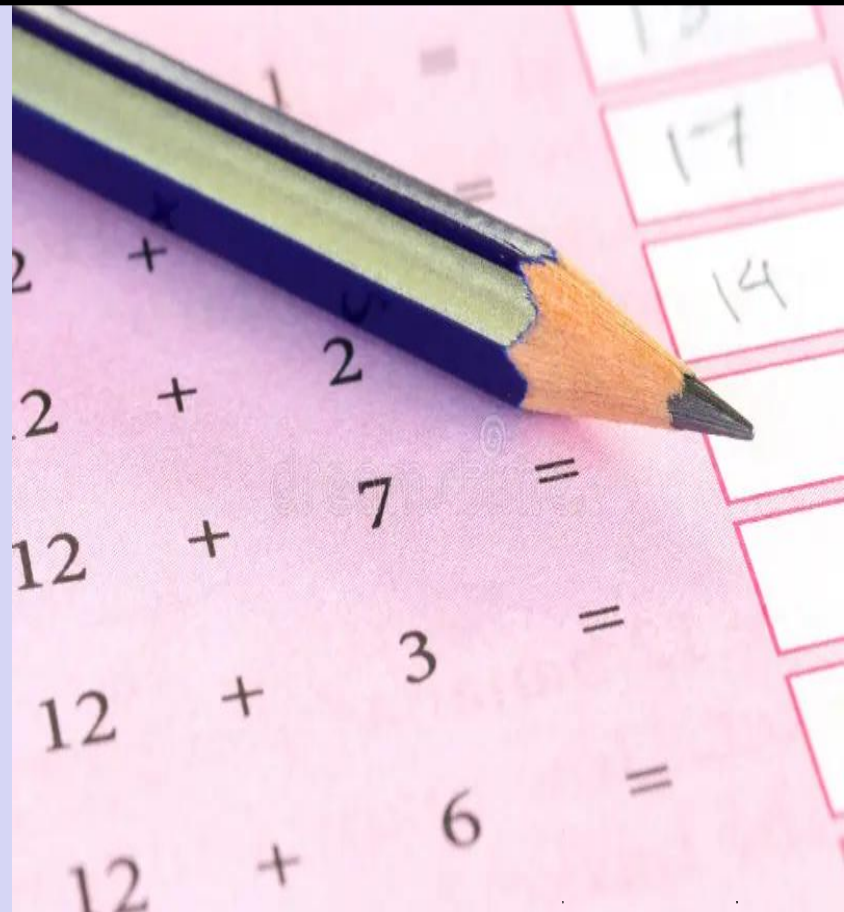


Chapitre Premier

Préliminaires mathématiques

- ❑ **Vecteurs**
- ❑ **Tenseurs**
- ❑ **Formules d'analyse vectorielle et tensorielle**
 - Gradient d'une fonction scalaire
 - Laplacien d'une fonction scalaire
 - Divergence d'un vecteur
 - Rotationnel d'un vecteur
 - Laplacien d'un vecteur
 - Divergence d'un tenseur
 - Laplacien d'un tenseur
 - Quelques identités élémentaires
 - Théorème de la divergence
- ❑ **Coordonnées curvilignes**
- ❑ **Exercices**



VECTEURS

Vecteurs

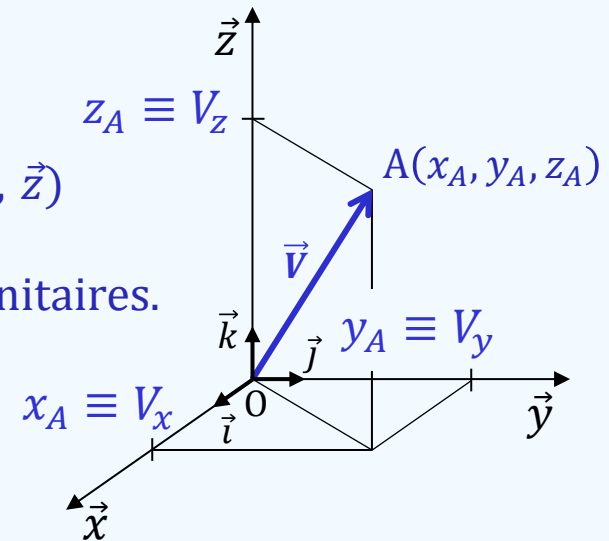
• Définition d'un vecteur

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} \quad / \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

où : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ désignent les vecteurs unitaires.

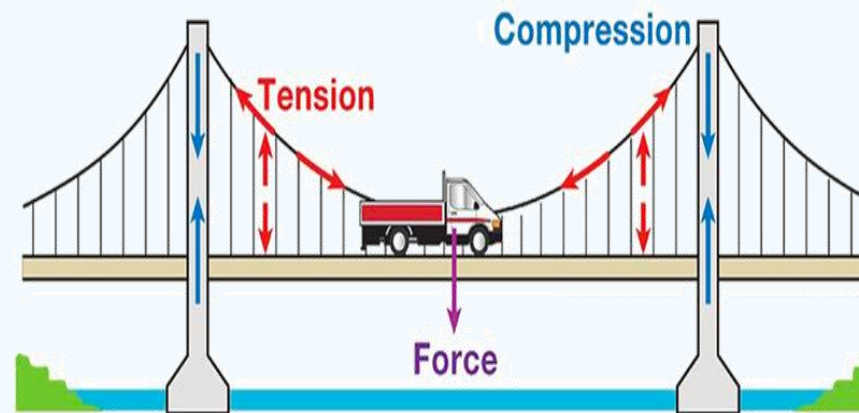
$$\Rightarrow \vec{V} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = {}^t\{V_x, V_y, V_z\} \quad / \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

t – transposée



• Exemples de vecteurs

- Pesanteur
- Forces de tension
- Force de compression
- Force de poussée
- Force de butée



Vecteurs

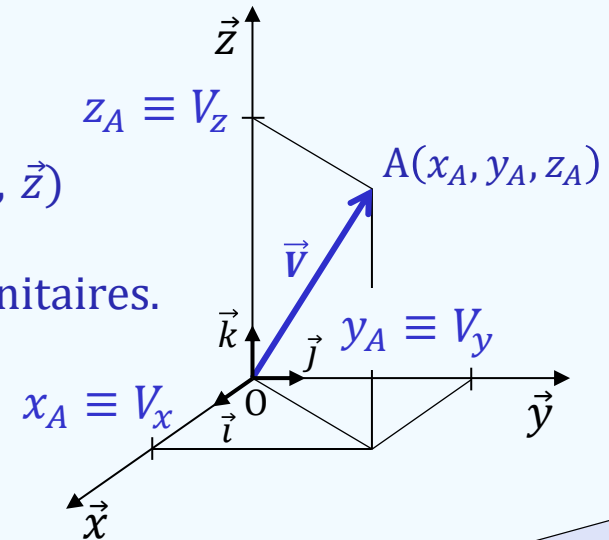
• Définition d'un vecteur

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} = \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k} \quad / \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

où : $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ désignent les vecteurs unitaires.

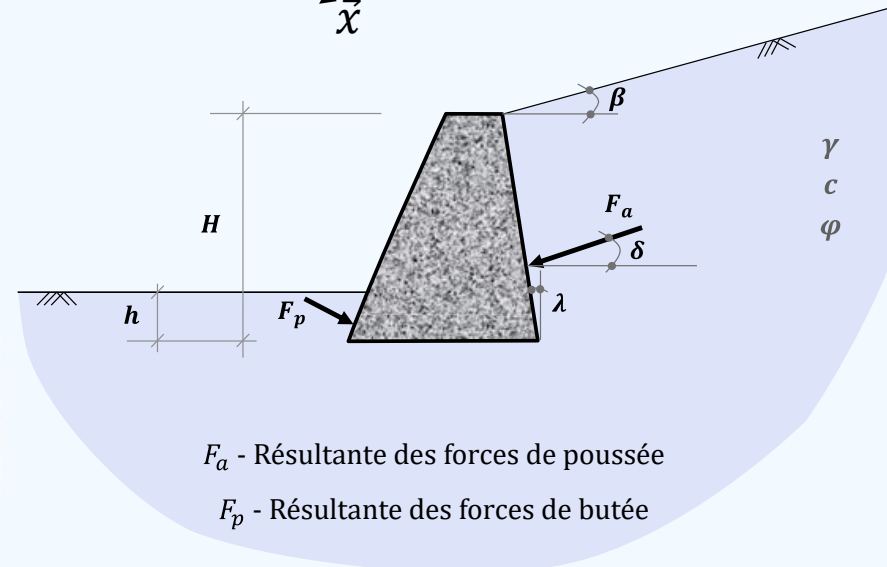
$$\Rightarrow \vec{V} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = {}^t\{V_x, V_y, V_z\} \quad / \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

t - transposée



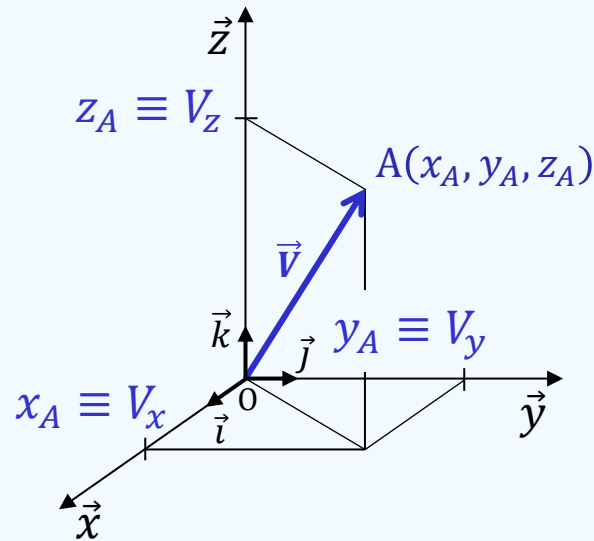
• Exemples de vecteurs

- Pesanteur
- Forces de tension
- Force de compression
- Force de poussée
- Force de butée



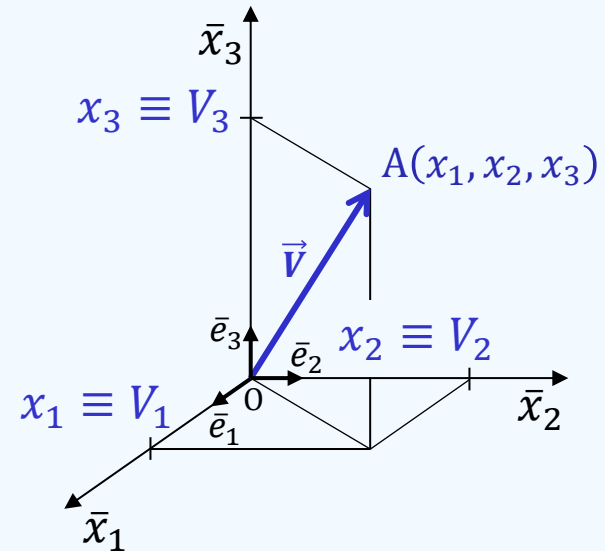
□ Vecteurs

• Notation des vecteurs



$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$$

Notation de l'ingénieur



$$\vec{V} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{Bmatrix} = V_1 \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2 + V_3 \bar{e}_3 = V_p \bar{e}_p$$

$p = 1, 2, 3$

Notation indicielle

□ Vecteurs

• **Convention d'Einstein : Notions d'indice franc et d'indice muet**

➤ **Indice franc** : Soit $\bar{A}$ un vecteur de l'espace euclidien E_3 , tels que A_1, A_2 et A_3 désignent les composantes de $\bar{A}$ dans le repère cartésien $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

⇒ A_i - représente la $i^{\text{ème}}$ composante de $\bar{A}$, l'indice i , qui prend une valeur 1, 2 ou 3 quelconque, mais fixée, est ici un **indice franc**.

➤ **Indice muet** : Si on considère maintenant les relations suivantes :

$$\blacksquare A_1 = L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 = \sum_{j=1}^{j=3} L_{1j}x_j = L_{1j}x_j$$

$$\blacksquare A_2 = L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3 = \sum_{j=1}^{j=3} L_{2j}x_j = L_{2j}x_j$$

$$\blacksquare A_3 = L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3 = \sum_{j=1}^{j=3} L_{3j}x_j = L_{3j}x_j$$

où L_{ij} désigne un opérateur linéaire (Voir § Tenseurs).

⇒ L'indice j , qui prend toutes les valeurs 1, 2 et 3, est ici un **indice muet**.

⇒ $A_i = L_{ij}x_j$ tels que $i = 1,2,3$ (*indice franc*) et $j = 1,2,3$ (*indice muet*).

Nota : Les lettres choisies pour les indices francs et muets doivent être différentes.

□ Vecteurs

• Norme d'un vecteur

Soit le vecteur $\bar{V} = {}^t\{V_1, V_2, V_3\}$ défini dans le repère cartésien $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

$$\Rightarrow \bar{V} = V_1 \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2 + V_3 \bar{e}_3 = \sum_{p=1}^{p=3} V_p \bar{e}_p = V_p \bar{e}_p \quad (p = 1, 2, 3 - \text{indice muet})$$

La norme r du vecteur $\bar{V}$ mesure sa longueur dans l'espace euclidien E_3 . Elle est égale à :

$$r = \|\bar{V}\| = \sqrt{\bar{V} \cdot \bar{V}} = \sqrt{V_p V_p} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \geq 0$$

D
É
M
O

$$\text{Sachant que : } \bar{V} \cdot \bar{V} = (V_1 \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2 + V_3 \bar{e}_3)(V_1 \bar{e}_1 + V_2 \bar{e}_2 + V_3 \bar{e}_3) \quad | \quad \bar{e}_i \bar{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{V} \cdot \bar{V} = V_1 V_1 + V_2 V_2 + V_3 V_3 = \sum_{p=1}^{p=3} V_p V_p = V_p V_p = V_p^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$$

Propriétés :

- $\sqrt{V_p V_p} \neq V_p \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \neq V_1 + V_2 + V_3$
- La norme ne s'annule que pour le vecteur nul $\bar{0}$: $(r = 0 \text{ ssi } \bar{V} = \bar{0})$.
- La norme du produit de $\bar{V}$ par un nombre réel k est égale à : $\|k\bar{V}\| = |k| \|\bar{V}\|$.
- Tout vecteur $\bar{V}$ a la même norme que son opposé : $\|\bar{V}\| = \|-\bar{V}\|$.

□ Vecteurs

• **Opérations sur les vecteurs**

Désignons par $\bar{A}$ et $\bar{B}$ deux vecteurs de l'espace euclidien E_3 , tels que :

- A_1, A_2 et A_3 sont les composantes de $\bar{A}$ dans le repère cartésien $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.
- B_1, B_2 et B_3 sont les composantes de $\bar{B}$ dans le repère cartésien $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

➤ **Produit scalaire** : Le produit scalaire des vecteurs $\bar{A}$ et $\bar{B}$ est défini par :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \sum_{p=1}^{p=3} A_p B_p = A_p B_p$$

Ici, l'indice p prend toutes les valeurs possibles (1,2,3) : c'est un **indice muet**.

La convention de l'indice muet est donc une simplification d'écriture.

Naturellement, tous les changements de lettre sont licites pour un indice muet donné. On peut donc indifféremment écrire :

$$A_p B_p = A_q B_q = A_l B_l = A_i B_i = A_j B_j$$

Nota 1 : $\bar{A} \cdot \bar{B} = A_p B_p = B_p A_p = \bar{B} \cdot \bar{A}$

⇒ Le produit scalaire est commutatif

□ Vecteurs

• Opérations sur les vecteurs

Nota 2 : Si, par exemple, maintenant on considère $A_i = L_{ij}x_j$ et l'on calcule :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_p B_p = B_p A_p = B_p L_{pq} x_q$$

tels que p et q sont des indices muets.

⇒ Dans deux sommations indépendantes (ou plus) dans un même monôme, on choisira une lettre distincte pour chacun des indices muets correspondants. En d'autres termes, on ne devra jamais trouver plus de deux fois le même indice dans un monôme.

Nota 3 : On peut noter que :

$$x_i^2 \neq x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$\swarrow$ indice franc
 $\nwarrow$ indice muet

Quiz

x	0	1	2	3	4	...
x_i^2	?	?	?	?	?	...
$x_i x_i$	?	?	?	?	?	...

□ Vecteurs

• Opérations sur les vecteurs

Nota 2 : Si, par exemple, maintenant on considère $A_i = L_{ij}x_j$ et l'on calcule :

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = A_p B_p = B_p A_p = B_p L_{pq} x_q$$

tels que p et q sont des indices muets.

⇒ Dans deux sommations indépendantes (ou plus) dans un même monôme, on choisira une lettre distincte pour chacun des indices muets correspondants. En d'autres termes, on ne devra jamais trouver plus de deux fois le même indice dans un monôme.

Nota 3 : On peut noter que :

$$x_i^2 \neq x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$\swarrow$ indice franc
 $\nwarrow$ indice muet

Quiz

x	0	1	2	3	4	...
x_i^2	0	1	4	9	16	...
$x_i x_i$	0	3	12	27	48	...

Vecteurs

• Opérations sur les vecteurs

Nota 4 : On peut noter que :

$$\bar{V} \cdot \bar{W} = \|\bar{V}\| \times \|\bar{W}\| \times \cos(\alpha)$$

D'où l'on peut écrire :

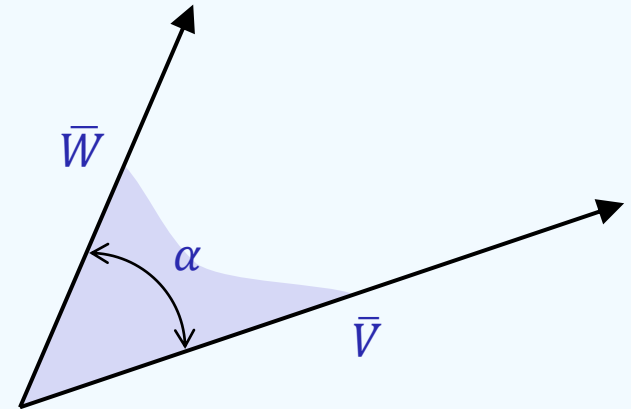
$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{V} \cdot \bar{W}}{\|\bar{V}\| \times \|\bar{W}\|} = \frac{V_p W_p}{\sqrt{V_p V_p} \times \sqrt{W_p W_p}}$$

tel que $p = 1, 2, 3$.

Soit donc :

$$\cos(\alpha) = \frac{V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \times \sqrt{W_1^2 + W_2^2 + W_3^2}}$$

Nota 5 : $\bar{V} \cdot \bar{W} = \frac{1}{4} (\|\bar{V} + \bar{W}\|^2 - \|\bar{V} - \bar{W}\|^2)$



□ Vecteurs

• Opérations sur les vecteurs

➤ **Produit vectoriel** : Le produit vectoriel des vecteurs $\bar{A}$ et $\bar{B}$ est un vecteur $\bar{C}$ défini comme suit :

$$\bar{A} \wedge \bar{B} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \bar{C} = C_1 \bar{e}_1 + C_2 \bar{e}_2 + C_3 \bar{e}_3$$

$$= (A_2 B_3 - A_3 B_2) \bar{e}_1 - (A_1 B_3 - A_3 B_1) \bar{e}_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \\ C_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 = \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{213} A_1 B_3 \\ C_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1 = \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{321} A_2 B_1 \end{cases} \Rightarrow C_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

tel que :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } 1, 2, 3 * \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } 1, 2, 3 ** \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

Symbole
de permutation

* Permutation paire : $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = +1$

** Permutation impaire : $\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

Vecteurs

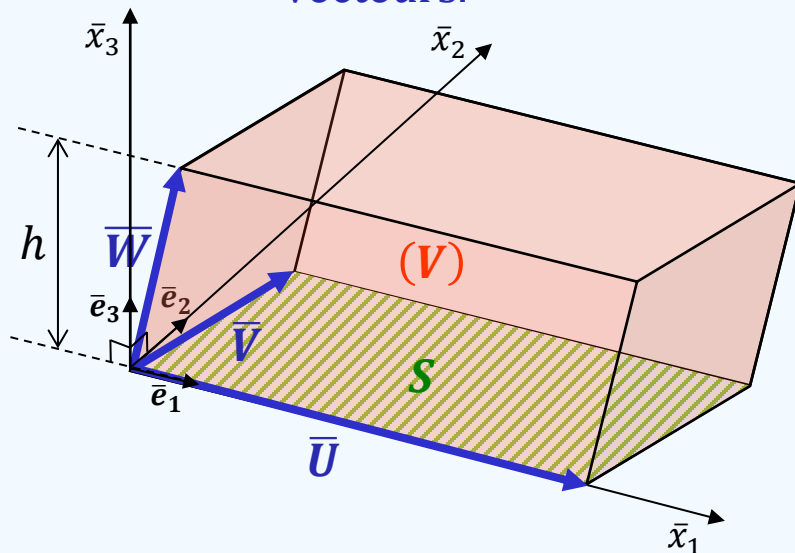
• Opérations sur les vecteurs

➤ **Produit mixte** : Le produit mixte de trois vecteurs $\bar{U}$, $\bar{V}$ et $\bar{W}$ est défini par :

$$(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \\ U_3 & V_3 & W_3 \end{vmatrix} = \bar{U} \cdot (\bar{V} \wedge \bar{W}) = \bar{V} \cdot (\bar{W} \wedge \bar{U}) = \bar{W} \cdot (\bar{U} \wedge \bar{V}) = \epsilon_{ijk} U_i V_j W_k$$

Nota :

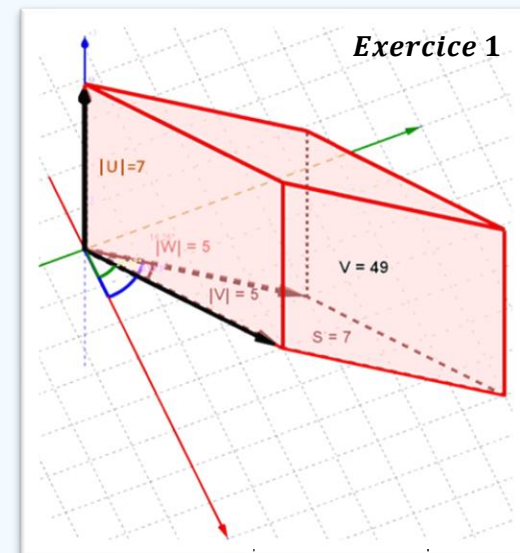
- $|(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})|$ est égal au volume V du parallélépipède engendré par ces trois vecteurs.



$$h = |\bar{e}_3 \cdot \bar{W}|$$

$$S = \|\bar{U}\| \times \|\bar{V}\| \times \sin(\bar{U}, \bar{V})$$

$$V = |(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})| = S \times h$$



TENSEURS

□ Tenseurs

- **Définition d'un tenseur**

Un tenseur du second ordre $\bar{\bar{T}}$ est un opérateur linéaire qui fait correspondre à tout vecteur $\bar{V}$ de l'espace euclidien E_3 un vecteur $\bar{W}$ de ce même espace, soit :

$$\bar{W} = \bar{\bar{T}}(\bar{V}) \quad \Rightarrow \quad W_i = t_{ij}V_j \quad | \quad t_{ij} - \text{valeurs du tenseur } \bar{\bar{T}}$$

Le caractère linéaire du tenseur $\bar{\bar{T}}$ permet d'énoncer ce qui suit :

« *Un tenseur du second ordre $\bar{\bar{T}}(\bar{V})$ est déterminé de façon unique si l'on connaît ses valeurs t_{ij} prises pour trois vecteurs $\bar{V}$ linéairement indépendants* ».

Si $\bar{e}_i$ désigne les vecteurs unitaires d'une base orthonormée ($i = 1,2,3$), le tenseur $\bar{\bar{T}}$ est donc parfaitement défini pour ces trois vecteurs :

$$\bar{\bar{T}}(\bar{e}_j) = t_{ij}\bar{e}_i \quad | \quad j = 1,2,3 ;$$

c'est-à-dire par les neuf nombres t_{ij} qui constituent la matrice des composantes du tenseur dans la base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$. En effet, on a :

$$\bar{\bar{T}}(\bar{V}) = \bar{\bar{T}}(V_j\bar{e}_j) = V_j\bar{\bar{T}}(\bar{e}_j) = V_jt_{ij}\bar{e}_i = t_{ij}V_j\bar{e}_i = W_i\bar{e}_i = \bar{W} \quad \Rightarrow \quad W_i = t_{ij}V_j$$

□ Tenseurs

- **Notation des tenseurs**

Un tenseur $\bar{\bar{T}}$ du second ordre peut être noté dans la base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

➤ soit par une seule lettre, c'est-à-dire par ses composantes en notation vectorielle :

$$\bar{\bar{T}} = \{\bar{T}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{Bmatrix} \quad | \quad \bar{T}_1 = \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{13} \end{Bmatrix}, \quad \bar{T}_2 = \begin{Bmatrix} t_{21} \\ t_{22} \\ t_{23} \end{Bmatrix}, \quad \bar{T}_3 = \begin{Bmatrix} t_{31} \\ t_{32} \\ t_{33} \end{Bmatrix}$$

ou encore : $\bar{\bar{T}} = \{t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23}, t_{31}, t_{32}, t_{33}\}$;

➤ soit encore par la matrice correspondante en notation indicielle :

$$\bar{\bar{T}} = [t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{T}} = t_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2,3 \quad \& \quad j = 1,2,3$$

Nota : En mécanique des milieux continus, l'écriture matricielle des tenseurs est privilégiée à l'écriture vectorielle.

□ Tenseurs

• Exemples de tenseurs

Deux tenseurs sont utilisés en mécanique des milieux continus : le tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$ et le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\varepsilon}$:

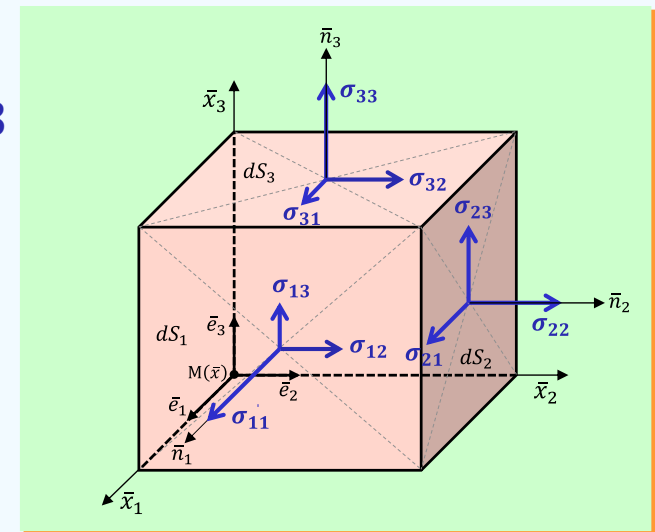
➤ Tenseur des contraintes :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$

⇒

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} = & \sigma_{11} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{12} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{13} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{21} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{23} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{31} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{32} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{cases} \sigma_{ii} - \text{Contraintes normales} \\ \sigma_{ij} \mid i \neq j - \text{Contraintes tangentielles} \end{cases}$$



Détails : Voir Chapitre 3

□ Tenseurs

• **Exemples de tenseurs**

Deux tenseurs sont utilisés en mécanique des milieux continus : le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ et le tenseur des déformations linéarisé $\bar{\bar{\epsilon}}$:

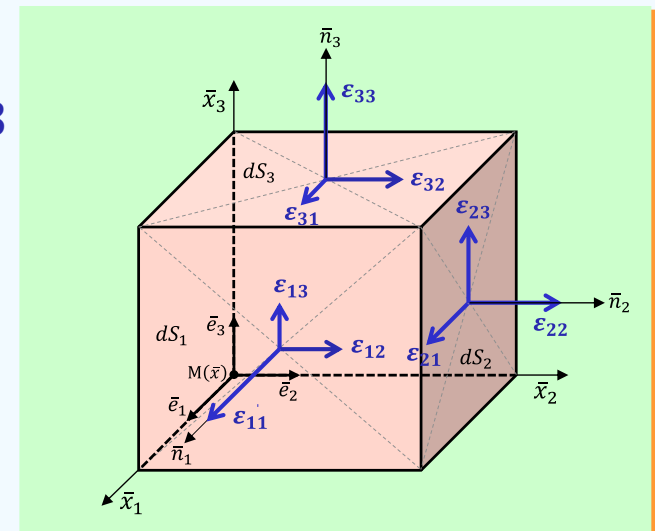
➤ Tenseur des déformations :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1,2,3 \quad \& \quad j = 1,2,3$$

⇒

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}} = & \epsilon_{11} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \epsilon_{12} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \epsilon_{13} \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \epsilon_{21} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \epsilon_{22} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \epsilon_{23} \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \epsilon_{31} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \epsilon_{32} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + \epsilon_{33} \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\epsilon}} = [\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad | \quad \begin{cases} \epsilon_{ii} - \text{Déformations normales} \\ \epsilon_{ij} \mid i \neq j - \text{Déformations tangentielles} \end{cases}$$



Détails : Voir Chapitre 4

□ Tenseurs

- **Cas particuliers**

- **Pseudo-tenseur** : A un tenseur antisymétrique $\bar{\Omega}$ du second ordre, on peut associer un pseudo-tenseur (ou vecteur axial) $\bar{\omega}$ de composantes :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_{kj} \quad | \quad \epsilon_{ijk} - \text{Symbole de permutation (Voir page 14),}$$

c'est-à-dire : $\omega_1 = \Omega_{32}$, $\omega_2 = \Omega_{13}$, $\omega_3 = \Omega_{21}$.

- **Tenseur unité** : On appelle tenseur unité, noté $\bar{\delta}$ ou $\bar{I}$, l'opérateur identité qui, à tout vecteur $\bar{V}$, fait correspondre ce même vecteur $\bar{V}$, c'est-à-dire : $\bar{V} = \bar{\delta} \bar{V}$.

Soit donc :

$$\bar{\delta} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow V_i = \delta_{ij} V_j$$

Les composantes du tenseur unité sont donc les symboles de Kronecker, c'est pourquoi il est aussi appelé : Tenseur de Kronecker.

□ Tenseurs

• **Cas particuliers**

- **Trace d'un tenseur** : La trace d'un tenseur $\bar{\bar{T}} = [t_{ij}]$ est égale à la somme des éléments de la diagonale. Soit donc :

$$Tr(\bar{\bar{T}}) = t_{ii} = t_{11} + t_{22} + t_{33}$$

Nota : La trace du tenseur unité $\bar{\bar{\delta}}$ est égale à :

$$Tr(\bar{\bar{\delta}}) = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

- **Déterminant d'un tenseur** : Le déterminant d'un tenseur $\bar{\bar{T}}$ du second ordre est défini par la relation suivante :

$$det(\bar{\bar{T}}) = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} T_{ip} T_{jq} T_{kr}$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} det(\bar{\bar{T}}) &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = T_{11} \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} - T_{12} \begin{vmatrix} T_{21} & T_{23} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + T_{13} \begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix} \\ &= T_{11}(T_{22}T_{33} - T_{32}T_{23}) - T_{12}(T_{21}T_{33} - T_{31}T_{23}) + T_{13}(T_{21}T_{32} - T_{31}T_{22}) \end{aligned}$$

□ Tenseurs

• **Cas particuliers**

- **Tenseur transposé** : Le tenseur ${}^t\bar{\bar{T}}$ transposé, appelé aussi tenseur adjoint, d'un tenseur $\bar{\bar{T}} = [t_{ij}]$ est défini par :

$${}^t\bar{\bar{T}} = [t_{ji}]$$

$$\text{Soit donc : } \bar{\bar{T}} = [t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow {}^t\bar{\bar{T}} = [t_{ji}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix}$$

Nota :

- ${}^t(\bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{T}}') = {}^t\bar{\bar{T}}' \cdot {}^t\bar{\bar{T}}$ où $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{T}}'$ désignent deux tenseurs quelconques du second ordre ; $\cdot$ étant le symbole du produit simplement contracté .
- $t_{ij}t_{jk} = t_{ij}t_{kj} = t_{ji}t_{ji} = t_{ji}t_{kj} = \delta_{ik}$ (Les indices peuvent être permutés à volonté)

□ Tenseurs

• **Cas particuliers**

- **Tenseur inverse** : On appelle tenseur inverse $\bar{\bar{T}}^{-1} = [t_{ij}^{-1}]$ du tenseur $\bar{\bar{T}} = [t_{ij}]$ lorsque le produit simplement contracté de ces deux tenseurs est égal au tenseur unité (Voir page 23 : *Opérations sur les tenseurs*). Soit donc :

$$\bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{T}}^{-1} = \bar{\bar{\delta}} \quad \Rightarrow \quad t_{ij}t_{jk} = \delta_{ik}$$

Condition d'existence :

- Tenseur du second ordre
- Tenseur non singulier : $\det(\bar{\bar{T}}) \neq 0$

Nota :

- $t_{ij}t_{jk} = t_{ij}t_{kj} = t_{ji}t_{ji} = t_{ji}t_{kj} = \delta_{ik}$ (Les indices peuvent être permutés à volonté)

□ Tenseurs

• **Cas particuliers**

- **Tenseur symétrique** : On appelle partie symétrique (ou partie paire) du tenseur $\bar{\bar{T}}$ du second ordre, le tenseur $\bar{\bar{T}}_s$ défini par :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{T}}_s &= \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} + {}^t\bar{\bar{T}}) \quad \Rightarrow \quad (T_s)_{ij} = (T_s)_{ji} \\ &\Rightarrow \quad Tr(\bar{\bar{T}}_s) = (T_s)_{ii} = T_{ii} \equiv Tr(\bar{\bar{T}})\end{aligned}$$

- **Tenseur antisymétrique** : On appelle partie antisymétrique (ou partie impaire) du tenseur $\bar{\bar{T}}$ du second ordre, le tenseur $\bar{\bar{T}}_a$ défini par :

$$\begin{aligned}\bar{\bar{T}}_a &= \frac{1}{2}(\bar{\bar{T}} - {}^t\bar{\bar{T}}) \quad \Rightarrow \quad (T_a)_{ij} = -(T_a)_{ji} \\ &\Rightarrow \quad Tr(\bar{\bar{T}}_a) = (T_a)_{ii} \equiv 0\end{aligned}$$

Nota :

- $\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}_s + \bar{\bar{T}}_a$
- $\bar{\bar{T}}_a : \bar{\bar{T}}_s = (T_a)_{ij}(T_s)_{ji} = -(T_a)_{ji}(T_s)_{ij} = -\bar{\bar{T}}_a : \bar{\bar{T}}_s \equiv 0$

□ Tenseurs

• **Opérations sur les tenseurs**

➤ **Produit tensoriel** : Le produit tensoriel de deux vecteurs $\bar{U}$ par $\bar{V}$, que l'on note $\bar{U} \otimes \bar{V}$, est le tenseur $\bar{\bar{W}}$ d'ordre 2 défini par la forme bilinéaire :

$$(\bar{X}, \bar{Y}) \rightarrow (\bar{U} \cdot \bar{X})(\bar{V} \cdot \bar{Y}) \text{ qui a pour composantes } W_{ij} = U_i V_j.$$

On remarque que ce tenseur $\bar{U} \otimes \bar{V}$ fait correspondre à tout $\bar{X}$ le vecteur $\bar{U}(\bar{V} \cdot \bar{X})$ colinéaire à $\bar{U}$.

$$\Rightarrow \bar{\bar{W}} = \bar{U} \otimes \bar{V} \Rightarrow W_{ij} = U_i V_j = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 V_1 & U_1 V_2 & U_1 V_3 \\ U_2 V_1 & U_2 V_2 & U_2 V_3 \\ U_3 V_1 & U_3 V_2 & U_3 V_3 \end{bmatrix}$$

D'où, l'on peut écrire le tenseur $\bar{\bar{T}}$ dans la base orthonormée $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$:

$$\bar{\bar{T}} = [t_{ij}] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\bar{T}} = t_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \quad | \quad i = 1, 2, 3 \quad \& \quad j = 1, 2, 3$$

Nota :

- Le produit tensoriel n'est pas commutatif : $W_{ij} \neq W_{ji}$ pour $i \neq j$
- Tenseur de Kronecker : $\bar{\bar{\delta}} = \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3$

□ Tenseurs

• **Opérations sur les tenseurs**

- **Produit simplement contracté** : Le produit simplement contracté de deux tenseurs $\bar{\bar{A}}$ par $\bar{\bar{B}}$, que l'on note $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}}$, est égal au tenseur $\bar{\bar{C}}$ du même ordre défini par l'opération suivante :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{B}} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ik} B_{kj} \quad ; \quad k - \text{indice muet}$$

Nota :

- $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{\bar{\delta}} \Rightarrow A_{ij} = A_{ik} \delta_{kj} \equiv A_{ij}$
- $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{V} = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot V_k \bar{e}_k = A_{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \cdot \bar{e}_k V_k = A_{ij} \bar{e}_i \delta_{jk} V_k = A_{ij} V_j \bar{e}_i$

- **Produit doublement contracté** : Le produit doublement contracté de deux tenseurs $\bar{\bar{A}}$ par $\bar{\bar{B}}$, que l'on note $\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}}$, est égal au scalaire (tenseur d'ordre zéro) défini par l'opération suivante :

$$\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{B}} = A_{ij} B_{ij}$$

Nota :

- $\bar{\bar{A}} : \bar{\bar{\delta}} = A_{ij} \delta_{ij} = A_{ij} \delta_{ji} = A_{ii} = Tr(\bar{\bar{A}})$

□ Tenseurs

- **Opérations sur les tenseurs**

➤ Opérations particulières : On peut démontrer les relations suivantes (Voir Séries d'exercices) :

- $[Tr(\bar{\bar{M}})]^2 = M_{pp}M_{qq}$
- $Tr(\bar{\bar{M}}^2) = M_{pq}M_{qp}$
- $Tr(\bar{\bar{M}}^t \bar{\bar{M}}) = M_{pq}M_{pq} = Tr({}^t \bar{\bar{M}} \bar{\bar{M}})$
- $\delta_{ij}V_j = V_i$
- $\delta_{pq}V_pW_q = V_lW_l$
- $\delta_{ii} = \delta_{ip}\delta_{pi} = \delta_{ip}\delta_{pq}\delta_{qi} = 3$

où $\bar{\bar{M}}$ désigne un tenseur du second ordre quelconque, $\bar{\delta}$ le tenseur de Kronecker (Tenseur unité), $\bar{V}$ et $\bar{W}$ deux vecteurs quelconques.

□ Tenseurs

• Exemples de calcul

✓ *Produit tensoriel*

$$\text{Soit : } \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

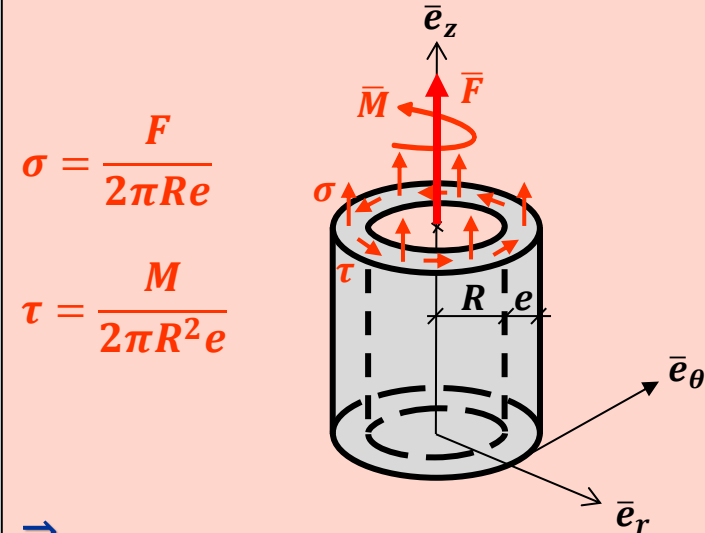
On peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & \sigma_{11}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{12}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{13}\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{21}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{22}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{23}\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_3 \\ & + \\ & \sigma_{31}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_1 + \sigma_{32}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_2 + \sigma_{33}\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 \end{aligned}$$

Soit donc :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma_{ij}\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Exemple 1 : Cylindre creux



⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & \sigma \end{pmatrix} / (\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$$

⇒

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}} = & 0\bar{e}_r \otimes \bar{e}_r + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_\theta + \bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_r) \\ & + 0(\bar{e}_r \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_r) + 0\bar{e}_r \otimes \bar{e}_r \\ & + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta) + \sigma\bar{e}_z \otimes \bar{e}_z \end{aligned}$$

⇒

$$\bar{\bar{\sigma}} = \sigma\bar{e}_z \otimes \bar{e}_z + \tau(\bar{e}_\theta \otimes \bar{e}_z + \bar{e}_z \otimes \bar{e}_\theta)$$

□ Tenseurs

• Exemples de calcul

✓ *Produit simplement contracté*

$$\text{Soit : } \bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\text{et } \bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

On peut écrire :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{d}} \Leftrightarrow c_{ij} = \sigma_{ik} d_{kj}$$

Exemples :

$$c_{11} = \sigma_{11} d_{11} + \sigma_{12} d_{21} + \sigma_{13} d_{31}$$

$$c_{13} = \sigma_{11} d_{13} + \sigma_{12} d_{23} + \sigma_{13} d_{33}$$

$$c_{23} = \sigma_{21} d_{13} + \sigma_{22} d_{23} + \sigma_{23} d_{33}$$

Exemple 2

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \bar{\bar{d}} \Leftrightarrow c_{ij} = \sigma_{ik} d_{kj}$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_{11} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$c_{13} = \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1$$

$$c_{23} = 0 \times 1 + \alpha \times 0 + 0 \times 1$$

...

$$\Rightarrow \bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha + 1 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $Tr(\bar{\bar{C}}) = c_{ii} = 3\alpha + 2$

□ Tenseurs

• **Exemples de calcul**

✓ *Produit doublement contracté*

Soit : $\bar{\bar{A}}$ – tenseur du 4^{ème} ordre
 $\bar{\sigma}$ – tenseur du 2^{ème} ordre
 a – scalaire

On peut écrire :

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{A}} : \bar{\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}$$

$$a = \bar{\sigma} : \bar{\bar{d}} = \sigma_{ik} d_{ki} = Tr(\bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{d}})$$

Soit donc :

$$\begin{aligned} a = & \sigma_{11} d_{11} + \sigma_{12} d_{21} + \sigma_{13} d_{31} \\ & + \sigma_{21} d_{12} + \sigma_{22} d_{22} + \sigma_{23} d_{32} \\ & + \sigma_{31} d_{13} + \sigma_{32} d_{23} + \sigma_{33} d_{33} \end{aligned}$$

Exemple 3

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

$$\bar{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} / (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$$

⇒

$$a = \bar{\sigma} : \bar{\bar{d}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sigma_{ik} d_{ki}$$

⇒

$$\begin{aligned} a = & \alpha \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 \\ & + 0 \times 0 + \alpha \times 1 + 0 \times 0 \\ & + 1 \times 1 + 0 \times 0 + \alpha \times 1 \end{aligned}$$

⇒

$$a = 3\alpha + 2$$

⇒

$$a = Tr(\bar{\sigma} \cdot \bar{\bar{d}}) = c_{ii} = 3\alpha + 2$$

FORMULES D'ANALYSE VECTORIELLE ET TENSORIELLE

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Gradient d'une fonction scalaire**

L'opérateur gradient d'une fonction scalaire, notée ϕ , est défini par :

$$\overline{grad}(\phi) = \bar{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \bar{e}_i = \phi_{,i} \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \overline{grad}(\phi) = \bar{\nabla}\phi = {}^t \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{matrix} / \bar{x}_1 \\ / \bar{x}_2 \\ / \bar{x}_3 \end{matrix} \quad (\text{Vecteur})$$

- **Divergence d'un vecteur**

L'opérateur divergence d'un vecteur, noté $\bar{A}$, est défini par :

$$div(\bar{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = A_{i,i}$$

$$\Rightarrow div(\bar{A}) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \quad (\text{Scalaire})$$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Rotationnel d'un vecteur**

L'opérateur rotationnel d'un vecteur, noté $\bar{A}$, est défini par :

$$\overline{rot}(\bar{A}) = \epsilon_{ijk} A_{k,j} \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \overline{rot}(\bar{A}) = (A_{3,2} - A_{2,3})\bar{e}_1 + (A_{1,3} - A_{3,1})\bar{e}_2 + (A_{2,1} - A_{1,2})\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \overline{rot}(\bar{A}) = {}^t \left\{ \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right\} \quad (\text{Vecteur})$$

- **Laplacien d'une fonction scalaire**

L'opérateur laplacien d'une fonction scalaire, notée ϕ , est défini par :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \phi_{,ii}$$

$$\Rightarrow \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \quad (\text{Scalaire})$$

D'où l'on peut écrire :

$$\Delta \phi = \text{div}(\overline{grad}(\phi)) = \text{div}(\bar{\nabla} \phi)$$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Gradient d'un vecteur**

L'opérateur gradient d'un vecteur, noté $\bar{A}$, est défini par :

$$\overline{\overline{grad}}(\bar{A}) = A_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{grad}}(\bar{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_2} & \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \quad (\text{Tenseur})$$

Nota : $Tr \left(\overline{\overline{grad}}(\bar{A}) \right) = div(\bar{A}) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Laplacien d'un vecteur**

L'opérateur laplacien d'un vecteur, noté $\bar{\Delta}$, est défini par :

$$\bar{\Delta}(\bar{A}) = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j^2} \bar{e}_i = A_{i,jj} \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \bar{\Delta}(\bar{A}) = {}^t \left\{ \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_3^2}, \quad \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3^2}, \quad \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2} \right\}$$

$$\Rightarrow \bar{\Delta}(\bar{A}) = \overline{grad}(div(\bar{A})) - \overline{rot}(\overline{rot}(\bar{A})) \quad (\text{Vecteur})$$

- **Divergence d'un tenseur**

L'opérateur divergence d'un tenseur, noté $\bar{\bar{div}}$, est défini par :

$$\bar{\bar{div}}(\bar{\bar{T}}) = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \bar{e}_i = t_{ij,j} \bar{e}_i$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{div}}(\bar{\bar{T}}) = \begin{Bmatrix} t_{1j,j} \\ t_{2j,j} \\ t_{3j,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{33}}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} / \bar{x}_1 \\ / \bar{x}_2 \\ / \bar{x}_3 \end{matrix} \quad (\text{Vecteur})$$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Laplacien d'un tenseur**

L'opérateur laplacien d'un tenseur, noté $\bar{\bar{T}}$, est défini par :

$$\Delta(T_{ij}) = t_{ij,jj}$$

$$\Rightarrow \Delta(T_{ij}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 t_{11}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 t_{12}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 t_{13}}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 t_{21}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 t_{23}}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 t_{31}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 t_{32}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} \quad (\text{Tenseur})$$

Nota : $Tr(\Delta(T_{ij})) = \frac{\partial^2 t_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 t_{22}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 t_{33}}{\partial x_3^2} = t_{ii,ii}$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Quelques identités remarquables**

$$\triangleright \operatorname{div}(\bar{A}\phi) = \phi \operatorname{div}(\bar{A}) + \bar{A} \cdot \overline{\operatorname{grad}}(\phi)$$

$$\triangleright \overline{\operatorname{rot}}(\bar{A}\phi) = \phi \overline{\operatorname{rot}}(\bar{A}) + \overline{\operatorname{grad}}(\phi) \wedge \bar{A}$$

$$\triangleright \operatorname{div}(\bar{A} \otimes \bar{B}) = \overline{\operatorname{grad}}(\bar{A}) \cdot \bar{B} + \operatorname{div}(\bar{B})\bar{A}$$

$$\triangleright \operatorname{div}(\bar{A} \wedge \bar{B}) = \bar{B} \cdot \overline{\operatorname{rot}}(\bar{A}) - \bar{A} \cdot \overline{\operatorname{rot}}(\bar{B})$$

$$\triangleright \operatorname{div}(\overline{\operatorname{rot}}(\bar{A})) = 0$$

$$\triangleright \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{grad}}(\phi)) = \bar{0}$$

$$\triangleright \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}}(\phi)) = \Delta \phi$$

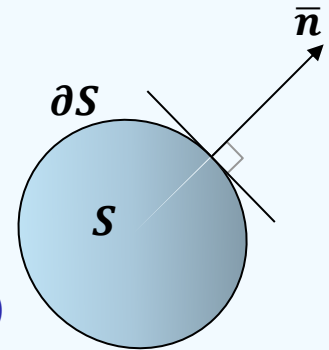
$$\triangleright \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}(\bar{A})) = \overline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\bar{A})) - \bar{\Delta}(\bar{A})$$

□ Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

- **Théorème de la divergence**

Le théorème de la divergence est défini par la relation suivante :

$$\int_V \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} dV = \int_S \mathcal{F} n_i dS \quad (\text{Formules de Gauss, 1813 ;} \\ \text{de Green, 1828 ; d'Ostrogradsky, 1831})$$



où S désigne la surface fermée (frontière du volume V) de normale extérieure $\bar{n}$ et $\mathcal{F}$ peut être une fonction scalaire (ϕ), vectorielle ($\bar{V}$) ou tensorielle ($\bar{\bar{T}}$).

⇒ Donc, on transforme l'intégrale sur le volume en une intégrale sur la frontière.

Formule d'intégration par parties :

$$\text{Si l'on pose : } \mathcal{F} = uv \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}' = (uv)' = u'v - uv'$$

$$\Rightarrow \int_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV = \int_S u v n_i dS - \int_V \frac{\partial u}{\partial x_i} v dV$$

Formules d'analyse vectorielle et tensorielle

Théorème de la divergence

En mécanique des milieux continus, on a souvent besoin du théorème de la divergence établi en analyse vectorielle sous différentes formes :

Dans l'espace	Dans le plan
$\int_V \text{grad}(\phi) dV = \int_S (\phi \bar{n}) dS$	$\int_S \text{grad}(\phi) dS = \int_l (\phi \bar{n}) dl$
$\int_V \text{div}(\bar{V}) dV = \int_S (\bar{V} \cdot \bar{n}) dS$	$\int_S \text{div}(\bar{V}) dS = \int_l (\bar{V} \cdot \bar{n}) dl$

ϕ – champ de scalaires

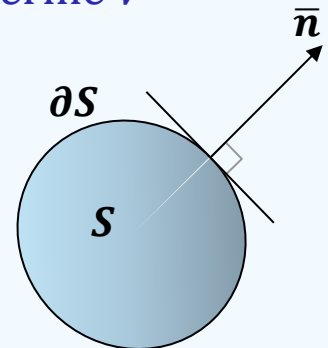
$\bar{V}$ – champ de vecteurs continument différentiable dans le volume fermé V

dV – élément de volume fermé

dS – élément de surface S qui forme la frontière du volume V

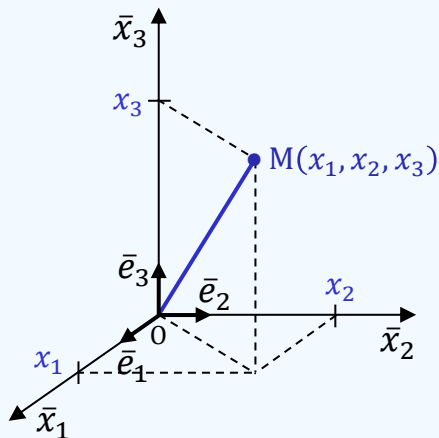
$\bar{n}$ – vecteur unitaire selon la normale extérieure à dS

dl – élément du contour l qui forme la frontière de la surface S

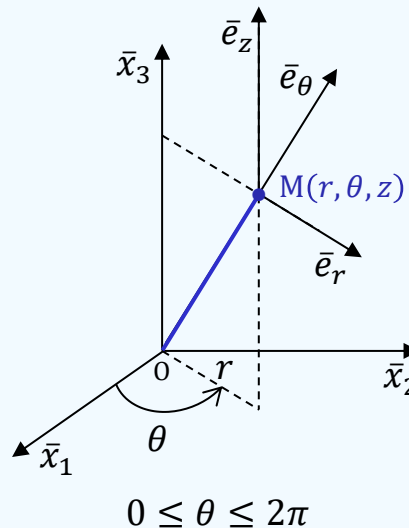


COORDONNÉES CURVILIGNES

□ Coordonnées curvilignes



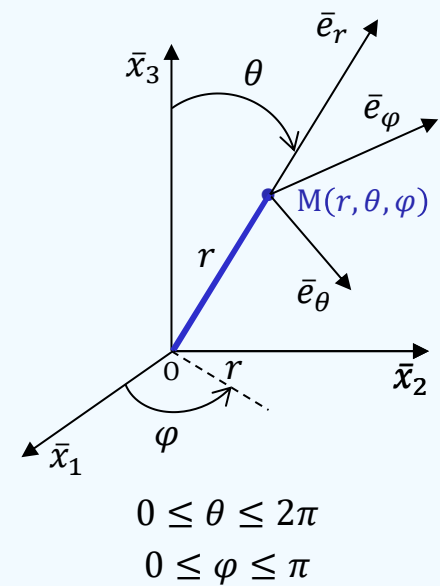
**Coordonnées
cartésiennes**



**Coordonnées
cylindriques**

$$\bar{e}_r = \cos(\theta)\bar{e}_1 + \sin(\theta)\bar{e}_2$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin(\theta)\bar{e}_1 + \cos(\theta)\bar{e}_2$$



**Coordonnées
sphériques**

$$\bar{e}_r = \sin(\theta)[\cos(\varphi)\bar{e}_1 + \sin(\varphi)\bar{e}_2] + \cos(\theta)\bar{e}_3$$

$$\bar{e}_\theta = \cos(\theta)[\cos(\varphi)\bar{e}_1 + \sin(\varphi)\bar{e}_2] - \sin(\theta)\bar{e}_3$$

$$\bar{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\bar{e}_1 + \cos(\varphi)\bar{e}_2$$

□ Coordonnées curvilignes

• **Coordonnées cartésiennes**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

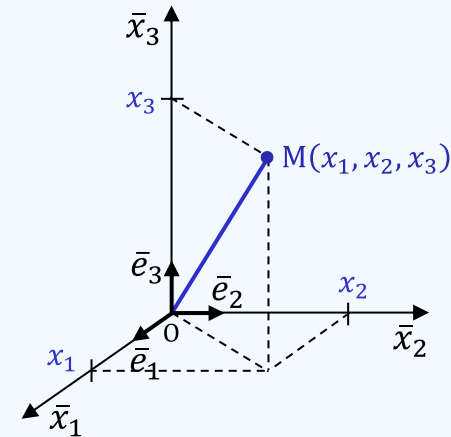
➤ **Fonction scalaire** : $f(\bar{M}) = f(x_1, x_2, x_3)$

- $\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \bar{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \bar{e}_3$
- $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$

➤ **Vecteurs** : $\bar{V}(\bar{M}) = V_1(x_1, x_2, x_3) \bar{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3) \bar{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3) \bar{e}_3$

- $\text{div}(\bar{V}) = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$
- $\overline{\text{rot}}(\bar{V}) = \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_j}{\partial x_k} \bar{e}_i = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \bar{e}_1 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \right) \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \bar{e}_3$

- $\overline{\text{grad}}(\bar{V}) = V_{i,j} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} & \frac{\partial V_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} & \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & \frac{\partial V_3}{\partial x_2} & \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$



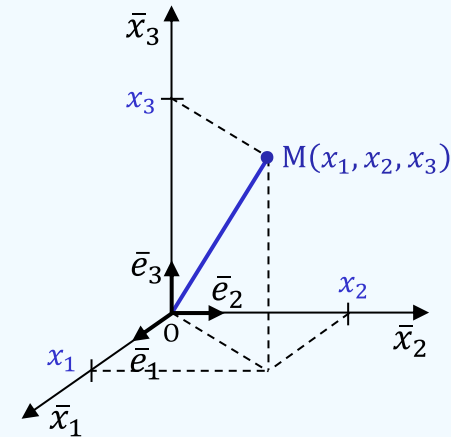
□ Coordonnées curvilignes

- **Coordonnées cartésiennes**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

➤ **Tenseurs** : $\bar{\bar{T}}(\bar{M}) = \bar{\bar{T}}(x_1, x_2, x_3) = T_{ij}(x_1, x_2, x_3) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$

$$\begin{aligned} \square \quad \overline{div}(\bar{\bar{T}}) &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \bar{e}_i = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \bar{e}_3 \end{aligned}$$



□ Coordonnées curvilignes

• **Coordonnées cylindriques**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)^*$.

➤ **Fonction scalaire** : $f(\bar{M}) = f(r, \theta, z)$

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{e}_z$$

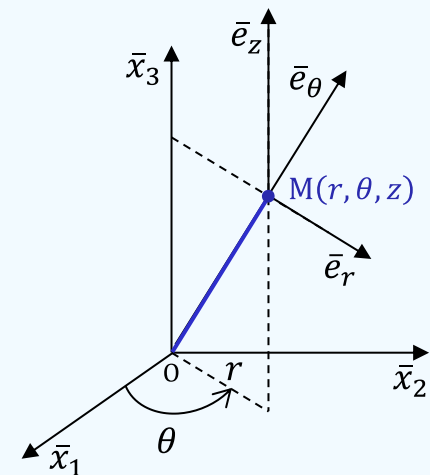
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

➤ **Vecteurs** : $\bar{V}(\bar{M}) = V_r(r, \theta, z) \bar{e}_r + V_\theta(r, \theta, z) \bar{e}_\theta + V_z(r, \theta, z) \bar{e}_z$

$$\text{div}(\bar{V}) = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\overline{\text{rot}}(\bar{V}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \bar{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \bar{e}_\theta + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \bar{e}_z$$

$$\overline{\text{grad}}(\bar{V}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) & \frac{\partial V_r}{\partial z} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_r \right) & \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$



$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

* $\bar{e}_r = \cos(\theta) \bar{e}_1 + \sin(\theta) \bar{e}_2$

$\bar{e}_\theta = -\sin(\theta) \bar{e}_1 + \cos(\theta) \bar{e}_2$

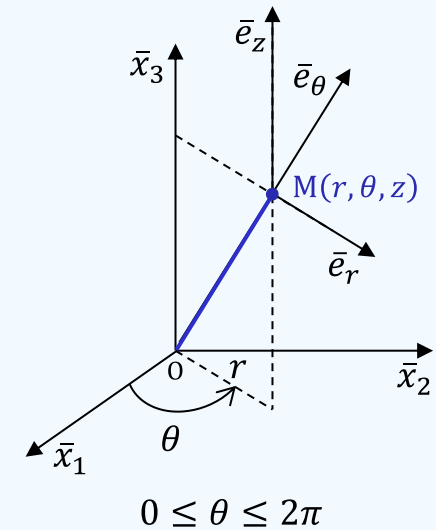
□ Coordonnées curvilignes

- **Coordonnées cylindriques**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$.

➤ **Tenseurs** : $\bar{\bar{T}}(\bar{M}) = \bar{\bar{T}}(r, \theta, z) = T_{ij}(r, \theta, z) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$

$$\begin{aligned} \overline{div}(\bar{\bar{T}}) = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \right) \bar{e}_r \\ & + \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2T_{r\theta}}{r} \right) \bar{e}_\theta \\ & + \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{zr}}{r} \right) \bar{e}_z \end{aligned}$$



□ Coordonnées curvilignes

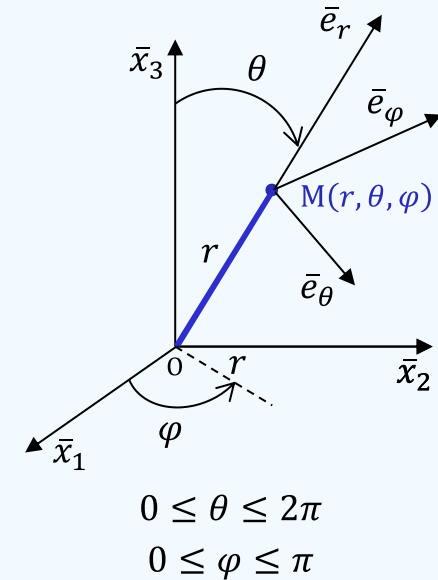
• **Coordonnées sphériques**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)^*$.

➤ **Fonction scalaire** : $f(\bar{M}) = f(r, \theta, \varphi)$

$$\overline{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \bar{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi$$

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot(\theta)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$



* $\bar{e}_r = \sin(\theta)[\cos(\varphi)\bar{e}_1 + \sin(\varphi)\bar{e}_2] + \cos(\theta)\bar{e}_3$

$\bar{e}_\theta = \cos(\theta)[\cos(\varphi)\bar{e}_1 + \sin(\varphi)\bar{e}_2] - \sin(\theta)\bar{e}_3$

$\bar{e}_\varphi = -\sin(\varphi)\bar{e}_1 + \cos(\varphi)\bar{e}_2$

□ Coordonnées curvilignes

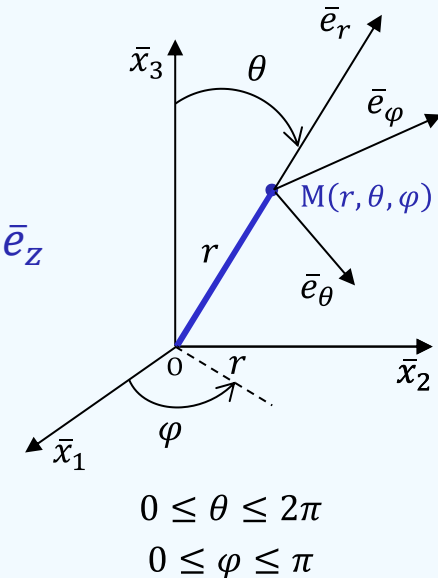
• **Coordonnées sphériques**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$.

➤ **Vecteurs** : $\bar{V}(\bar{M}) = V_r(r, \theta, \varphi)\bar{e}_r + V_\theta(r, \theta, \varphi)\bar{e}_\theta + V_\varphi(r, \theta, \varphi)\bar{e}_\varphi$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \text{div}(\bar{V}) &= \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2V_r + \cot(\theta)V_\theta}{r} \\ \blacksquare \quad \overline{\text{rot}}(\bar{V}) &= \left[\frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right] \bar{e}_1 + \left[\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} \right] \bar{e}_2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} \right] \bar{e}_3 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \overline{\text{grad}}(\bar{V}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi}{r} \\ \frac{\partial V_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} & -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi}{r \tan(\theta)} \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\theta + \tan(\theta)V_r}{r \tan(\theta)} \end{vmatrix}$$



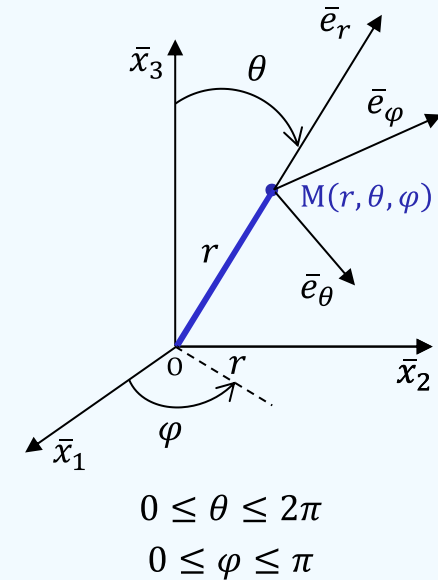
□ Coordonnées curvilignes

• **Coordonnées sphériques**

Les résultats sont donnés dans la base $(\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$.

➤ **Tenseurs** : $\bar{T}(\bar{M}) = \bar{T}(r, \theta, \varphi) = T_{ij}(r, \theta, \varphi) \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$

$$\begin{aligned} \square \quad \overline{\text{div}}(\bar{T}) = & \left[\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi} + T_{r\theta} \cot(\theta)}{r} \right] \bar{e}_r \\ & + \left[\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}) \cot(\theta) + 3T_{r\theta}}{r} \right] \bar{e}_\theta \\ & + \left[\frac{\partial T_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial T_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3T_{r\varphi} + 2T_{\theta\varphi} \cot(\theta)}{r} \right] \bar{e}_\varphi \end{aligned}$$



Merci de votre attention

Fin du Chapitre 1

EXERCICES

Ex. 1 Soient deux points $M(4,3,0)$ et $N(3,4,0)$ définis dans un repère orthonormé $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

On demande de :

1. Représenter les vecteurs $\bar{V} = \overline{OM}$ et $\bar{W} = \overline{ON}$, puis calculer leurs normes $r_{\bar{V}}$ et $r_{\bar{W}}$.
 2. Calculer le produit scalaire $\bar{V} \cdot \bar{W}$.
 3. Calculer le produit vectoriel $\bar{U} = \bar{V} \wedge \bar{W}$.
 4. Calculer le produit mixte $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$.
 5. Calculer le produit tensoriel $\bar{\bar{T}} = \bar{V} \otimes \bar{W}$.
 6. Calculer la trace du tenseur $\bar{\bar{T}}$.
 7. Calculer le déterminant du tenseur $\bar{\bar{T}}$.
-

EXERCICES

Ex. 2 Soit le tenseur suivant :

$$\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On demande de calculer :

1. Sa partie symétrique $\bar{\bar{T}}_s$.
 2. Sa partie antisymétrique $\bar{\bar{T}}_a$.
 3. Sa trace.
 4. Son déterminant.
-

EXERCICES

Ex. 3 Soit le tenseur suivant :

$$\bar{\bar{T}} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On demande de calculer :

1. Sa partie symétrique $\bar{\bar{T}}_s$.
 2. Sa partie antisymétrique $\bar{\bar{T}}_a$.
 3. Sa trace.
 4. Son déterminant.
-

EXERCICES

Ex. 4 Démontrer les identités suivantes :

$$1. [Tr(\bar{\bar{M}})]^2 = M_{pp}M_{qq}$$

$$2. Tr(\bar{\bar{M}}^2) = M_{pq}M_{qp}$$

$$3. Tr(\bar{\bar{M}} {}^t\bar{\bar{M}}) = M_{pq}M_{pq} = Tr({}^t\bar{\bar{M}}\bar{\bar{M}})$$

$$4. \delta_{ij}V_j = V_i$$

$$5. \delta_{pq}V_pW_q = V_lW_l$$

$$6. \delta_{ii} = \delta_{ip}\delta_{pi} = \delta_{ip}\delta_{pq}\delta_{qi} = 3$$

EXERCICES

Ex. 5 Soit la fonction scalaire suivante : $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}^2$

On demande de calculer :

1. $\overline{grad}(\varphi) = \bar{V}$
 2. $\Delta(\varphi) = div(\bar{V})$
 3. $\overline{rot}(\bar{V})$
 4. $\overline{grad}(\bar{V})$
-

Ex. 6 Soit les deux vecteurs suivants : $\bar{U} = \bar{x}$ et $\bar{V} = 2\bar{x}$

On demande de calculer :

1. $\overline{grad}(\bar{V}) = \bar{M}$
 2. $\bar{U} \cdot \overline{grad}(\bar{V})$
 3. $\overline{grad}(\bar{V}) \cdot \bar{U}$
 4. $\overline{div}(\bar{M})$
 5. $\Delta(\bar{V})$
-

EXERCICES

Ex. 7 Soit les tenseurs suivants : $\bar{\bar{M}} = \bar{x} \otimes \bar{e}_1$ et $\bar{\bar{N}} = \bar{e}_1 \otimes \bar{x}$

On demande de calculer :

1. $div(\bar{\bar{M}})$
 2. $div(\bar{\bar{N}})$
-

Ex. 8 Posons : $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}^2$
 $\bar{U} = \bar{x}$
 $\bar{V} = 2\bar{x}$

On demande de calculer :

1. $div(\varphi\bar{V})$
 2. $\overline{div}(\bar{U} \otimes \bar{V})$
 3. $\overline{rot}[\overline{rot}(\bar{V})]$
-