

Chapitre Deux

Concepts généraux

- ❑ *Définition d'un milieu continu*
- ❑ *Repérage des milieux déformables*
 - *Champ de déplacements*
 - *Champ de vitesses*
 - *Exemple*
- ❑ *Actions appliquées aux milieux déformables*
 - *Actions mécaniques*
 - *Actions non mécaniques*
- ❑ *Cinématique des milieux continus*
 - *Description lagrangienne*
 - *Description eulérienne*
- ❑ *Dérivée particulaire*
- ❑ *Conservation de la matière*



DÉFINITION D'UN MILIEU CONTINU

□ Définition d'un milieu continu

- **Notion de continuité matérielle**

Lors de la déformation d'un milieu continu, on doit s'assurer de ce qui suit :

- **Continuité de la matière** : Tout élément du volume de ce milieu continu est constamment rempli par la matière.
- **Cohésion de la matière** : Deux éléments jointifs de sa matière le restent indéfiniment.

- **Notion de volume élémentaire de référence : V.E.R**

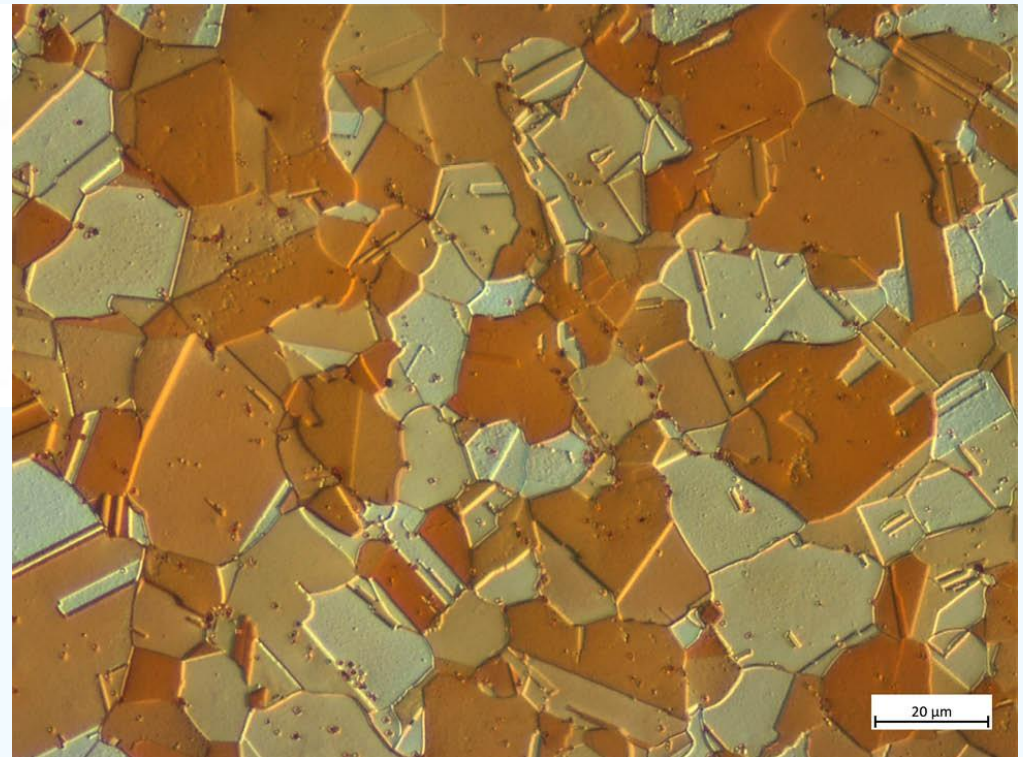
L'étude locale des milieux déformables introduit la notion d'élément matériel (ou de volume élémentaire de référence : V.E.R). L'échelle correspondante est de type macroscopique (échelle décimétrique) : continuité macroscopique.

Exemples : Epreuves de béton, d'acier et de sol.



□ Définition d'un milieu continu

- **Remarque :** L'examen microscopique (échelle nanométrique) d'un morceau d'acier permet de s'apercevoir qu'il est constitué de cristaux de diverses espèces différemment orientées. Mais, on peut dire que la continuité macroscopique reste assurée car ces cristaux sont extrêmement petits (1 mm^3 en contient des centaines).

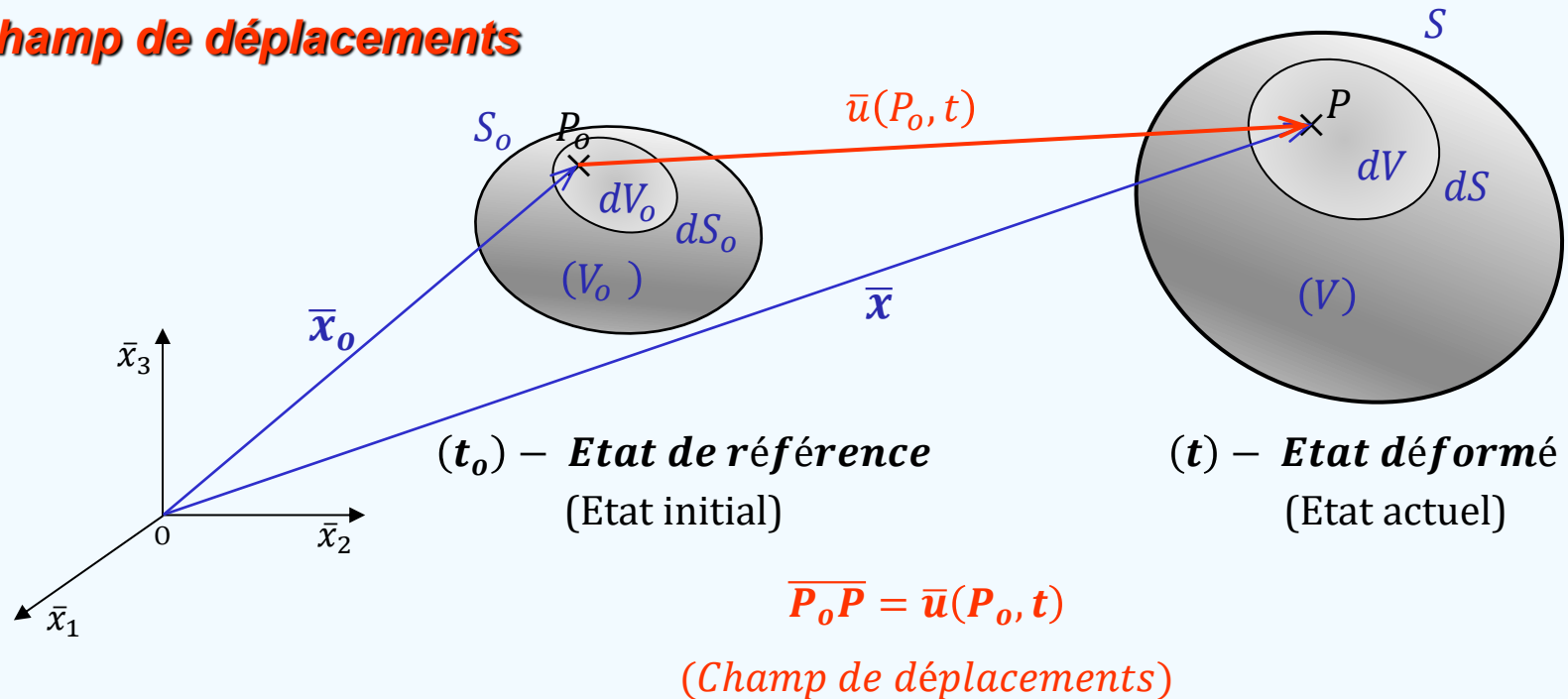


REPÉRAGE DES MILIEUX DÉFORMABLES

□ Repérage des milieux déformables

Le repérage des éléments constitutifs des milieux continus déformables s'effectue dans les repères orthonormés dans un espace vectoriel E_3 (*Espace à 3 dimensions*).

- **Champ de déplacements**



$$\overline{OP} = \overline{OP}_0 + \overline{P}_0\overline{P} = \overline{OP}_0 + \overline{u}(P_0, t) \Rightarrow x_i = x_{oi} + u_i(P_0, t) \quad | \quad i = 1, 2, 3$$

Nota : Cette grandeur est intéressante quand on étudie le mouvement des solides.

□ Repérage des milieux déformables

Le repérage des éléments constitutifs des milieux continus déformables s'effectue dans les repères orthonormés dans un espace vectoriel E_3 (*Espace à 3 dimensions*).

- **Champ de vitesses**

Le champ de déplacements n'est utile que si l'on connaît un état de référence. C'est le cas des solides. Mais, ce n'est pas toujours le cas des fluides (gaz et liquides).

On repère alors un élément matériel par le point P à l'instant $t + dt$ par rapport à la position qu'il occupe à l'instant t , c'est-à-dire qu'on considère l'équation :

$$\bar{u}(P, t + dt) - \bar{u}(P, t) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dt = \bar{v}(P, t) dt$$

exprimée en fonction des coordonnées de P (position actuelle de l'élément matériel).

On introduit ainsi le champ de vitesses $\bar{v}(P, t)$.

$$\Rightarrow \bar{v}(P, t) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\bar{u}(P, t + dt) - \bar{u}(P, t)}{dt} = \frac{dx_i}{dt}$$

Nota : Cette grandeur est intéressante quand on étudie le mouvement des fluides.

□ Repérage des milieux déformables

Le repérage des éléments constitutifs des milieux continus déformables s'effectue dans les repères orthonormés dans un espace vectoriel E_3 (*Espace à 3 dimensions*).

• **Exemple : Vibration d'une barre**

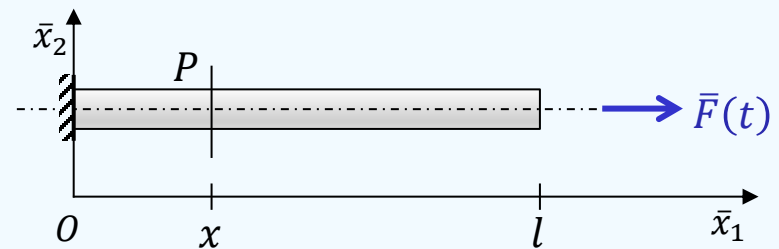
- **Etat de référence** ($t = t_o$) : $\bar{F}(t_o) = \bar{0}$
- **Etat actuel** ($t > t_o$) : $\bar{F}(t) \neq \bar{0}$

Si l'on considère une section d'abscisse x_o dans l'état de référence t_o , on peut admettre en première approximation que cette section se déplacera parallèlement à elle-même. Autrement dit, on peut écrire :

$$\begin{cases} x(t) = x_o + u(x_o, t) \\ y(t) = y_o \\ z(t) = z_o \end{cases}$$

Ces relations définissent le champ de déplacements des sections de la console.

La grandeur physique intéressante dans cet exemple est l'allongement qui satisfait à $u(0, t) = 0$ et $u(x_o, t_o) = 0$.



ACTIONS APPLIQUÉES AUX MILIEUX DÉFORMABLES

□ Actions appliquées aux milieux déformables

L'évolution d'un système physique est due en général aux interactions que ce dernier peut avoir avec le milieu extérieur. On distingue usuellement deux types d'interactions :

- Les actions mécaniques : qui se manifestent par des forces et des couples.
- Les actions non mécaniques : qui se manifestent par l'existence de flux (ex. flux de chaleur) et de source (ex. source de masse associée à une réaction chimique).

Nota : Bien que certaines actions non mécaniques puissent entraîner la déformation des milieux qui les subissent, on ne se préoccupe dans la suite de ce cours que des actions mécaniques.

- **Actions mécaniques** : Elles comportent :
 - Les actions de volume : qui sont extérieures au milieu déformable ou intérieures à distance (ex. poids propre). Les actions extérieures ou intérieures à distance sont de nature gravitaire ou électrique. Elles sont à longue portée, c'est-à-dire qu'elles se font sentir à des distances pouvant être grandes devant celles de l'élément matériel considéré. On notera que les actions intérieures à distance d'origine électrique ou magnétique sont négligées.

□ Actions appliquées aux milieux déformables

- Les actions de contact : qui schématisent macroscopiquement des forces à courte portée s'exerçant entre des éléments matériels contigus (ex. frottement). Elles sont responsables de la cohésion des éléments du milieu continu. Ces actions vont se traduire par l'existence de torseurs élémentaires de forces s'exerçant entre deux parties du milieu séparées par une surface élémentaire arbitrairement choisie.
- **Actions non mécaniques** : En mécanique des milieux continus, on exclut en général certains phénomènes physiques qui peuvent se produire dans les milieux matériels étudiés. Il s'agit en particulier des phénomènes suivants :
 - Diffusion : d'un gaz dans un autre ;
 - Changement de phase : passage d'un constituant du milieu d'une phase liquide en une phase solide ou réciproquement ;
 - Réaction chimique ;pour lesquels la masse volumique ne peut pas varier de façon arbitraire au cours de la déformation du milieu. Elle est reliée localement au champ des déplacements (ou au champ des vitesses).

CINÉMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS

□ Cinématique des milieux continus

La cinématique des milieux continus déformables est décrite soit en déplacements par les variables de Lagrange (description lagrangienne), soit en vitesses par les variables d'Euler (description eulérienne) :

- **Description lagrangienne** : dans le cas du champ des déplacements $\bar{u}(P_o, t)$, on obtient la trajectoire de l'élément considéré en laissant s'écouler le temps. Autrement dit, on suit l'élément matériel dans son mouvement. Cette description, associée aux variables de Lagrange, s'accommode bien avec la cinématique des solides.
- **Description eulérienne** : cependant, pour le champ des vitesses $\bar{v}(P, t)$, on verra se succéder en le point P les différents éléments matériels, c'est-à-dire leurs trajectoires passant par celui-ci. Cette description, associée aux variables d'Euler, s'accommode bien avec la cinématique des fluides.

Nota :

- Dans la description d'Euler, si on choisit un élément matériel et si on le suit dans son mouvement, on retrouve la description de Lagrange.
- Dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP), les deux descriptions lagrangienne et eulérienne sont confondues.

DÉRIVÉE PARTICULAIRE

□ Dérivée particulière

Désignant par $g(P, t)$ une grandeur physique associée à l'instant t au point $P(x_1, x_2, x_3)$ du milieu déformable considéré dans le repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

- **Définition :** On appelle dérivée particulière, notée $\dot{g}$, la vitesse de variation de g quand on suit P dans son mouvement. Son expression dépend du type de description choisie, d'où les relations suivantes :

- Pour la description lagrangienne : $\dot{g} = \frac{\partial g(P_o, t)}{\partial t}$
 - Pour la description eulérienne : $\dot{g} = \frac{dg(P_o, t)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial g}{\partial x_i}$
- $$\Rightarrow \dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \bar{v} \cdot \overline{grad}(g)$$

Nota :

- La notion de dérivée particulière est surtout utilisée pour l'étude des fluides, donc en variables d'Euler. L'étude des solides s'effectue plutôt en variables de Lagrange.
- Le théorème de dérivation des fonctions composées s'applique pour les fonctions à valeurs aussi bien scalaires, que vectorielles ou tensorielles.

□ Dérivée particulière

- **Théorème de dérivation des fonctions composées** : Son application permet d'écrire :

- Pour une fonction à valeurs scalaires : $f(\bar{x}, t)$

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v} \cdot \overline{grad}(f)$$

- Pour une fonction à valeurs vectorielles : $\bar{V}(\bar{x}, t) = V_p x_p$

$$\dot{\bar{V}} = \frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + v_j V_{i,j} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{V}} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \overline{grad}(\bar{V})$$

- Pour une fonction à valeurs tensorielles : $\bar{\bar{T}}(\bar{x}, t) = [t_{ij}] \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$

$$\dot{\bar{\bar{T}}} = \frac{dt_{ij}}{dt} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial t} + \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial t} + v_j t_{ij,j} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\bar{T}}} = \frac{d\bar{\bar{T}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\bar{T}}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \overline{div}(\bar{\bar{T}})$$

Exemple : Accélération en variable d'Euler

$$\bar{\gamma} = \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \overline{grad}(\bar{u}) \quad \Rightarrow \quad \gamma_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j}$$

CONSERVATION DE LA MATIÈRE

□ Conservation de la matière

Soit un volume matériel quelconque V de masse m d'un système matériel limité par une surface S . Ce volume va se déformer au cours du temps. Cependant, la quantité de matière qu'il contient, c'est-à-dire sa masse, va rester constante. Ceci se traduit par :

$$dm = \rho dV \quad \Rightarrow \quad m = \int_V \rho dV = \text{cste}$$

Les expressions locales de la masse diffèrent selon le type de description retenu :

➤ **Description lagrangienne (Cinématique des solides)** : Supposant connu le champ de déplacement $\bar{u}(P_o, t)$. Si le volume matériel V considéré à l'instant t était en V_o à l'instant t_o , on aura :

$$\int_V \rho(P, t) dV = \int_{V_o} \rho_o(P_o, t_o) dV$$

Soit donc : $\overline{OP} = \overline{OP}_o + \bar{u}(P_o, t) \quad \Rightarrow \quad x_i = x_{oi} + u_i(P_o, t) \quad | \quad i = 1, 2, 3$

On peut faire un changement de variables en utilisant le jacobien de la transformation faisant passer de P_o à P . D'où la relation : $\rho J = \rho_o \quad | \quad J = dV/dV_o = \det(\partial x_j / \partial x_{oi})$.

Mécanique des milieux continus

Chap. 2 : Concepts généraux

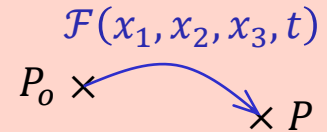
Conservation de la matière

Jacobien de la transformation : Il est défini par la relation suivante :

$$J = \det(\mathcal{F}) \Rightarrow J = \frac{dV}{dV_o} = \det\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_{oi}}\right)$$

où :

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{oi}} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_j(x_{o1}, x_{o2}, x_{o3})}{\partial x_{oi}} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_{o1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{o2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{o3}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{o1}} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_{o2}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{o3}} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_{o1}} & \frac{\partial u_3}{\partial x_{o2}} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_{o3}} \end{vmatrix}$$



Soit après élimination des éléments de second ordre considérés par les produits infiniment petits ($|\partial x_j / \partial x_{oi}| \ll 1$, $\forall i$ et j) :

$$J = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_{o1}} + \frac{\partial u_2}{\partial x_{o2}} + \frac{\partial u_3}{\partial x_{o3}} = 1 + \frac{\partial u_j}{\partial x_{oi}} = 1 + \text{div}(\bar{u}) = 1 + \theta$$

où θ désigne la dilatation volumique (Voir Chapitre 4).

On aura dans l'hypothèse des petites perturbations ($1/(1 + \theta) \approx 1 - \theta$ | $\theta \ll 1$) :

$$\rho J = \rho_o \Rightarrow \rho \approx \rho_o(1 - \theta)$$

□ Conservation de la matière

- **Description eulérienne (Cinématique des fluides)** : Supposons connu le champ des vitesses $\bar{v}(P, t)$. La dérivée particulaire de la masse m est nulle et s'écrit conformément au théorème de la divergence* :

$$\dot{m} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS = 0$$

⇒

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \bar{v} \cdot \bar{n} dS = - \int_S \rho \text{div}(\bar{v}) dV$$

$\rho v dV$: Débit massique surfacique

(Flux de la matière à travers S)

D'où la relation suivante :

$$\dot{\rho} + \rho \text{div}(\bar{v}) = 0 \quad (\text{Equation de continuité})$$

* Théorème de la divergence : Soit $K = \int_V c(\bar{x}, t) dV$ | c – fonction à valeurs scalaires

$$\Rightarrow \dot{K} = \frac{dK}{dt} = \int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV + \int_S c \bar{v} \cdot \bar{n} dS$$

Merci de votre attention

Fin du Deuxième Chapitre