisant des moyens mécaniques ou optiques (ex. Comparateur, Potentiomètre)
- **Extensométrie indirecte** : mesure d'un phénomène physique influencé par les déformations (ex. variation de ddp : différence de potentiel)

- **Méthode du moiré** : Il s'agit d'une technique de marquage de la surface du solide par un réseau de traits fins et rapprochés (gravure ou procédés d'impression divers). On compare le réseau déformé au réseau initial par observation et dépouillement des réseaux de franges de moiré.

- **Méthodes optiques** : basées sur l'une des techniques avancées suivantes utilisant la lumière pour mesurer des grandeurs physiques sans contact dans la plupart des cas :

- **Spectrométrie** : analyse des propriétés spectrales

.../...

□ Mesure des déformations : *Techniques de mesure*

- Interférométrie : mesure des distances par interférences lumineuses
- Imagerie optique : vision et analyse d'images
- Télémétrie laser : mesure de distance par temps de vol
- Holographie : procédé photographique qui restitue le relief des objets en utilisant les interférences de deux faisceaux lasers (Dictionnaire LeRobert).
- Stéréo-photogrammétrie : terrestre, aérienne ou spatiale.
- **Mesures qualitatives** : On distingue les techniques suivantes
 - **Marquage** : A la surface d'un solide, par petits cercles ($\sim mm$) et observation des ellipses après déformation. A l'intérieur d'un solide, par un réseau ou par inclusion (Billes dans un sol : « *Technique du Prof. Jean Biarez* »)
 - **Vernis craquelant** : et substances analogues déposés à la surface d'un solide (quand le solide se déforme, le vernis craque)

❑ Mesure des déformations : Instruments de mesure



Comparateur mécanique



Comparateur digital

❑ Mesure des déformations : Instruments de mesure



3 types of KTR Potentiometer Sensors

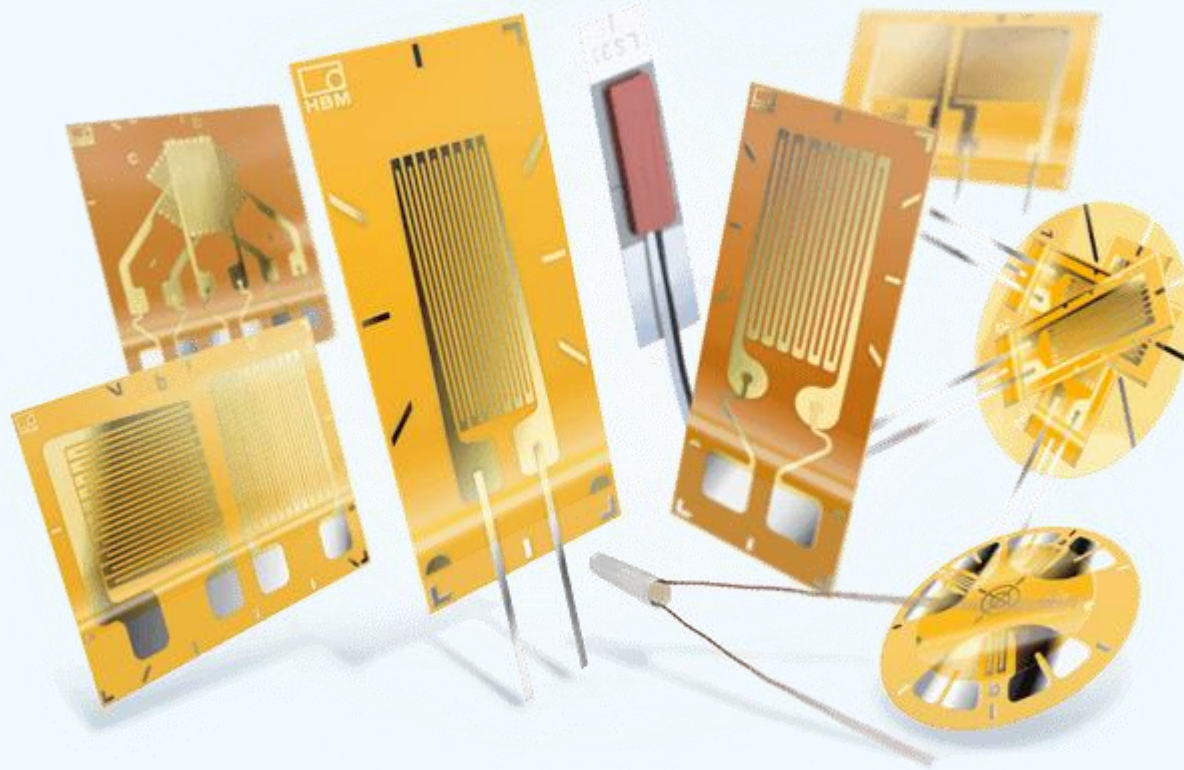
Potentiomètre

❑ Mesure des déformations : *Instruments de mesure*



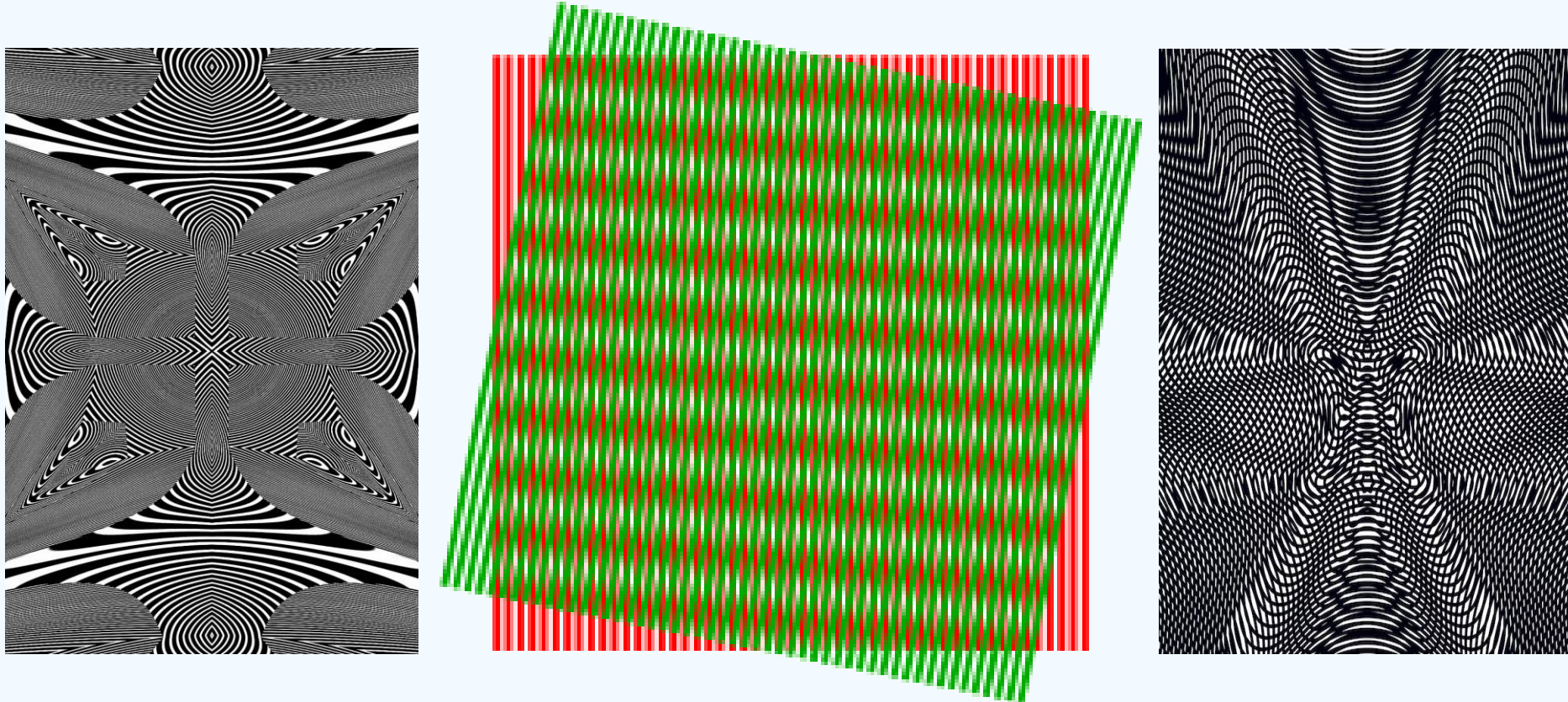
Extensomètres

❑ Mesure des déformations : *Instruments de mesure*



Jauges de déformation

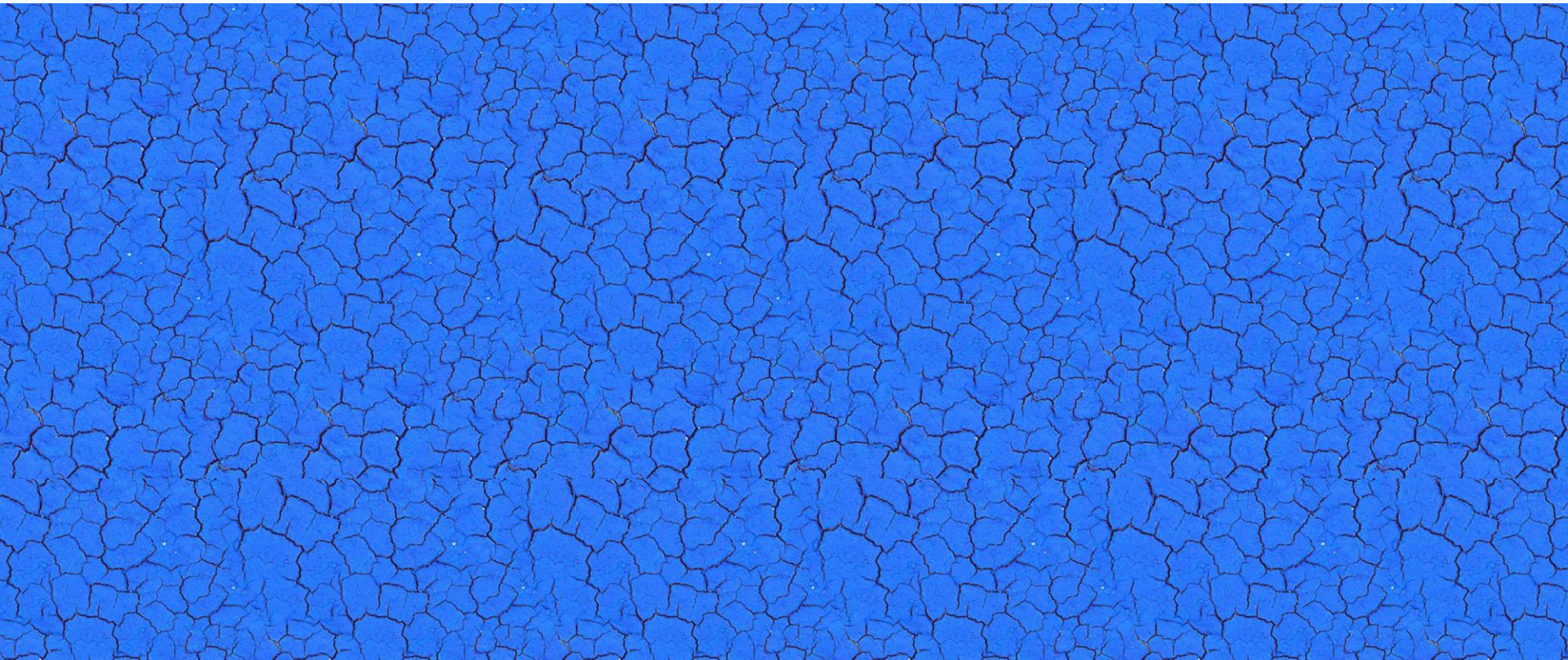
□ Mesure des déformations : *Instruments de mesure*



Méthode du moiré

(Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, France)

□ Mesure des déformations : *Instruments de mesure*



Vernis craquelant

❑ Mesure des déformations : Instruments de mesure



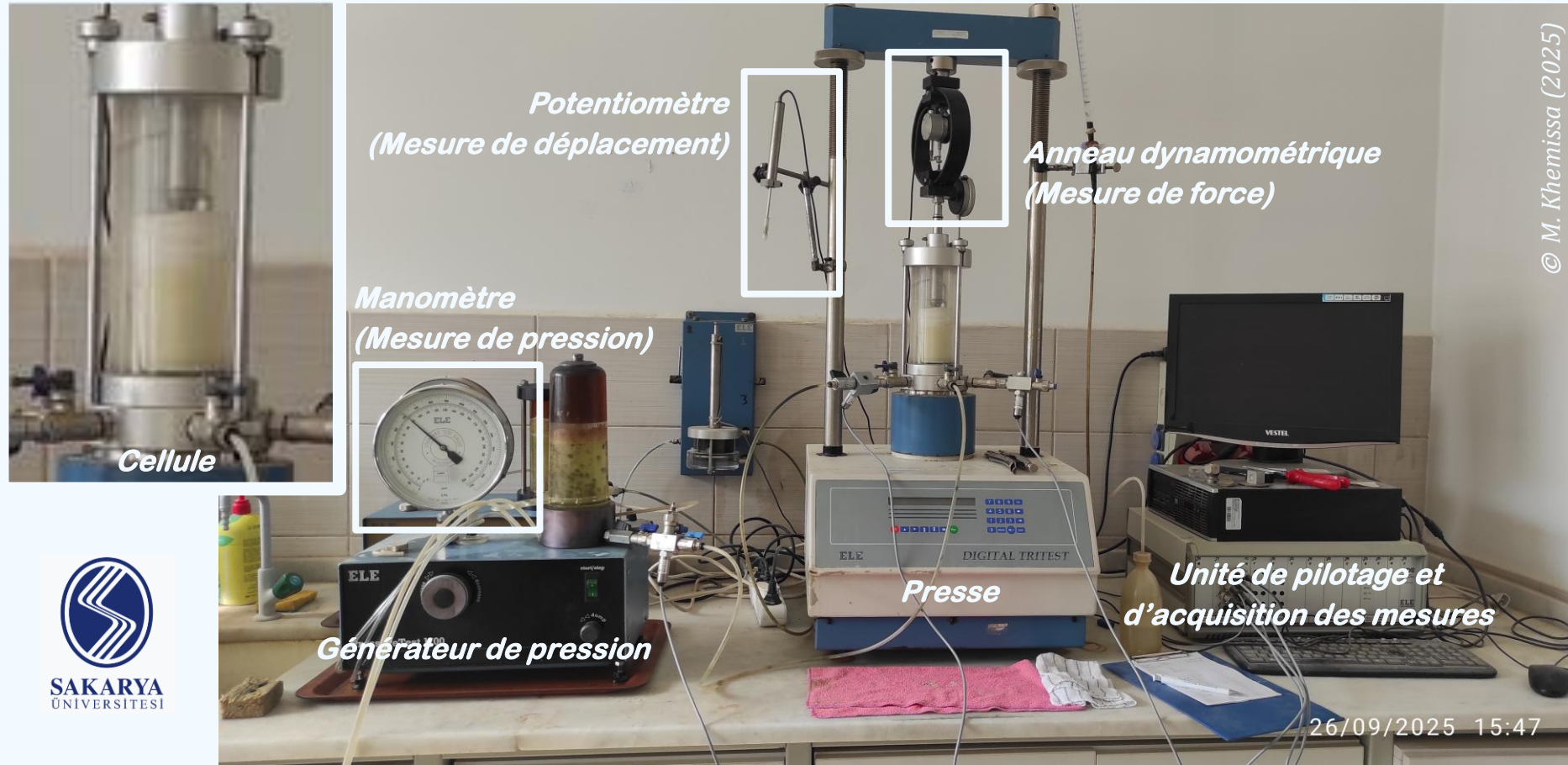
Méthodes optiques

❑ Mesure des déformations : Instruments de mesure



Tachymètre optique et mécanique

❑ Mesure des déformations : Dispositifs expérimentaux



© M. Khemissa (2025)

❑ Mesure des déformations : *Traitement numérique via GeoGebra*

1. Menu général

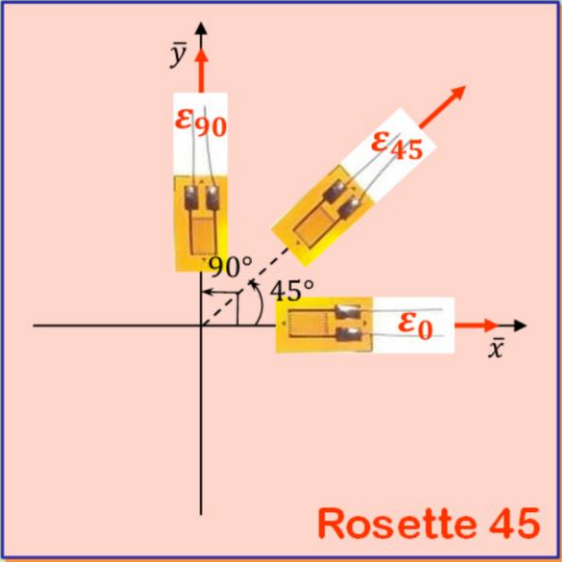
MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

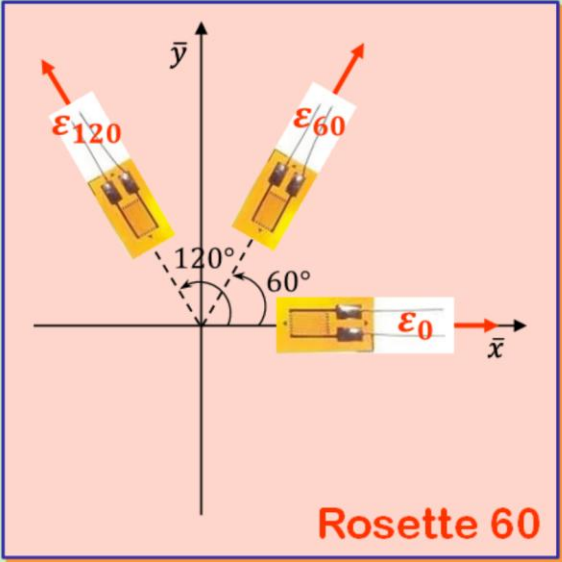
MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Mesure des déformations planes via des jauges en forme de rosettes

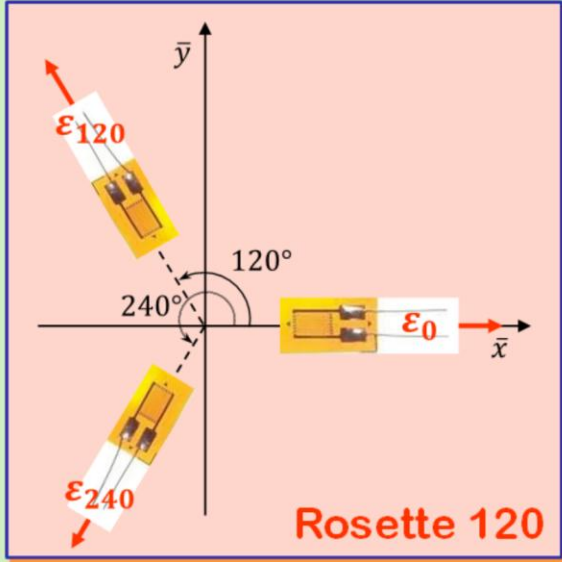
(Mohamed Khemissa, 2026)



Rosette 45



Rosette 60



Rosette 120

?

Rappels de MMC

MK – GeoConsulting (2026)





❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Contraintes planes)

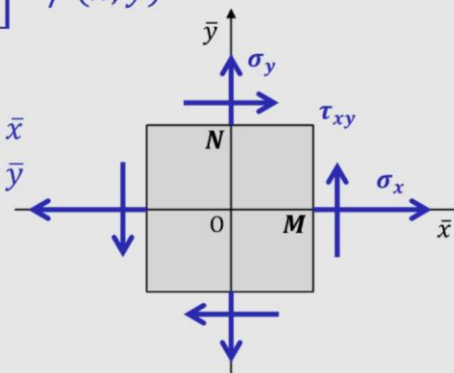
➤ Tenseur des contraintes planes :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1, 2 \quad \& \quad j = 1, 2$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} / (\bar{x}, \bar{y})$$

avec :

- σ_x : Contrainte normale suivant l'axe $\bar{x}$
- σ_y : Contrainte normale suivant l'axe $\bar{y}$
- τ_{xy} : Contrainte de cisaillement dans le plan $(\bar{x}, \bar{y})$



1/15

❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Contraintes planes)

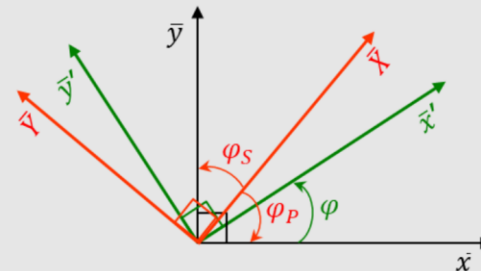
➤ Contraintes quelconques :

- $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$
- $\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$
- $\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\varphi) - \tau_{xy} \cos(2\varphi)$

➤ Directions principales :

$$\tan(2\varphi_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\& \tan(2\varphi_s) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$



2/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra

❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Contraintes planes)

➤ Contraintes principales :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \\ \sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \end{cases}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale :

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$



3/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

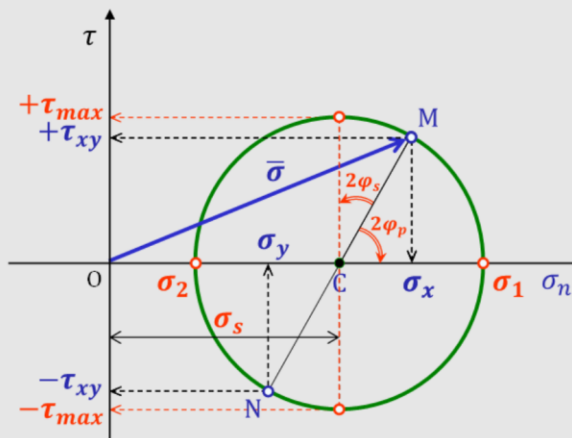
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Contraintes planes)

➤ Cercle de Mohr des contraintes :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$



$M(\sigma_x, +\tau_{xy})$

$N(\sigma_y, -\tau_{xy})$

Rosette 120



4/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Tenseur des déformations planes :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} \quad / (\bar{x}, \bar{y})$$

avec :

- ϵ_x : Dilatation ou contraction suivant l'axe $\bar{x}$
- ϵ_y : Dilatation ou contraction suivant l'axe $\bar{y}$
- γ_{xy} : Distorsion angulaire dans le plan $(\bar{x}, \bar{y})$



5/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

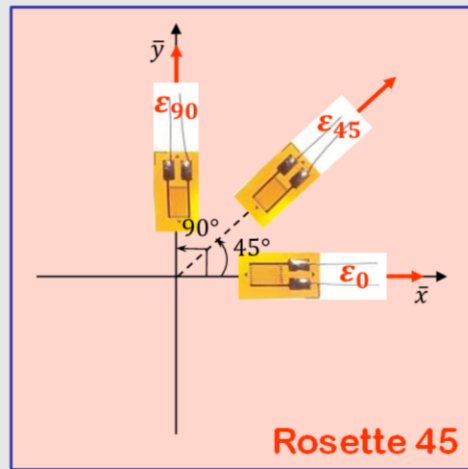
MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Rosette 45 (0/45/90)



- $\epsilon_x = \epsilon_0$
- $\epsilon_y = \epsilon_{90}$
- $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - \epsilon_0 - \epsilon_{90}$

Rosette 120



6/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

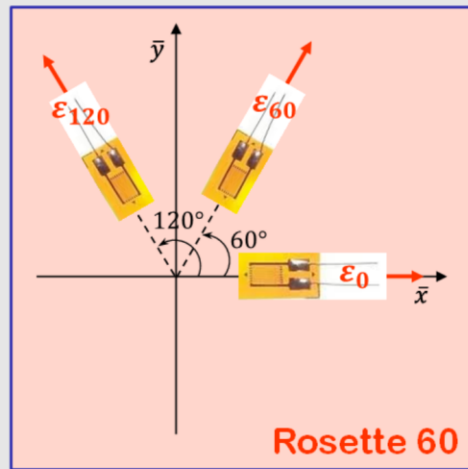
MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Rosette 60 (0/60/120)



- $\epsilon_x = \epsilon_0$
- $\epsilon_y = \frac{1}{3} [2(\epsilon_{60} + \epsilon_{120}) - \epsilon_0]$
- $\gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{60} - \epsilon_{120})$

Rosette 120



7/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



77



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

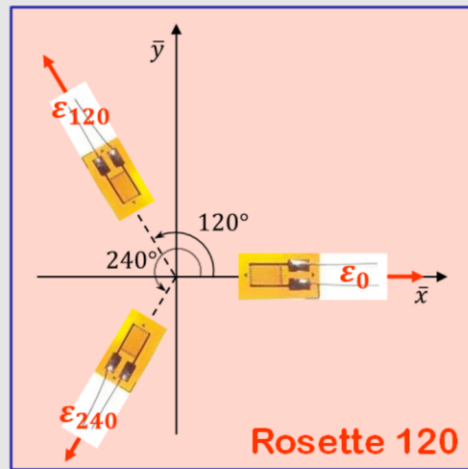
MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Rosette 120 (0/120/240)



- $\epsilon_x = \epsilon_0$
- $\epsilon_y = \frac{1}{3} [2(\epsilon_{120} + \epsilon_{240}) - \epsilon_0]$
- $\gamma_{xy} = -\frac{2}{\sqrt{3}} (\epsilon_{120} - \epsilon_{240})$

Rosette 120



8/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra

❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

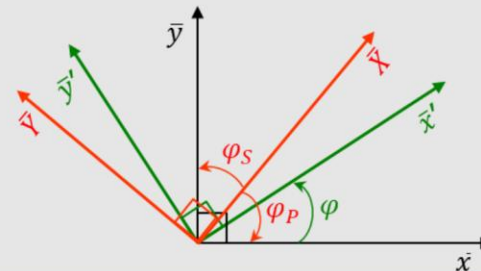
➤ Déformations quelconques:

- $\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi)$
- $\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\varphi) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi)$
- $\gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin(2\varphi) + \gamma_{xy} \cos(2\varphi)$

➤ Directions principales:

$$\tan(2\varphi_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\& \tan(2\varphi_s) = \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}$$



9/15

❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Déformations principales :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \end{cases}$$

➤ Distorsion maximale :

$$\gamma_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$



10/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



80



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

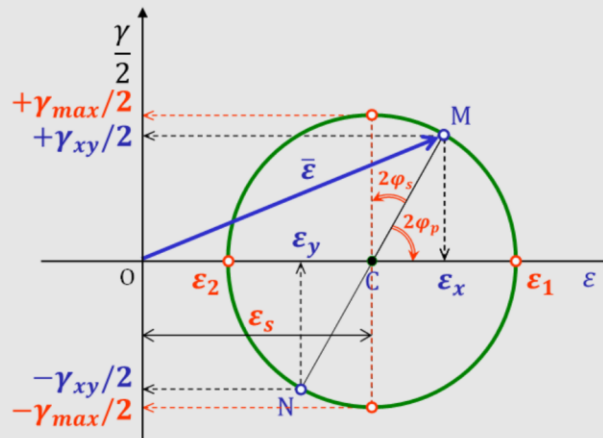
Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC (Déformations planes)

➤ Cercle de Mohr des déformations :

$$\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2$$



$$M\left(\varepsilon_x, +\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)$$

$$N\left(\varepsilon_y, -\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)$$

Rosette 120



11/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC

(Relations de comportement élastique linéaire isotrope)

➤ Loi de Hooke élémentaire (1D) :

- *Contrainte normale*: $\sigma = E\varepsilon$
- *Contrainte de cisaillement*: $\tau = G\gamma$

avec:

- E – *Module de Young*
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – *Module de Coulomb*
- ν – *Coefficient de Poisson*



12/15

MK – GeoConsulting (2026)



GeoGebra



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC

(Relations de comportement élastique linéaire isotrope)

➤ Loi de Hooke généralisée (3D) :

Elle est définie par deux paramètres :

- le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ,
ou bien :
- les coefficients de Lamé λ et μ ,
de sorte que :

$$\bar{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\bar{\epsilon}) \bar{\delta} + 2\mu \bar{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

et inversement :

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\bar{\sigma}) \bar{\delta} + \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}$$



13/15



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC

(Relations de comportement élastique linéaire isotrope)

➤ Paramètres d'élasticité linéaire isotrope :

Les relations entre les paramètres d'élasticité sont :

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou inversement :

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

La condition de stabilité s'écrit :

$$E > 0 \quad \text{et} \quad -1 < \nu < +\frac{1}{2}$$

En pratique, ν est toujours positif, d'où :

$$0 < \nu < +\frac{1}{2}$$



14/15



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

2. Formulaire

MMC_CercleDeMohrDeformationsRosette_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Rappels de MMC

(Relations de comportement élastique linéaire isotrope)

➤ Loi de Hooke appliquée en contraintes planes (2D) :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda\varepsilon_{11} \\ \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \end{cases}$$

⇒

$$\begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_y \\ \sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_y + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_x \\ \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{cases}$$

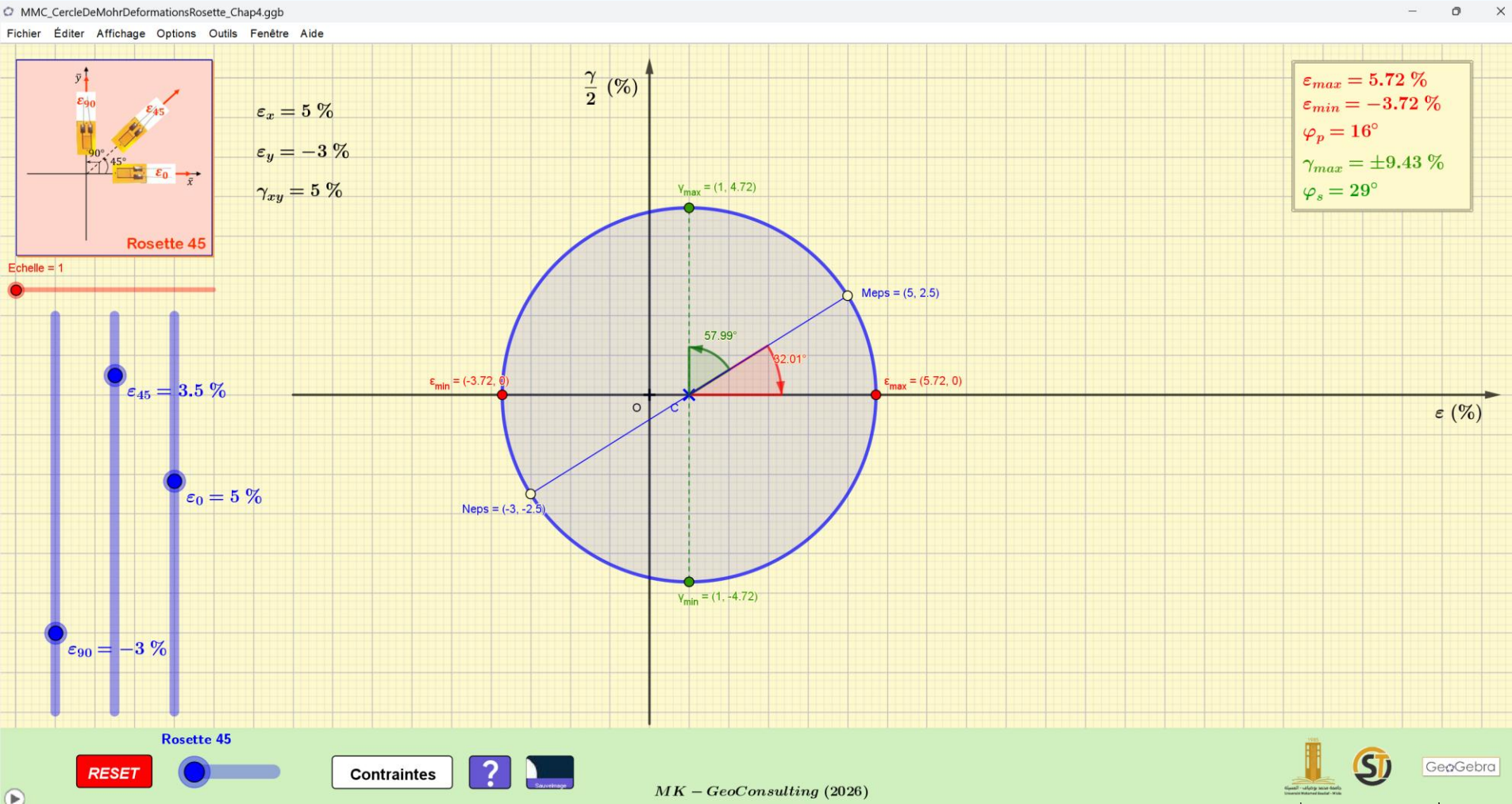


15/15

MK – GeoConsulting (2026)

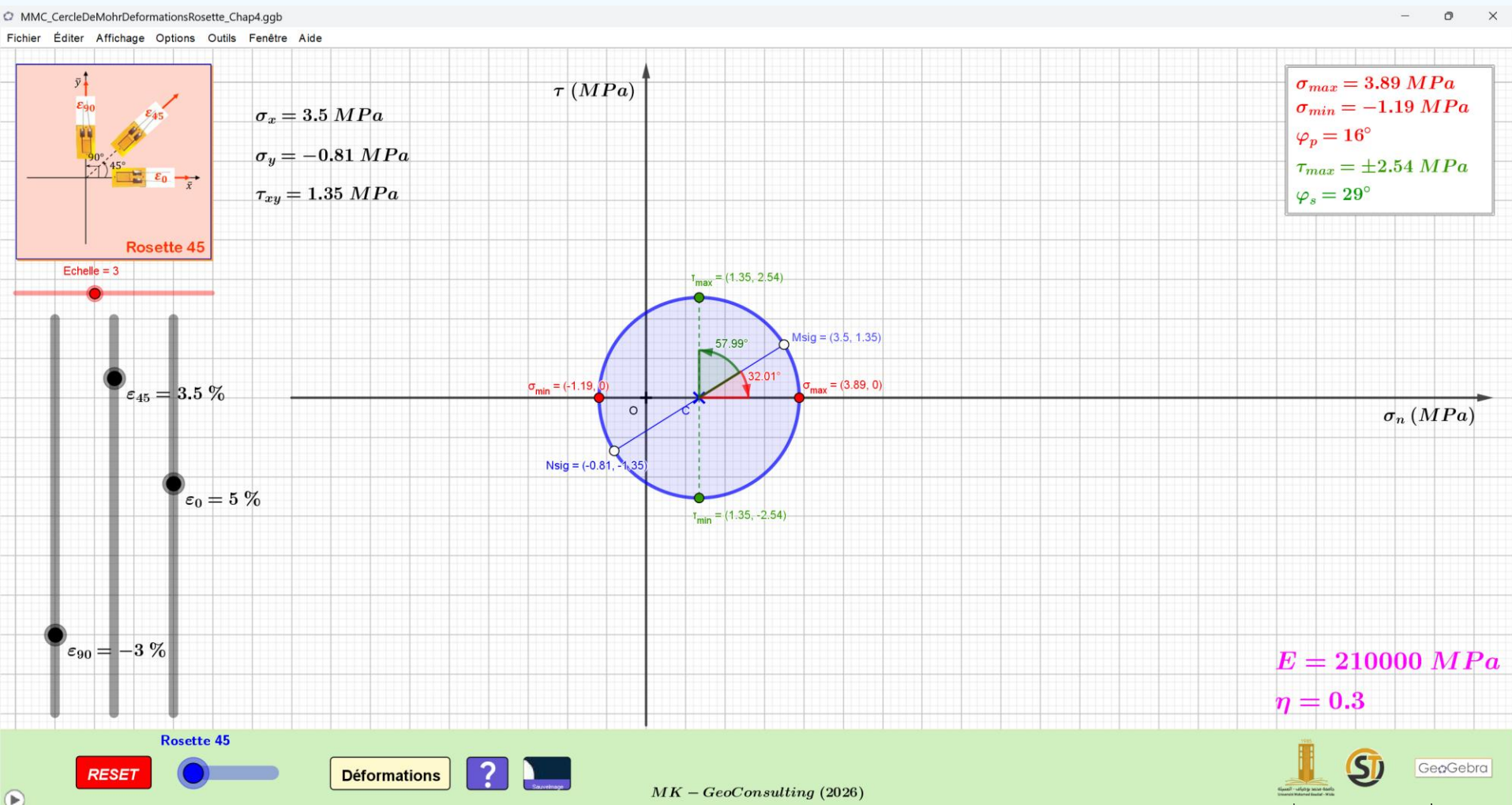
❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

3. Rosette 45 (0°/45°/90°) : Cercle de Mohr des déformations



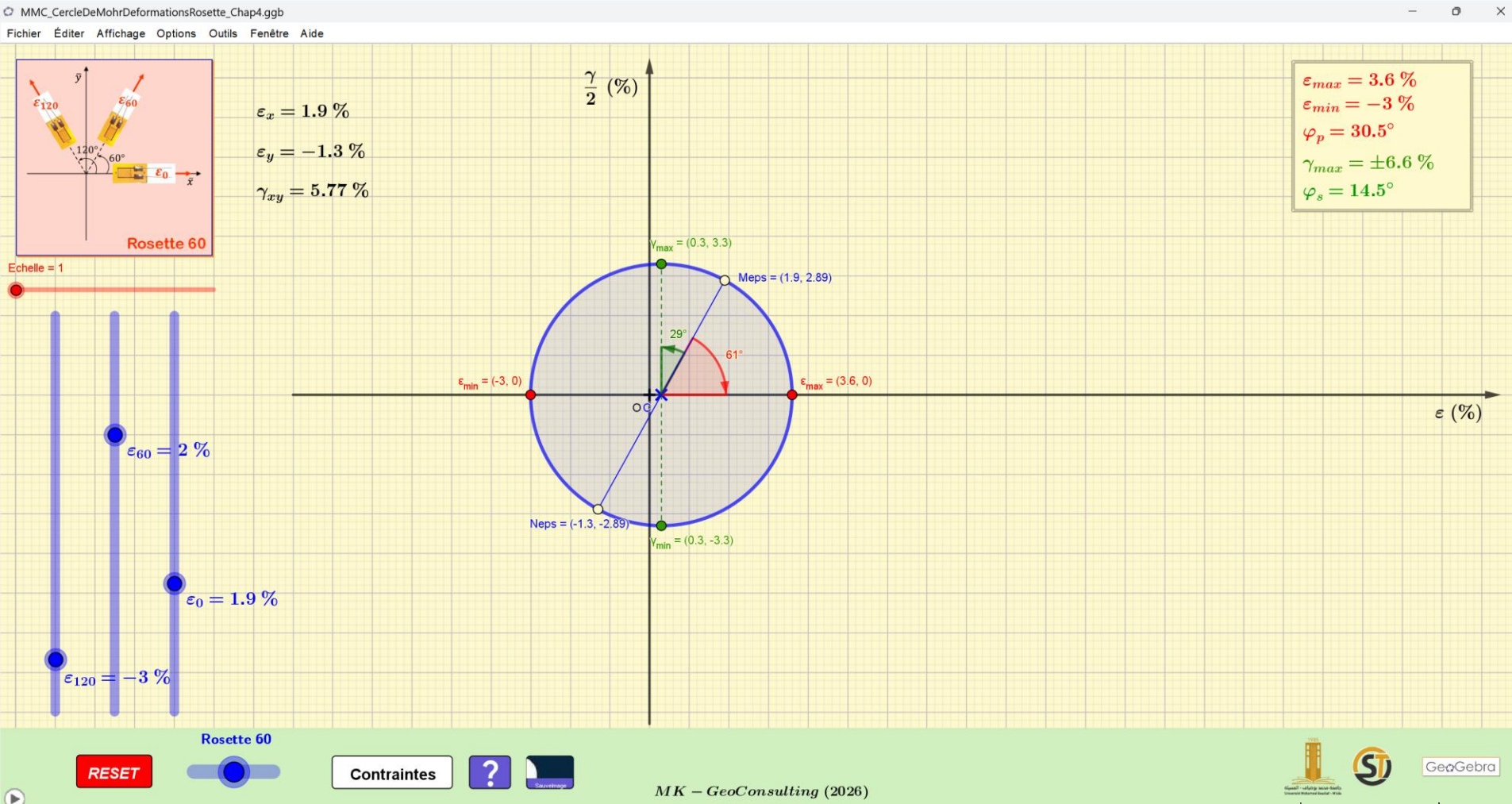
❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

3. Rosette 45 (0°/45°/90°) : Cercle de Mohr des contraintes



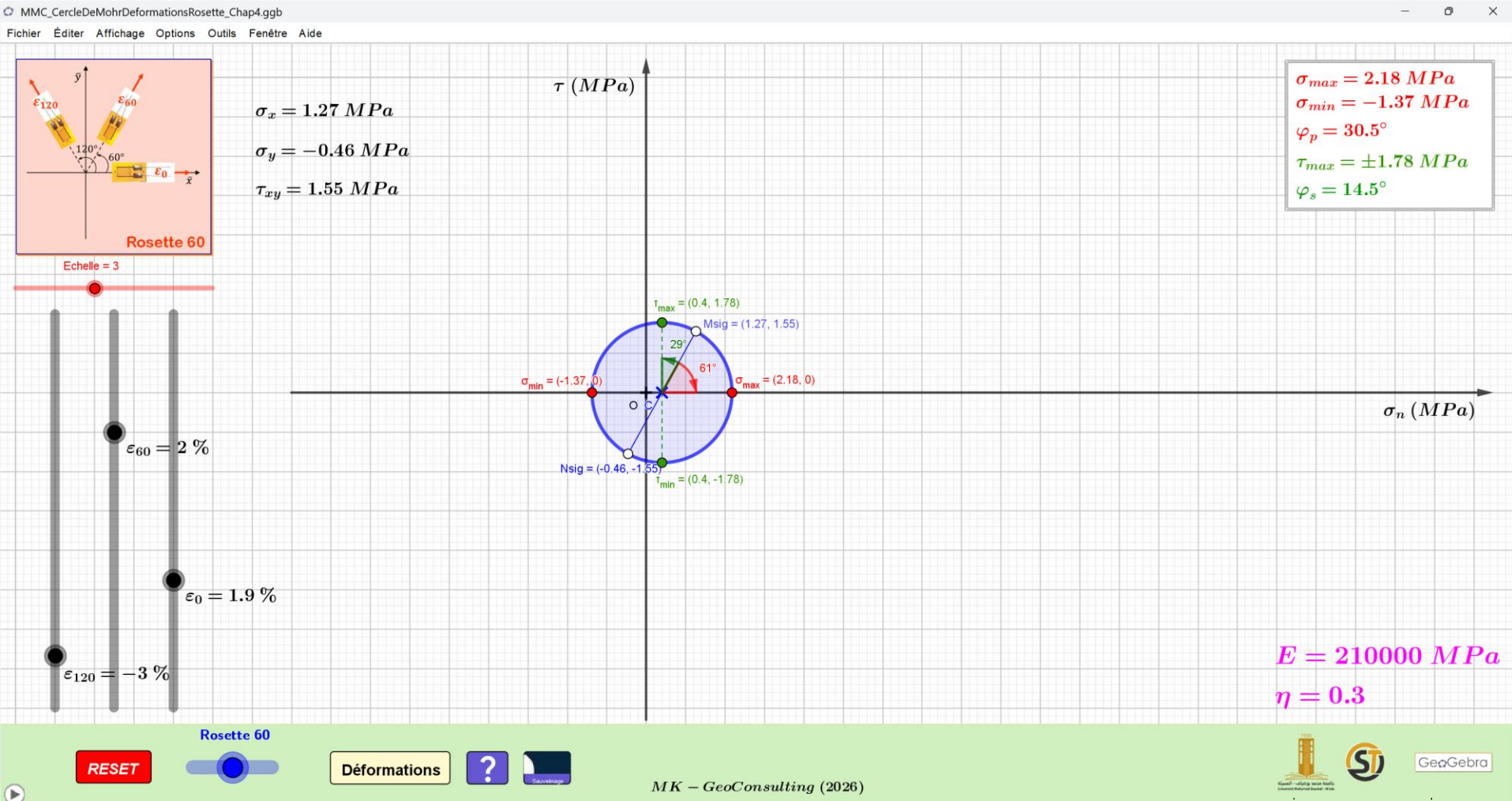
❑ Mesure des déformations : *Traitement numérique via GeoGebra*

4. Rosette 60 (0°/60°/120°) : Cercle de Mohr des déformations



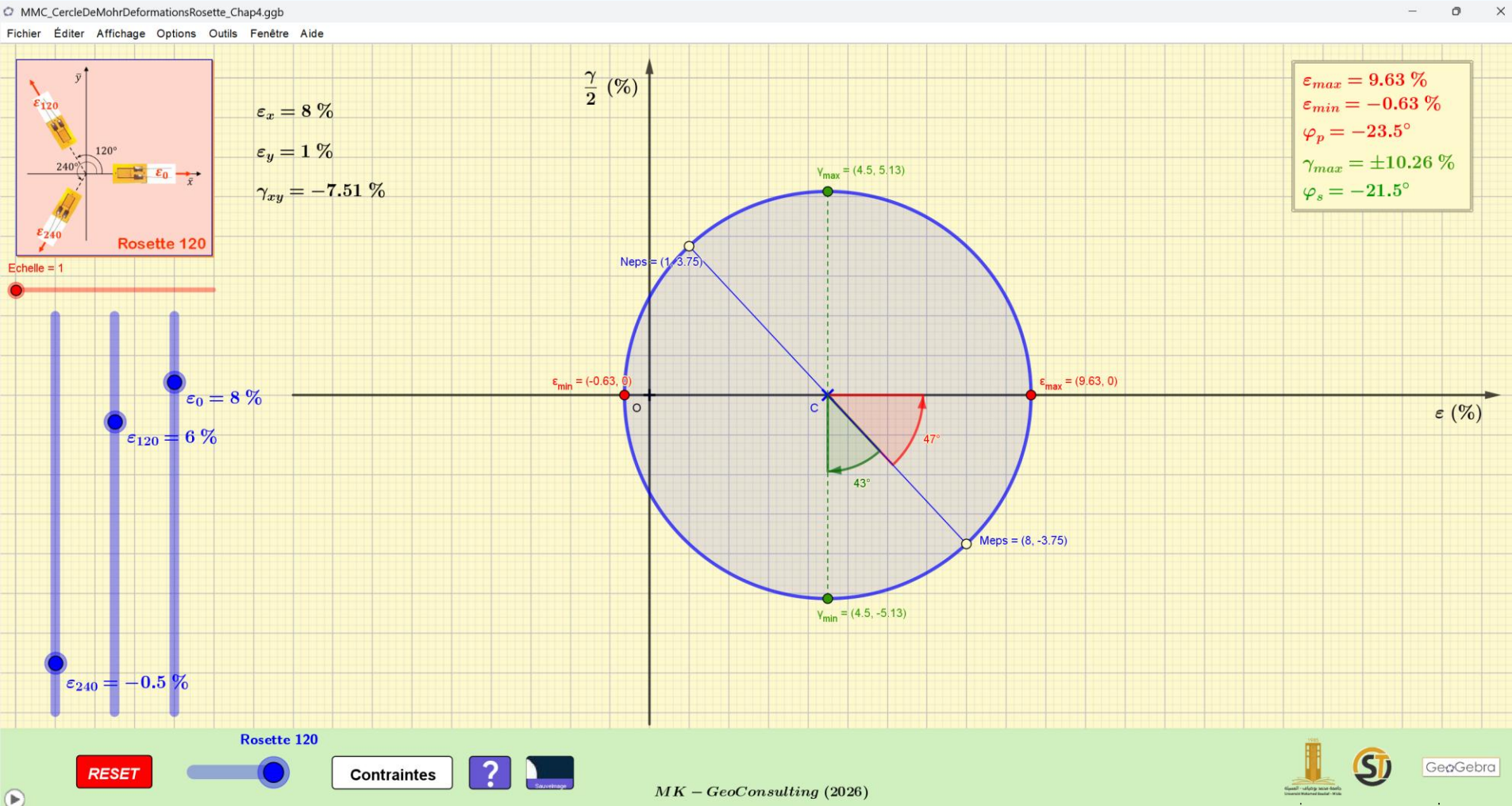
❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

4. Rosette 60 (0°/60°/120°) : Cercle de Mohr des contraintes



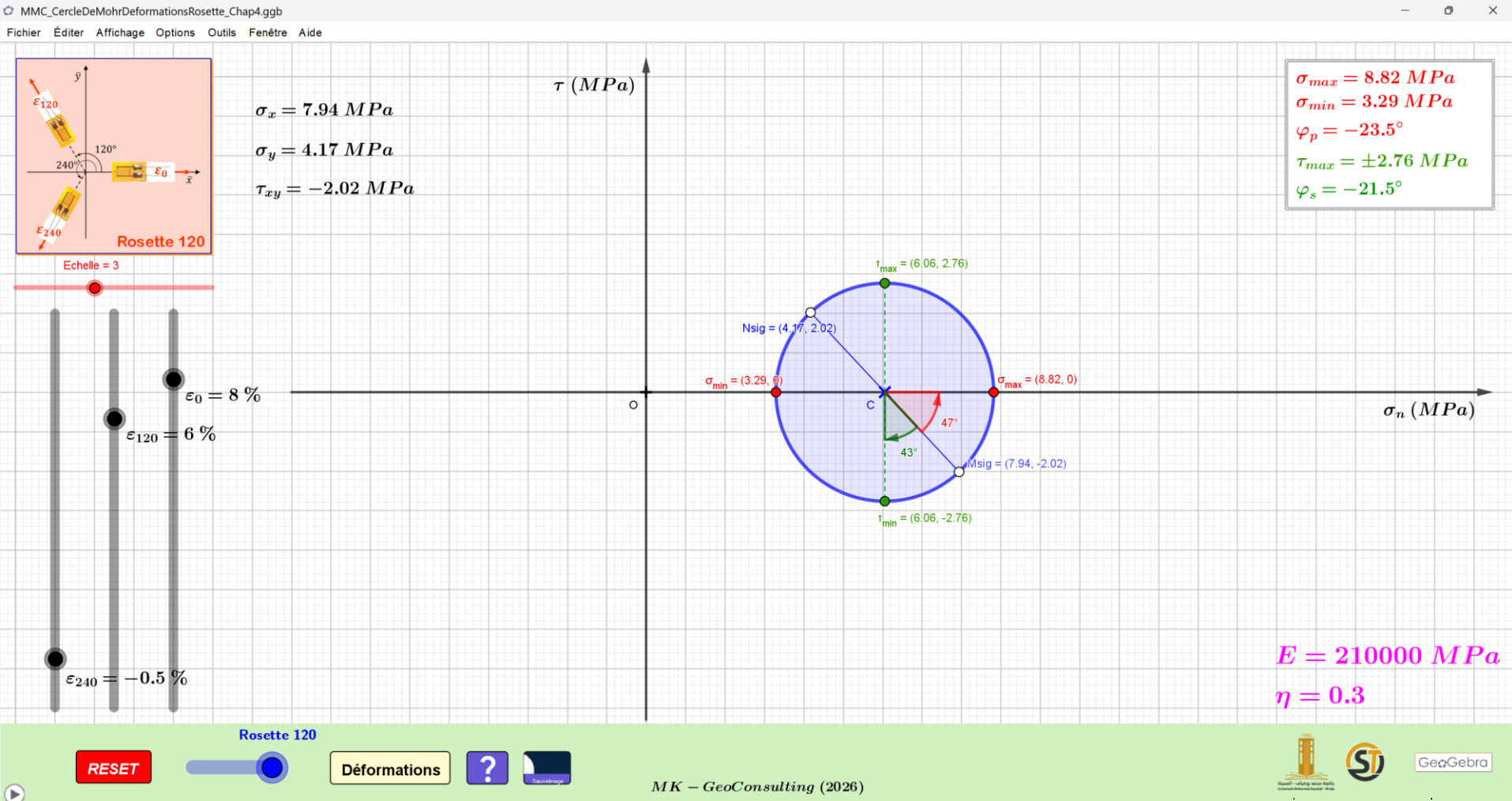
 Mesure des déformations : *Traitement numérique via GeoGebra*

5. Rosette 120 (0°/120°/240°) : Cercle de Mohr des déformations



❑ Mesure des déformations : Traitement numérique via GeoGebra

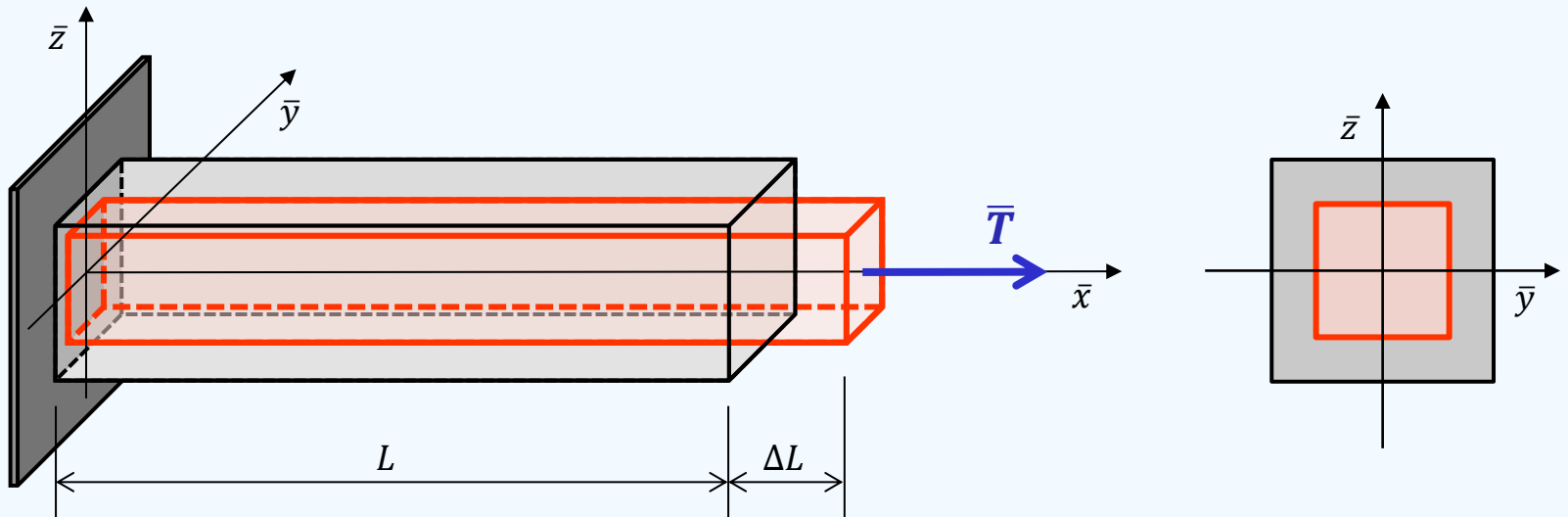
5. Rosette 120 (0°/120°/240°) : Cercle de Mohr des contraintes



APPLICATIONS TYPIQUES

□ Applications typiques

- **Extension homogène** : Exemple d'une éprouvette en traction uniaxiale



➤ Champ de déplacement :

$$\begin{cases} x = x_o + lx_o \\ y = y_o - my_o \\ z = z_o - mz_o \end{cases} \quad | \quad l = \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \quad \& \quad m = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu \varepsilon_x$$

ν – Coefficient de Poisson

.../...

□ Applications typiques

- **Extension homogène** : Exemple d'une éprouvette en traction uniaxiale

➤ Gradient de transformation :

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\boldsymbol{\delta}} + \overline{\text{grad}}(\bar{\mathbf{u}}) \Rightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} \quad | \quad \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +lx_o \\ -my_o \\ -mz_o \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{xx} = 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x_o} = 1 + l \\ F_{xy} = 0 + \frac{\partial u_x}{\partial y_o} = 0 \\ F_{xz} = 0 + \frac{\partial u_x}{\partial z_o} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} F_{yx} = 0 + \frac{\partial u_y}{\partial x_o} = 0 \\ F_{yy} = 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y_o} = 1 - m \\ F_{yz} = 0 + \frac{\partial u_y}{\partial z_o} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} F_{zx} = 0 + \frac{\partial u_z}{\partial x_o} = 0 \\ F_{zy} = 0 + \frac{\partial u_z}{\partial y_o} = 0 \\ F_{zz} = 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z_o} = 1 - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} 1+l & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \begin{bmatrix} 1+l & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{bmatrix}$$

(${}^t\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}$) – Matrice diagonale

.../...

□ Applications typiques

- **Extension homogène** : Exemple d'une éprouvette en traction uniaxiale

➤ Tenseur des dilatations :

$$\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}} \Rightarrow C_{ij} = F_{ki}F_{kj}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1+l & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+l & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} (1+l)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-m)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-m)^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1+2l+l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2m+m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2m+m^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1+2l+l^2 \\ C_2 = 1-2m+m^2 \\ C_3 = 1-2m+m^2 \end{cases}$$

.../...

□ Applications typiques

- **Extension homogène** : Exemple d'une éprouvette en traction uniaxiale

➤ Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{\delta}}) \Rightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} l + \frac{l^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -m - \frac{m^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -m - \frac{m^2}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = l + \frac{l^2}{2} \\ L_2 = -m - \frac{m^2}{2} \\ L_3 = -m - \frac{m^2}{2} \end{cases}$$

➤ Tenseur des déformations linéarisé :

$$l < 1 \Rightarrow l^2 \ll 1 \quad \& \quad m < 1 \Rightarrow m^2 \ll 1$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = l \\ \varepsilon_2 = -m \\ \varepsilon_3 = -m \end{cases}$$

.../...

□ Applications typiques

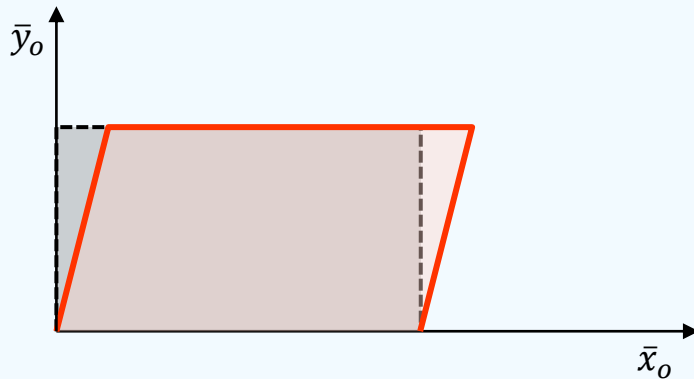
- **Extension homogène** : Exemple d'une éprouvette en traction uniaxiale

➤ Remarques :

- Le champ des déformations est donc constant et ne présente pas de distorsion dans les axes $\bar{x}_o, \bar{y}_o, \bar{z}_o$, ce qui signifie que les axes correspondant aux directions principales de transformation et les dilatations correspondantes sont donc principales.
- $det(\bar{\bar{F}}) = (1 + l)(1 - m)(1 - m) = 1 + l - 2m - 2m\cancel{l} - 4l\cancel{m}^2$
 $\Rightarrow det(\bar{\bar{F}}) = 1 + l - 2m \neq 0$
- La déformation volumique : $\varepsilon_v = 1 - det(\bar{\bar{F}})$
 $\Rightarrow \varepsilon_v = l - 2m = (1 - 2\nu)\varepsilon_x \quad | \quad \nu - \text{Coefficient de Poisson}$

□ Applications typiques

- **Glissement simple** : Exemple d'une éprouvette en cisaillement simple



Un glissement simple est réalisé lorsque le déplacement d'un point du milieu déformable considéré se produit parallèlement à un axe (ex. // à $\bar{x}_0$) et proportionnellement à cet axe.

➤ Champ de déplacement :

$$\begin{cases} x = x_0 + 2gy_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases} \quad | \quad g > 0 \quad \& \quad g < 1 \quad (\text{Petits déplacements})$$

□ Applications typiques

- **Glissement simple** : Exemple d'une éprouvette en cisaillement simple

➤ Gradient de transformation :

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\delta}} + \overline{\text{grad}}(\bar{u}) \Rightarrow F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_{oj}} \quad | \quad \bar{u} = \bar{x} - \bar{x}_o = \begin{Bmatrix} 2gy_o \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{xx} = 1 \\ F_{xy} = 2g \\ F_{xz} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} F_{yx} = 0 \\ F_{yy} = 1 \\ F_{yz} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} F_{zx} = 0 \\ F_{zy} = 0 \\ F_{zz} = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 2g & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ Tenseur des dilatations :

$$\bar{\bar{C}} = {}^t\bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{F}} \Rightarrow C_{ij} = F_{ki}F_{kj}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2g & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2g & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2g & 0 \\ 2g & 1 + 4g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.../...

□ Applications typiques

- **Glissement simple** : Exemple d'une éprouvette en cisaillement simple

➤ Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\bar{\bar{L}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{C}} - \bar{\bar{\delta}}) \Rightarrow L_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \Rightarrow \bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 2g^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ Tenseur des déformations linéarisé :

$$g < 1 \Rightarrow g^2 \ll 1 \Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +g \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -g \end{cases}$$

➤ Remarque :

$$\det(\bar{\bar{F}}) = 1 \Rightarrow \text{Pas de variation de volume (Cisaillement pur)}$$

⇒ Il n'y a donc pas de dilatation, mais uniquement distorsion des axes. Les dilatations principales sont $\pm g$ et les directions principales font 45° avec les axes.

□ Applications typiques

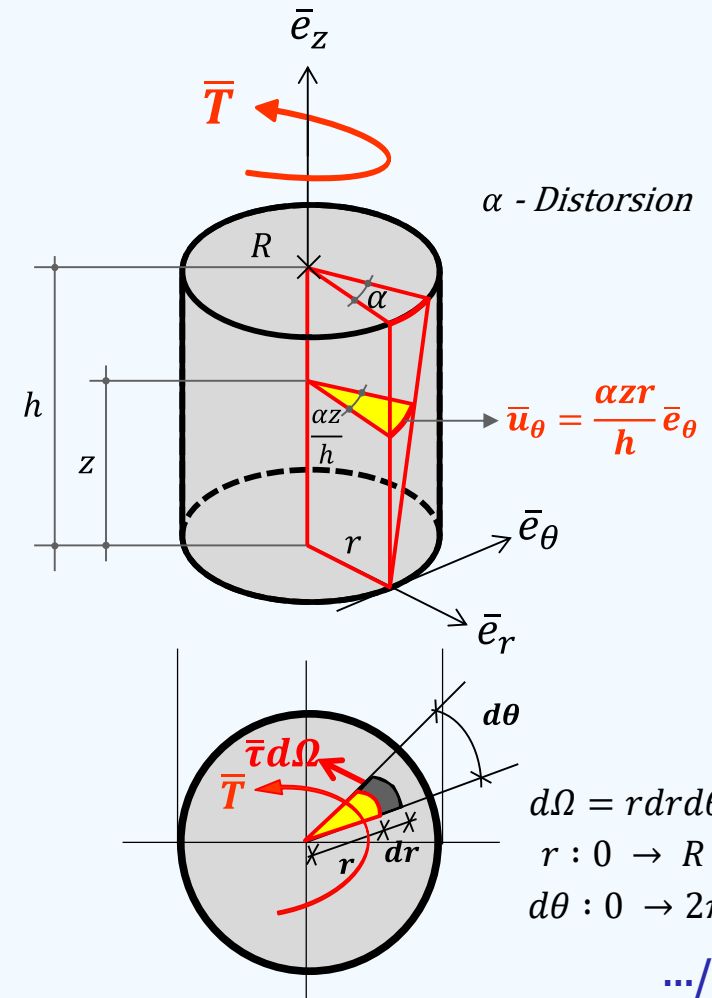
- **Torsion simple** : Exemple d'une éprouvette cylindrique en torsion simple

La torsion simple d'un cylindre consiste à faire subir à chaque point d'une section de celui-ci une rotation autour de l'axe proportionnellement à la côte de ladite section.

➤ Champ de déplacement :

$$\begin{cases} r = r_o \\ \theta = \theta_o + az_o \\ z = z_o \end{cases} \quad | \quad a < 1 \text{ (constante)}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \bar{x} - \bar{x}_o = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r - r_o \\ \theta - \theta_o \\ z - z_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ az_o \\ 0 \end{Bmatrix}$$



□ Applications typiques

- **Torsion simple** : Exemple d'une éprouvette cylindrique en torsion simple

➤ Utilisation des coordonnées cylindriques (Formules du $d\bar{S}^2$) :

$$d\bar{S}_o = \left\{ \begin{matrix} dr_o \\ r_o d\theta_o \\ dz_o \end{matrix} \right\} / (\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z) \xrightarrow{\bar{F}} d\bar{S} = \left\{ \begin{matrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{matrix} \right\} / (\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$$

$$\Rightarrow dS_o^2 = dr_o^2 + r_o^2 d\theta_o^2 + dz_o^2 \quad \& \quad dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$\text{Or : } \begin{cases} r = r_o \\ \theta = \theta_o + a z_o \\ z = z_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dr = dr_o \\ d\theta = d\theta_o + a dz_o \\ dz = dz_o \end{cases} \quad (a - \text{constante})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dS^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 = dr_o^2 + r_o^2 (d\theta_o + a dz_o)^2 + dz_o^2 \\ &= dr_o^2 + r_o^2 d\theta_o^2 + 2ar_o^2 d\theta_o dz_o + a^2 r_o^2 dz_o^2 + dz_o^2 \\ &= (dr_o^2 + r_o^2 d\theta_o^2 + dz_o^2) + 2ar_o^2 d\theta_o dz_o + a^2 r_o^2 dz_o^2 \\ &= dS_o^2 + 2ar_o^2 d\theta_o dz_o + a^2 r_o^2 dz_o^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dS^2 - dS_o^2 = 2ar_o^2 d\theta_o dz_o + a^2 r_o^2 dz_o^2$$

.../...

□ Applications typiques

- **Torsion simple** : Exemple d'une éprouvette cylindrique en torsion simple

Sachant que : $\bar{V} \cdot \bar{W} - \bar{V}_o \cdot \bar{W}_o = \bar{V}_o \cdot 2\bar{L} \cdot \bar{W}_o \Rightarrow dS^2 - dS_o^2 = d\bar{S}_o \cdot 2\bar{L} \cdot d\bar{S}_o$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \quad d\bar{S}_o \cdot 2\bar{L} \cdot d\bar{S}_o &= 2\{dr_o \quad r_o d\theta_o \quad dz_o\} \begin{bmatrix} L_{rr} & L_{r\theta} & L_{rz} \\ L_{r\theta} & L_{\theta\theta} & L_{\theta z} \\ L_{rz} & L_{\theta z} & L_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dr_o \\ r_o d\theta_o \\ dz_o \end{Bmatrix} \\
 &= 2\{dr_o \quad r_o d\theta_o \quad dz_o\} \begin{Bmatrix} L_{rr}dr_o + L_{r\theta}r_o d\theta_o + L_{rz}dz_o \\ L_{r\theta}dr_o + L_{\theta\theta}r_o d\theta_o + L_{\theta z}dz_o \\ L_{rz}dr_o + L_{\theta z}r_o d\theta_o + L_{zz}dz_o \end{Bmatrix} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} L_{rr}dr_o^2 + L_{r\theta}r_o dr_o d\theta_o + L_{rz}dr_o dz_o \\ + \\ L_{r\theta}r_o dr_o d\theta_o + L_{\theta\theta}r_o^2 d\theta_o^2 + L_{\theta z}r_o d\theta_o dz_o \\ + \\ L_{rz}dr_o dz_o + L_{\theta z}r_o d\theta_o dz_o + L_{zz}dz_o^2 \end{pmatrix} \\
 &= \cancel{2L_{rr}dr_o^2} + \cancel{4L_{r\theta}r_o dr_o d\theta_o} + \cancel{4L_{rz}dr_o dz_o} + \cancel{2L_{\theta\theta}r_o^2 d\theta_o^2} + \underline{4L_{\theta z}r_o d\theta_o dz_o} + \underline{\underline{2L_{zz}dz_o^2}} \\
 \blacksquare \quad dS^2 - dS_o^2 &= \underline{2ar_o^2 d\theta_o dz_o} + \underline{\underline{a^2 r_o^2 dz_o^2}}
 \end{aligned}$$

.../...

□ Applications typiques

- **Torsion simple** : Exemple d'une éprouvette cylindrique en torsion simple

$$\Rightarrow L_{rr} = 0, L_{r\theta} = 0, L_{rz} = 0,$$

$$L_{\theta\theta} = 0, L_{\theta z} = \frac{ar_o}{2}, L_{zz} = \frac{(ar_o)^2}{2}$$

➤ Tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} L_{rr} & L_{r\theta} & L_{rz} \\ L_{r\theta} & L_{\theta\theta} & L_{\theta z} \\ L_{rz} & L_{\theta z} & L_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{L}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ar_o}{2} \\ 0 & \frac{ar_o}{2} & \frac{(ar_o)^2}{2} \end{bmatrix}$$

➤ Tenseur des déformations linéarisé :

$$a < 1 \Rightarrow a^2 \ll 1 \Rightarrow \bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ar_o}{2} \\ 0 & \frac{ar_o}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = +\frac{ar_o}{2} \\ \epsilon_2 = 0 \\ \epsilon_3 = -\frac{ar_o}{2} \end{cases}$$

□ Applications typiques

- **Torsion simple** : Exemple d'une éprouvette cylindrique en torsion simple

Autre approche : $d\bar{S} = dr\bar{e}_r + r d\theta\bar{e}_\theta + dz\bar{e}_z$ & $d\bar{S} = u_r\bar{e}_r + u_\theta\bar{e}_\theta + u_z\bar{e}_z$

Sachant que :
$$\begin{cases} r = r_o \\ \theta = \theta_o + az_o \\ z = z_o \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} u_r = r - r_o = 0 \\ u_\theta = r_o(\theta - \theta_o) = az_o \\ u_z = z - z_o = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\bar{u} = 0\bar{e}_r + ar_o z_o \bar{e}_\theta + 0\bar{e}_z$$

D'où :

$$\blacksquare \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r_o} = 0$$

$$\blacksquare \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_o} + \frac{u_r}{r_o} = 0$$

$$\blacksquare \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z_o} = 0$$

$$\blacksquare 2\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r_o} + \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_r}{\partial \theta_o} - \frac{u_\theta}{r_o} = az_o + 0 - az_o = 0$$

$$\blacksquare 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_z}{\partial \theta_o} + r_o \frac{\partial u_\theta}{\partial z_o} = 0 + ar_o = ar_o$$

$$\blacksquare 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z_o} + \frac{\partial u_z}{\partial r_o} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ar_o}{2} \\ 0 & \frac{ar_o}{2} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = +\frac{ar_o}{2} \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -\frac{ar_o}{2} \end{cases}$$

□ Applications typiques

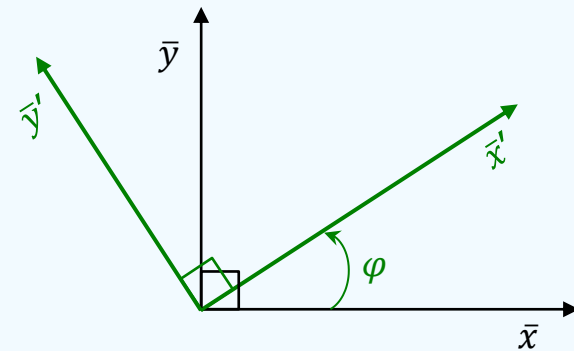
- **Déformations planes** : (Par analogie aux contraintes planes où $n_3 = 0$)

➤ **Tenseur des déformations planes** : Il est donné par l'expression suivante :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix} \quad / (\bar{x}, \bar{y})$$

dans laquelle :

- ϵ_x : Dilatation ou contraction suivant l'axe $\bar{x}$
- ϵ_y : Dilatation ou contraction suivant l'axe $\bar{y}$
- γ_{xy} : Distorsion angulaire $(\bar{x}, \bar{y})$



Tous calculs faits :

$$\begin{cases} \epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2(\varphi) + \epsilon_y \sin^2(\varphi) + \gamma_{xy} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \epsilon_{y'} = \epsilon_x \sin^2(\varphi) + \epsilon_y \cos^2(\varphi) + \gamma_{xy} \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \gamma_{x'y'} = \gamma_{xy}(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + 2(\epsilon_y - \epsilon_x) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\varphi) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi) \\ \epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos(2\varphi) - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2\varphi) \\ \gamma_{x'y'} = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \sin(2\varphi) + \gamma_{xy} \cos(2\varphi) \end{cases}$$

.../...

□ Applications typiques

- **Déformations planes** : (Par analogie aux contraintes planes où $n_3 = 0$)

➤ **Directions principales** : Elles sont définies par l'angle φ_p calculé comme suit :

$$\tan(2\varphi_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

➤ **Dilatations principales** : Elles sont données par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \end{cases}$$

➤ **Distorsion maximale** : Elle est donnée par la relation suivante :

$$\gamma_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

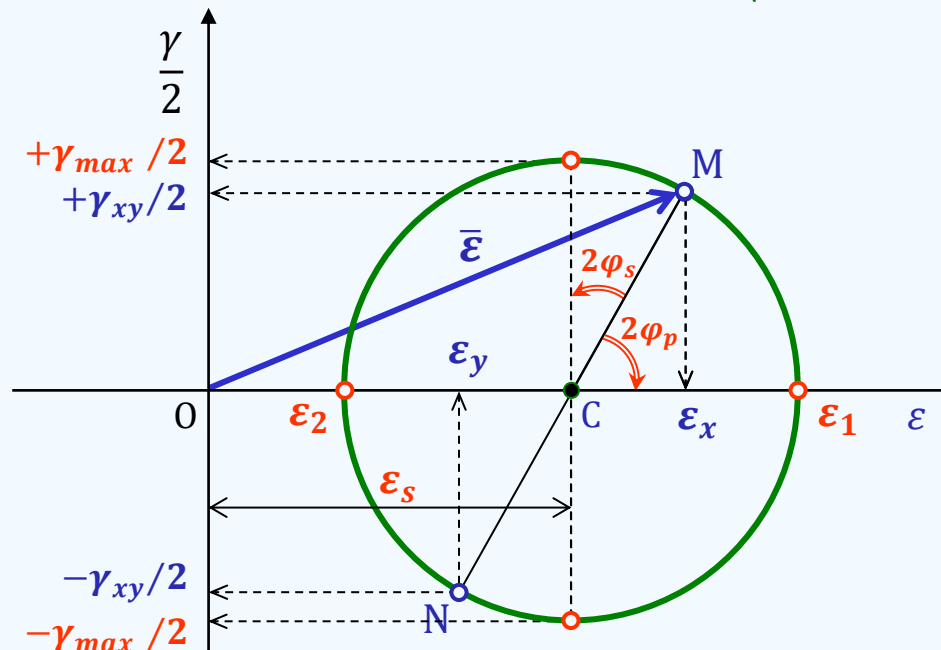
□ Applications typiques

- **Déformations planes** : (Par analogie aux contraintes planes où $n_3 = 0$)

➤ **Cercle de Mohr des déformations** : Il est décrit par l'équation suivante :

$$\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 = \left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2$$

⇒ Cercle de centre $C \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}, 0 \right)$ et de rayon $R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)^2}$



$$M \left(\varepsilon_x, +\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)$$

$$N \left(\varepsilon_y, -\frac{\gamma_{xy}}{2} \right)$$

.../...

□ Applications typiques

- **Déformations planes** : (Par analogie aux contraintes planes où $n_3 = 0$)

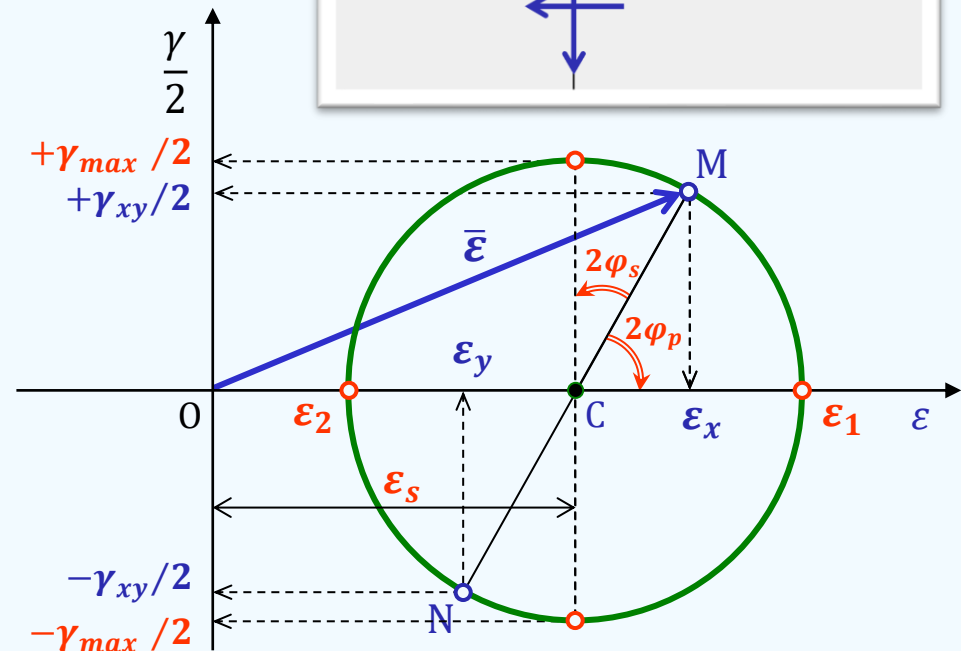
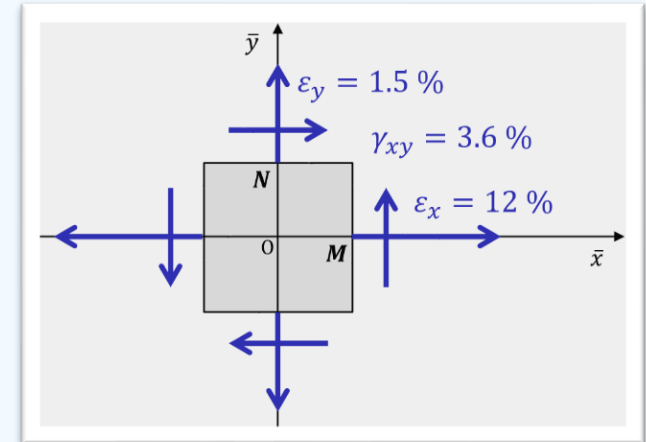
➤ Exemple de calcul :

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_x = 12 \% \\ \varepsilon_y = 1.5 \% \\ \gamma_{xy} = 3.6 \% \end{cases}$$

□ Résultats numériques

- $M(12, 1.8)$
- $N(1.5, -1.8)$
- $\varepsilon_1 = \varepsilon_{max} = 12.3 \%$
- $\varepsilon_2 = \varepsilon_{min} = 1.2 \%$
- $\varphi_p = 9.46^\circ$
- $\gamma_{max} = \pm 11.1 \%$
- $\varphi_s = 35.54^\circ$



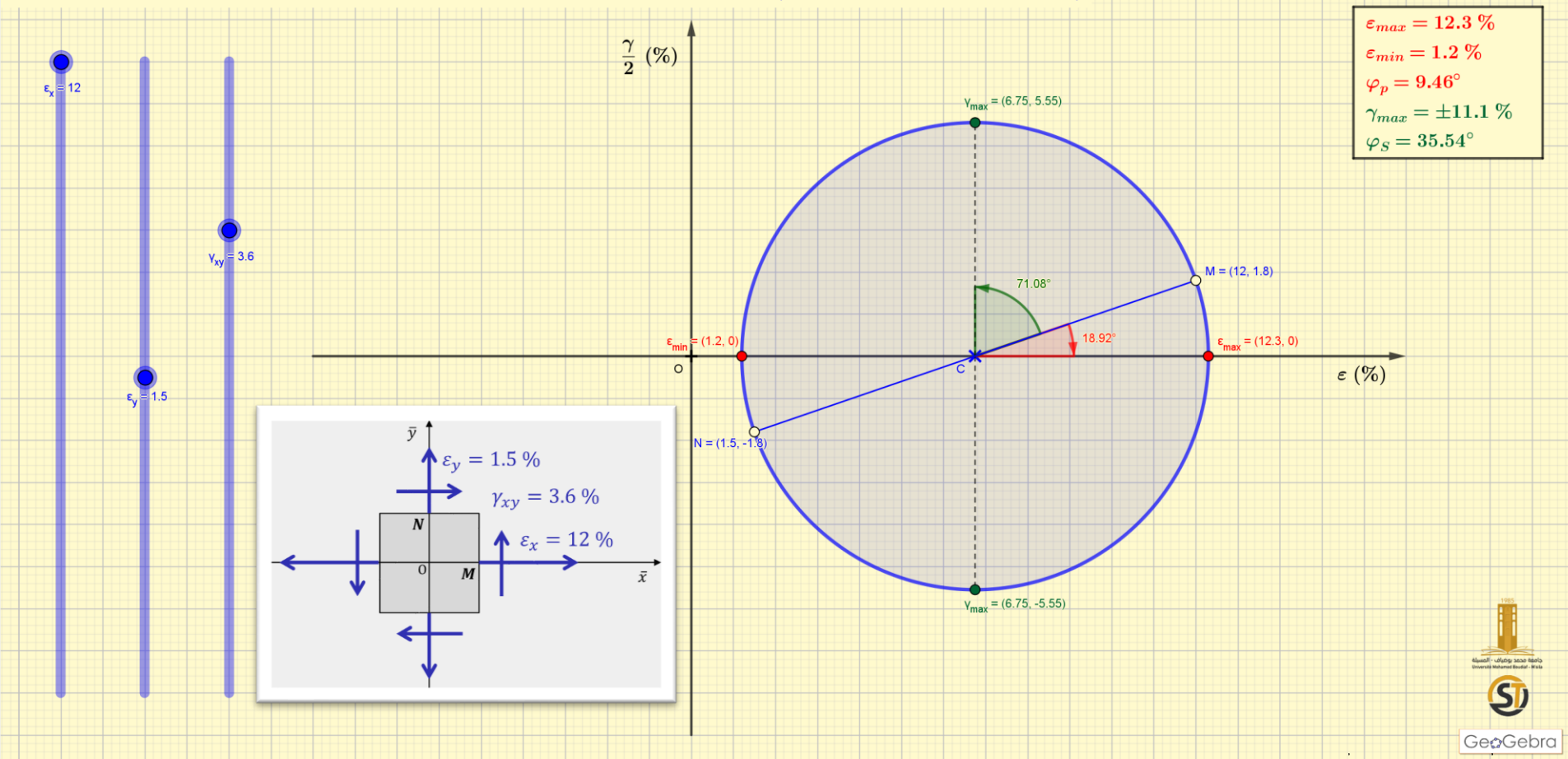
Applications typiques

- Déformations planes** : Analyse graphique via GeoGebra

MMC_CercleDeMohrDeformations_Chap4.ggb

Fichier Éditer Affichage Options Outils Fenêtre Aide

Analyse graphique des déformations planes à l'aide du cercle de Mohr (Mohamed Khemissa, 2026)



□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 45) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 45° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 45° et 90°.

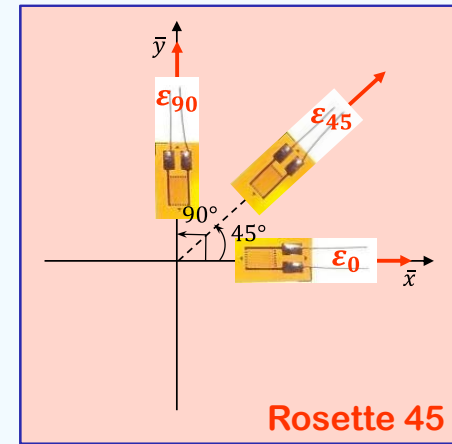
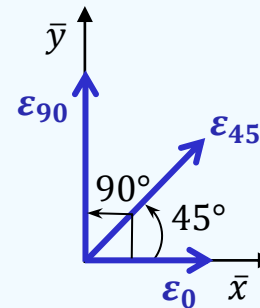
□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 5 \% \\ \varepsilon_{45} = 3.5 \% \\ \varepsilon_{90} = -3 \% \end{cases}$$

□ Résultats numériques

- $\varepsilon_0 = \varepsilon_x$
- $\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 45) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 45) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$
- $\varepsilon_{90} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 90) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 90) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y$

$$\text{Tous calculs faits : } \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = 5 \% \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90} = -3 \% \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90} = 5 \% \end{cases}$$

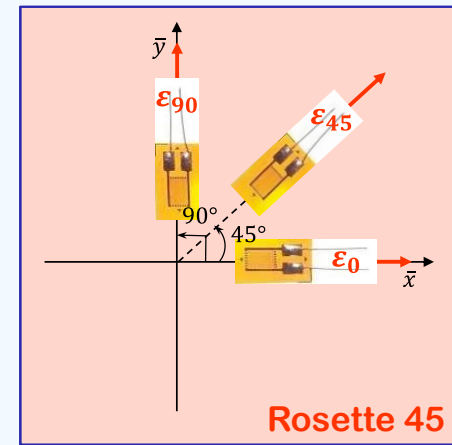
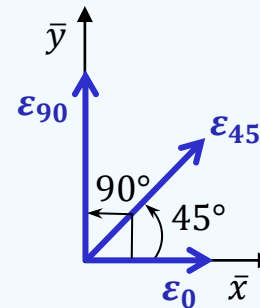


□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 45) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 45° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 45° et 90°.

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 5 \% \\ \varepsilon_{45} = 3.5 \% \\ \varepsilon_{90} = -3 \% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 5 \% \\ \varepsilon_y = -3 \% \\ \gamma_{xy} = 5 \% \end{cases}$$



□ Déformations principales

$$\varepsilon_{max/min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \frac{5-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{max} = 5.72 \% \quad , \quad \varepsilon_{min} = -3.72 \% \quad , \quad \varphi_p = 16^\circ$$

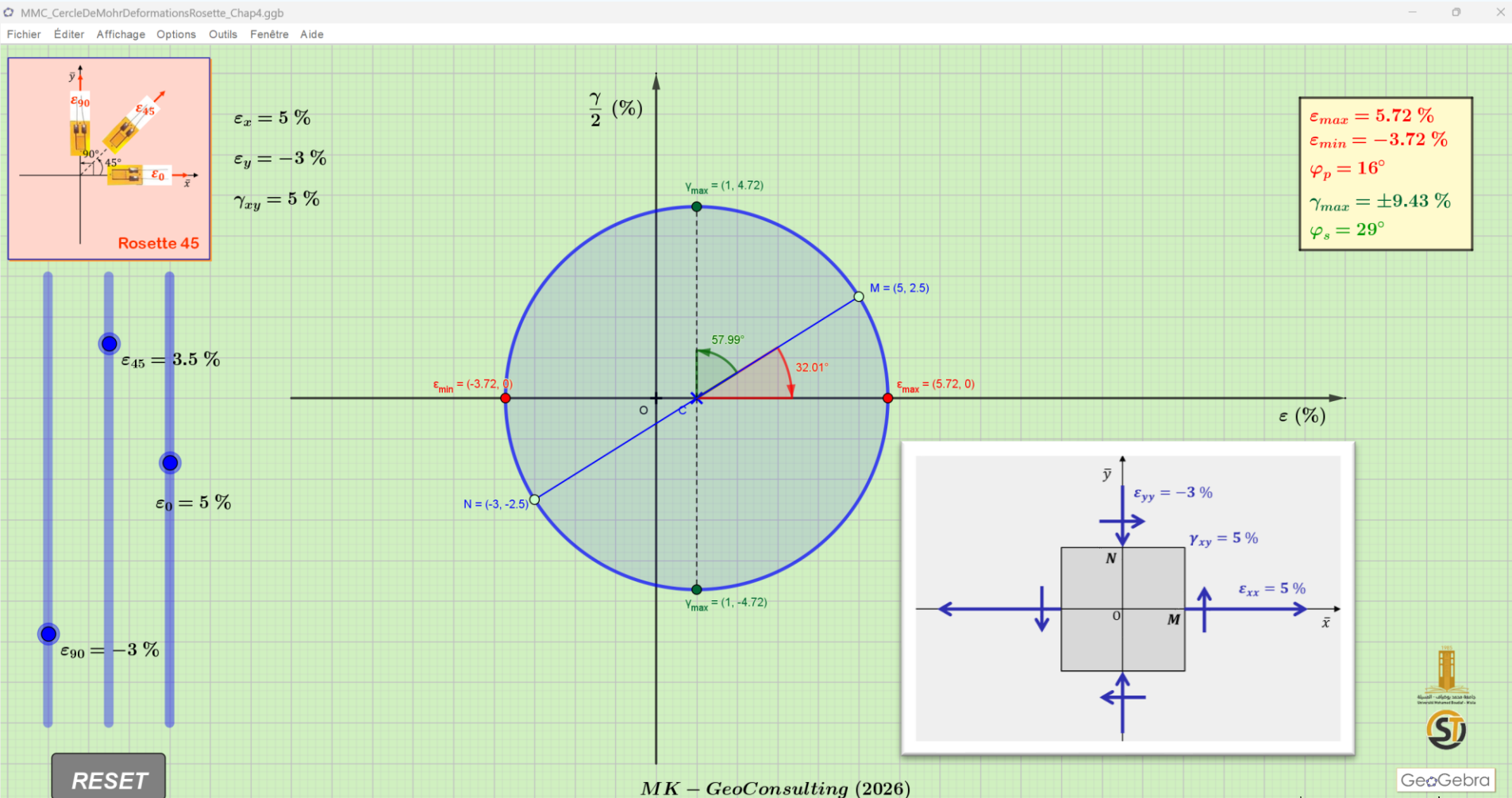
□ Distorsion maximale

$$\gamma_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{1.9+1.3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5.77}{2}\right)^2} = \pm 9.43 \%$$

.../...

Applications typiques

- Mesure des déformations (Rosette 45) :** Analyse graphique via GeoGebra

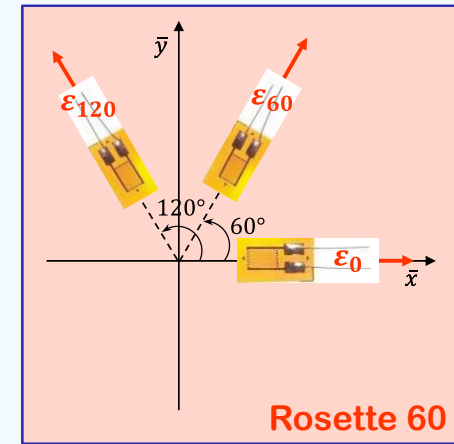
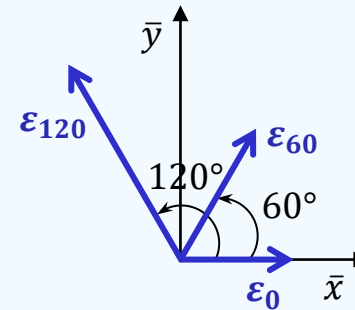


□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 60) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 60° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 60° et 120°.

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 1.9 \% \\ \varepsilon_{60} = 2 \% \\ \varepsilon_{120} = -3 \% \end{cases}$$



□ Résultats numériques

- $\varepsilon_0 = \varepsilon_x$
- $\varepsilon_{60} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 60) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 60) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$
- $\varepsilon_{120} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 120) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 120) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$

Tous calculs faits : $\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = 1.9 \% \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3} [2(\varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}) - \varepsilon_0] = -1.3 \% \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120}) = 5.77 \% \end{cases}$

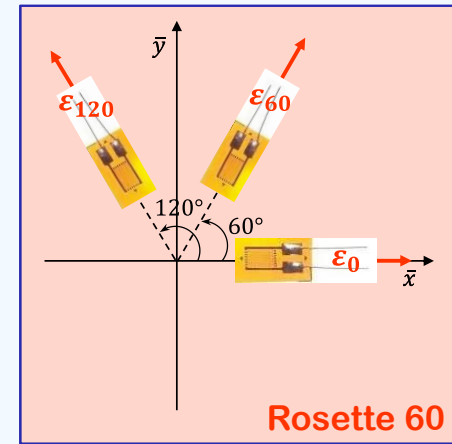
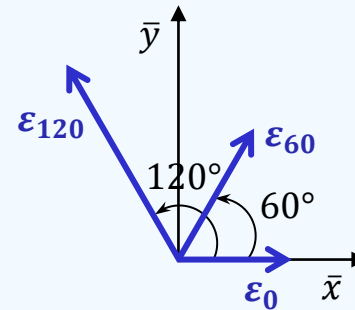
.../...

□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 60) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 60° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 60° et 120°.

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 1.9 \% \\ \varepsilon_{60} = 2 \% \\ \varepsilon_{120} = -3 \% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 1.9 \% \\ \varepsilon_y = -1.3 \% \\ \gamma_{xy} = 5.77 \% \end{cases}$$



□ Déformations principales

$$\varepsilon_{max/min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \frac{1.9 - 1.3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1.9 + 1.3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5.77}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{max} = 3.60 \% \quad , \quad \varepsilon_{min} = -3.00 \% \quad , \quad \varphi_p = 30.5^\circ$$

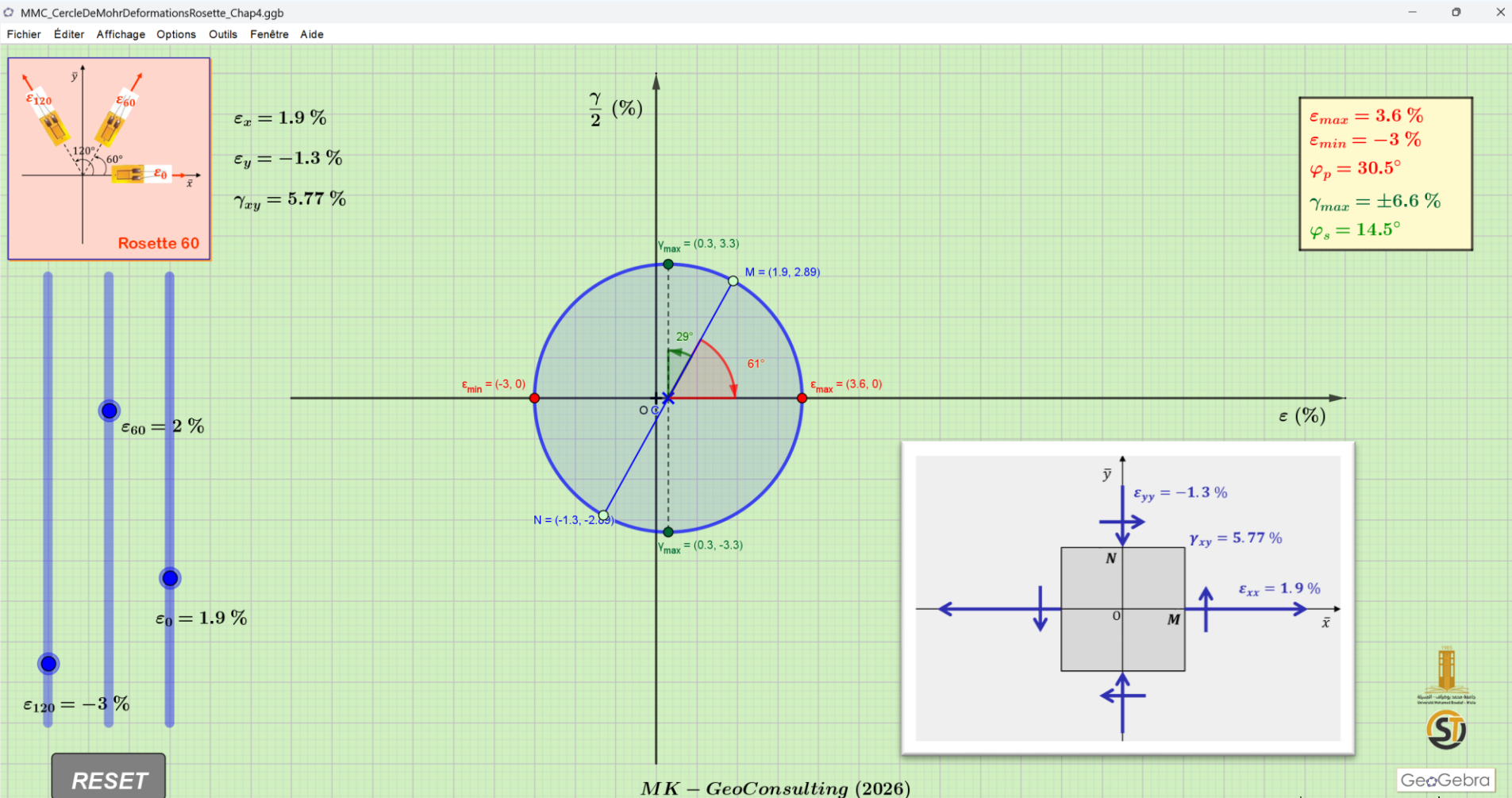
□ Distorsion maximale

$$\gamma_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{1.9 + 1.3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5.77}{2}\right)^2} = \pm 6.60 \%$$

.../...

Applications typiques

- Mesure des déformations (Rosette 60) :** Analyse graphique via GeoGebra



□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 120) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 120° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 120° et 240°.

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 10 \% \\ \varepsilon_{120} = 8 \% \\ \varepsilon_{240} = 1.5 \% \end{cases}$$

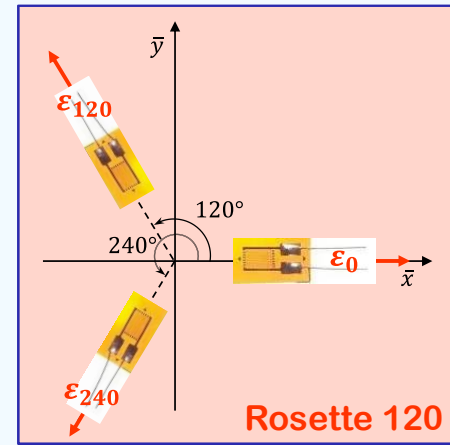
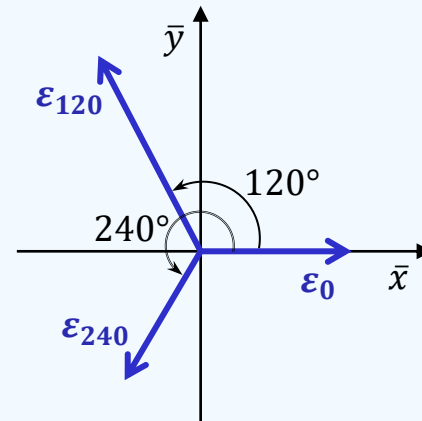
□ Résultats numériques

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_{120} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 120) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 120) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{240} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos(2 \times 240) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin(2 \times 240) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \gamma_{xy}$$

$$\text{Tous calculs faits : } \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_0 = 10 \% \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3} [2(\varepsilon_{120} + \varepsilon_{240}) - \varepsilon_0] = 3 \% \\ \gamma_{xy} = -\frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{120} - \varepsilon_{240}) = -7.51 \% \end{cases}$$



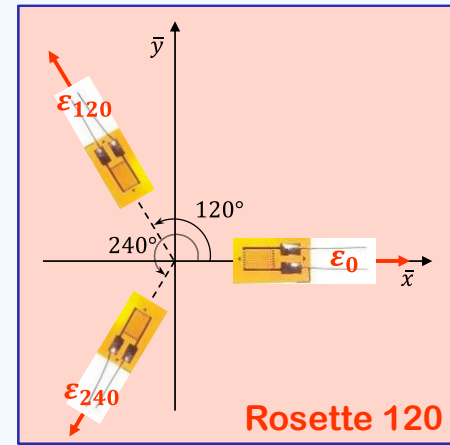
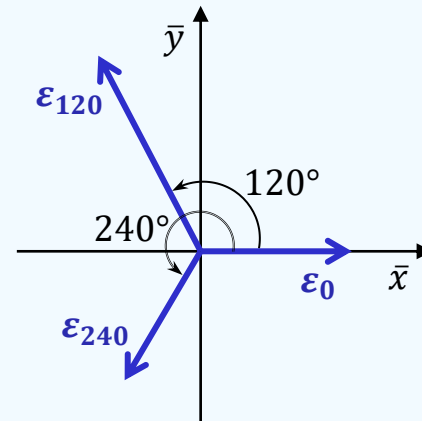
.../...

□ Applications typiques

- **Mesure des déformations (Rosette 120) :** Jauges de déformation en forme de rosette à 120° permettant de mesurer les dilatations suivant 0°, 120° et 240°.

□ Données

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 10 \% \\ \varepsilon_{120} = 8 \% \\ \varepsilon_{240} = 1.5 \% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = 10 \% \\ \varepsilon_y = 3 \% \\ \gamma_{xy} = -7.51 \% \end{cases}$$



□ Déformations principales

$$\varepsilon_{max/min} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \frac{10+3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7.51}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{max} = 11.63 \% \quad , \quad \varepsilon_{min} = 1.37 \% \quad , \quad \varphi_p = -23.5^\circ$$

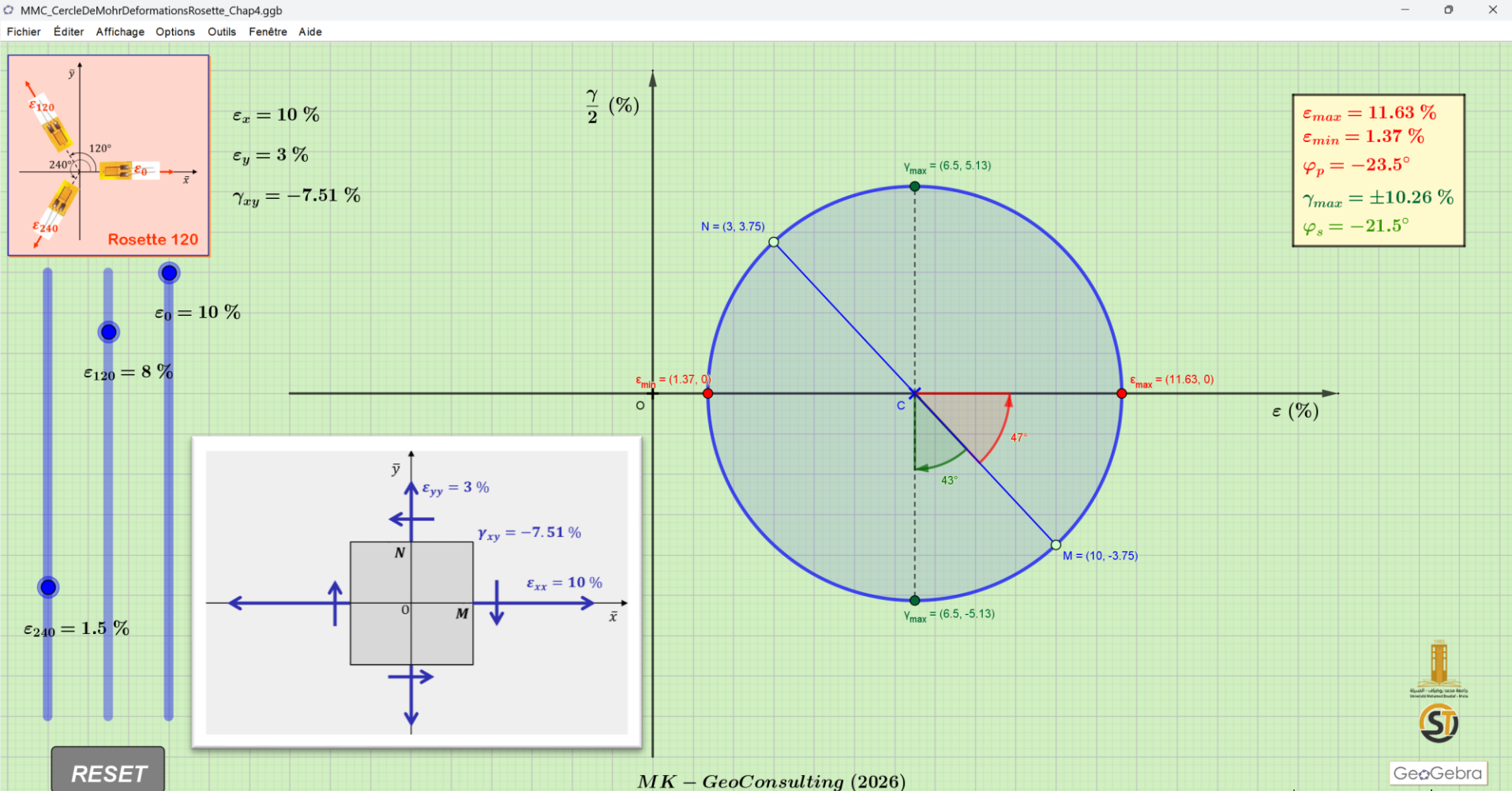
□ Distorsion maximale

$$\gamma_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{1.9+1.3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5.77}{2}\right)^2} = \pm 10.26 \%$$

.../...

Applications typiques

- Mesure des déformations (Rosette 120) :** Analyse graphique via GeoGebra



Merci de votre attention

Fin du Quatrième Chapitre

EXERCICES

Ex. 1 Dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, les composantes du champ de déplacement $\bar{u}$ d'un point matériel appartenant à un solide déformable sont :

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = k(x_2 + x_3) \\ u_2 = k(x_3 + x_1) \\ u_3 = k(x_1 + x_2) \end{cases},$$

où k désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique ($k > 0$).

- A. Déterminer le gradient de transformation $\bar{F}$, le tenseur des dilatations de Cauchy $\bar{C}$, le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{L}$, le tenseur des déformations $\bar{S}$, le tenseur de dilatation pure $\bar{\Delta}$ et le tenseur des rotations $\bar{R}$. Déduire les parties symétrique $\bar{\varepsilon}$ et antisymétrique $\bar{\omega}$ du gradient de transformation. Commenter les résultats trouvés.
- B. Déterminer par calcul direct, dans l'hypothèse d'une transformation infinitésimale, le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$, les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 2 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ d'un point matériel appartenant à un solide déformable défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = kx_2 \\ u_2 = kx_3 \\ u_3 = kx_1 \end{cases},$$

où k désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique ($k > 0$).

- Calculer le gradient de transformation $\bar{\bar{F}}$, le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et le tenseur des rotations $\bar{\bar{\omega}}$. Déterminer ensuite le vecteur polaire $\bar{\omega}$, l'angle de rotation θ et l'axe $\bar{h}$ correspondant. Commenter les résultats trouvés.
- Calculer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ du tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\varepsilon}}$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 3 Soit le champ de déplacement $\bar{u}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{u} = \begin{cases} u_1 = kx_1x_2 \\ u_2 = kx_1x_2 \\ u_3 = 2k(x_1 + x_2)x_3 \end{cases},$$

où k désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique ($k > 0$).

Construire le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$, puis déterminer au point $P(1,0,0)$ les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Ex. 4 Soit le tenseur des déformations $\bar{\varepsilon}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix},$$

où k désigne une constante positive petite pour assurer la linéarité géométrique ($k > 0$).

Calculer les invariants du tenseur des déformations linéarisé E_1, E_2 et E_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante et déterminer les déformations principales $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ correspondantes et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$. Tracer ensuite le tricerclé de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 5 Soit le champ de vitesse $\bar{v}$ défini dans une base orthonormée $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$\bar{v} = \begin{cases} v_1 = 2x_1 - x_2 \\ v_2 = x_1 + 3x_2 \\ v_3 = -2x_3 \end{cases},$$

Calculer le gradient du champ de vitesse $\bar{\bar{V}}$, le tenseur taux de déformation $\bar{\bar{D}}$ et le tenseur taux de rotation $\bar{\bar{\Omega}}$. Déterminer ensuite le vecteur polaire $\bar{\omega}$, l'angle de rotation θ et l'axe $\bar{h}$ correspondant.

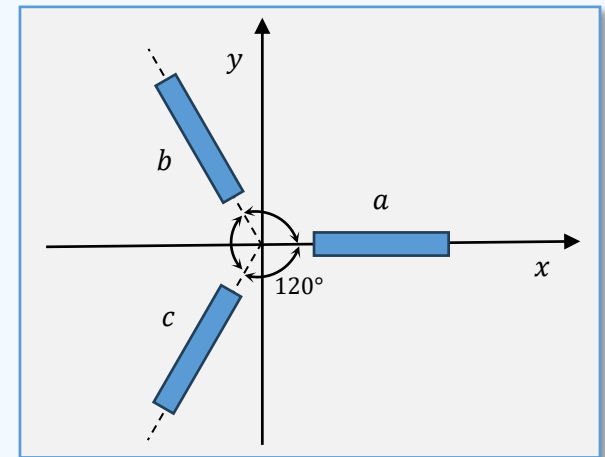
Ex. 6 Trois jauges de déformation a, b et c faisant entre-elles successivement un angle de 120° sont collées sur une plaque sollicitée dans son plan. On mesure les trois dilatations $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ et ε_c .

On demande de :

1. Déterminer les déformations $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ et γ_{xy} , puis déduire le tenseur $\bar{\bar{\varepsilon}}$ correspondant.
2. Calculer les déformations principales ε_{max} et ε_{min} , ainsi que leurs directions $\bar{n}_1$ et $\bar{n}_2$.
3. Tracer le cercle de Mohr des déformations, puis déduire la distorsion maximale γ_{max} correspondante.

Application numérique :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 = 10 \% \quad ; \quad \varepsilon_b = \varepsilon_{120} = -1 \% \quad ; \quad \varepsilon_c = \varepsilon_{240} = 4.5 \%$$



TRAVAIL PERSONNEL

Soit l'état plan des déformations représenté ci-dessous. On demande de représenter le cercle de Mohr des déformations, puis de déduire graphiquement les déformations principales ε_1 et ε_2 et l'angle de rotation θ_p correspondant, ainsi que la distorsion maximale γ_{max} et l'angle de rotation θ_s correspondant.

