

Chapitre Trois

Théorie de l'état des contraintes

- ❑ **Définition des contraintes**
 - Contrainte vectorielle
 - Contrainte normale
 - Contrainte tangentielle
- ❑ **Tenseur des contraintes**
 - Définition
 - Symétrie du tenseur des contraintes
 - Conditions de surface
 - Contraintes principales
 - Invariants du tenseur des contraintes
 - Directions principales
 - Déviateur des contraintes
 - Tricercle de Mohr des contraintes
- ❑ **Exemples d'états de contraintes**
- ❑ **Mesure des contraintes**
- ❑ **Applications typiques**
- ❑ **Exercices**



DÉFINITION DES CONTRAINTES

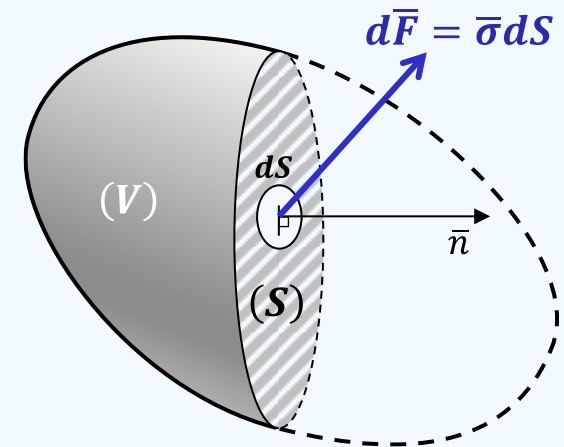
□ Définition des contraintes

- **Contrainte vectorielle :** Considérons un milieu matériel quelconque de volume V ni électrisé, ni aimanté. Soit une facette élémentaire dS appartenant la facette S de ce milieu, orientée par la normale unitaire $\bar{n}$. L'action de contact exercée par la partie du milieu située du côté positif de $\bar{n}$ sur celle située du côté négatif est représentée par une force élémentaire $d\bar{F}$ proportionnelle à dS .

On écrit alors (Postulat de Cauchy) :

$$\bar{\sigma} = \lim_{dS \rightarrow 0} \left(\frac{d\bar{F}}{dS} \right)$$

où $\bar{\sigma}$ désigne la contrainte vectorielle s'exerçant sur la facette élémentaire dS .



Remarques :

- De façon générale, $d\bar{F}$ et $\bar{\sigma}$ peuvent avoir une orientation quelconque par rapport à $\bar{n}$, contrairement au cas d'un liquide au repos où la force et la pression correspondante sont toujours perpendiculaires à la facette.
- La contrainte vectorielle $\bar{\sigma}$, qui varie en général d'un point à l'autre du milieu matériel, traduit donc macroscopiquement les actions de contact.

□ Définition des contraintes

- La contrainte vectorielle s'exerçant sur une facette dépend linéairement de celle-ci. En un point P donné du milieu matériel, la contrainte vectorielle $\bar{\sigma}$ peut également varier quand le temps t s'écoule si ce milieu se déforme et suivant l'orientation $\bar{n}$ de la facette élémentaire dS . On écrit alors :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(P, \bar{n}, t)$$

Cette contrainte vectorielle se décompose en :

- une composante normale à la facette élémentaire dS
- une composante tangentielle à la facette élémentaire dS
- Principe des actions mutuelles : $\bar{\sigma}(P, -\bar{n}, t) = -\bar{\sigma}(P, \bar{n}, t)$.
- Contrainte normale (σ_n)** : Elle est définie par :

$$\sigma_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}$$

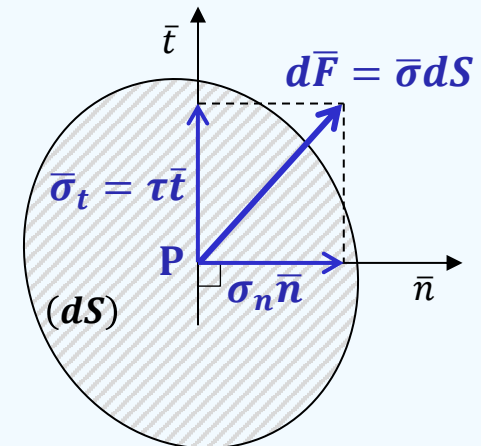
où $\bar{n}$ désigne la normale à la facette élémentaire dS .

Convention de signe : Si $\sigma_n > 0$, on a une traction, sinon une compression.

- Contrainte tangentielle (τ)** : Elle est définie par :

$$\tau = |\bar{\sigma}_t| = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \sigma_n^2}$$

qu'on appelle aussi contrainte de cisaillement ou scission.



TENSEUR DES CONTRAINTES

□ Tenseur des contraintes

- **Définition :** Considérons un élément matériel en forme de tétraèdre dont trois des arêtes forment un trièdre orthonormé, tels que :

- Sur les facettes orthogonales s'exercent les contraintes vectorielles suivantes :

- $\bar{\sigma}_1 = {}^t\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}\}$ sur $dS_1 = dS_{OBC} \perp \bar{e}_1$
- $\bar{\sigma}_2 = {}^t\{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}\}$ sur $dS_2 = dS_{OAC} \perp \bar{e}_2$
- $\bar{\sigma}_3 = {}^t\{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}\}$ sur $dS_3 = dS_{OAB} \perp \bar{e}_3$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}_i = \sigma_{ij} \bar{e}_j$$

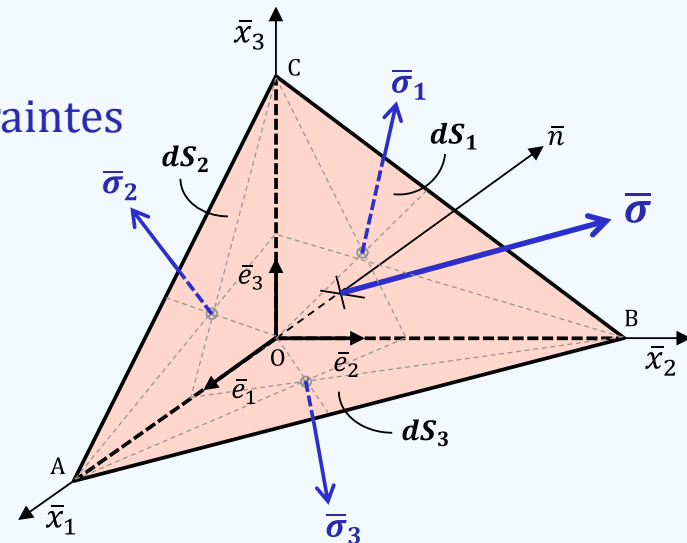
- Sur la facette orientée de $\bar{n}$ s'exerce la contrainte vectorielle suivante :

- $\bar{\sigma} = {}^t\{\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$ sur $dS = dS_{ABC} \perp \bar{n} \Rightarrow \sigma_i = \bar{\sigma} \cdot \bar{e}_i$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = {}^t\{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}\} \Rightarrow \bar{\sigma} = (\sigma_{ij} n_i) \bar{e}_j$$

- $\Rightarrow$ Les contraintes σ_{ij} apparaissent alors comme les 9 composantes d'un tenseur du second ordre, appelé « Tenseur des contraintes », qui s'écrit :

$$\Rightarrow \sigma_i = \sigma_{ij} n_j \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$



□ Tenseur des contraintes

Démonstration : Si l'on néglige ici les actions intérieures et extérieures à distance qu'on peut considérer comme infiniment petits devant les actions de contact, l'équilibre du volume matériel élémentaire est donc assuré par la relation $d\bar{F} + d\bar{\phi} = \bar{0}$ tels que :

- $d\bar{F}_i = -\bar{\sigma}_i dS_i$ pour l'ensemble des facettes dS_1, dS_2 et dS_3 ($i = 1, 2, 3$)
- $d\bar{\phi} = \bar{\sigma} dS$ pour la facette dS orientée de $\bar{n}$

Posons : $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_i \bar{e}_j$ ($i = 1, 2, 3 ; j = 1, 2, 3$)

$$\Rightarrow \sigma_{ij} \bar{e}_j = \bar{\sigma}_i \bar{e}_j \bar{e}_j \quad | \quad \bar{e}_j \cdot \bar{e}_j = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_{ij} \bar{e}_j$$

$$\Rightarrow d\bar{F}_i = -\bar{\sigma}_i dS_i = -\sigma_{ij} \bar{e}_j dS_i$$

$$\Rightarrow d\bar{F} + d\bar{\phi} = -\bar{\sigma}_i dS_i + \bar{\sigma} dS = -\sigma_{ij} \bar{e}_j dS_i + \bar{\sigma} dS = \bar{0}$$

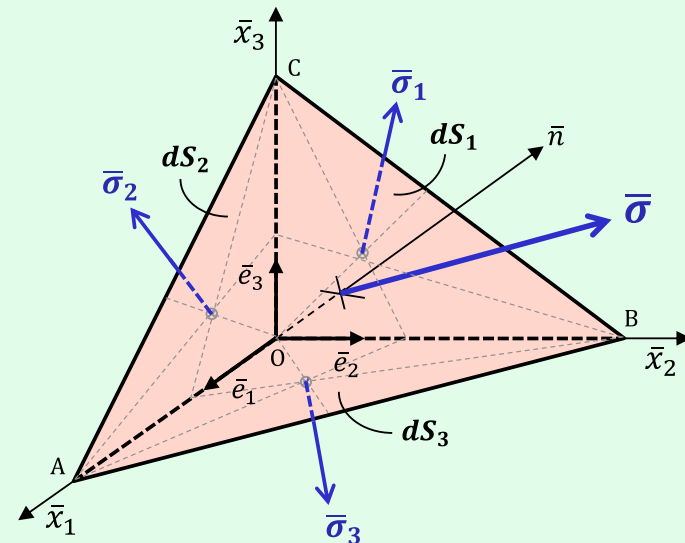
Sachant que : $dS_i = n_i dS$

$$\Rightarrow -\sigma_{ij} \bar{e}_j (n_i dS) + \bar{\sigma} dS = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = (\sigma_{ij} n_i) \bar{e}_j$$

Sachant que : $\sigma_i = \bar{\sigma} \cdot \bar{e}_i$ & $\bar{n} = n_i \bar{e}_i = n_j \bar{e}_j$

$$\Rightarrow \sigma_i = (\sigma_{ij} n_i) \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i = \sigma_{ij} n_i \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \sigma_{ij} n_j \bar{e}_j \cdot \bar{e}_j = \sigma_{ij} n_j \quad | \quad \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \bar{e}_j \cdot \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \sigma_{ij} n_j \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$



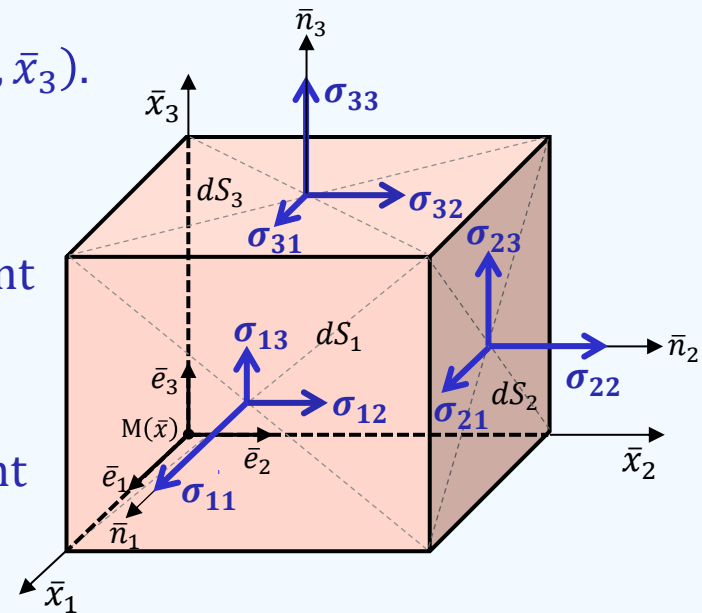
□ Tenseur des contraintes

Remarques : Vu ce qui précède, on notera ce qui suit :

- Le tenseur des contraintes s'écrit donc sous la forme matricielle suivante :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad / \quad (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

- Le tenseur des contraintes est ainsi défini en coordonnées d'Euler. Ses composantes dépendent généralement du point choisi dans le milieu matériel et bien entendu du temps si ce milieu n'est pas en équilibre. Ce sont elles qui traduisent les actions de contact dans les milieux continus déformables.
- Les composantes σ_{ii} de la diagonale désignent les contraintes normales.
- Les composantes $\sigma_{ij} \mid i \neq j$ désignent les contraintes tangentielles.
- Les composantes σ_{ij} sont complètement indépendantes des directions n_j , c'est-à-dire de l'orientation de la facette dS .



□ Tenseur des contraintes

- **Symétrie du tenseur des contraintes** : Considérons le volume V d'un milieu matériel quelconque en équilibre, limité par une surface S , soumis à :
 - des actions à distance s'exerçant sur la particule $(P, dm) \in V$ se réduisant à la force élémentaire $\bar{F}dm$, où $\bar{F}$ désigne la densité volumique de force et $dm = \rho dV$.
 - des actions de contact $\bar{\sigma}dS$ s'exerçant sur la surface, où $\bar{\sigma}$ désigne la contrainte vectorielle.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire :

- $\int_S \bar{\sigma}dS + \int_V \bar{F}dm = 0$ (Equilibre des forces)
- $\int_S (\overline{OP} \wedge \bar{\sigma})dS + \int_V (\overline{OP} \wedge \bar{F})dm = \bar{0}$ (Equilibre des moments)

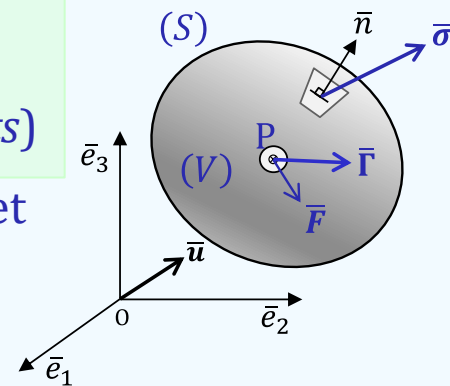
L'équilibre des forces conduit à l'équation générale d'équilibre et l'équilibre des moments conduit à l'équation suivante :

$$\sigma_{ij}\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j = \bar{0} \text{ pour } i \neq j \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma_{ji})\bar{e}_k = \bar{0}$$

$$\Rightarrow (\sigma_{12} - \sigma_{21})\bar{e}_3 + (\sigma_{23} - \sigma_{32})\bar{e}_1 + (\sigma_{31} - \sigma_{13})\bar{e}_2 = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \text{ \& } \sigma_{23} = \sigma_{32} \text{ \& } \sigma_{31} = \sigma_{13} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$\Rightarrow \text{Le tenseur des contraintes est donc symétrique : } \bar{\sigma} = {}^t\bar{\sigma}.$$



$$\bar{\sigma} = (\sigma_{ij}n_j)\bar{e}_j$$

$$\bar{F} = F_j\bar{e}_j$$

$$dm = \rho dV$$

□ Tenseur des contraintes

Démonstration : D'après les principes de la mécanique, résultante et moment résultant des actions de contact et à distance sont nuls, ce qui s'écrit :

➤ **Equilibre des forces** : Il est assuré par l'équation suivante :

$$\int_S \bar{\sigma} dS + \int_V \bar{F} dm = 0 \quad | \quad dm = \rho dV$$

$$\Rightarrow \int_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V \rho F_i dV = 0$$

En utilisant le théorème de la divergence, on aura :

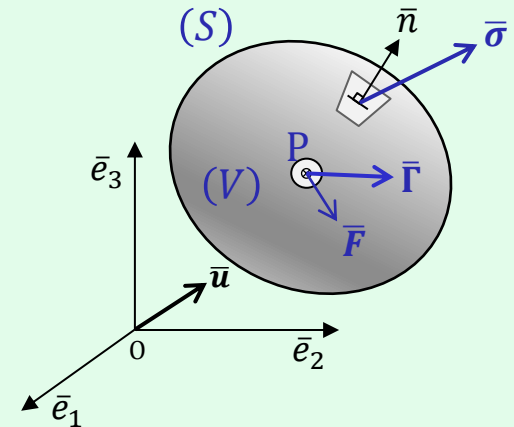
$$\int_V (\partial_j \sigma_{ij} + \rho F_i) dV = 0 \quad \forall V \quad | \quad \partial_j \sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j}$$

Le milieu matériel étant supposé connu, on déduit alors la relation locale suivante :

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho F_i = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad \overline{\text{div}}(\bar{\sigma}) + \rho \bar{F} = \bar{0}$$

⇒ C'est l'équation d'équilibre des milieux continus déformables.

Nota : Le champ des forces à distance étant donné, le tenseur des contraintes ne peut être quelconque, mais ne peut pas non plus être complètement déterminé par cette équation (il faut rajouter les conditions aux limites).



□ Tenseur des contraintes

- **Equilibre des moments :** Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface :

$$\int_V \{ \partial_j [\sigma_{ij} (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i] + \rho F_i (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i \} dV = 0 \quad \forall V$$

D'où, compte tenu de la continuité :

$$\partial_j [\sigma_{ij} (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i] + \rho F_i (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i = 0$$

$$\Rightarrow \partial_j \sigma_{ij} \times (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i + \sigma_{ij} \times \partial_j (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i + \rho F_i (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} \times \partial_j (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i + (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i \times (\partial_j \sigma_{ij} + \rho F_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} \times \partial_j (\bar{u} \wedge \overline{OP})_i = 0$$

Equation d'équilibre

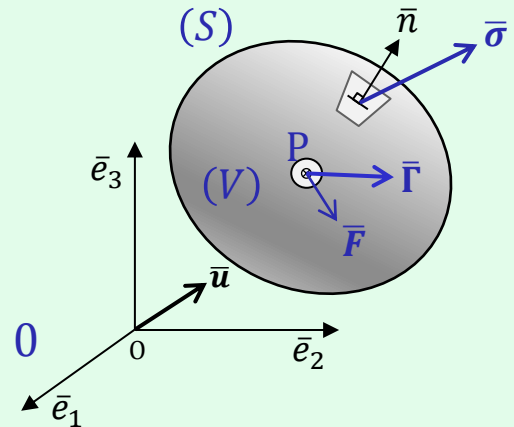
$$\Rightarrow \sigma_{ij} \times [\bar{u} \wedge \partial_j (\overline{OP})]_i = 0$$

$$\text{Sachant que : } \partial_j (\overline{OP}) = \bar{e}_j \Rightarrow [\bar{u} \wedge \partial_j (\overline{OP})]_i = (\bar{u} \wedge \bar{e}_i) \cdot \bar{e}_j = (\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j) \cdot \bar{u} \quad \forall \bar{u} \neq 0$$

Sachant que $\bar{u}$ est un vecteur quelconque non nul, on aura alors :

$$\sigma_{ij} \bar{e}_i \wedge \bar{e}_j = \bar{0} \quad \text{pour } i \neq j \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) \bar{e}_k = \bar{0} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

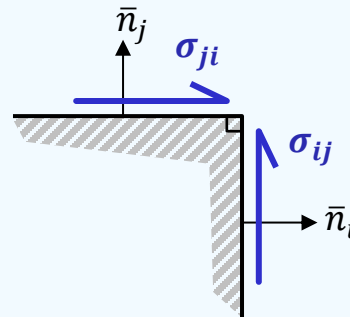
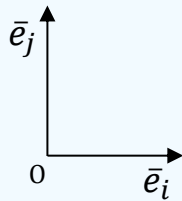
$$\Rightarrow \text{Le tenseur des contraintes est donc symétrique : } \bar{\sigma} = {}^t \bar{\sigma}.$$



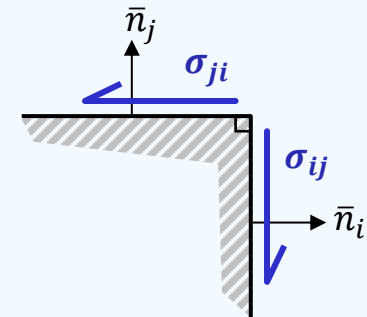
□ Tenseur des contraintes

- **Symétrie du tenseur des contraintes** : La symétrie du tenseur des contraintes est équivalente au théorème de réciprocité des contraintes tangentielles de Cauchy* qui en donne une interprétation physique :

« Les contraintes tangentielles agissant sur deux facettes normales entre elles sont réciproques, c'est-à-dire égales en module et peuvent être convergentes ou divergentes ».



Contraintes convergentes



Contraintes divergentes

$$|\sigma_{ij}| = |\sigma_{ji}| \quad | \quad i \neq j \quad \text{pour} \quad i = 1,2,3 \quad \& \quad j = 1,2,3$$

* Théorème de Cauchy

$$\bar{n}' \cdot \bar{\sigma} = \bar{n} \cdot \bar{\sigma}'$$

□ Tenseur des contraintes

- **Symétrie du tenseur des contraintes** : Ainsi, on affirme que dans les milieux continus déformables non électrisés et non aimantés, le tenseur des contraintes est symétrique. Il possède alors 6 composantes indépendantes :

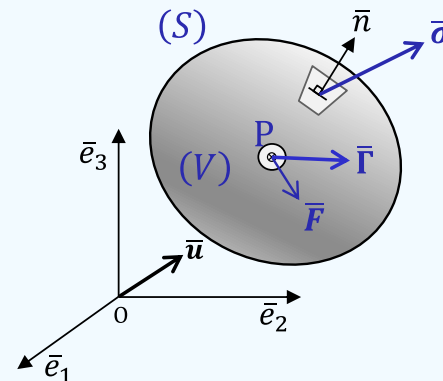
$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

- **Conditions de surface (Conditions aux limites)** : Elles expriment qu'en chaque point de la surface du milieu considéré (frontière avec le milieu extérieur), la force extérieure donnée $\bar{\Phi}dS$ agissant sur l'aire dS fait équilibre à la force intérieure $\sigma_i dS = \sigma_{ij}n_j dS$. D'où l'on peut écrire :

$$\Phi_i = \sigma_{ij}n_j$$

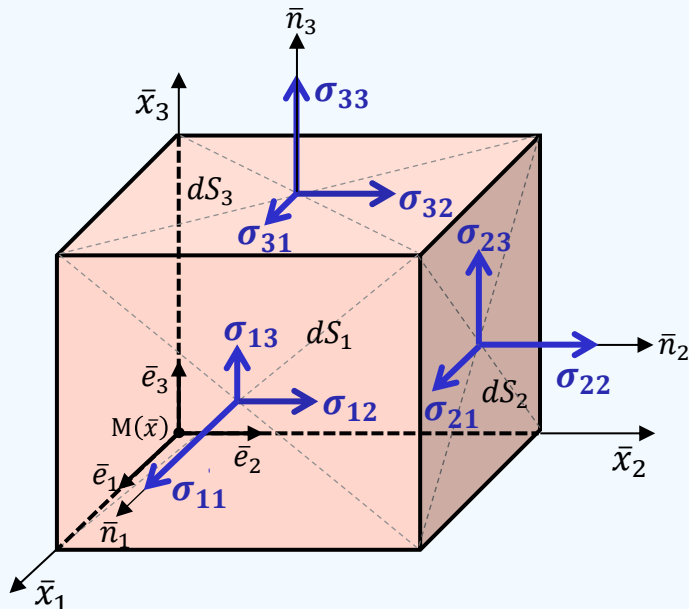


Contrainte vectorielle
extérieure

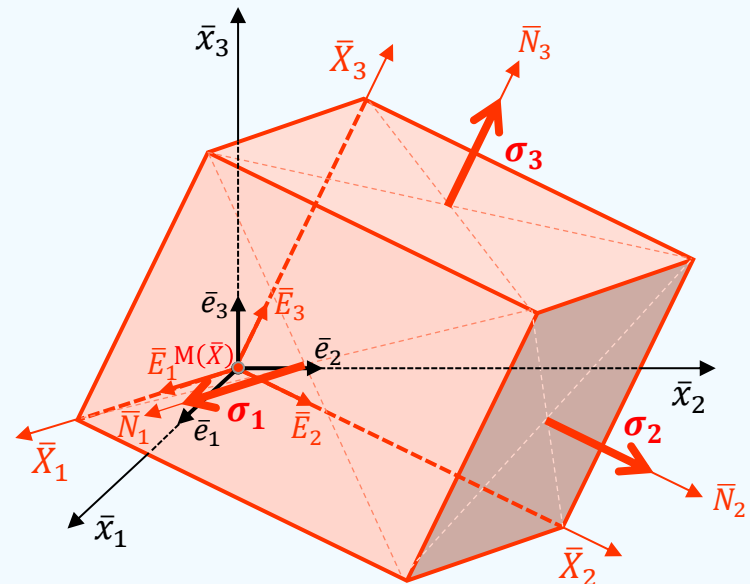


□ Tenseur des contraintes

- **Contraintes principales** : Le tenseur des contraintes, défini dans le repère courant $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, étant symétrique, on peut trouver un repère orthonormé $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, appelé repère principal, dans lequel sa matrice représentative est diagonale et les composantes σ_1, σ_2 et σ_3 correspondantes sont appelées contraintes principales.



Contraintes courantes
Repère courant



Contraintes principales
Repère principal

□ Tenseur des contraintes

- **Contraintes principales** : Le tenseur des contraintes, défini dans le repère courant $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, étant symétrique, on peut trouver un repère orthonormé $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$, appelé repère principal, dans lequel sa matrice représentative est diagonale et les composantes σ_1, σ_2 et σ_3 correspondantes sont appelées contraintes principales.

➤ **Tenseur des contraintes défini dans le repère courant $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:**

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} n_j \quad | \quad i = 1,2,3 \quad \& \quad j = 1,2,3$$

➤ **Tenseur des contraintes défini dans le repère principal $(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$:**

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \sigma_i \delta_{ij} n_j \quad | \quad i = 1,2,3 \quad \& \quad j = 1,2,3$$

Il en résulte que le cisaillement suivant un plan principal $(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$, $(\bar{X}_2, \bar{X}_3)$ ou $(\bar{X}_1, \bar{X}_3)$ est nul. La contrainte principale vectorielle correspondante est donc normale au plan principal sur lequel elle s'exerce.

□ Tenseur des contraintes

- **Contraintes principales** : Désignons par σ_i la contrainte principale agissant sur une facette principale de normale $\bar{N} = \bar{\delta}\bar{n}$. La contrainte vectorielle correspondante vaut donc $\sigma_i N_i = \sigma_i \delta_{ij} n_j$. Elle a aussi l'expression générale $\sigma_{ij} n_j$. D'où l'équation :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} n_j = \sigma_i \delta_{ij} n_j &\Rightarrow \sigma_{ij} n_j - \sigma_i \delta_{ij} n_j = 0 \\ &\Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij}) n_j = 0 \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

Cette relation représente un système de 3 équations linéaires et homogènes pour les coordonnées du vecteur $\bar{n}$. Comme $n_j \neq 0$ (solution triviale), le déterminant de cette condition s'écrit en posant $\sigma_i = \lambda$:

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

⇒ Le développement de ce déterminant fournit une équation du 3^{ème} degré en λ qui s'appelle : équation caractéristique du tenseur σ_{ij} . Elle s'écrit :

$$-\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0$$

où I_1, I_2 et I_3 désignent les invariants du tenseur des contraintes.

□ Tenseur des contraintes

Démonstration : Calculons le déterminant suivant :

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} - \sigma_{12} \begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} + \sigma_{13} \begin{vmatrix} \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} - \lambda) [(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}^2] - \sigma_{12} [\sigma_{12}(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{13}\sigma_{23}] + \sigma_{13} [\sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{13}(\sigma_{22} - \lambda)] = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11} - \lambda) (\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{22}\lambda - \sigma_{33}\lambda + \lambda^2 - \sigma_{23}^2) - \sigma_{12} (\sigma_{12}\sigma_{33} - \sigma_{12}\lambda - \sigma_{13}\sigma_{23}) + \sigma_{13} (\sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{22} + \sigma_{13}\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{22}\lambda - \sigma_{11}\sigma_{33}\lambda + \sigma_{11}\lambda^2 - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}\lambda + \sigma_{22}\lambda^2 + \sigma_{33}\lambda^2 - \lambda^3 + \sigma_{23}^2\lambda) - \sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}^2\lambda + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{13}^2\sigma_{22} + \sigma_{13}^2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2)\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{13}^2\sigma_{22} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2)\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = 0$$

.../...

□ Tenseur des contraintes

Démonstration : Calculons le déterminant suivant :

$$\det(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2)\lambda + \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = 0$$

Posons : • $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii}$

$$\bullet I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$$

$$\bullet I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = |\sigma_{ij}|$$

On déduit alors l'équation caractéristique :

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$$

où I_1, I_2 et I_3 désignent les invariants du tenseur des contraintes.

Les 3 racines $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ de cette équation désignent les contraintes principales.

□ Tenseur des contraintes

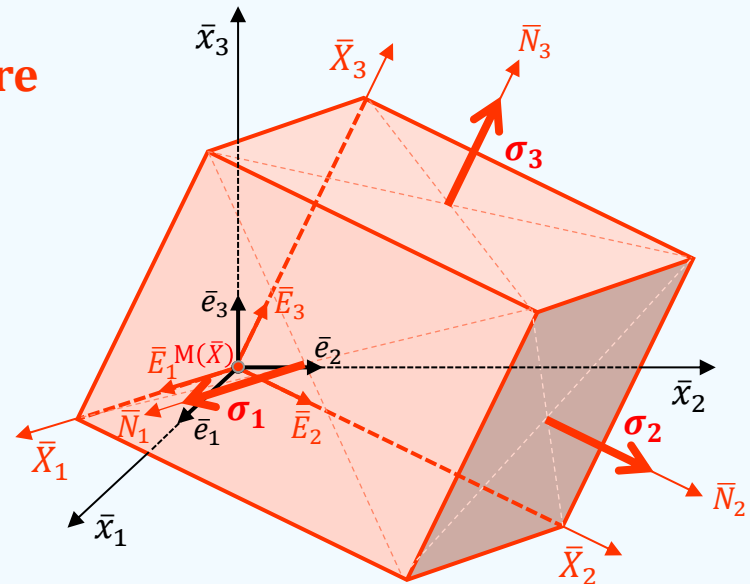
- **Contraintes principales** : Comme les contraintes principales existent réellement, les 3 racines de l'équation caractéristique sont obligatoirement réelles. Appelons-les :

- **σ_1 : contrainte principale majeure**
- **σ_2 : contrainte principale intermédiaire**
- **σ_3 : contrainte principale mineure**

telles que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Sollicitations particulières :

- *Traction ou Compression simples :*
 $\sigma_1 \neq 0$ & $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- *Cisaillement simple :*
 $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$ & $\sigma_3 = 0$
- *Traction ou Compression cylindriques (ou triaxiales de révolution) :*
 $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 > 0$
- *Traction ou Compression sphériques (ou triples ou isotropes) :*
 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \neq 0$



□ Tenseur des contraintes

- **Invariants du tenseur des contraintes** : Les 3 coefficients I_1 , I_2 et I_3 de l'équation caractéristique, appelés invariants du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, doivent garder une valeur constante quand on fait tourner le trièdre autour de l'origine des axes dans lequel il est défini. Ces trois invariants s'expriment ci-après en fonction des contraintes courantes et en fonction des contraintes principales :

➤ 1^{er} invariant I_1 : $I_1 = \sigma_{ii}$

$$\Rightarrow I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$$= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad / (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

➤ 2^{ème} invariant I_2 : $I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij})$

$$\Rightarrow I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$$= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \quad / (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

➤ 3^{ème} invariant I_3 : $I_3 = |\sigma_{ij}|$

$$\Rightarrow I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} \quad / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$$= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad / (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3)$$

□ Tenseur des contraintes

- **Directions principales** : En remplaçant $\sigma_i = \sigma_p$ par σ_1, σ_2 ou σ_3 dans la relation :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_i \delta_{ij})n_j = 0 \quad | \quad i = 1,2,3 \Rightarrow (\sigma_{ij} - \sigma_p \delta_{ij})n_p = 0 \quad ,$$

on déduit un système de trois équations homogènes qui permet de déterminer les trois coordonnées de la direction n_p normale à la facette principale p , c'est-à-dire ses cosinus directeurs, notés ${}^t\{l_p, m_p, n_p\}$ à un facteur près. Ce facteur se détermine par la condition : $n_p n_p = l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1$. On obtient ainsi les 3 cosinus directeurs de la direction principale p considérée. Soit donc :

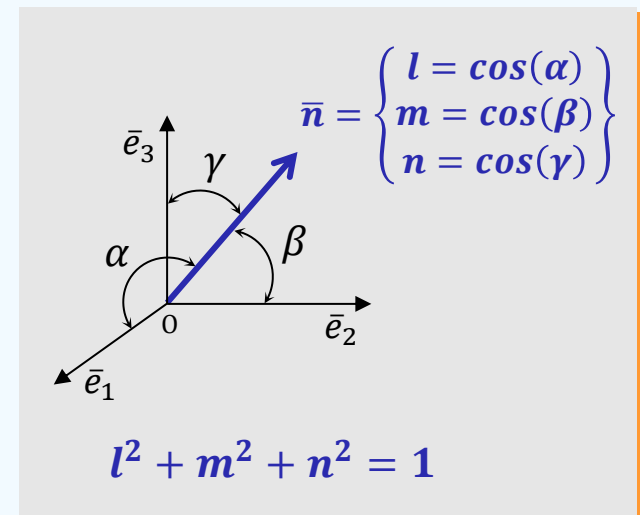
$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \sigma_p)l_p + \sigma_{12}m_p + \sigma_{13}n_p = 0 \\ \sigma_{12}l_p + (\sigma_{22} - \sigma_p)m_p + \sigma_{23}n_p = 0 \\ \sigma_{13}l_p + \sigma_{23}m_p + (\sigma_{33} - \sigma_p)n_p = 0 \end{cases}$$

avec la condition : $l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1 \quad | \quad p = 1,2,3$

D'où : $\bar{n}_1 = {}^t\{l_1, m_1, n_1\}$ associée à σ_1

$\bar{n}_2 = {}^t\{l_2, m_2, n_2\}$ associée à σ_2

$\bar{n}_3 = {}^t\{l_3, m_3, n_3\}$ associée à σ_3



□ Tenseur des contraintes

- **Déviateur des contraintes** : Il est souvent utile de décomposer le tenseur des contraintes $\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ en la somme :

- d'un tenseur sphérique $\bar{\sigma}^s = [\sigma_{ij}^s]$ comme dans un fluide au repos,
- d'un tenseur déviatorique $\bar{s} = [s_{ij}]$, appelé déviateur des contraintes,

de sorte que :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^s + \bar{s} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + s_{ij} \quad | \quad \begin{cases} \sigma_{ij}^s = \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij} \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s \end{cases}$$

Nota :

- $\sigma_{oct} = I_1/3 = \sigma_{ii}/3$ désigne la contrainte normale octaédrique.
- $Tr(s_{ij}) = s_{ii} \equiv 0$
- Les 3 invariants du déviateur des contraintes s_{ij} sont désignés par J_1, J_2 et J_3 et les contraintes principales associées sont désignées par s_1, s_2 et s_3 lesquelles sont solution de l'équation suivante en posant $\lambda = s_i \mid i = 1, 2, 3$:

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda - J_3 = 0$$

□ Tenseur des contraintes

- **Déviateur des contraintes** : Les invariants J_1, J_2 et J_3 du déviateur des contraintes s_{ij} sont exprimés ci-après en fonction des contraintes déviatoriques courantes et en fonction des contraintes principales déviatoriques.

➤ **1^{er} invariant J_1 :**

$$J_1 = s_{ii} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \quad | \quad \begin{cases} s_1 = (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)/3 \\ s_2 = (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)/3 \\ s_3 = (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)/3 \end{cases}$$

➤ **2^{ème} invariant J_2 :**

$$\begin{aligned} J_2 &= -\frac{1}{2}(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}) = -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2 \\ &= -s_1s_2 - s_2s_3 - s_3s_1 \end{aligned}$$

➤ **3^{ème} invariant J_3 :**

$$\begin{aligned} J_3 &= |s_{ij}| = s_{11}s_{22}s_{33} - s_{11}s_{23}^2 - s_{22}s_{13}^2 - s_{33}s_{12}^2 + 2s_{12}s_{23}s_{13} \\ &= s_1s_2s_3 \end{aligned}$$

Nota :

- Tout tenseur des contraintes pour lequel $J_1 = 0$ est déviatorique.
- $\tau_{oct} = \sqrt{2J_2/3}$ désigne la scission octaédrique.

□ Tenseur des contraintes

- **Tricercle de Mohr des contraintes** : Dans le repère formé par les directions principales, les contraintes normale σ_n et tangentielle σ_t s'exerçant sur la facette dS orientée par la normale unitaire $\bar{N}$ de cosinus directeurs ${}^t\{N_1, N_2, N_3\}$, par rapport aux directions principales constituent les composantes d'un vecteur de contrainte $\bar{\sigma}$ dont l'extrémité reste à l'intérieur d'un domaine délimité en général par 3 cercles qu'on appelle « Tricercle de Mohr ». Dans ce repère, le tenseur des contraintes peut s'écrire :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 N_1 \\ \sigma_2 N_2 \\ \sigma_3 N_3 \end{Bmatrix}$$

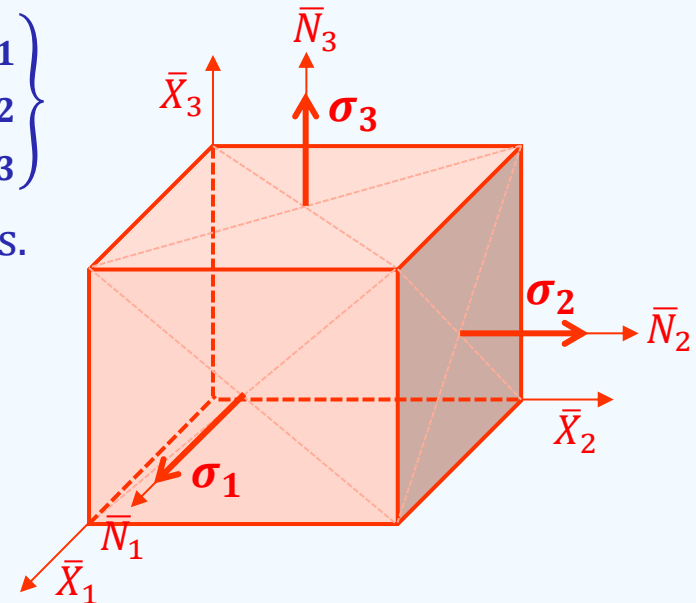
où σ_1, σ_2 et σ_3 désignent les contraintes principales.

Ce qui entraîne :

$$\sigma_n = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \sigma_i n_i \quad \& \quad \sigma_i = \sigma_i N_i \quad | \quad N_i = \delta_{ij} n_j$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \sigma_i \delta_{ij} n_j n_i = \sigma_i n_i^2$$

$$\Rightarrow \sigma_n = \sigma_i n_i^2 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$



□ Tenseur des contraintes

- **Tricercle de Mohr des contraintes** : D'où le système d'équations linéaire par rapport à n_1^2 , n_2^2 et n_3^2 :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_i n_i^2 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_n^2 + \tau^2 = \bar{\sigma}^2 = \sigma_i^2 n_i^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ n_i^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases}$$

Il a pour déterminant : $\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1) \neq 0$

Supposons les trois contraintes principales distinctes avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, on obtient :

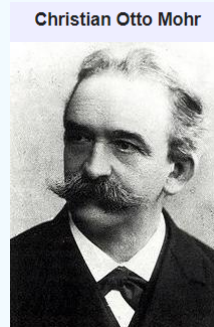
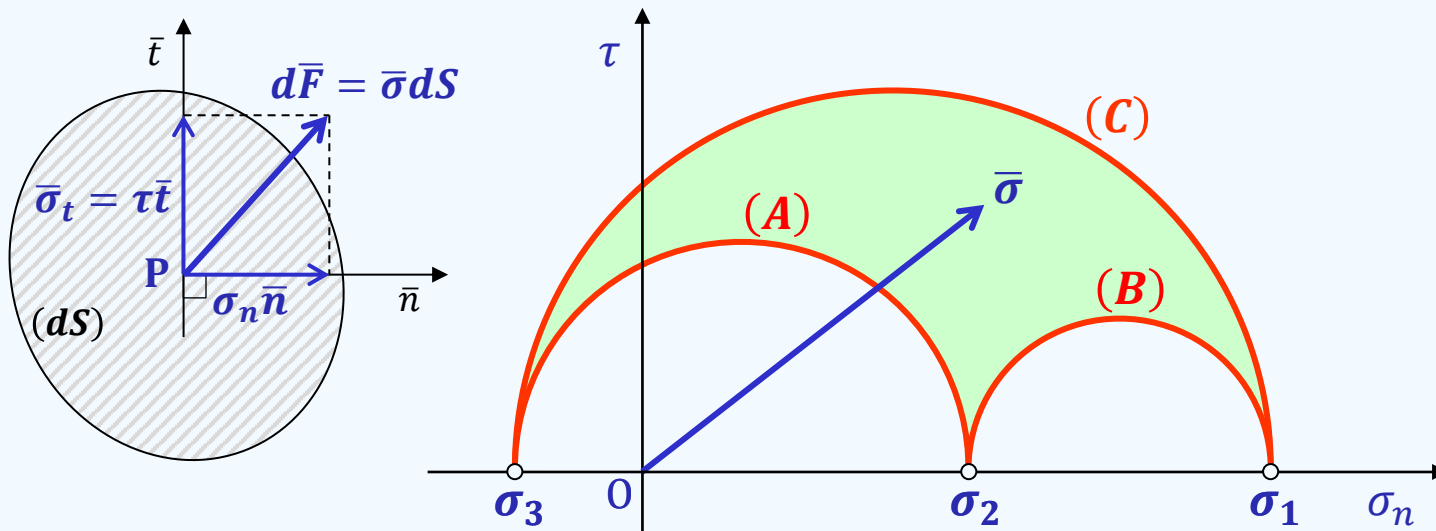
$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} = \frac{\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \\ n_3^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} = \frac{\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Ces trois équations permettent de situer l'extrémité du vecteur contrainte $\bar{\sigma}$ dans le diagramme (σ_n, τ) | $\bar{\sigma}_t = \tau \bar{t}$ | $\bar{t} \perp \bar{n}$.

□ Tenseur des contraintes

- **Tricercle de Mohr des contraintes** : On déduit alors que :

- Du fait que $n_1^2 \geq 0$ et $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) > 0$, l'extrémité de $\bar{\sigma}$ reste toujours à l'extérieur du cercle (A) d'équation : $\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$
- Du fait que $n_3^2 \geq 0$ et $(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) > 0$, l'extrémité de $\bar{\sigma}$ reste toujours à l'extérieur du cercle (B) d'équation : $\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$
- Du fait que $n_2^2 \geq 0$ et $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3) < 0$, l'extrémité de $\bar{\sigma}$ reste toujours à l'intérieur du cercle (C) d'équation : $\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$

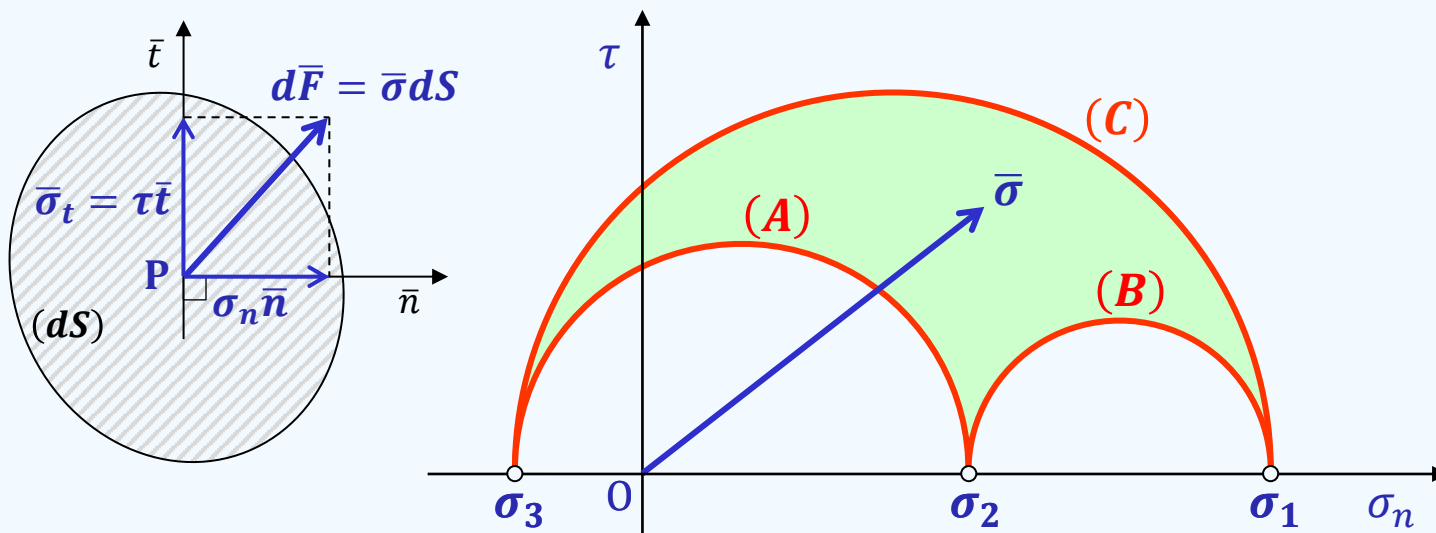


□ Tenseur des contraintes

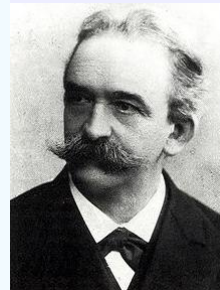
- **Tricercle de Mohr des contraintes** : La représentation de Mohr permet, entre autres, de trouver les directions de cisaillement maximum et les valeurs de ce dernier. Sur la figure ci-dessous, on voit en effet qu'elles correspondent au point Q en lequel :

- $\sigma_{moy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$
- $\tau_{max} = |(\sigma_t)_{max}| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$

⇒ Il y a deux facettes distinctes de cisaillement maximum inclinées à $\pm \pi/4$ par rapport aux directions principales associées à σ_1 et σ_3 .



Christian Otto Mohr



EXEMPLES D'ÉTATS DE CONTRAINTES

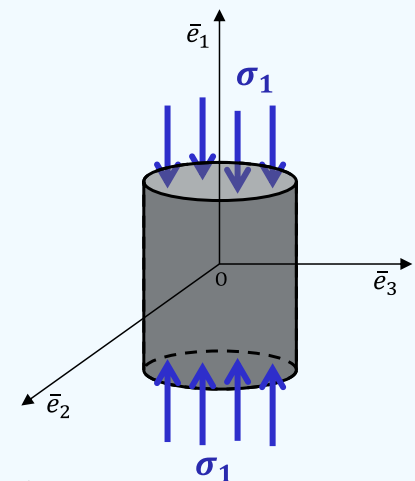
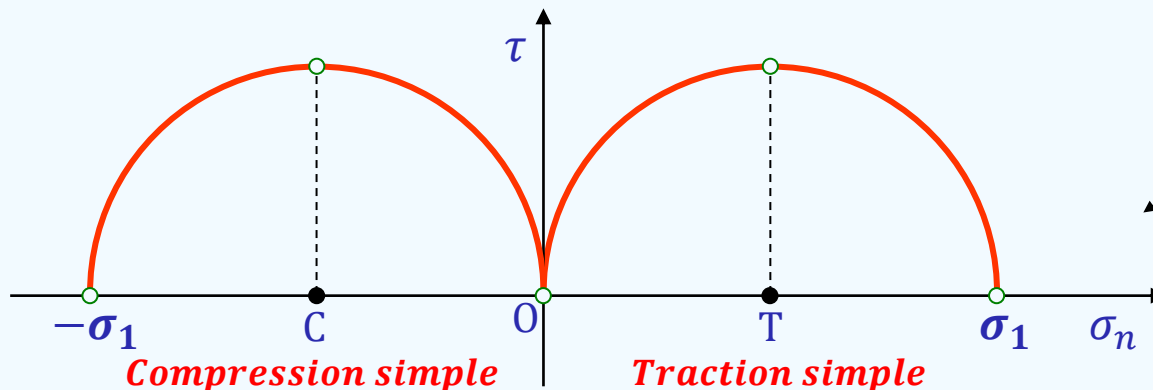
Exemples d'états de contraintes

- Traction ou Compression simples :** C'est l'état de contrainte que l'on tente de réaliser en tout point d'une éprouvette lors d'essais de traction ou de compression unifomes. Deux contraintes principales sont nulles, soit :

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

⇒ Le vecteur contrainte sur toute la facette est dirigé selon la direction principale $\bar{e}_1$. Le tenseur des contraintes correspondant est alors dit uniaxial et s'écrit :

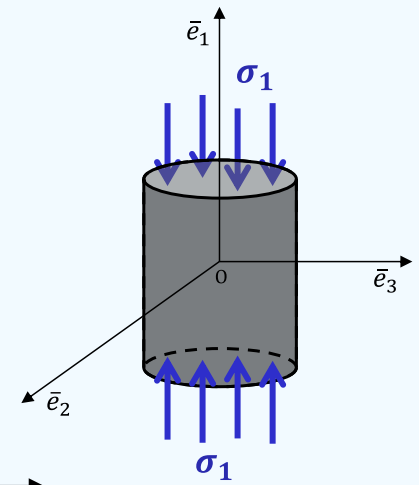
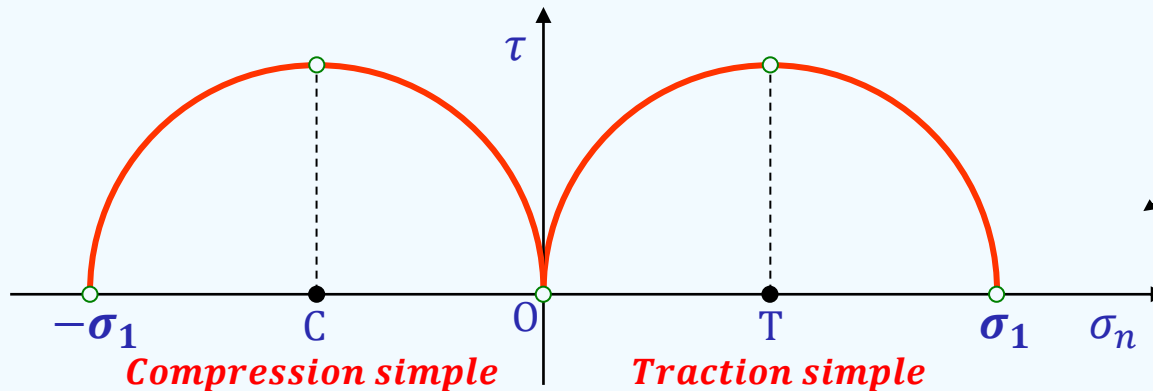
$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \sigma_1 \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



□ Exemples d'états de contraintes

- **Traction ou Compression simples** : C'est l'état de contrainte que l'on tente de réaliser en tout point d'une éprouvette lors d'essais de traction ou de compression uniformes. Deux contraintes principales sont nulles, soit :

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$



Convention de la MMC : $\sigma_1 > 0$: Traction simple & $\sigma_1 < 0$: Compression simple

⇒ Dans cet état de contrainte, les cisaillements maximaux sont $\pm \sigma_1/2$ et sont obtenues pour les facettes inclinées à $\pi/4$ sur les génératrices du cylindre. Sur une facette parallèle à celle-ci, aucune contrainte vectorielle ne s'y exerce.

□ Exemples d'états de contraintes

- **Traction ou Compression simples** : On donne ci-après quelques exemples d'états de contraintes uniaxiales en laboratoire lors d'essais de traction ou de compression simples :



Essai de traction simple sur acier



Essai de compression simple sur béton



Essai de compression simple sur sol

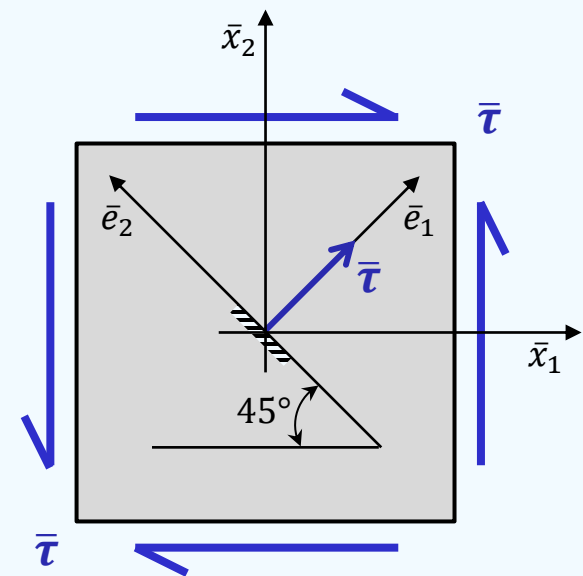
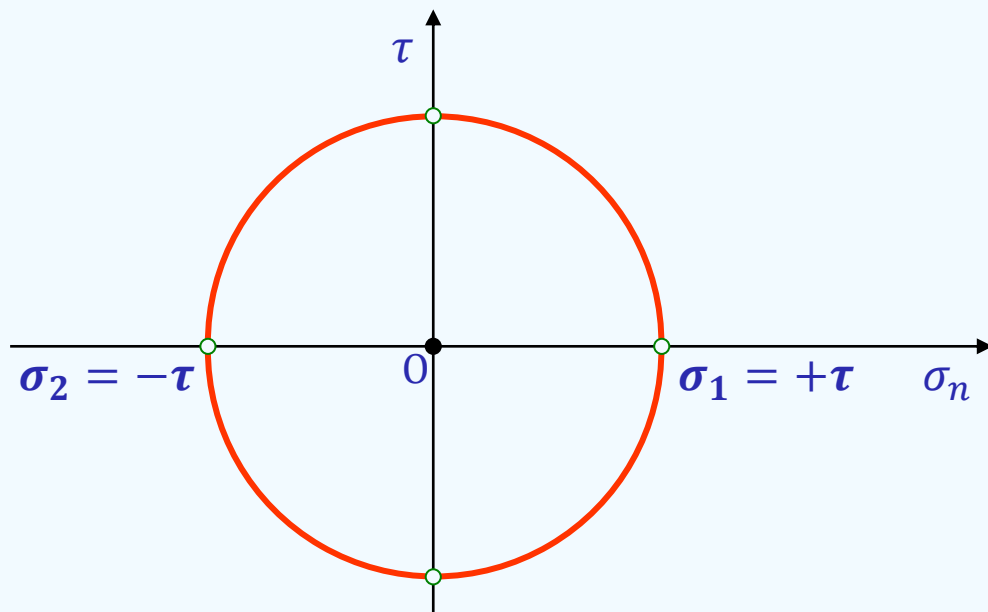
□ Exemples d'états de contraintes

- **Cisaillement simple :** L'état des contraintes est dit cisaillement simple s'il est plan (une des contraintes principales est nulle et les deux autres opposées) :

$$\tau = \sigma_1 = -\sigma_2 \neq \sigma_3 = 0$$

Sa matrice représentative peut s'écrire :

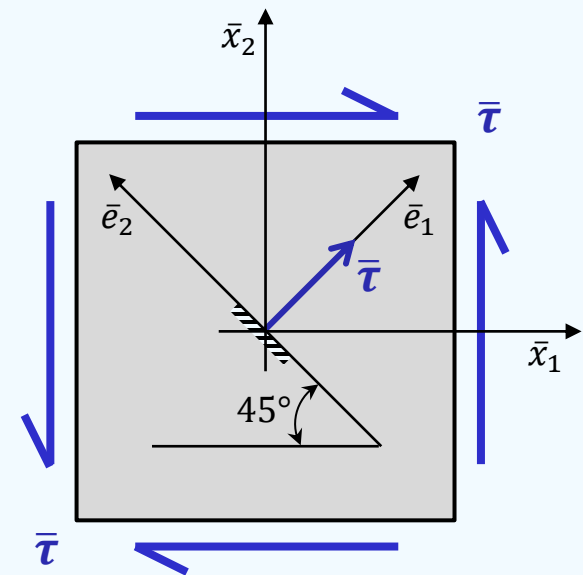
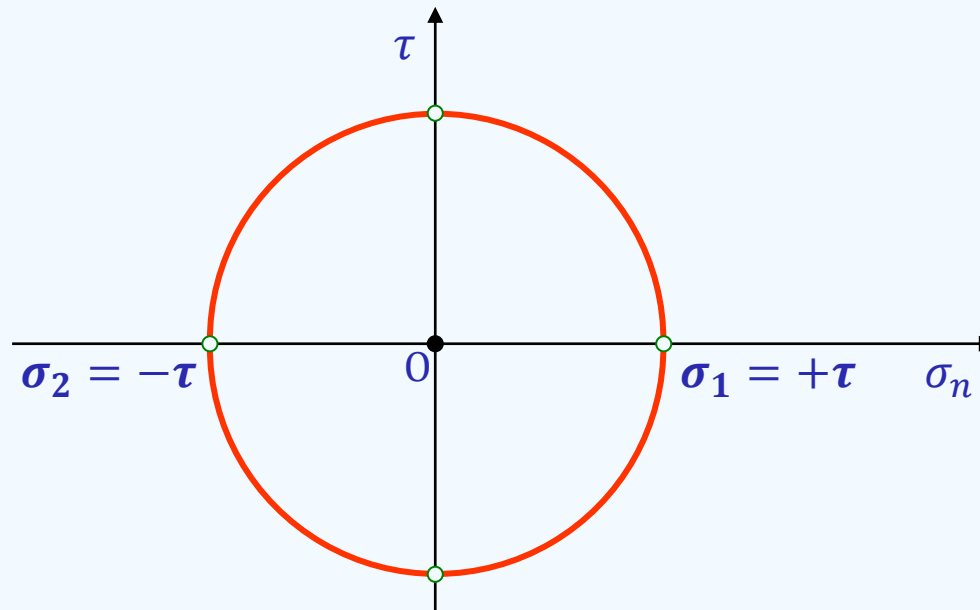
$$\bar{\bar{\sigma}} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$



Exemples d'états de contraintes

- Cisaillement simple :** L'état des contraintes est dit cisaillement simple s'il est plan (une des contraintes principales est nulle et les deux autres opposées) :

$$\tau = \sigma_1 = -\sigma_2 \neq \sigma_3 = 0$$



⇒ Dans le plan des deux contraintes principales opposées, les facettes à $\pi/4$ correspondent à un cisaillement pur d'intensité τ (car la contrainte normale correspondante est $\sigma_s = (\tau - \tau)/2 \equiv 0$).

□ Exemples d'états de contraintes

- **Cisaillement simple :** On donne ci-après l'exemple type de cisaillement direct des sols en laboratoire.



□ Exemples d'états de déformations

- **Glissement simple :** On donne ci-après l'exemple type d'état de glissement simple lors d'essais de cisaillement direct des sols à la boîte de Casagrande.



Boîte de cisaillement

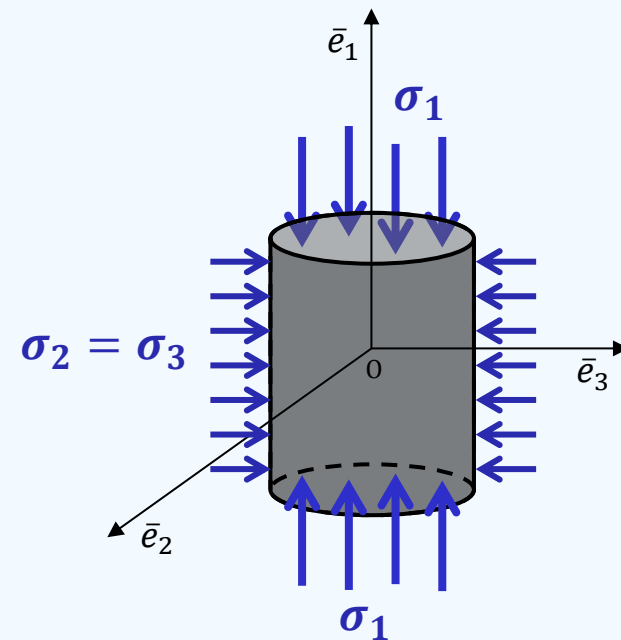
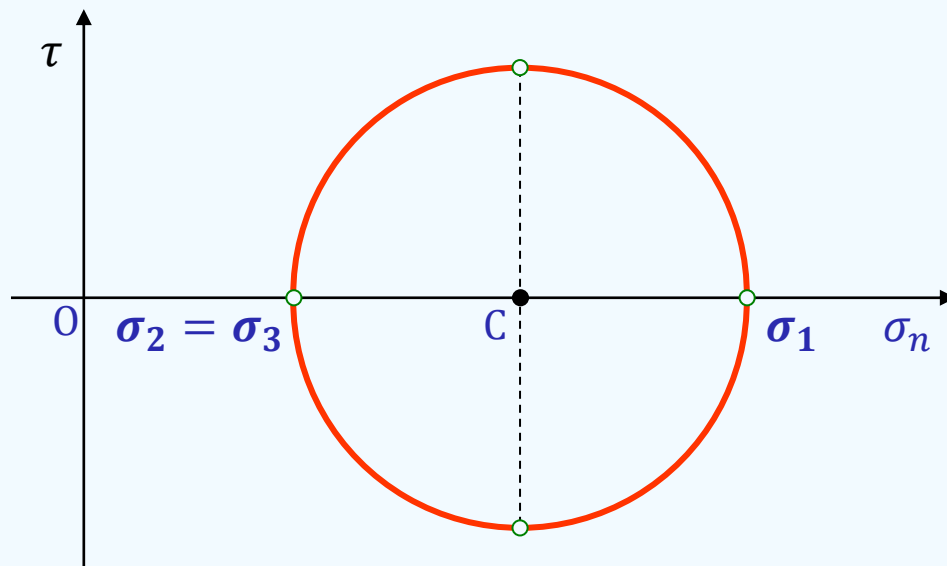


Exemples d'états de contraintes

- Traction ou Compression triaxiales de révolution** : C'est l'état cylindrique des contraintes que l'on tente de réaliser en tout point d'une éprouvette de sol dans un essai à l'appareil triaxial. Il généralise l'essai de traction ou de compression simples. Les contraintes principales σ_2 et σ_3 sont alors égales entre elles, mais non nulles :

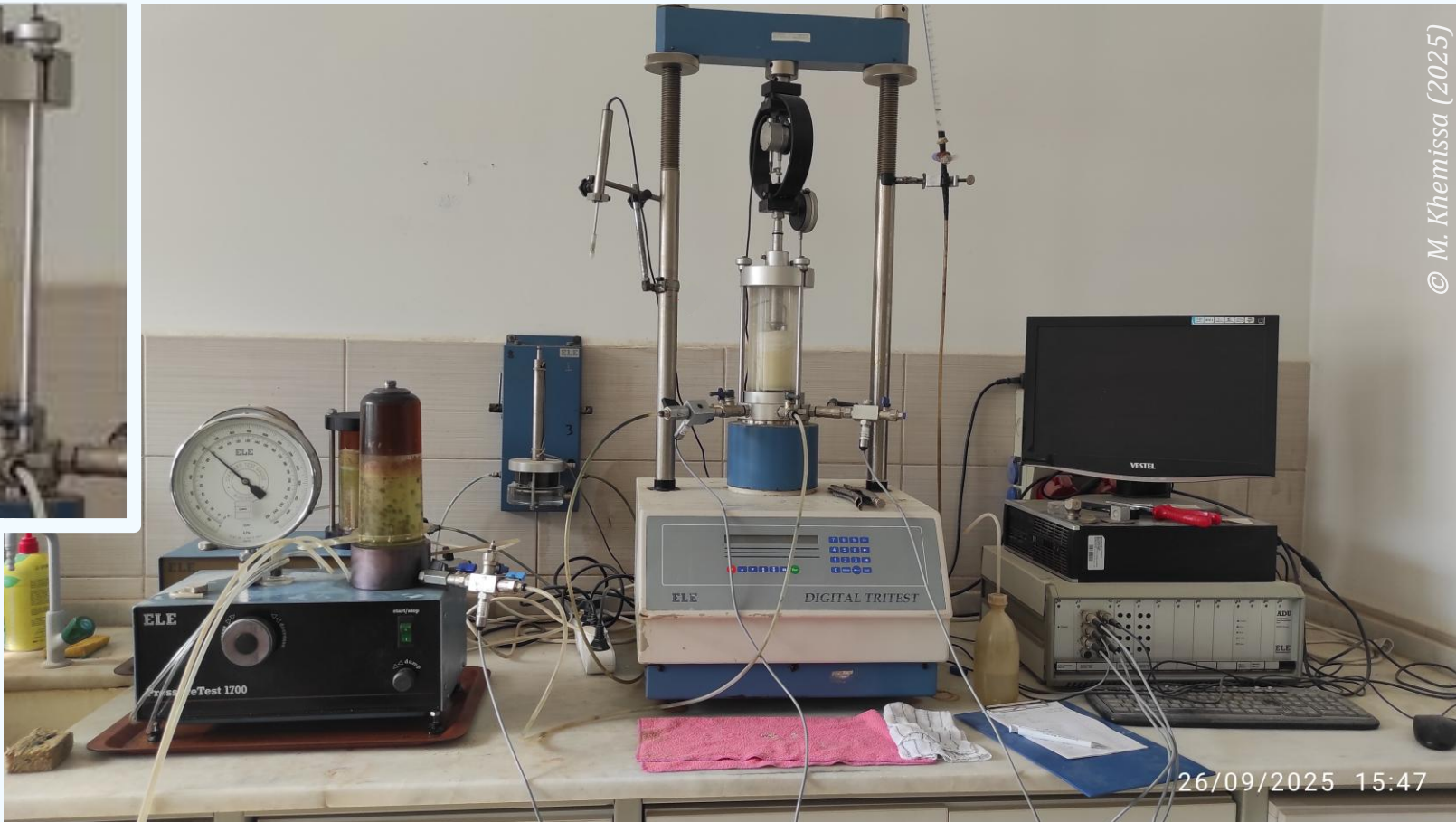
$$\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 > 0$$

Le domaine engendré par l'extrémité du vecteur contrainte se réduit à un seul cercle.



Exemples d'états de contraintes

- Traction ou Compression triaxiales de révolution** : On donne ci-après l'exemple type d'essai triaxial de révolution en mécanique des sols.



□ Exemples d'états de contraintes

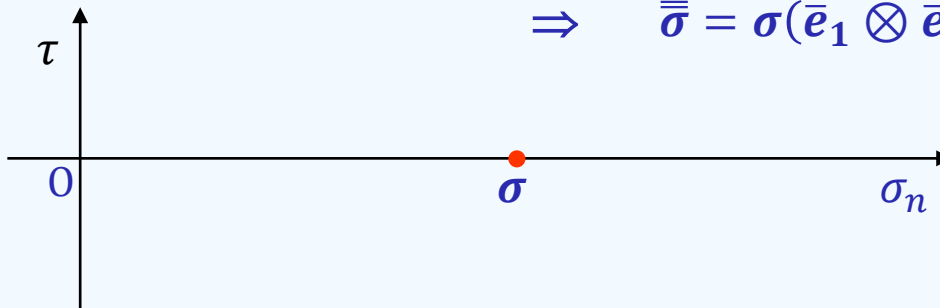
- **Contrainte hydrostatique (sphérique, triple, isotrope) :** Le tenseur des contraintes est dit sphérique lorsque les 3 contraintes principales sont égales entre elles et toutes les directions sont principales. Ainsi, on peut écrire :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma \neq 0$$

Sa matrice représentative peut s'écrire :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} / (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma(\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3)$$



$\Rightarrow$ Le cercle de Mohr se réduit à un point d'abscisse :

$$\sigma = \sigma_{moy} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

□ Exemples d'états de contraintes

- **Contraintes thermiques :** Dans un solide soumis à un échauffement apparaissent des contraintes spécifiques, dites « contraintes thermiques », uniformes dont les valeurs principales sont égales :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \alpha \Delta \theta$$

où α désigne le coefficient d'expansion (ou de dilatation) thermique et $\Delta \theta = \theta_t - \theta_o$ le gradient thermique avec θ_t la température actuelle et θ_o la température initiale.

Le tenseur des contraintes thermiques correspondant est alors sphérique et représenté par :

$$\bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha \Delta \theta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \Delta \theta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \Delta \theta \end{bmatrix} = \alpha \Delta \theta \bar{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \alpha \Delta \theta \delta_{ij}$$

Remarque : Si la dilatation du solide n'est pas libre, des contraintes peuvent être induites dans le solide. La contrainte totale résultante est la somme des contraintes thermiques et des contraintes mécaniques. Toutefois, dans le cas où le gradient thermique dans le solide est constant, voire nul, aucune contrainte ne peut y être induite : les déformations résultantes se réduisent aux déformations thermiques.

MESURE DES CONTRAINTES

□ Mesure des contraintes

La mesure directe des contraintes n'est pas possible. On passe toujours par le biais d'un capteur de pression (manomètre) ou d'une jauge extensométrique qui mesurent un déplacement (ou une déformation) et que l'on a étalonné en unité de pression ou de contrainte.

- **Unités et ordres de grandeur :** Les contraintes sont homogènes aux pressions. En conséquence, elles s'expriment en *Pascal* (Pa). Comme cette unité SI est souvent trop petite (en particulier dans les solides), on emploie alors le *kiloPascal* (kPa), ou le *MégaPascal* (MPa) ou encore tout bonnement le *Newton/mm²* (N/mm^2).

$$1 \text{ MPa} = 10^3 \text{ kPa} = 10^6 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 (= 10 \text{ bars})$$

$$1 \text{ kPa} = 1 \text{ kN/m}^2$$

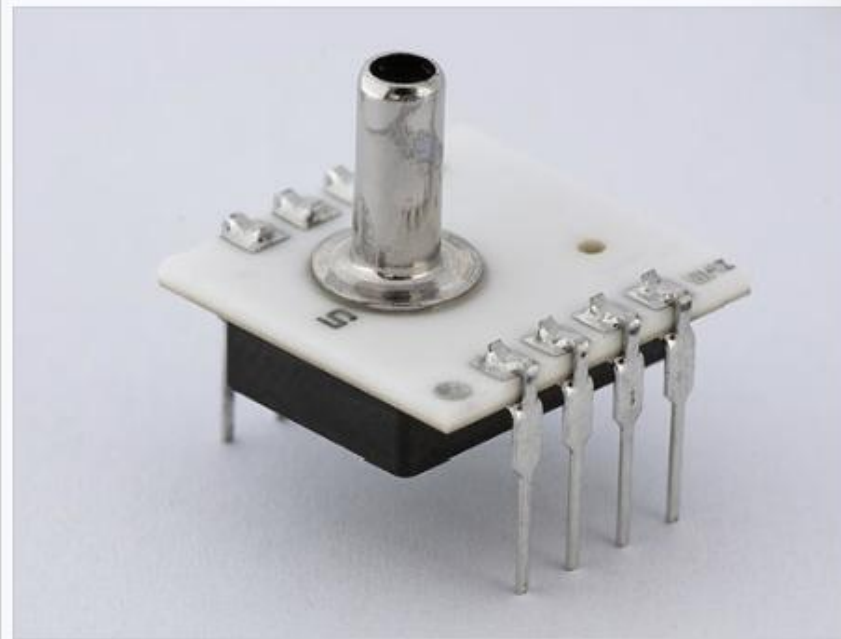
Unité peu utilisée : elle n'est pas légale

On notera usuellement :

- Acier : $f_e = \begin{cases} 400 \text{ à } 500 \text{ MPa (Acier HA)} \\ 215 \text{ à } 235 \text{ MPa (Acier RL)} \end{cases}$
- Béton : $f_{c28} = 20 \text{ à } 40 \text{ MPa (Béton ordinaire)}$

□ Mesure des contraintes

- **Mesure de pression dans les écoulements :** La mesure locale se fait à l'aide de sondes électroniques et/ou à l'aide de manomètres.



Sonde de pression électronique

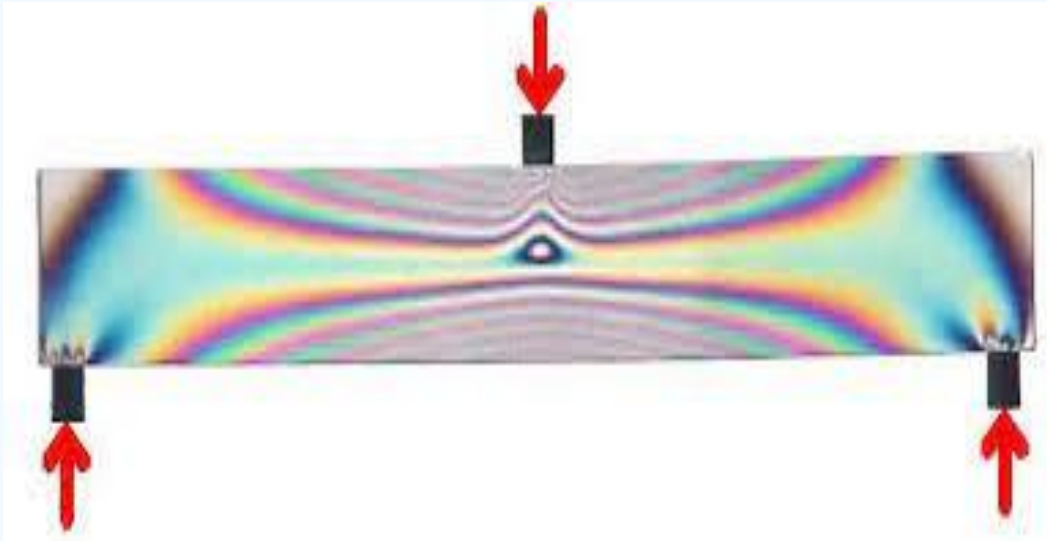


Manomètre haute-pression (0-2500 bar), également gradué en **psi**.

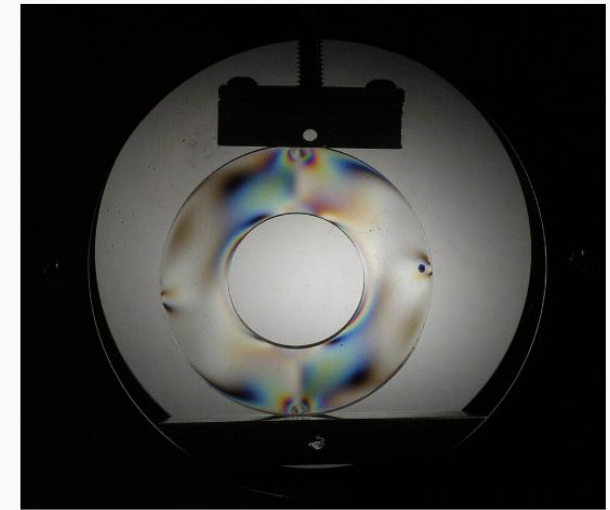


❑ Mesure des contraintes

- **Visualisation des contraintes (Photoélasticité / Photoélasticimétrie) :** C'est une technique physique d'analyse des contraintes. Elle est basée sur le phénomène de biréfringence optique qui veut que certains matériaux transparents soumis à des contraintes mécaniques deviennent optiquement anisotropes (ex. Plaque en plexiglass).



Photoélasticité

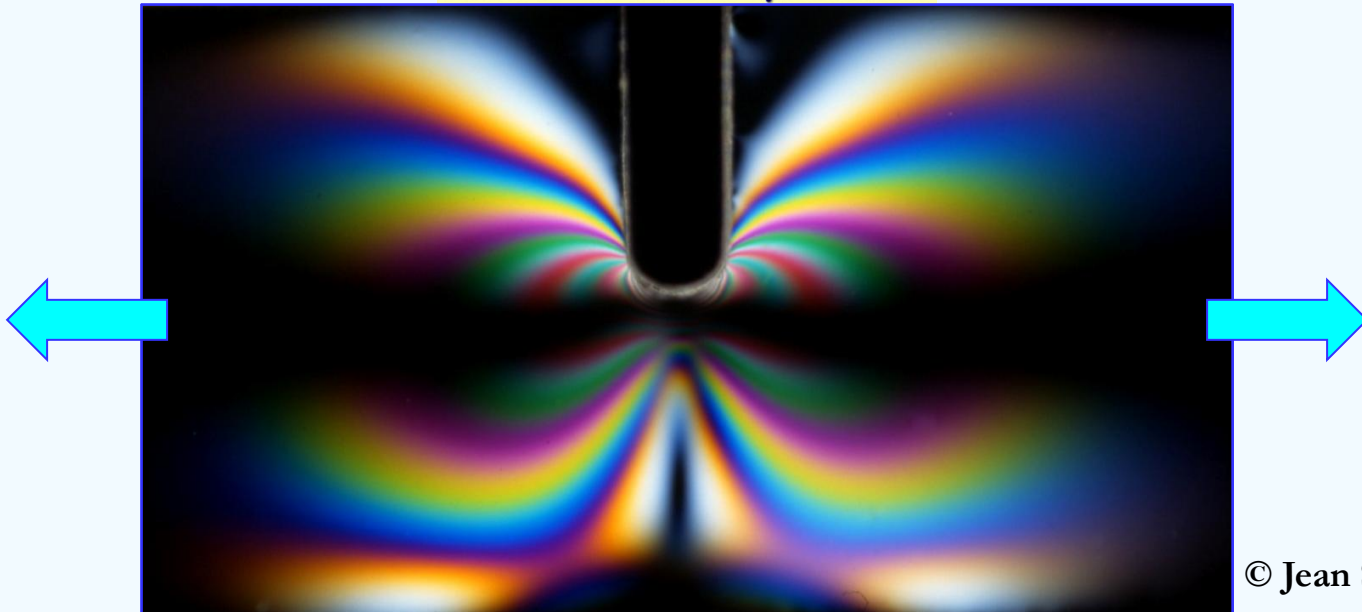


Phénomène de photoélasticité :
sous l'effet d'une **contrainte extérieure**,
ce matériau placé entre deux **polariseurs** devient
biréfringent

□ Mesure des contraintes

- **Visualisation des contraintes** : Exemple de visualisation des contraintes par photoélasticité (*Essai de traction sur une éprouvette entaillée en U*, J. Salençon, 2014)

Tension test
on a U-notched specimen



© Jean Salençon (2014)

The orientation of the polariscope is kept constant. We follow the evolution of the isoclinic and isochromatic patterns when the tension force is increased steadily.

The vertical boundaries of the notch are isoclinic lines. The isochromatics are spreading out from the tip of the notch as the loading process is going on. Stress concentration is observed.

□ Mesure des contraintes

- **Mesure indirecte à l'aide d'extensomètres :** (*Voir Chapitre 4 : Théorie de l'état des déformations - Mesure des déformations*)



Jauges d'extensométrie pour
analyse des contraintes

Mesurer en conditions réelles grâce à une association optimale de
rentabilité et de hautes performances

HBK 
HOTTINGER BRÜEL & KJÆR

APPLICATIONS TYPIQUES

□ Applications typiques

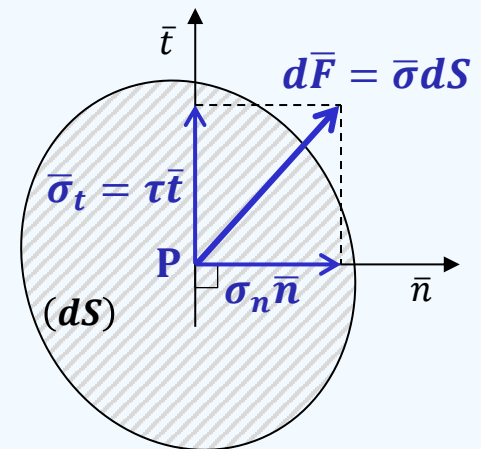
- **Contraintes normale et tangentielle :** Les composantes normale σ_n et tangentielle σ_t du vecteur des contraintes s'exerçant sur une facette de normale $\bar{n}$ donnée peuvent être directement calculées à partir du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ au point P du milieu continu considéré.

➤ Contrainte normale :

$$\sigma_n = \sigma_i n_i = {}^t n_i \sigma_i = {}^t n_i \sigma_{ij} n_j \quad | \quad \sigma_i = \sigma_{ij} n_j$$

➤ Contrainte tangentielle :

$$\tau = |\bar{\sigma}_t| = \sqrt{\bar{\sigma}^2 - \sigma_n^2} \quad | \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma} \bar{n} \Leftrightarrow \sigma_i = \sigma_{ij} n_j$$



Exemple : On demande de calculer les composantes normale σ_n et tangentielle σ_t du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ suivant la 1^{ère} bissectrice $\bar{n}$ (Voir : Exercice 6) :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \quad (daN/mm^2) \quad \& \quad 1^{\text{ère}} \text{ bissectrice : } \bar{n} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots / \dots$$

□ Applications typiques

- **Contraintes normale et tangentielle :**

.../...

$$\Rightarrow \sigma_i = \sigma_{ij} n_j = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{3} \times 0 \\ 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 \\ -3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 13 \times 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 349.5$$

$$\Rightarrow \sigma_n = {}^t n_i \sigma_i = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \right\} \begin{Bmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{2} \\ \frac{25\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{6}}{2} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{25\sqrt{2}}{2} - 0 \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = 16 \text{ daN/mm}^2$$

$$\Rightarrow \tau = \sqrt{\sigma_i^2 - \sigma_n^2} = \sqrt{349.5 - 16^2} = 9.72 \text{ daN/mm}^2$$

□ Applications typiques

- **Contraintes octaédriques :** On donne parfois une interprétation des invariants I_1 et J_2 en remarquant que sur une facette dite octaédrique dont la normale $\bar{n}$ est dirigée suivant la 1^{ère} trisectrice de composantes ${}^t\{\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\}$ dans le repère principal du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$. La contrainte normale octaédrique σ_{oct} et la scission octaédrique τ_{oct} sont alors égales à :

- $\sigma_{oct} = I_1/3$
- $\tau_{oct} = \sqrt{2J_2/3}$

Démonstration

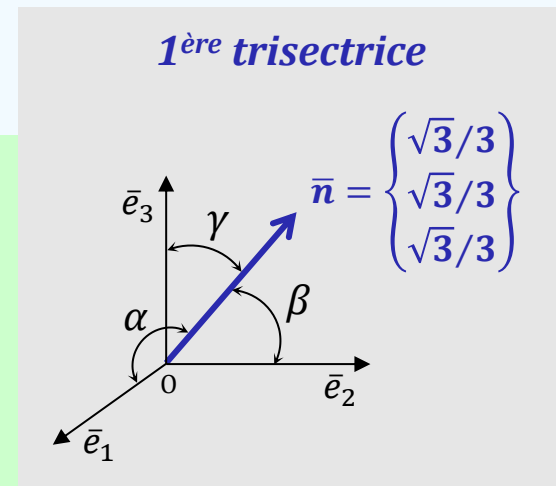
➤ $\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$ (Voir page 25)

$$\Rightarrow \sigma_{oct} = \sigma_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sigma_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \sigma_3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

➤ $\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 = \tau_{oct}^2 \quad \& \quad J_2 = \frac{3}{2} \sigma_t^2 \quad | \quad \tau = |\bar{\sigma}_t|$

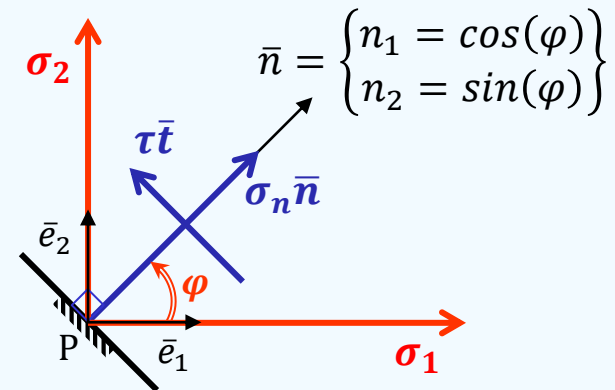
$$\Rightarrow \tau_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$$



□ Applications typiques

- **Contraintes planes :** Dans l'état plan des contraintes où $n_3 = 0$, le système d'équations linéaires par rapport à n_1^2 et n_2^2 est donné comme suit (Voir : Cercle de Mohr des contraintes - page 25) :

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 \\ \sigma_n^2 + \tau^2 = \bar{\sigma}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 \\ n_1^2 + n_2^2 = 1 \end{cases} \quad | \quad \sigma_1 \geq \sigma_2$$



D'où l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 \sin^2(\varphi) \\ &= \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 (1 - \cos^2(\varphi)) \\ &= \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos^2(\varphi) \\ &= \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \\ \Rightarrow \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) \\ \sigma_n &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 - \sigma_n^2 \\ &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2)^2 \\ &= \sigma_1^2 n_1^2 n_2^2 + \sigma_2^2 n_2^2 n_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 n_1^2 n_2^2 \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 = [(\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\varphi) \sin(\varphi)]^2 \\ \Rightarrow \tau &= (\sigma_1 - \sigma_2) \cos(\varphi) \sin(\varphi) \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

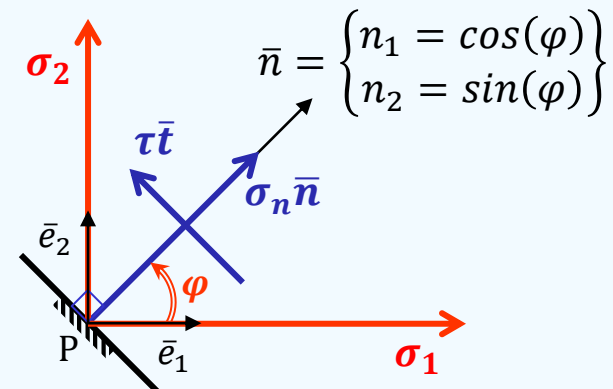
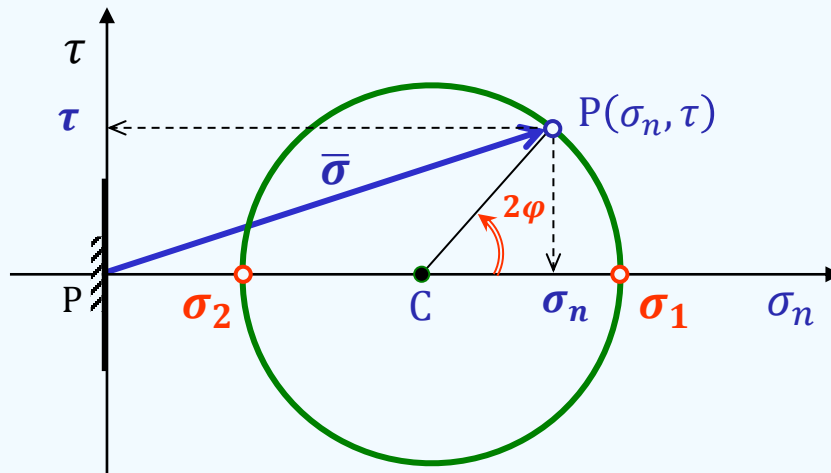
□ Applications typiques

- **Contraintes planes :** Dans ces conditions où $n_3 = 0$, le tricerclé de Mohr se réduit alors à un cercle décrit par la contrainte vectorielle $\bar{\sigma}$ de composantes :

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\varphi) \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\varphi) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2}$$

où φ désigne l'angle que fait la facette de normale $\bar{n}$ avec l'axe $\bar{e}_1$ du repère principal $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

⇒ Cercle de centre $C \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$ et de rayon $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



□ Applications typiques

- **Contraintes planes :** Les résultats précédents peuvent être retrouvés en considérant un tétraèdre d'hypoténuse $dS = 1$ soumis à σ_{xx} , σ_{yy} et τ_{xy} . L'équilibre de cet élément peut donc s'écrire :

$$\square \sum F_{/x} = 0 \Rightarrow T_x - \sigma_{xx} \cos(\varphi) - \tau_{xy} \sin(\varphi) = 0$$

$$\square \sum F_{/y} = 0 \Rightarrow T_y - \sigma_{yy} \sin(\varphi) - \tau_{xy} \cos(\varphi) = 0$$

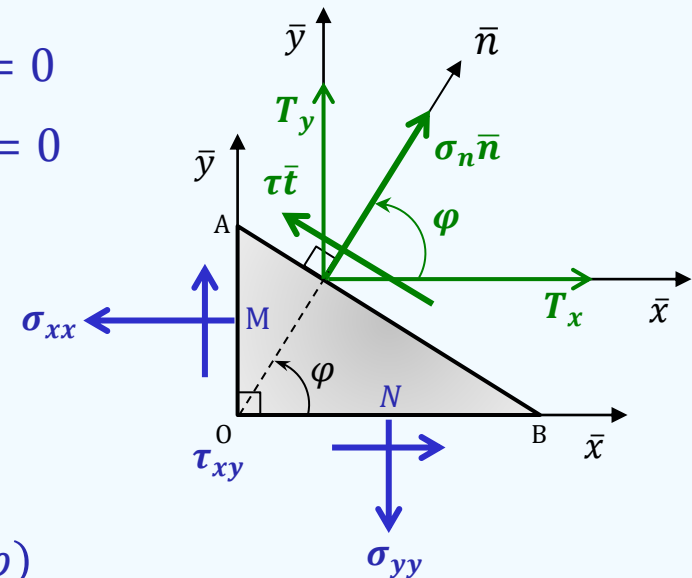
$$\Rightarrow \begin{cases} T_x = \sigma_{xx} \cos(\varphi) + \tau_{xy} \sin(\varphi) \\ T_y = \sigma_{yy} \cos(\varphi) + \tau_{xy} \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = T_x \cos(\varphi) + T_y \sin(\varphi) \\ \tau = T_y \cos(\varphi) - T_x \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi) \\ \tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) + \tau_{xy} \cos(2\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sigma_n - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\Rightarrow \text{Cercle de centre } C \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right) \text{ et de rayon } R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



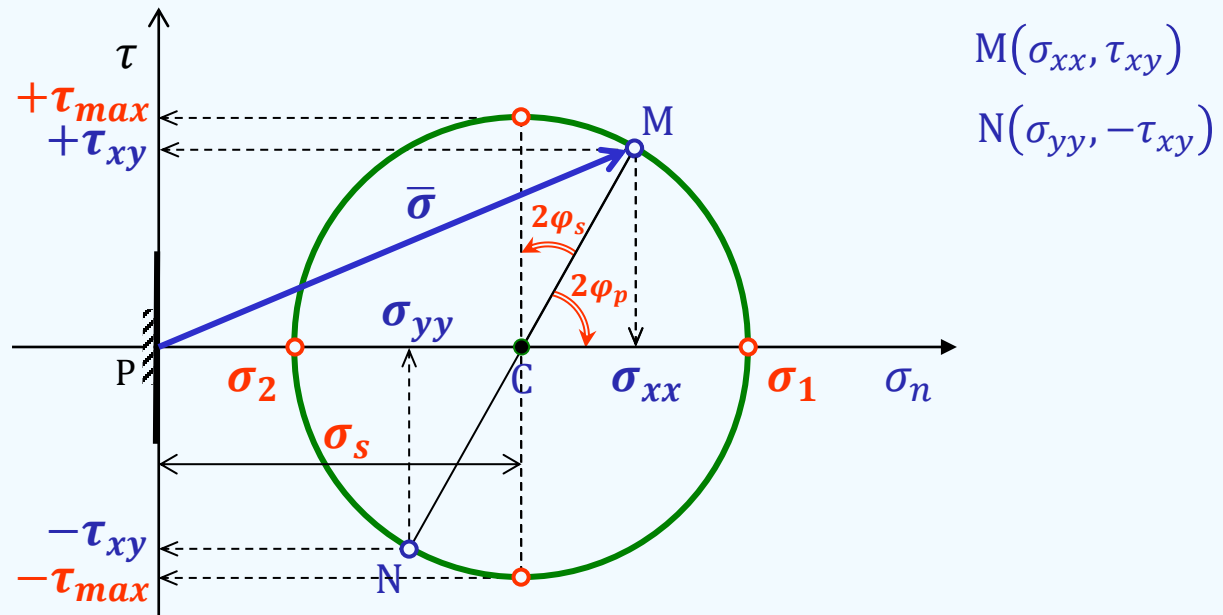
Applications typiques

- Contraintes planes :** L'équilibre du tétraèdre conduit à l'équation suivante :

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

⇒ Cercle de centre $C \left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0 \right)$ et de rayon $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Ce cercle est appelé : Cercle de Mohr des contraintes



$M(\sigma_{xx}, \tau_{xy})$

$N(\sigma_{yy}, -\tau_{xy})$

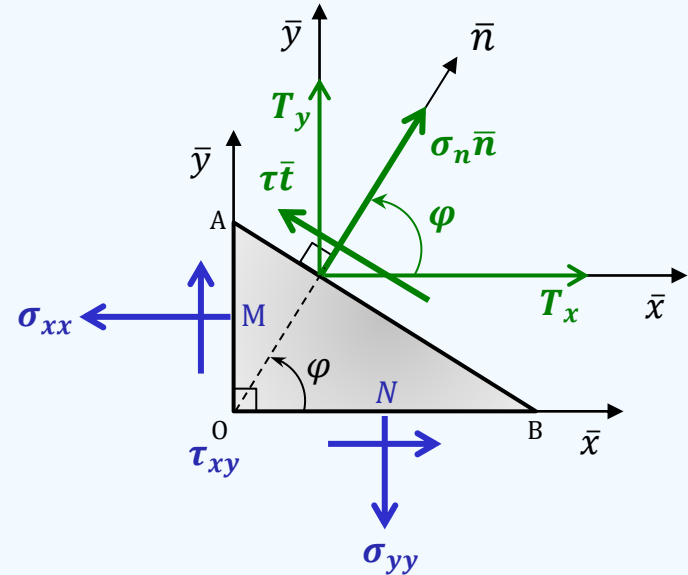
□ Applications typiques

- **Contraintes planes :** Si l'on désigne par φ_p l'angle que fait la facette AB avec l'axe $\bar{x}$, on peut alors écrire :

$$\frac{d\sigma_n}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \text{tg}(2\varphi_p) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

et les contraintes principales σ_1 et σ_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \sigma_{min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases}$$



et la contrainte de cisaillement maximale correspondante s'écrit :

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

laquelle est orientée suivant l'angle φ_s telle que :

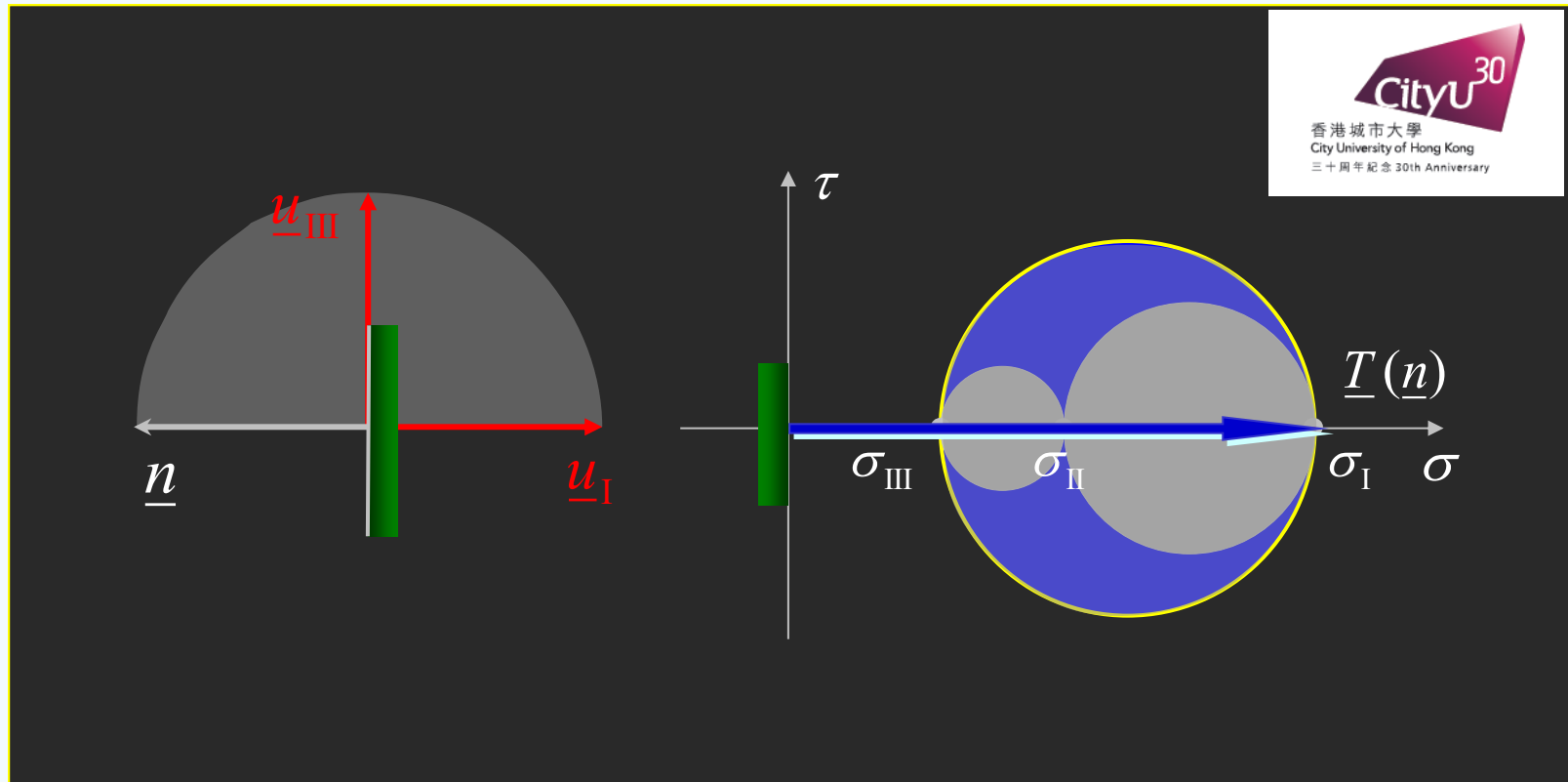
$$\frac{d\tau}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \text{tg}(2\varphi_s) = -\text{ctg}(2\varphi_p) = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2\tau_{xy}}$$

□ Applications typiques

- Contraintes planes :

Mohr representation of the Stress state

© Jean Salençon (2014)



□ Applications typiques

• Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »

➤ Tenseur des contraintes planes

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2 \quad \& \quad j = 1,2$$

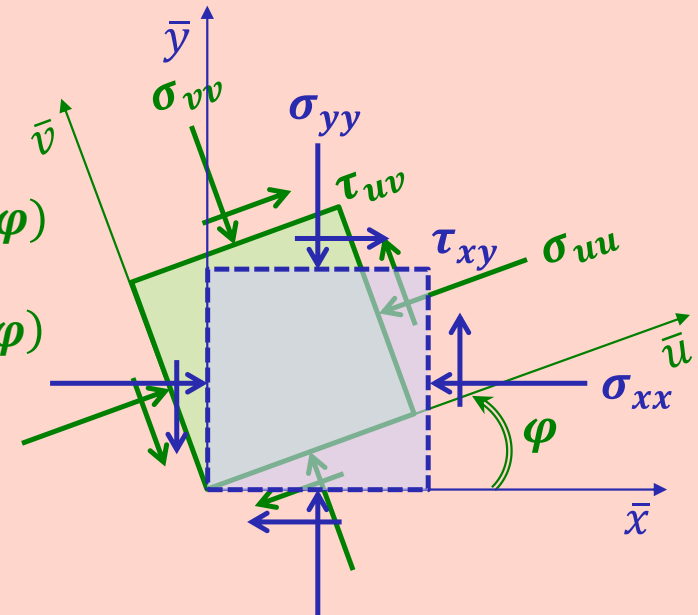
$$\Rightarrow \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad / \quad (\bar{x}, \bar{y})$$

➤ Formules de transformation

$$\sigma_{uu} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\sigma_{vv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

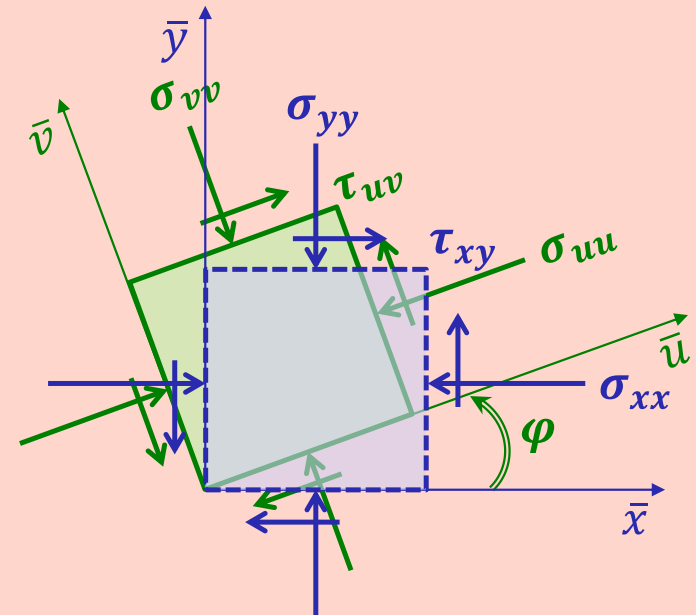
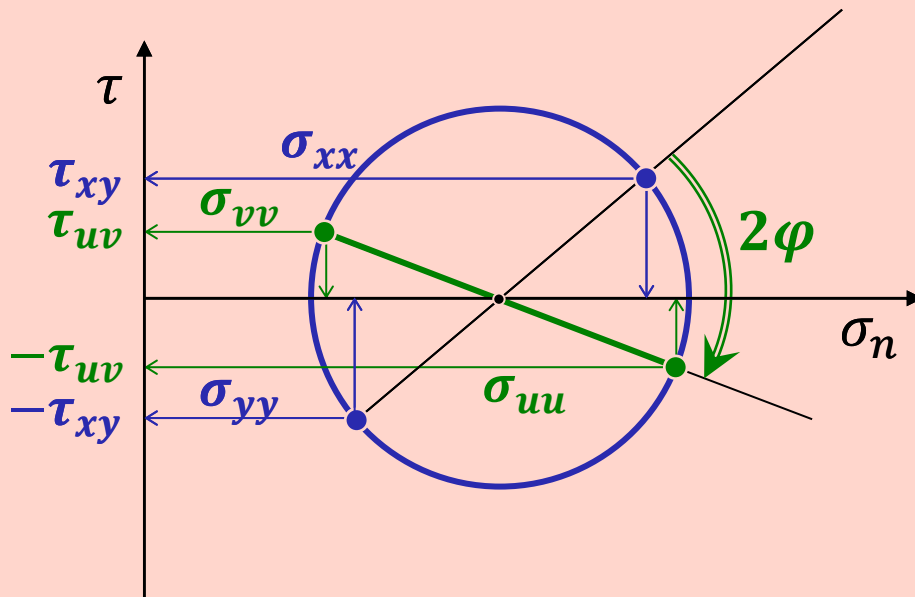
$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) - \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$



□ Applications typiques

- **Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »**

➤ Cercle de Mohr des contraintes



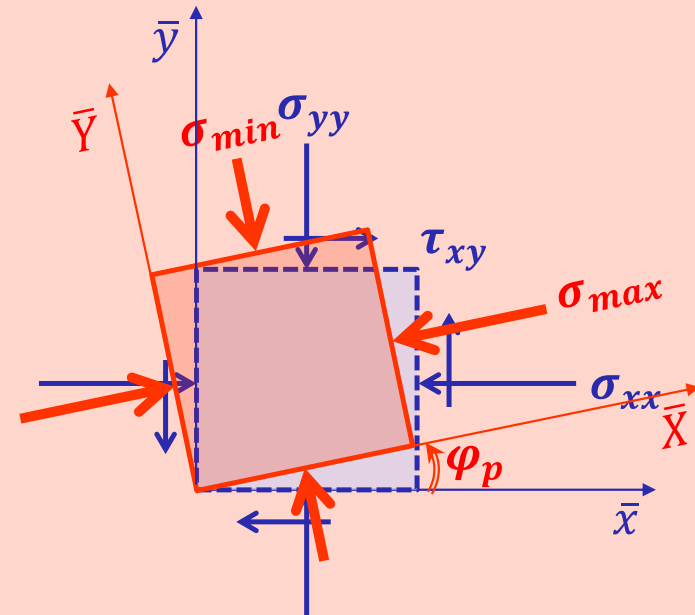
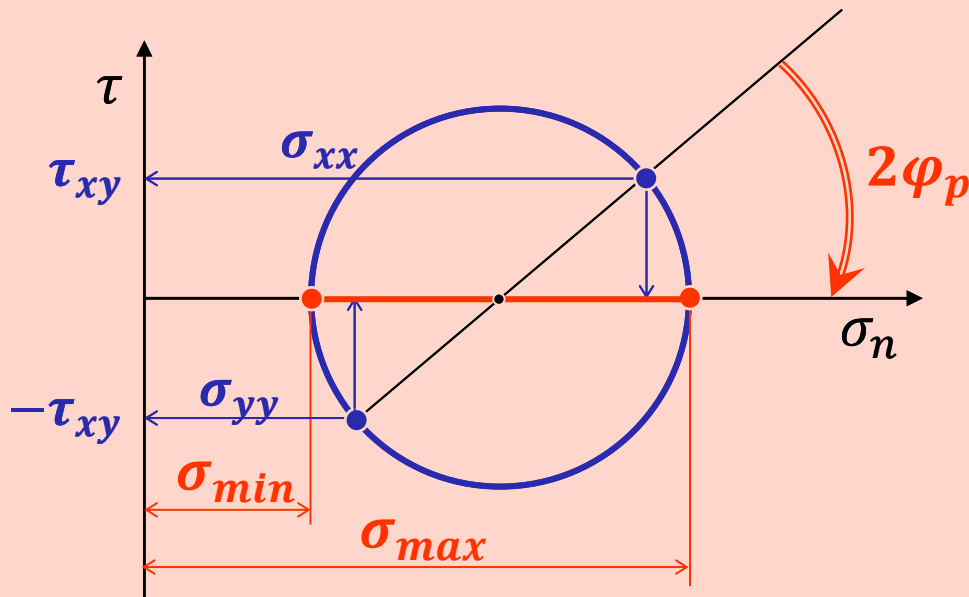
➤ Directions principales

$$\tau_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$

□ Applications typiques

• Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Contraintes principales

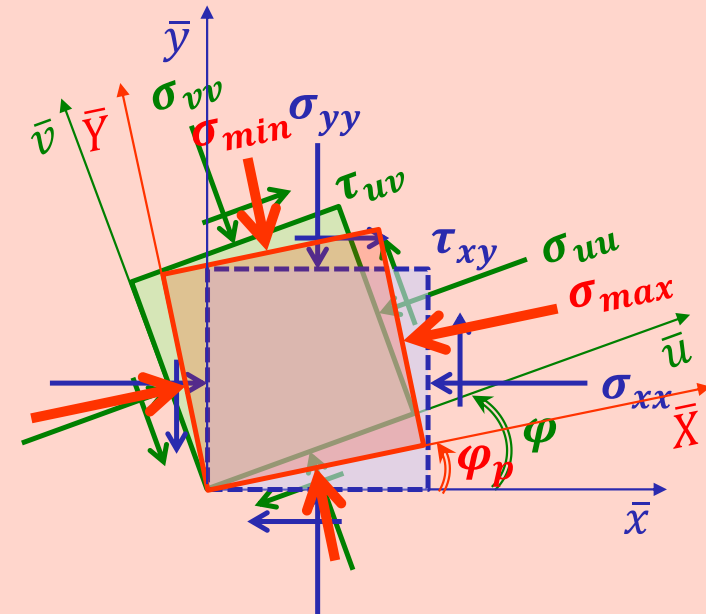
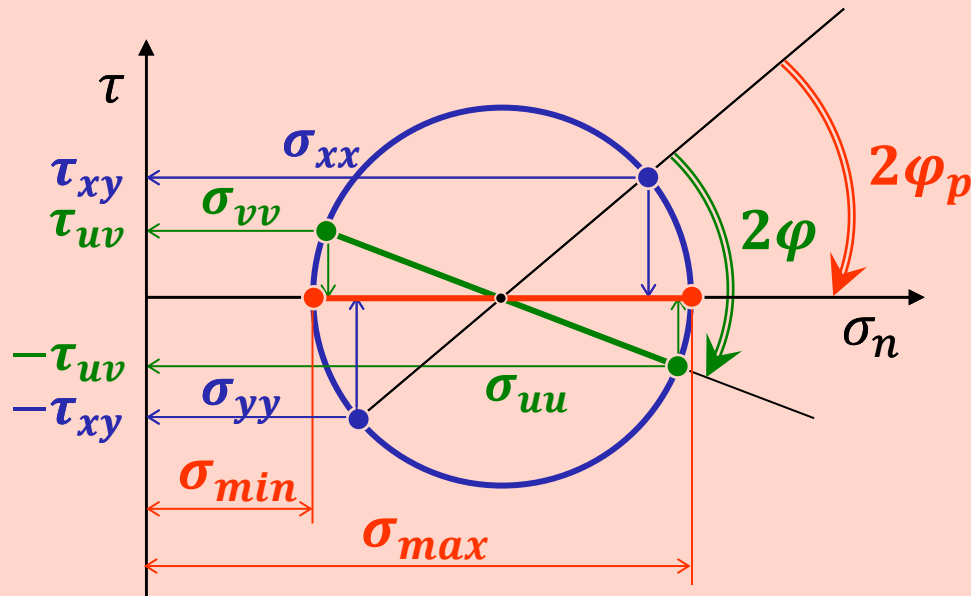
$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Applications typiques

Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »

Cercle de Mohr des contraintes



Contraintes principales

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$

Applications typiques

- Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »



Analyse graphique des contraintes planes

Mohamed Khemissa (2023) – Université de M'sila (Algérie)

Go !...

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Tenseur des contraintes planes

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2 \quad \& \quad j = 1,2$$

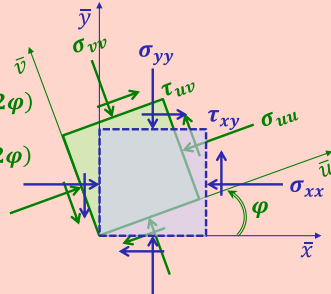
$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \quad / \quad (\bar{x}, \bar{y})$$

➤ Formules de transformation

$$\sigma_{uu} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

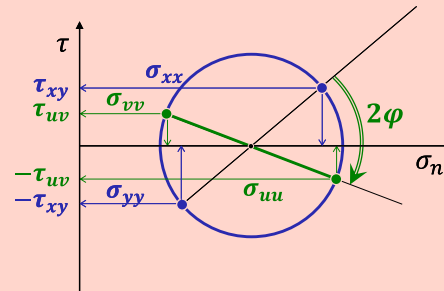
$$\sigma_{vv} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) - \tau_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) - \tau_{xy} \cos(2\varphi)$$



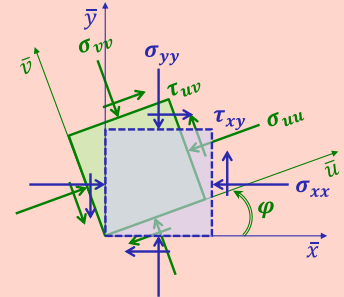
Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Directions principales

$$\tau_{uv} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_p = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right)$$



Applications typiques

- Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »



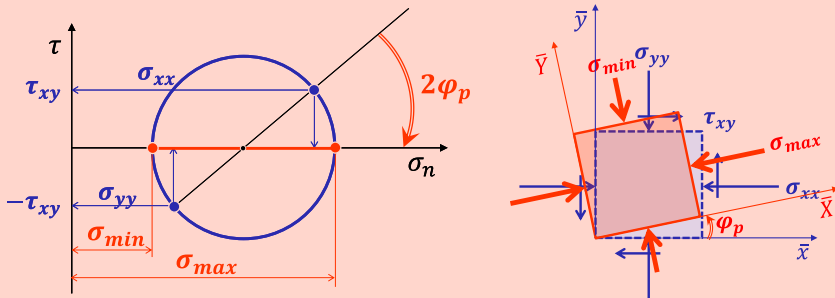
Analyse graphique des contraintes planes

Mohamed Khemissa (2023) – Université de M'sila (Algérie)

Go !...

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



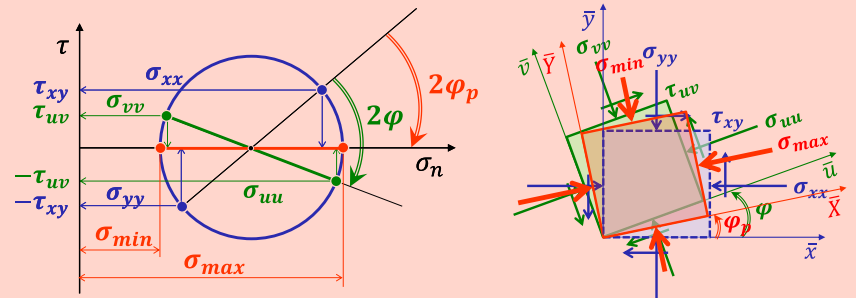
➤ Contraintes principales

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$

Rappels de MMC : Analyse des contraintes par le « Cercle de Mohr »

➤ Cercle de Mohr des contraintes



➤ Contraintes principales

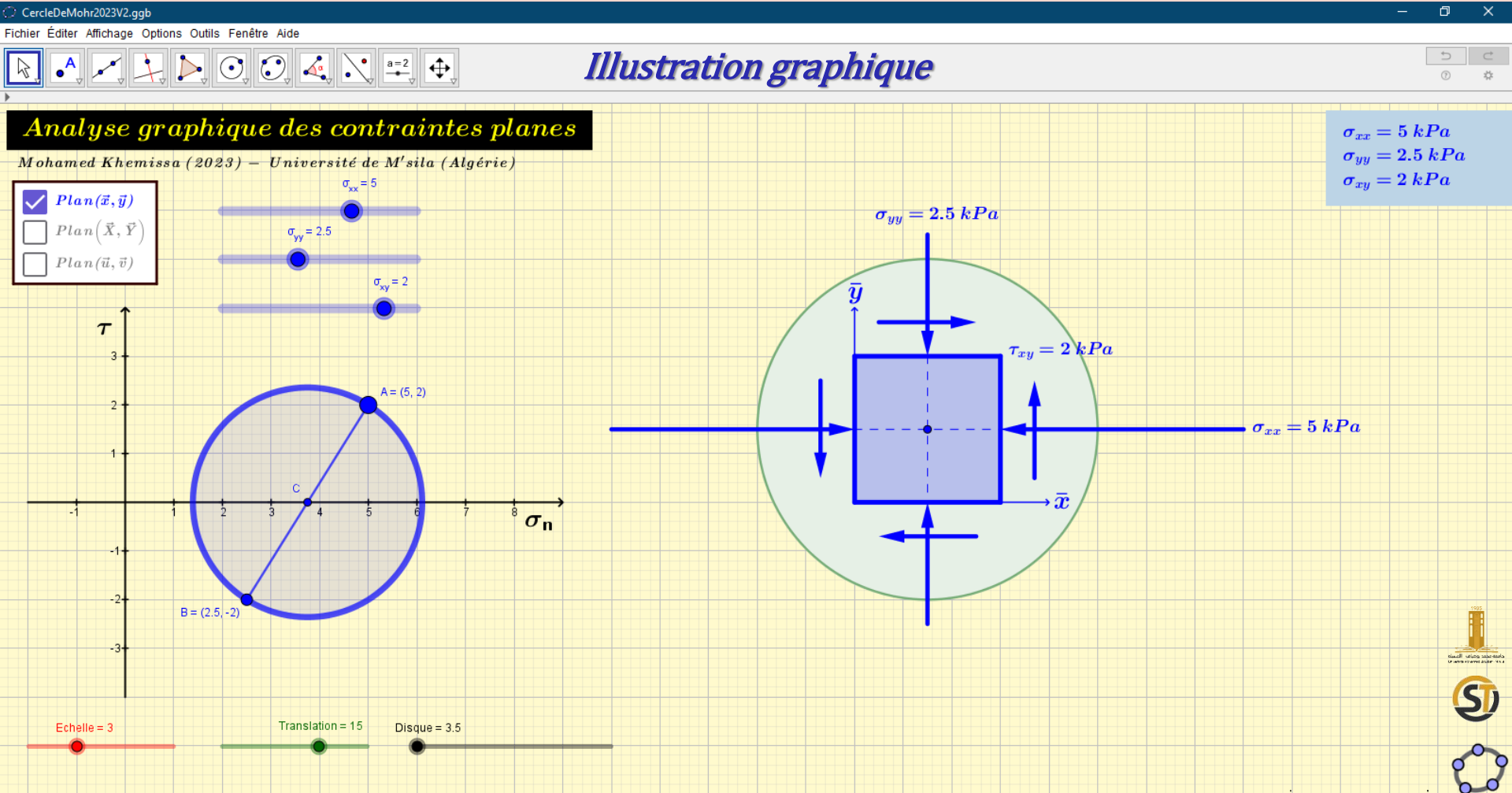
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

➤ Contrainte de cisaillement maximale : $\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$



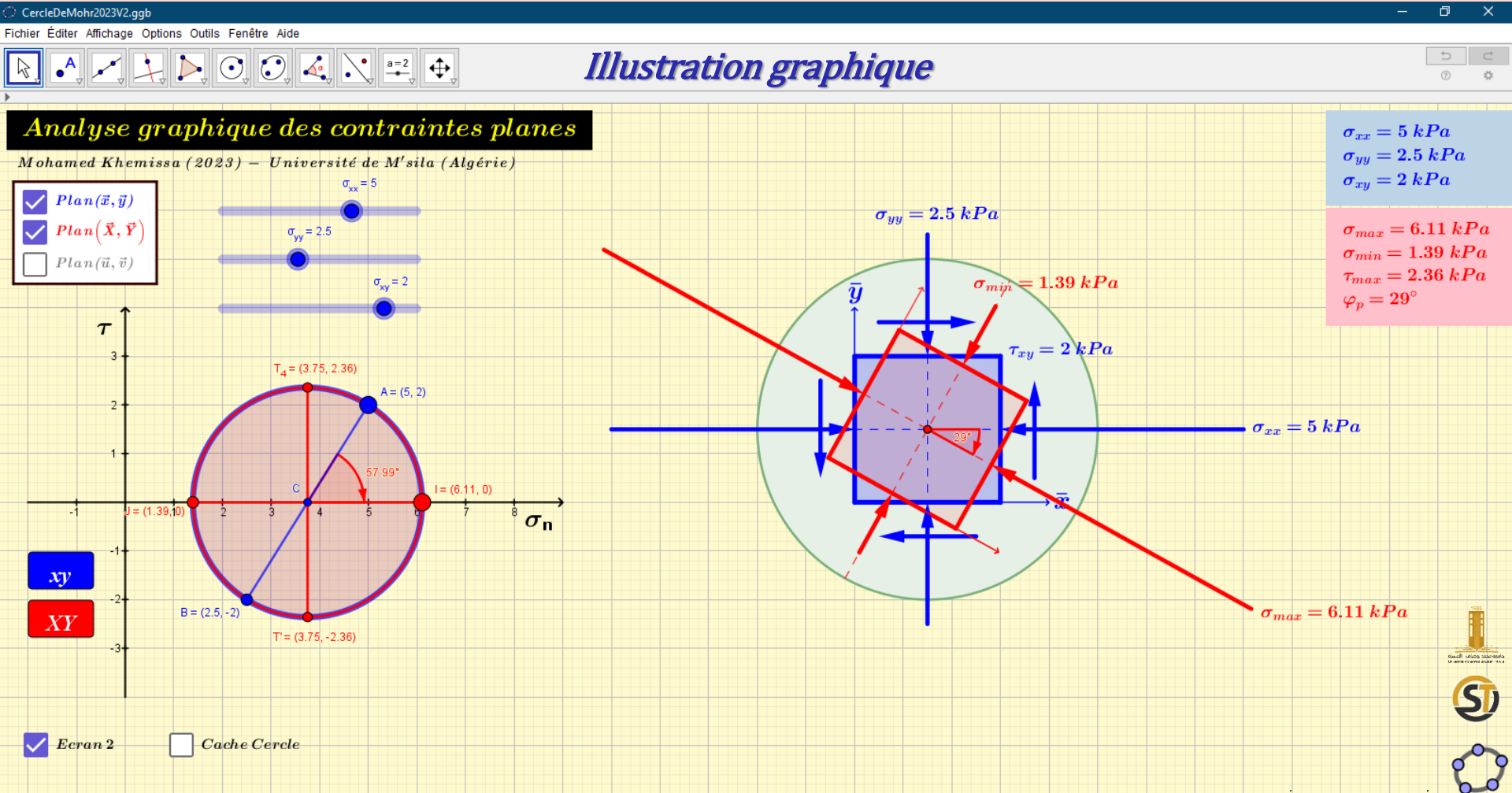
Applications typiques

- Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »



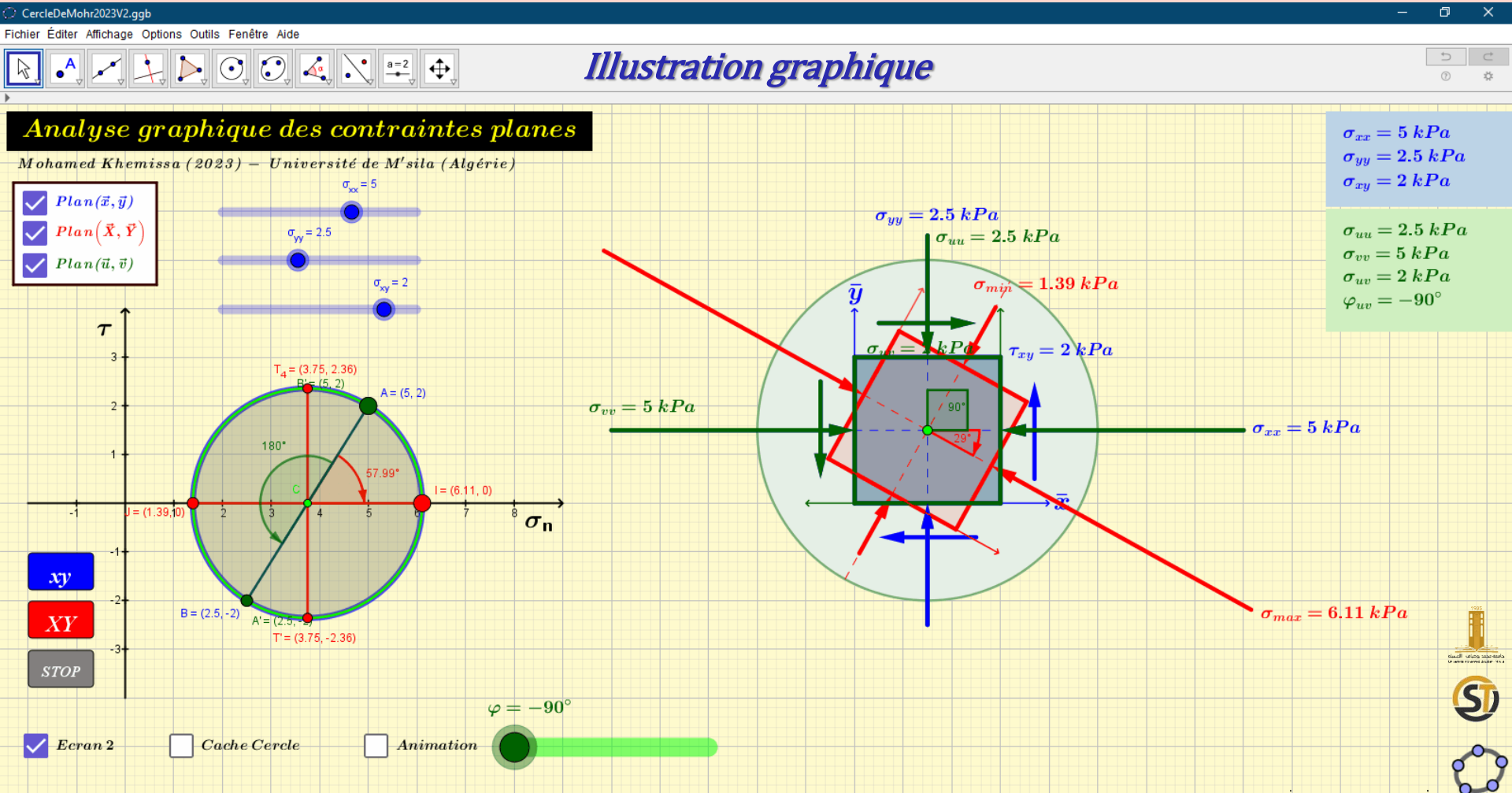
Applications typiques

- Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »



Applications typiques

- Contraintes planes : Analyse graphique par le « Cercle de Mohr »



Merci de votre attention

Fin du Troisième Chapitre

EXERCICES

Ex. 1 En un point M d'un milieu continu, l'état des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 15 \text{ kN/m}^2, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{23} = \sigma_{31} = 5 \text{ kN/m}^2.$$

On demande de :

- Construire le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ correspondant.
- Calculer ses contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Calculer ses invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante. Commenter avec justification les résultats trouvés.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement τ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 2 En un point M d'un milieu continu, les composantes du tenseur des contraintes sont définies dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\sigma_{ij} = \lambda + \mu \delta_{ij} ,$$

où λ et μ désignent deux constantes positives non nulles (paramètres de Lamé) et $\bar{\delta} = [\delta_{ij}]$ le tenseur de Kronecker.

On demande de :

- Construire le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ correspondant.
- Calculer les invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$, puis déduire la contrainte de cisaillement τ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 3 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) .$$

On demande de :

- Calculer ses invariants de contraintes I_1 , I_2 et I_3 , puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer ses contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Tracer le tricerple de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement τ_{max} correspondante.

EXERCICES

Ex. 4 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (N/mm^2) .$$

On demande de :

- Quelle est la particularité de ce tenseur ? Justifier la réponse donnée.
- Calculer les invariants de contraintes, puis écrire l'équation caractéristique correspondante.
- Calculer les contraintes principales et leurs directions.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement correspondante.

EXERCICES

Ex. 5 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0.75\alpha \\ 0 & 0.75\alpha & \alpha \end{bmatrix} \quad (\times 10^2 \text{ N/mm}^2),$$

où $\alpha \in [0,1]$ désigne un paramètre de chargement.

On demande de :

- Déterminer l'état des contraintes en ce point pour $\alpha = 0$? Préciser la direction de la sollicitation correspondante.
- Calculer en fonction de α les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$, ainsi que les invariants de contraintes I_1, I_2 et I_3 . Commenter avec justification les résultats trouvés en précisant le type de sollicitation correspondante.
- Pour quelle valeur de α , notée α_o , le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, devient-t-il déviatorique ? En déduire les invariants des contraintes J_1, J_2 et J_3 correspondants.

EXERCICES

Ex. 6 En un point M d'un milieu continu, le tenseur des contraintes est défini dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ par :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{bmatrix} \quad (daN/mm^2) .$$

On demande de :

- Calculer les contraintes principales $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ et leurs directions $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ et $\bar{n}_3$.
- Calculer les composantes du vecteur contrainte dans la direction de la première bissectrice du plan $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
- Tracer le tricerclé de Mohr des contraintes, puis déduire la contrainte de cisaillement τ_{max} correspondante.
- Déterminer le tenseur des contraintes dans le repère direct $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ défini par $\bar{x}_1 \equiv \bar{y}_1$ et $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 30^\circ$.

TRAVAIL PERSONNEL

Soit l'état plan des contraintes représenté ci-dessous. On demande de représenter le cercle de Mohr des contraintes, puis de déduire graphiquement les contraintes principales σ_1 et σ_2 et l'angle de rotation θ_p correspondant, ainsi que la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} et l'angle de rotation θ_s correspondant.

