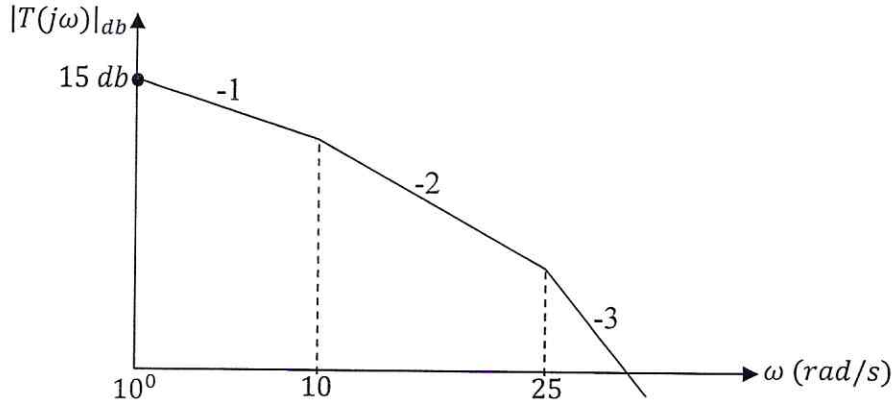


Examen fin de semestre

Exercice 1 (5 pts)

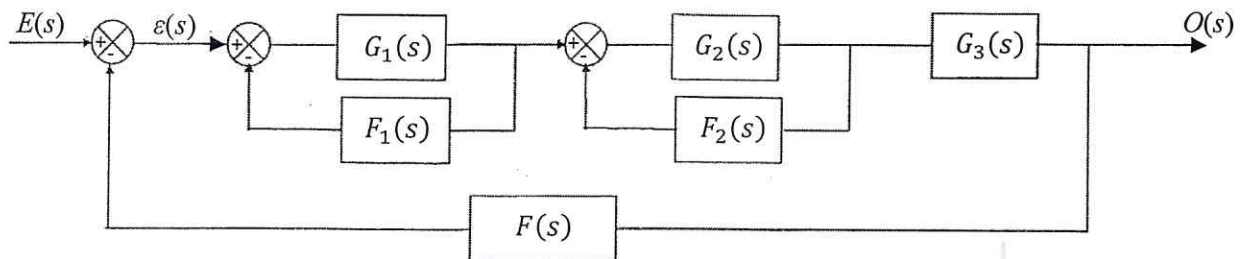
Soit le tracé en module dans le plan de Bode de la fonction de transfert $T(s)$



- 1- Donner la fonction de transfert $T(s)$
- 2- Tracer dans le plan de Bode la phase de $T(s)$
- 3- Tracer l'allure dans le plan de Nyquist pour $(\omega \rightarrow 0 \text{ et } \omega \rightarrow \infty)$.

Exercice 2 (5 pts)

Soit le schéma d'un système asservis représenté par :



- 1- Donner la fonction de transfert de transfert $G(s) = \frac{O(s)}{E(s)}$
- 2- Donner l'expression de l'erreur $\varepsilon(s)$ soumis à une entrée $E(s)$
- 3- On donne : $G_1(s) = \frac{1}{1+\tau s}$; $G_2(s) = \frac{1}{s}$; $G_3(s) = K$; $F_1(s) = F_2(s) = F(s) = 1$
- 4- Déterminer K et τ de manière à ce que la fonction de transfert en boucle fermée soit égale à :

$$H(s) = \frac{1}{4s^2 + 6s + 3}$$

- 5- Déterminer les erreurs de position et de vitesse.

Exercice 3 (5 pts)

On considère un système asservi en boucle ouverte est donnée par : $G(s) = \frac{k}{\left(\frac{s}{10}+1\right)^3}$ avec $k > 0$

- 1- Déterminer à l'aide de critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée.
- 2- Calculer l'erreur statique en fonction de k pour une entrée en échelon unitaire.
- 3- Pour annuler l'erreur statique, on introduit un intégrateur pur dans la chaîne directe, déterminer les nouvelles conditions de stabilité.
- 4- Calculer la valeur de k qui assure au système une marge de phase égale à 45° .

Exercice 4 (5 pts)

Soit le système dynamique représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. Calculer les pôles du système-que peut-on dire sa stabilité.
2. Déterminer la fonction de transfert du système.

- Corrigé type -

Exercice 1:

① Fonction de transfert $T(s)$

	10^0	10	25
$\frac{1}{s}$	-1	-1	-1
$\frac{1}{1 + \frac{s}{10}}$	0	* -1	-1
$\frac{1}{1 + \frac{s}{25}}$	0	0	* -1
$ T(j\omega) \times 20$ db	-1 -20db	-2 -40db	-3 -60db

— ①

On a $\alpha = 1$ et $m = 0 \Rightarrow 20 \log(k) = 15 \text{ db}$

$\Rightarrow \boxed{k = 5,62}$ alors

①,5

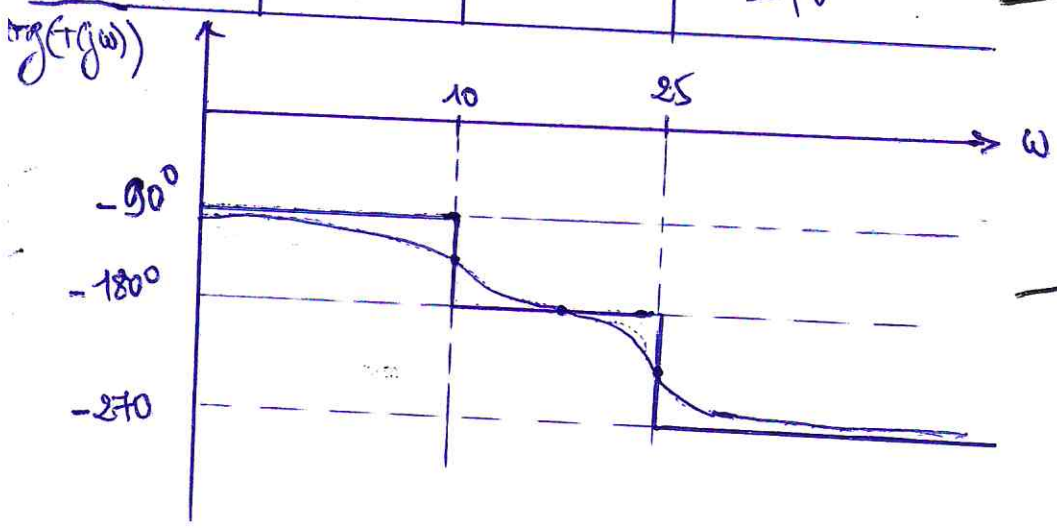
$$T(s) = \frac{5,62}{s \left(1 + \frac{s}{10}\right) \left(1 + \frac{s}{25}\right)}$$

①,5

② La phase

	10^0	10	25
$\arg(T(j\omega)) \times 90^\circ$	-90°	-180°	-270°

— ①



— ①,5

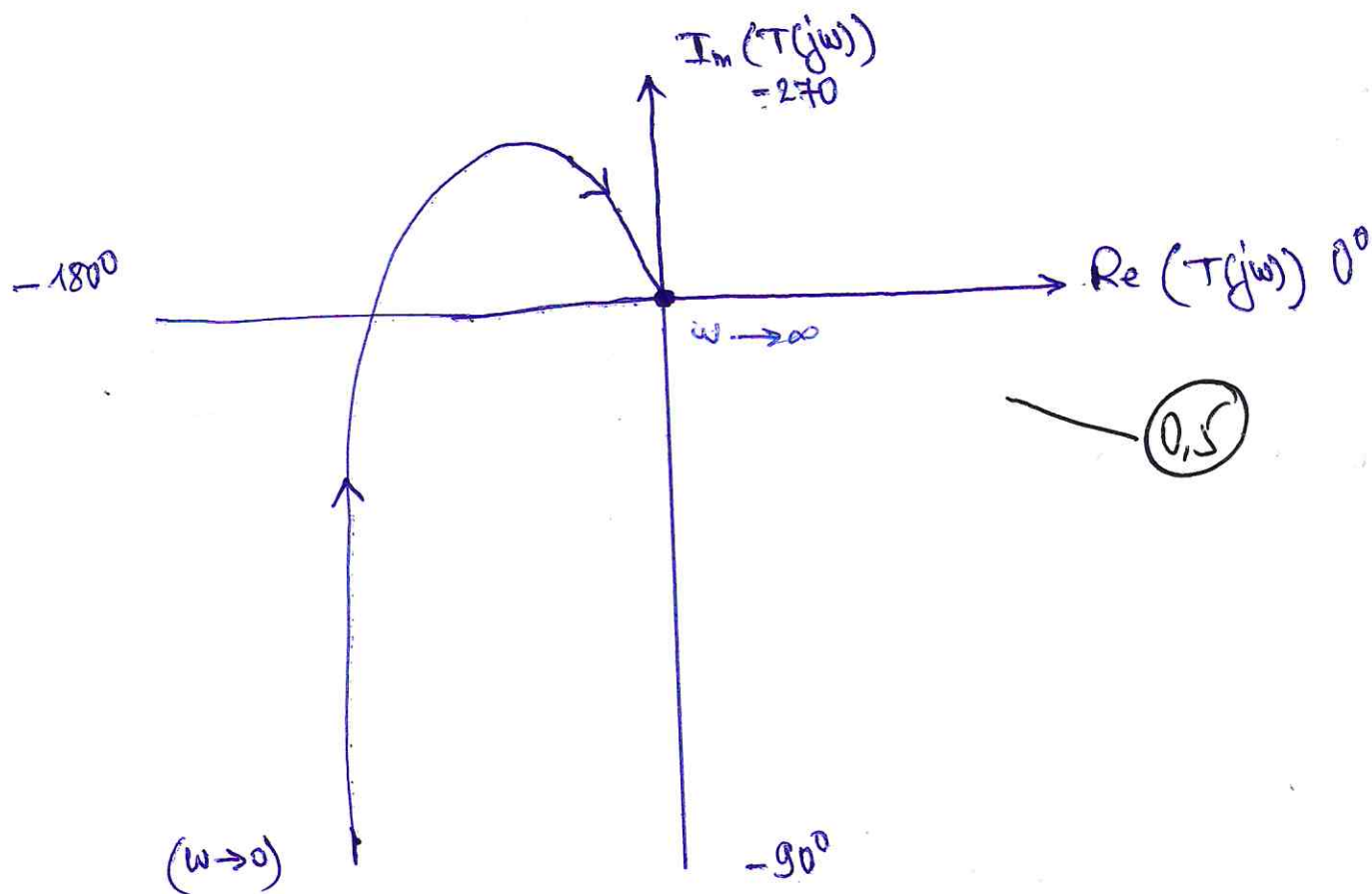
3)

$$|T(j\omega)| = \frac{5,62}{\omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{10}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{25}\right)^2}} \quad \text{--- } (0,25)$$

$$\arg \{T(j\omega)\} = -90^\circ - \left(\arctg\left(\frac{\omega}{10}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{25}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} \quad \text{--- } (0,25)$$

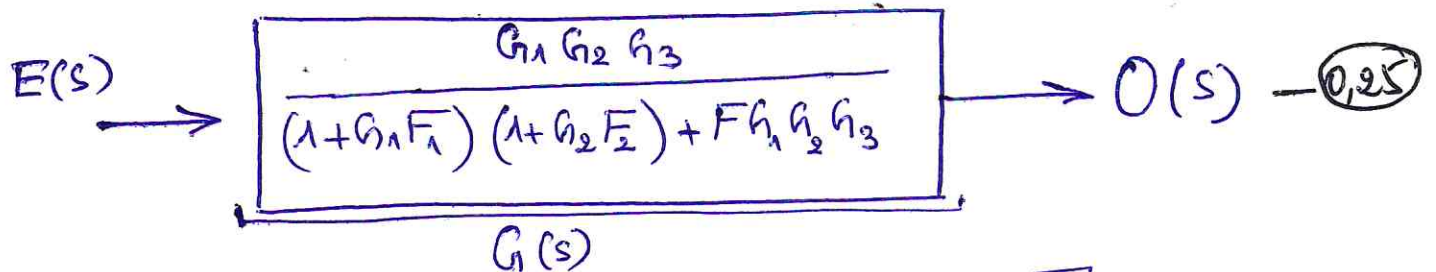
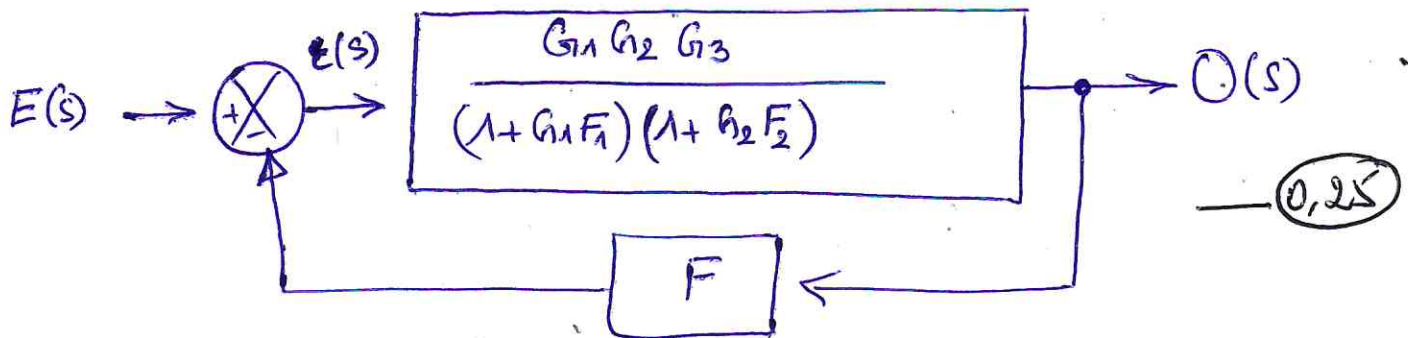
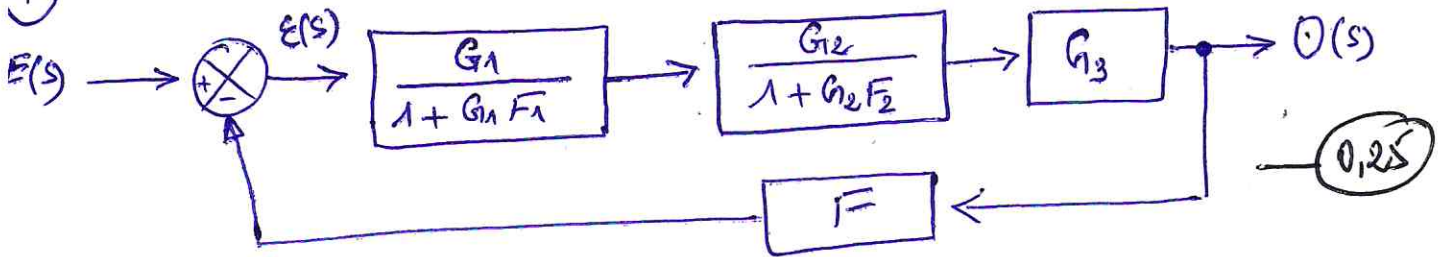
$$\omega \rightarrow 0 \quad |T(j\omega)| = \infty, \quad \arg \{T(j\omega)\} = -90^\circ \quad \text{--- } (0,25)$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |T(j\omega)| = 0, \quad \arg \{T(j\omega)\} = -270^\circ \quad \text{--- } (0,25)$$



Exercice 2:

①



also:
$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{(1+G_1 F_1)(1+G_2 F_2) + F G_1 G_2 G_3}$$
 — 0,25

②

$$E(s) = \frac{E(s)}{1 + F \frac{G_1 G_2 G_3}{(1+G_1 F_1)(1+G_2 F_2)}} \quad \text{--- ①}$$

③

$$G(s) = \frac{\frac{1}{1+\tau s} \cdot \frac{1}{s} \cdot K}{\left(1 + \frac{1}{1+\tau s}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{1+\tau s} \cdot \frac{1}{s} \cdot K}$$

$$G(s) = \frac{K}{\tau s^2 + s(\tau + 2) + (2 + K)} = \frac{1}{4s^2 + 6s + 3} \quad \text{--- } (0,5)$$

$$\begin{cases} \tau = 4 \\ 2 + \tau = 6 \\ 2 + K = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\tau = 4} \text{ et } \boxed{K = 1} \quad \text{--- } (0,25) \quad \text{--- } (0,25)$$

Erreur de position: $\Rightarrow E(s) = \frac{1}{s}$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + \frac{\left(\frac{1}{1+4s}\right)\left(\frac{1}{s}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4s+1}\right)\left(1 + \frac{1}{s}\right)}} = \frac{E(s)}{1 + \frac{\frac{1}{1+4s}}{\left(1 + \frac{1}{1+4s}\right)(s+1)}} \quad \text{--- } (0,5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1+4s}\right)(s+1)}} \right\}$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{2}{3}} \quad \text{--- } (0,5)$$

Erreur de vitesse $\Rightarrow E(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{\frac{1}{1+4s}}{\left(1 + \frac{1}{1+4s}\right)(s+1)}} \right\} = \quad \text{--- } (0,5)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{s + \frac{\frac{s}{1+4s}}{\left(1 + \frac{1}{1+4s}\right)(s+1)}} \right\} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \infty} \quad \text{--- } (0,5)$$

Exercice 03:

① $FTBF(s) = \frac{K}{\frac{1}{1000}s^3 + \frac{3}{100}s^2 + \frac{3}{10}s + (1+K)} = \frac{1000K}{s^3 + 30s^2 + 300s + 1000(1+K)}$ — (1)

stabilité en BF par critère de Routh: $CNS \ 1000(1+K) > 0 \Rightarrow \boxed{K > -1}$

$$\left. \begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 300 \\ s^2 & 30 & 1000(1+K) \\ s^1 & \frac{30 \times 300 - 1000(1+K)}{30} & 0 \\ s^0 & 1000(1+K) & 0 \end{array} \right\} (0,25)$$

$CNS: \frac{30 \times 300 - 1000(1+K)}{30} > 0$ — (0,25)

$\Rightarrow 8000 - 1000K > 0 \Rightarrow \boxed{K < 8}$

le syst est stable si & si: $\boxed{-1 < K < 8}$ — (0,25)

② $\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + \frac{K}{(\frac{s}{10} + 1)^3}}; E(s) = \frac{1}{s}$ — (0,5)

$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{K}{(\frac{s}{10} + 1)^3}} \right\} = \frac{1}{1+K}$ — (0,5)

③ En introduisant l'intégrateur

$FTBO(s) = \frac{K}{s(\frac{s}{10} + 1)^3}$

$FTBF(s) = \frac{K}{s^4 + 30s^3 + 300s^2 + 1000s + 1000K}$ — (0,25)

stabilité par Routh : Eq caract : $S^4 + 30S^3 + 300S^2 + 1000S + 1000K = 0$

CNNS : $1000K > 0 \Rightarrow K > 0$ — (0,25)

S^4	1	300	1000K	
S^3	30	1000	0	
S^2	$\frac{30 \times 300 - 1000}{30}$		1000K	0
		$\frac{8000}{30}$		
S^1	$\frac{\frac{8000}{30} \cdot 1000 - 30 \cdot 1000K}{\frac{8000}{30}}$			
		$\frac{8000}{30}$		
S^0			1000K	

— (0,25)

le syst est stable si s_i

$$\frac{\frac{8000}{30} \cdot 1000 - 30 \cdot 1000K}{\frac{8000}{30}} > 0$$

$$1000 - \frac{900}{8}K > 0 \Rightarrow K < 8,88$$

donc : le syst est stable si $0 < K < 8,88$

(4) : $K = ?$ $M_p = 45^\circ$; $G(j\omega) = \frac{K}{(1 + \frac{j\omega}{10})^3}$ — (0,25)

$$M_p = 180^\circ - \left(3 \arctg\left(\frac{\omega_0}{10}\right)\right) \times \frac{180}{\pi} = 45^\circ$$
 — (0,25)

$$\left(3 \arctg\left(\frac{\omega_0}{10}\right)\right) \times \frac{180}{\pi} = 135^\circ \Rightarrow 3 \arctg\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\arctg\left(\frac{\omega_0}{10}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$$
 — (0,25)

On a donc $|G(j\omega)| = \frac{K}{\left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100}}\right)^3} = 1$

d'où $K = (\sqrt{2})^3 = 2,8$ — (0,25)

Exercice 4 :

① Les pôles $\det(sI - A) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s = 0 \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$ — (1)
 les pôles imaginaires pure $\Rightarrow$ réponse oscillatoire $\rightarrow$ syst instable — (0,5)

② La fonction de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ — (1)

$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2s & s \end{bmatrix}$; $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 2s} & \frac{1}{s^2 + 2s} \\ \frac{-2s}{s^2 + 2s} & \frac{s}{s^2 + 2s} \end{bmatrix}$ — (0,75)

$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 2s} & \frac{1}{s^2 + 2s} \\ \frac{-2s}{s^2 + 2s} & \frac{s}{s^2 + 2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 2s} & \frac{1}{s^2 + 2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s}$ — (0,25)