

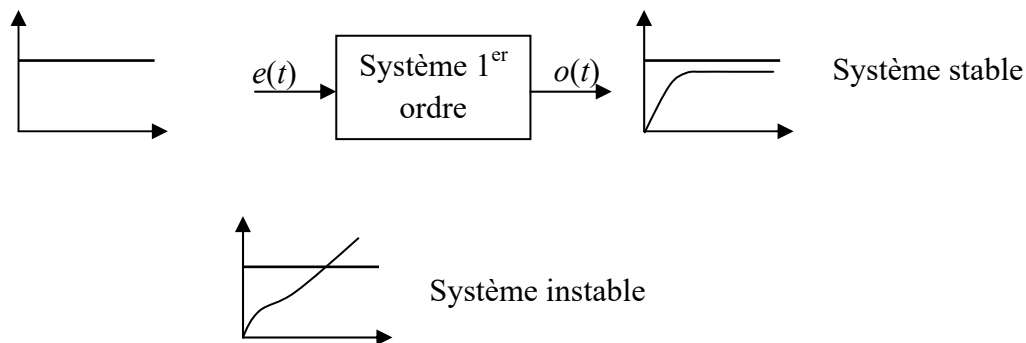
Chapitre 5 : Stabilité et précision des systèmes asservis

5.1 Stabilité

5.1.1 Définition

- 1- Un système est stable si la réponse impulsionnelle tend vers 0 si $t \rightarrow \infty$.
- 2- Un système est stable si à tout signal d'entrée borné correspond à un signal de sortie borné.
- 3- un système est stable si il est écarté de sa position d'équilibre il tend à y revenir équilibré.
- 4- Un système est instable s'il s'écarte de sa position d'équilibre.

Exemple



5.1.1 Condition de stabilité

Soit la fonction de transfert $F(s)$:

$$F(s) = \frac{N(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

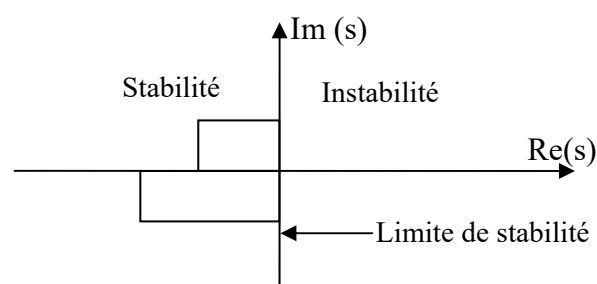
Si on considère la réponse impulsionnelle $e(t) = \delta(t) \rightarrow E(s) = 1$

$$O(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \dots + \frac{A_n}{s-p_n} \rightarrow o(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$$

Un système est stable si sa réponse impulsionnelle $\rightarrow 0$ quant $t \rightarrow \infty$

$$o(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

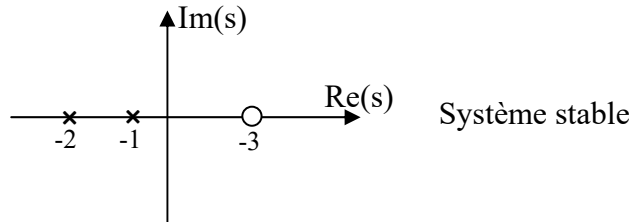
$o(t) \rightarrow 0$ si la partie réelle des p_i sont négatives (pour tous les pôles)



Exemple 1

$$F_1(s) = \frac{5(s-3)}{(s+1)(s+2)}$$

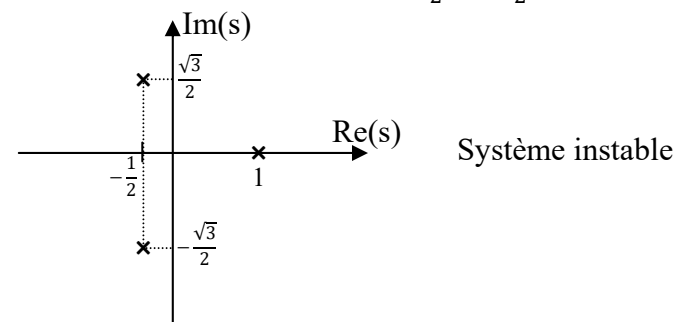
Les pôles -1, -2



Exemple 2

$$F_2(s) = \frac{2}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$$

Les pôles : 1 (double) et $p_{1,2} = \frac{-1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$



5.2 Critère algébrique de Routh-Herwitz

Le critère de Routh est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme de dénominateur de la fonction de transfert le signe de racine de ce polynôme sans avoir résoudre l'équation.

La fonction de transfert en BF à retour non unitaire est déterminée par :

$$F(s) = \frac{k G(s)}{1 + k G(s).H(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$D(s) = 1 + k G(s).H(s)$: Equation caractéristique

$$D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0$$

5.2.1 Condition nécessaire et nom suffisante CNNS

Pour que le système soit stable il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient de même signe.

5.2.1 Condition nécessaire et suffisante CNS

Table de Routh : c'est une condition nécessaire et suffisante (CNS) dans le cas où CNNS est vérifiée on construit le tableau de Routh qui permet de déterminer le signe des racines d'un polynôme.

$$D(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0$$

s^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	b_0
s^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	$b_{n-7} \dots b_1$	
s^{n-2}	C_1	C_2	C_3		
s^{n-3}	D_1	D_2			
s^{n-4}					
$\vdots$					
s^1					
s^0					

$$C_1 = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{bmatrix} = \frac{(b_{n-1} \times b_{n-2}) - (b_n \times b_{n-3})}{b_{n-1}}$$

$$C_2 = \frac{(b_{n-1} \times b_{n-4}) - (b_n \times b_{n-5})}{b_{n-1}}$$

$$D_1 = \frac{(C_1 \times b_{n-3}) - (b_{n-1} \times C_2)}{C_1}$$

$$D_2 = \frac{(C_1 \times b_{n-5}) - (b_{n-1} \times C_3)}{C_1}$$

Enoncé du critère de Routh : Un système est stable selon le critère de Routh si tous les coefficients de la 1^{ère} colonne de la table sont de même signe. Le nombre de racines à partie réelle positive égale au nombre de changement de signe de la 1^{ère} colonne.

Exemple 1

$$F_1(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1} \quad \text{Equation caractéristique } s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$$

CNNS : Toutes les coefficients sont de même signe $\rightarrow$ vérifier

CNS : Critère de Routh

s^3	1	$\nearrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	1
s^2	2	$\searrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	1
s^1	$\frac{2 \times 1 - 1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	0

$$s^0 \quad \frac{\frac{1}{2} \times 1 - 2 \times 0}{\frac{1}{2}} = 1$$

Toutes les coefficients de la 1^{ère} colonne sont de même signe → système stable

Exemple 2

$$F_1(s) = \frac{1}{s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 2} \quad \text{Equation caractéristique } s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 1 = 0$$

CNNS : Toutes les coefficients sont de même signe → vérifier

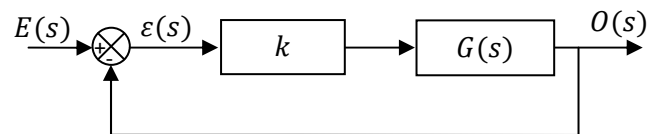
CNS : Critère de Routh

s^4	1	1	2
s^3	2	4	0
s^2	$\frac{2-4}{2} = -1$	2	
s^1	8	0	
s^0	2		

On a deux changement de signe → on a deux racines à partie réelle positive → système instable.

Exercice d'application

On considère le système donné par le schéma bloc suivant :



$$G(s) = \frac{1}{3s^3 + 2s^2 + s + 5}$$

- 1- Le système en BO est-il stable
- 2- Pour quelle valeur de k le système en BF sera stable.

Solution

$$1- \text{FTBO : } k G(s) = \frac{k}{3s^3 + 2s^2 + s + 5}$$

$$k G(s) = \frac{k}{3s^3 + 2s^2 + s + 5} \quad \text{Equation caractéristique } 3s^3 + 2s^2 + s + 5 = 0$$

CNNS : Toutes les coefficients sont de même signe → vérifier

CNS : Critère de Routh

s^3	3	1
s^2	2	5
s^1	$\frac{-13}{2}$	0
s^0	5	

On a deux changements de signe $\rightarrow$ on a deux racines à partie réelle positive $\rightarrow$ système instable.

2- FTBF :

$$F(s) = \frac{k G(s)}{1+k G(s)} = \frac{k}{3s^3 + 2s^2 + s + 5 + k} \quad \text{Equation caractéristique } 3s^3 + 2s^2 + s + 5 + k = 0$$

$$\text{CNNS : } 5 + k > 0 \rightarrow k > -5$$

CNS : Critère de Routh

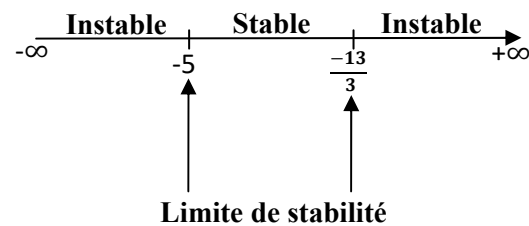
s^3	3	1
s^2	2	$5+k$
s^1	$\frac{-13k-3k}{2}$	0
s^0	$5+k$	1

Pour que le système soit stable :

$$\begin{cases} \frac{-13k-3k}{2} > 0, k < \frac{-13}{3} \\ 5+k > 0, k > -5 \text{ (vérifier)} \end{cases}$$

Pour avoir un système stable en BF, il faut introduire un gain de valeur :

$$k \in \left] -5, \frac{-13}{3} \right[$$



Cas particulier

Une ligne de zéro indique la présence d'une racine imaginaire pure, le système est juste instable (limite de stabilité) dans ce cas on utilise le polynôme auxiliaire.

Exemple 1

$$\text{Equation caractéristique : } D(s) = s^3 + 10s^2 + 16s + 160 = 0$$

$$s^3 \quad 1 \quad 16$$

$$\boxed{s^2 \quad 10 \quad 160} \quad \text{polynôme auxiliaire } A = 10s^2 + 160 \rightarrow p_{au} = \pm 4j$$

$$s^1 \quad 0 \text{ (20)} \quad 0$$

$$\frac{dA}{ds} = 20s$$

$$s^0 \quad 160$$

Le système est juste stable (limite de stabilité) car on a deux racine imaginaire pure.

Exemple 2

Equation caractéristique : $D(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$

$$s^4 \quad 1 \quad 5 \quad 4$$

$$s^3 \quad 1 \quad 4 \quad 0$$

$$s^2 \quad 1 \quad 4 \quad 0$$

polynôme auxiliaire $A = s^2 + 4 \rightarrow p_{au} = \pm 2j$

$$s^1 \quad 0(2) \quad 0 \quad 0$$

$$\frac{dA}{ds} = 2s$$

$$s^0 \quad 4$$

Le système est juste stable (limite de stabilité) car on a deux racine imaginaire pure. Les autres racines sont a partie réelle pure.

2^{ème} cas : cas d'un pivot nul (1^{ère} colonne), il faut remplacer ce zéro par ε et calculer la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Exemple

Equation caractéristique : $D(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 2s + 1 = 0$

$$s^5 \quad 1 \quad 4 \quad 2$$

$$s^4 \quad 1 \quad 4 \quad 1$$

$$s^3 \quad 0(\varepsilon) \quad 1 \quad 0$$

$$s^2 \quad \frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon} \quad 1$$

$$s^1 \quad \frac{\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}-\varepsilon}{\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}} \quad 0$$

$$s^0 \quad 1$$

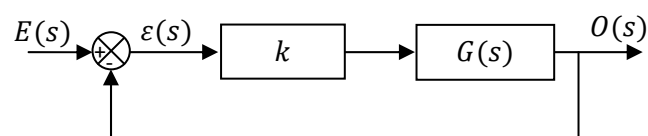
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(4 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = -\infty$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon} - \varepsilon}{\frac{4\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon-1} \right) = 1$$

On a deux changement de signe $\rightarrow$ 2 racines à partie réelle positive $\rightarrow$ **Le système est instable.**

Exercice d'application

On considère le système donné par le schéma bloc suivant :



$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s}$$

- 1- Etudier la stabilité en BF
- 2- Déterminer les pôles du système pour $k=8$

$$F(s) = \frac{k G(s)}{1+k G(s)} = \frac{k}{s^3 + 2s^2 + 4s + k} \quad \text{Equation caractéristique } s^3 + 2s^2 + 4s + k = 0$$

CNNS : $k > 0$

CNS : Critère de Routh

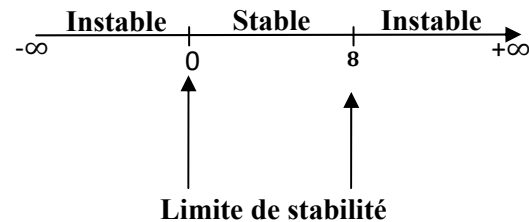
s^3	1	4
s^2	2	k
s^1	$\frac{8-k}{2}$	0
s^0	k	

Pour que le système soit stable :

$$\begin{cases} \frac{8-k}{2} > 0, k < 8 \\ k > 0, k > 0 \text{ (vérifier)} \end{cases}$$

Pour avoir un système stable en BF, il faut introduire un gain de valeur :

$$k \in]0, 8[$$



2- Pour $k = 8$ limite de stabilité $\rightarrow$ deux pôles imaginaires purs

$$\text{Equation caractéristique } s^3 + 2s^2 + 4s + 8 = 0 \rightarrow$$

s^3	1	4
s^2	2	8
s^1	0 (4)	0
s^0	8	

polynôme auxiliaire $A = 2s^2 + 8 \rightarrow p_{au} = \pm 2j$

$$\frac{dA}{ds} = 4s$$

La 3^{ème} racine est :

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 8 = (s + 2j)(s - 2j)(s - p_3) = (s^2 + 4)(s - p_3) = s^3 - p_3 s^2 + 4s - 4p_3$$

$$\rightarrow -4p_3 = 8$$

Alors, la 3^{ème} racine est ($p_3 = -2$).

Remarque

Le critère de Routh est un critère de stabilité absolue, il ne permet pas de préciser les marges de stabilité.

5.3 Critère de revers

Les critères graphiques de stabilité permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de l'étude fréquentielle de **FTBO**.

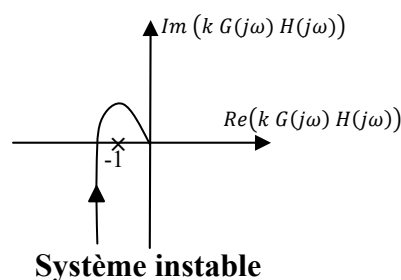
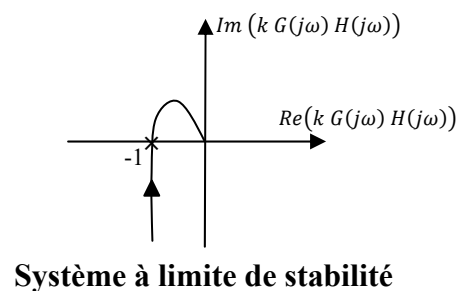
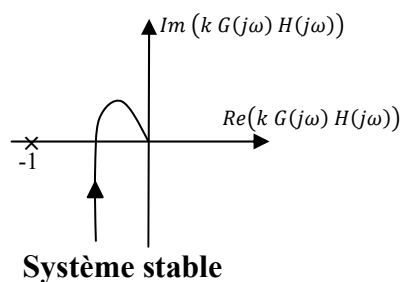
$$\text{FTBF} = \frac{k G(s)}{1+k G(s) H(s)}, \quad k G(s) H(s) = -1$$

$$\text{FTBO} \rightarrow \begin{cases} \text{Nyquist } (-1,0) \\ \text{Bode } (0\text{db}, -180^\circ) \end{cases}$$

On utilise la FTBO pour conclure la stabilité du système en BF.

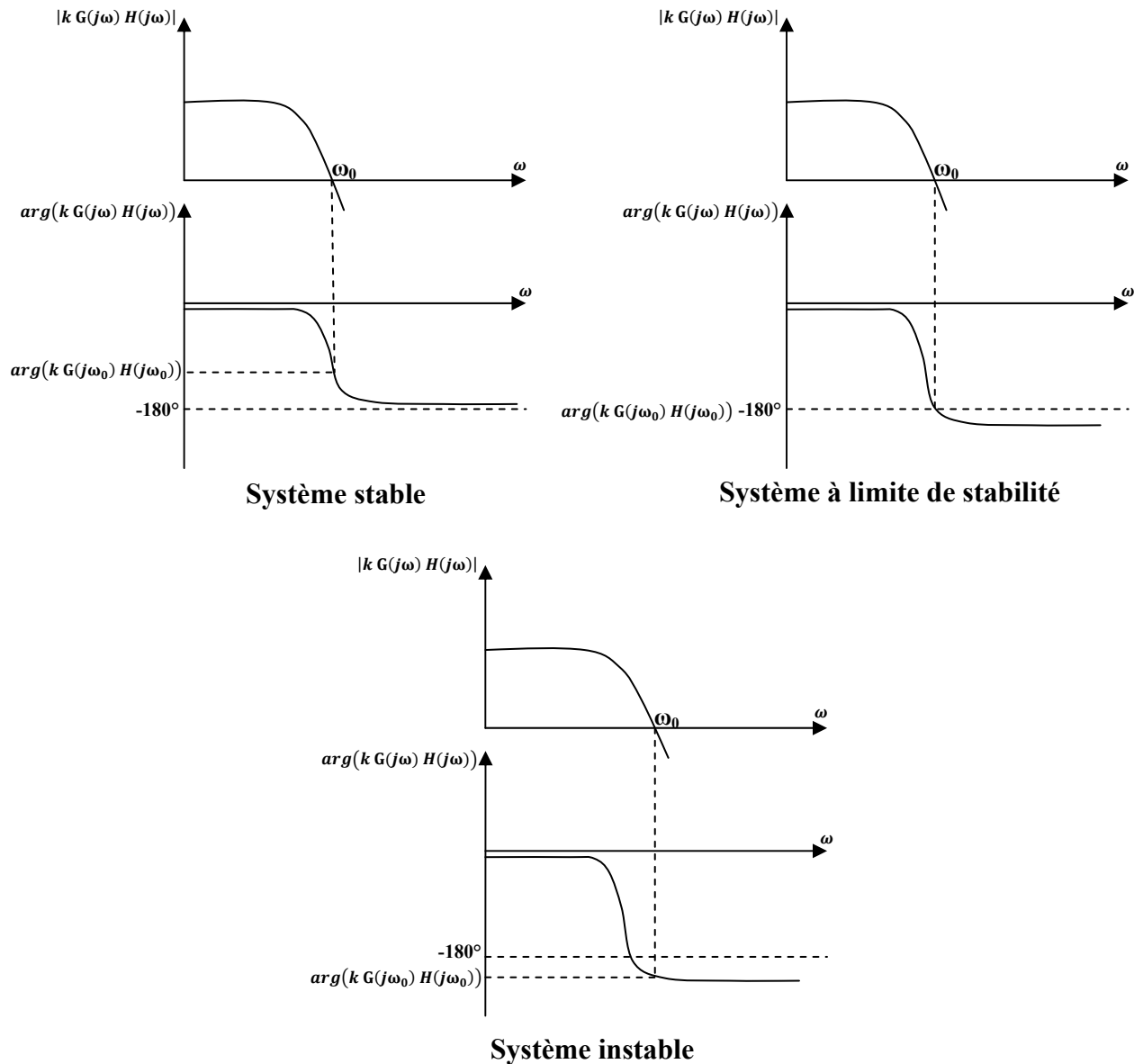
5.3.1 Plan de Nyquist le point critique (-1,0)

Un système est stable lorsque le lieu de Nyquist de sa fonction de transfert en B.O ($k G(s) H(s)$) parcouru dans le sens croissant de ω , laisse le point critique **(-1,0)** à sa gauche.



5.3.2 Plan de Bode le point critique (0 db, -180°)

Un système est stable lorsque le lieu de Bode de sa fonction de transfert en B.O ($k G(s) H(s)$) à la pulsation ω_0 pour laquelle le module $|k G(j\omega) H(j\omega)| = 1$ ($= 0\text{db}$), le déphasage $\arg(k G(j\omega_0) H(j\omega_0)) > -180^\circ$.



5.4 Marge de stabilité

- Un système est stable en BF si la marge de phase est positive.
- La marge de gain correspond au gain supplémentaire maximum que l'on peut donner au système en BO sans risquer de le rendre instable en BF.
- Plus les marges sont grandes, plus la stabilité est robuste.
- Pour donner une bonne stabilité, on considère satisfaisantes les valeurs minimales : $\Phi_M = 45^\circ$ à 60° et $G_{Mdb} = 10db$ à $15db$.

Exercice d'application

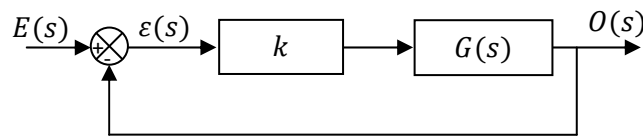
Soit la fonction de transfert en BO :

$$KG(s) = \frac{k}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

Discuter la stabilité du système en BF à retour unitaire en utilisant le critère revers dans le plan de Nyquist, vérifier le résultat obtenu avec le critère de Routh (k : gain variable).

Solution :

1 :



$$\text{FTBO: } KG(s) = \frac{k}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

$$\text{FTBF: } F(s) = \frac{k}{s(0.1s+1)(0.2s+1)+k}$$

Stabilité en BF par la méthode de Nyquist

FTBO est déterminé par :

$$KG(j\omega) = \frac{k}{j\omega (0.1j\omega + 1)(0.2j\omega + 1)}$$

$$|KG(j\omega)| = \frac{k}{\omega \sqrt{1+(0.1\omega)^2} \sqrt{1+(0.2\omega)^2}}$$

$$\arg(KG(j\omega)) = \left(\frac{-\pi}{2} - \arctg(0.1\omega) - \arctg(0.2\omega) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

$$\arg(KG(j\omega)) = -90^\circ - (\arctg(0.1\omega) + \arctg(0.2\omega)) \times \frac{180}{\pi}$$

	$\omega = 0$	$\omega = 0.5$	$\omega = 1$	$\omega = 3$	$\omega = 4$	$\omega = 8$	$\omega \rightarrow \infty$
$ KG(j\omega) $	∞	$1.98 k$	$0.97 k$	$0.27 k$	$0.18 k$	$0.051 k$	0
$\arg(KG(j\omega))$	-90°	-98.57°	-107.02°	-137.66°	-150.46°	-186.65°	-270°

Point d'intersection avec l'axe réel $\arg(KG(j\omega_\pi)) = -180^\circ$

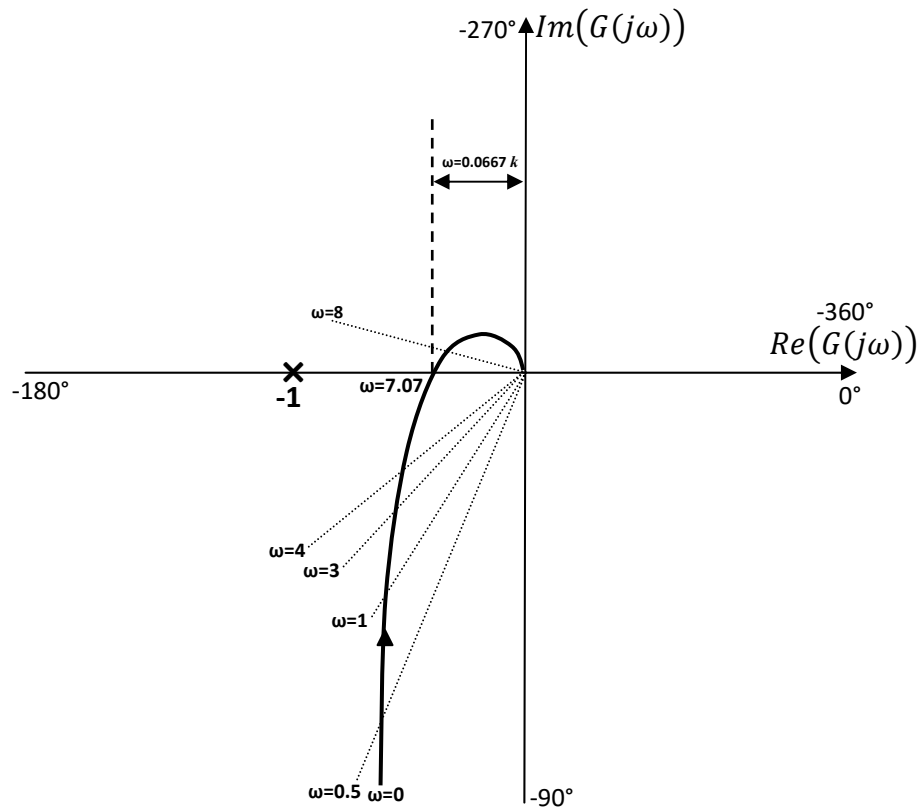
$$\arg(KG(j\omega_\pi)) = -90^\circ - (\arctg(0.1\omega_\pi) + \arctg(0.2\omega_\pi)) = -180$$

$$\arctg(0.1\omega_\pi) + \arctg(0.2\omega_\pi) = 90^\circ$$

$$\operatorname{tg} \left\{ \arctg \left(\frac{0.3\omega_\pi}{1 - 0.02\omega_\pi^2} \right) \right\} = \operatorname{tg}\{90^\circ\} = \infty$$

$$1 - 0.02\omega_\pi^2 = 0 \rightarrow \omega_\pi^2 = 50 \rightarrow \omega_\pi = \pm\sqrt{50} = \pm 7.07 \text{ rad/s}$$

	$\omega = 7.07 \text{ rad/s}$
$ k G(j\omega) $	$0.0667 k$
$\arg(k G(j\omega))$	-180°



Le système est stable si : $-0.0667 k > -1 \rightarrow 0.0667 k < 1 \rightarrow \boxed{k < 15}$

Si $k = 15$ la limite de stabilité

Si $k > 15$ le système est instable

2 : Vérification par le critère de Routh

FTBF : $F(s) = \frac{k}{s(0.1s+1)(0.2s+1)+k}$

Equation caractéristique : $0.02s^3 + 0.3s^2 + s + k = 0$

CNNS : est vérifier si : ($k > 0$)

s^3	0.02	1
s^2	0.3	k
s^1	$\frac{0.3-0.02k}{0.3}$	0
s^0	k	1

Le système est stable si :

$$\begin{cases} 0.3 - 0.02k > 0 \\ k > 0 \text{ (vérifier)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k < \frac{0.3}{0.02} = 15 \\ k > 0 \text{ (vérifier)} \end{cases}$$

Le système est stable si : $k < 15$

Si $k = 15$ la limite de stabilité

Si $k > 15$ le système est instable

5.4 Précision des systèmes asservis

5.4.1 Performance en régime permanent

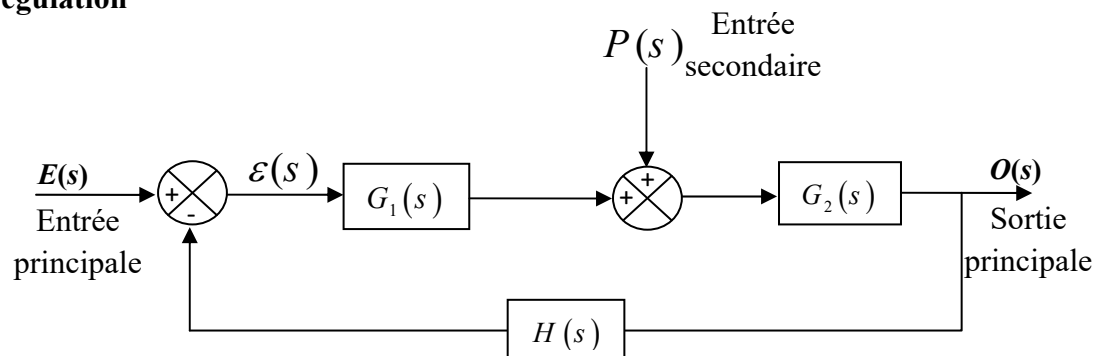
Problématique : Un système est jugé par sa stabilité, par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée. Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi les effets des perturbations. Etudier la précision d'un système c'est calculer son **erreur statique**. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques tel que :

Echelon : on parle alors d'erreurs indicielles ou de positions.

Rampe : Erreurs de trainage ou erreur de poursuite.

Parabole : Erreurs d'accélérations.

5.4.2 Précision relative à la fonction d'asservissement et à la fonction de régulation



$$\varepsilon(s) = E(s) - H(s)O(s)$$

$$\varepsilon(s) = E(s) - H(s)\{G_1(s)\varepsilon(s) + P(s)\}G_2(s)$$

$$\varepsilon(s)(1 + H(s)G_1(s)G_2(s)) = E(s) - H(s)G_2(s)P(s)$$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)} - \frac{H(s)G_2(s)P(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)}$$

Posant : $H(s)G_1(s)G_2(s) = G(s)$ est la FTBO

$$\varepsilon(s) = \underbrace{\frac{E(s)}{1+G(s)}}_{\text{Fonction d'asservissement}} - \underbrace{\frac{H(s)G_2(s)P(s)}{1+G(s)}}_{\text{Fonction de régulation}}$$

5.4.2.1 Erreurs permanente relative à l'entrée principale

$$P(s) = 0$$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + G(s)}$$

La FTBO $G(s) = H(s)G_1(s)G_2(s)$ peut se réécrire d'une manière générale par :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{s^\alpha \prod_{i=1}^n (s-p_i)} = \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^\alpha(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}$$

z_i : zéros de la FTBO

p_i : pôles de la FTBO

k : gain statique

L'erreur statique est calculée par : $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s)$

α : représente la classe du système : nombre de pôles nuls en BO.

Lorsque $s \rightarrow 0$ $G(s) = \frac{k}{s^\alpha}$

1^{er} cas : Si $\alpha=0$ (système de classe 0 pas d'intégration), $G(s) = k$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + G(s)}$$

Pour une entrée Echelon ($E(s) = \frac{E_0}{s}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n}} = \frac{E_0}{1+k}$

Pour une entrée Rampe ($E(s) = \frac{E_0}{s^2}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^2}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n}} = \infty$

Pour une entrée parabole ($E(s) = \frac{E_0}{s^3}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^3}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n}} = \infty$

2^{ème} cas : Si $\alpha=1$ (système de classe 1 système possède une intégration), $G(s) = \frac{k}{s}$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + G(s)}$$

Pour une entrée Echelon ($E(s) = \frac{E_0}{s}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = 0$

Pour une entrée Rampe ($E(s) = \frac{E_0}{s^2}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^2}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = \frac{E_0}{k}$

Pour une entrée parabole ($E(s) = \frac{E_0}{s^3}$) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^3}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = \infty$

3^{ème} cas : Si $\alpha=2$ (système de classe 2 système possède deux intégrations),

$$G(s) = \frac{k}{s^2}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{E(s)}{1 + G(s)}$$

Pour une entrée Echelon $\left(E(s) = \frac{E_0}{s}\right) : \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = 0$

Pour une entrée Rampe $\left(E(s) = \frac{E_0}{s^2}\right) : \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^2}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = 0$

Pour une entrée parabole $\left(E(s) = \frac{E_0}{s^3}\right) : \varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{E_0}{s^3}}{1 + \frac{k(1+a_1s+a_2s^2+\dots+a_ms^m)}{s^2(1+b_1s+b_2s^2+\dots+b_ns^n)}} = \frac{E_0}{k}$

Tableau récapitulative

Classe du système Entrées	Classe 0 Pas d'intégration	Classe 1 1 intégration	Classe 2 2 intégrations	Classe > 2
Entrée Echelon	$\frac{E_0}{1+k}$	0	0	0
Entrée Rampe	∞	$\frac{E_0}{k}$	0	0
Entrée parabole	∞	∞	$\frac{E_0}{k}$	0

Remarque :

- L'erreur permanente lorsqu'elle est constante non nulle décroît lorsque le gain en BO croît.
- On peut supprimer l'erreur de position en introduisant une intégration dans la chaîne.
- On peut supprimer l'erreur de trainage en introduisant une double intégration dans la chaîne.
- La constante d'erreur de position (Entrée Echelon) est déterminée par :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{BO}(s)$$

- La constante d'erreur de vitesse (Entrée rampe) est déterminée par :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{BO}(s)$$

- La constante d'erreur de position (Entrée parabole) est déterminée par :

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{BO}(s)$$

5.4.2.1 Erreurs permanente relative à l'entrée secondaire (perturbation)

$$E(s) = 0$$

$$\varepsilon(s) = \frac{H(s)G_2(s)P(s)}{1 + H(s)G_1(s)G_2(s)}$$

La FTBO $G(s) = H(s)G_1(s)G_2(s) \rightarrow \frac{G(s)}{G_1(s)} = H(s)G_2(s)$

$$\varepsilon(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \frac{P(s)}{G_1(s)}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{\frac{k(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m)}{s^\alpha(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n)} \frac{P(s)}{G_1(s)}}{1 + \frac{k(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m)}{s^\alpha(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n)}}$$

$$\varepsilon(s) = \frac{k(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m)}{s^\alpha(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n) + k(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m)} \frac{P(s)}{G_1(s)}$$

$$t \rightarrow \infty \rightarrow s \rightarrow 0 \quad \varepsilon(s) = \frac{k}{s^{\alpha+k}} \frac{P(s)}{G_1(s)} = k' \frac{P(s)}{G_1(s)} \quad \forall \alpha \text{ (La classe du système) or } \begin{cases} \alpha = 0 & k' = \frac{k}{1+k} \\ \alpha \geq 1 & k' = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas on peut conclure que l'erreur face à la perturbation dépend du terme $G_1(s)$ et de la perturbation elle-même.