

Chapitre 4 : Réponse fréquentiel des systèmes linéaires

Rappel mathématique

$$1 : \arg(x + jy) = \begin{cases} \left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} & \text{si } x > 0 \\ \left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} + 180^\circ & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \left(\arctg\left(\frac{y}{x}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} - 180^\circ & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ 90^\circ & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -90^\circ & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \text{indéfinie} & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$

$$2 : 90^\circ - \arctg(a) = \arctg\left(\frac{1}{a}\right) \quad (a > 0)$$

$$3 : \arctg(a) - \arctg(b) = \arctg\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

$$4 : \arctg(a) + \arctg(b) = \arctg\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

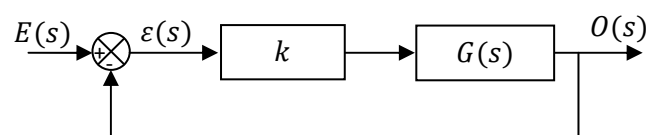
$$5 : \arctg(-a) = 180^\circ - \arctg(|a|)$$

$$6 : \arctg(-a) = -\arctg(a)$$

4.1 Définition

Ce sont des outils qui permettent de déterminer la réponse fréquentiel d'un système en boucle ouverte et conclure des performances de ce système en boucle fermée.

4.2 Diagramme de Bode



La FTBO : $k G(s)$

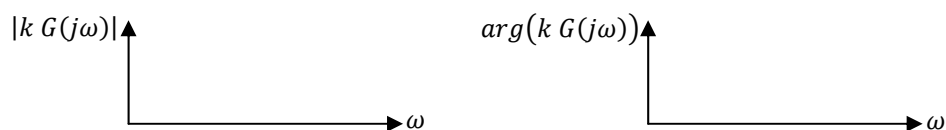
Le passage au domaine fréquentiel s'effectue en remplaçant : $s = j\omega$ et $\omega = 2\pi f$

$$k G(s) = k G(j\omega) = |k G(j\omega)| e^{arg(k G(j\omega))}$$

$|k G(j\omega)|$: module de $k G(j\omega)$

$arg(k G(j\omega))$: Argument de $k G(j\omega)$

4.2 Le tracé de Bode :



Le tracé du module s'effectue sur une échelle logarithmique graduée en Décibel.

$$|k G(j\omega)|_{db} = 20 \log |k G(j\omega)|$$

4.2 Les fonction usuels

$$1 : k G_1(s) = \frac{k}{1+\tau s} \quad 2 : k G_2(s) = k(1 \pm \tau s)$$

$$3 : k G_3(s) = \frac{k}{s} \quad 4 : k G_4(s) = ks$$

$$5 : k G_5(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1} \quad \text{Avec } 0 \leq \xi < 1$$

$$6 : k G_6(s) = K \left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1 \right) \quad \text{Avec } 0 \leq \xi < 1$$

1 : On Prend $k G_1(s) = \frac{k}{1+\tau s}$, $s = j\omega$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ alors :

$$k G_1(s) = \frac{k}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|k G_1(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$|k G_1(j\omega)|_{db} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$|k G_1(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(-\arctg \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

Les asymptotes :

1^{er} cas : $\omega \ll \omega_0 \rightarrow |k G_1(j\omega)|_{db} = 20 \log k \rightarrow \text{pente} = 0$ et $\arg(k G(j\omega)) = 0$

2^{ème} cas : $\omega \gg \omega_0 \rightarrow |k G_1(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \rightarrow \text{pente} = -20 \text{ db}$ et

$$\arg(k G_1(j\omega)) = -90^\circ$$

Cas particulier ($\omega = \omega_0$) $\rightarrow |k G_1(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log(\sqrt{2}) = 20 \log k - 3 \text{ db}$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = -(\arctg(1)) \times \frac{180}{\pi} = -45^\circ$$

Le premier point de la courbe : $20 [\log(k) - \alpha m]$

$$\text{Avec } \alpha \text{ est classe du système } k G_1(s) = \frac{k}{s^\alpha(1+\tau s)} = \frac{k}{s^0(1+\tau s)} \rightarrow \alpha=0$$

Et m est la puissance du premier 10 du papier semi log.

Pour le cas $k G_1(s)$ Le premier point de la courbe est $20 [\log(k)]$

Pour $k G_1(s) = \frac{k}{1+\tau s}$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_0	∞
$ k G_1(j\omega) _{db}$	0		-20 db
$\arg(k G_1(j\omega))$	0		-90°

On peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_0	∞
$(k G_1(j\omega) _{db}) \times 20 db$	0		-1
$\arg(k G_1(j\omega)) \times 90^\circ$	0		-1

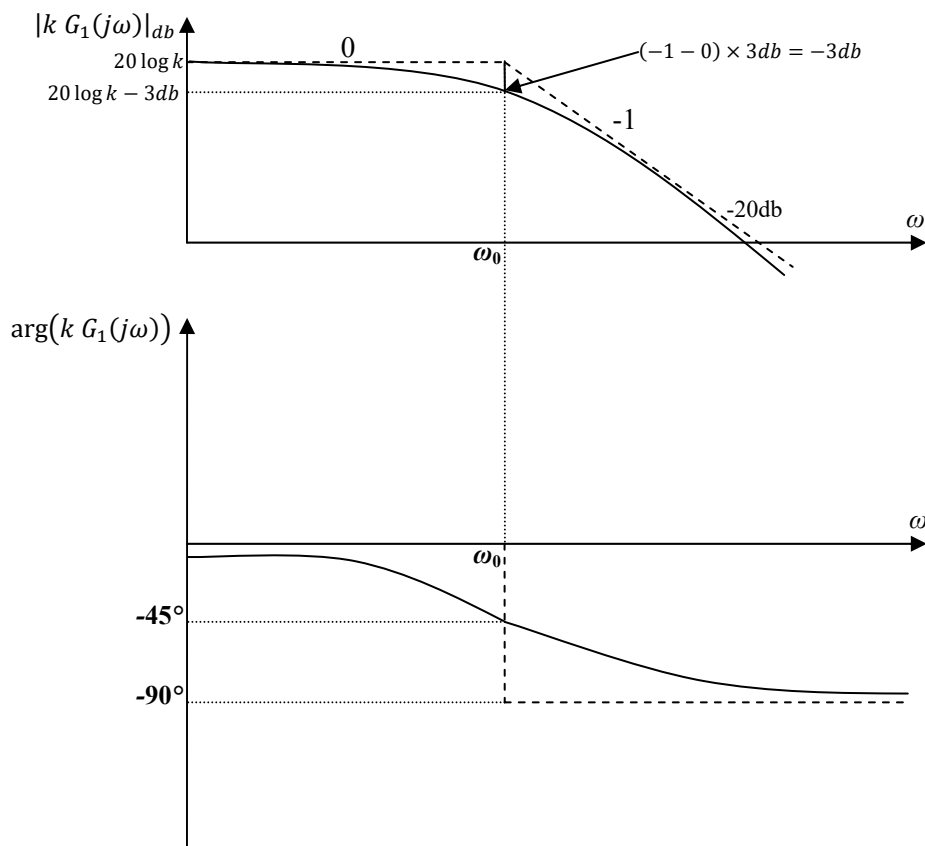
Et pour la fonction $k G_1(s) = \frac{k}{1-\tau s}$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_0	∞
$ k G_1(j\omega) _{db}$	0		-20 db
$\arg(k G_1(j\omega))$	0		90°

On peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_0	∞
$(k G_1(j\omega) _{db}) \times 20 db$	0		-1
$\arg(k G_1(j\omega)) \times 90^\circ$	0		1

Le dessin : $k G_1(s) = \frac{k}{1+\tau s}$



1 : On Prend $k G_2(s) = k(1 \pm \tau s)$, $s = j\omega$ avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ alors :

$$k G_1(s) = k \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$|k G_2(j\omega)| = k \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|k G_2(j\omega)|_{db} = 20 \log \left(k \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

$$|k G_2(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\arg(k G_2(j\omega)) = \left(\arctg \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

Les asymptotes :

1^{er} cas : $\omega \ll \omega_0 \rightarrow |k G_2(j\omega)|_{db} = 20 \log k \rightarrow$ pente = 0 et $\arg(k G(j\omega)) = 0$

2^{ème} cas : $\omega \gg \omega_0 \rightarrow |k G_2(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \rightarrow$ pente = +20 db et

$$\arg(k G(j\omega)) = 90^\circ$$

Cas particulier ($\omega = \omega_0$) $\rightarrow |k G_2(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log(\sqrt{2}) = 20 \log k + 3db$

$$\arg(k G(j\omega)) = \arctg(1) = 45^\circ$$

Le premier point de la courbe : $20 [\log(k) - \alpha m]$

Avec α est classe du système $k G_2(s) = \frac{k(1+\tau s)}{s^\alpha} = \frac{k(1+\tau s)}{s^0} \rightarrow \alpha=0$

Et m est la puissance du premier 10 du papier semi log.

Pour le cas $k G_2(s)$ Le premier point de la courbe est $20 [\log(k)]$

Pour $k G_2(s) = k(1 + \tau s)$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_0	∞
$ k G_2(j\omega) _{db}$	0		+20 db
$\arg(k G_2(j\omega))$	0		90°

Ont peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_0	∞
$(k G_2(j\omega) _{db}) \times 20 db$	0		1
$\arg(k G_2(j\omega)) \times 90^\circ$	0		1

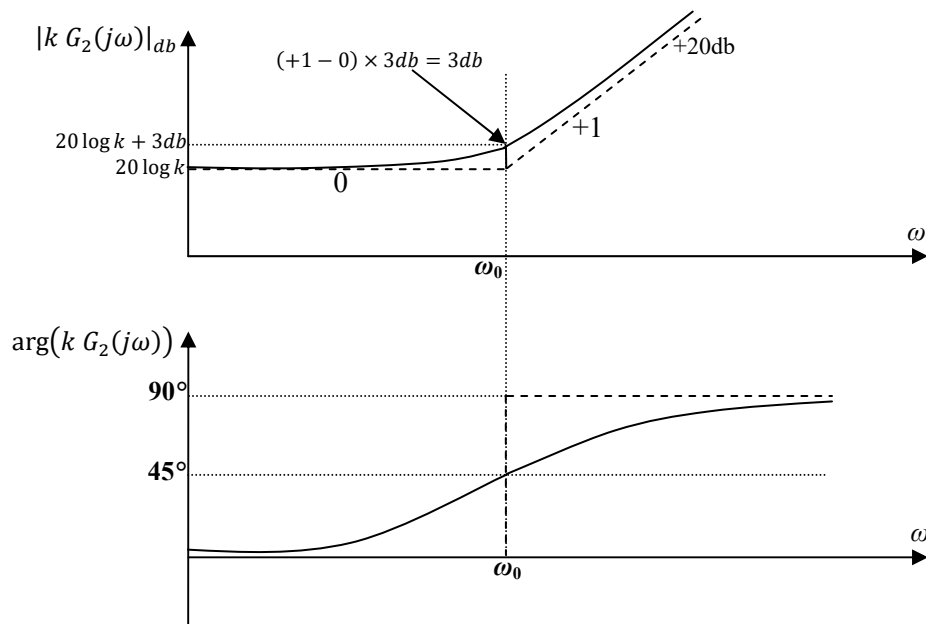
Et pour la fonction $k G_2(s) = k(1 - \tau s)$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_0	∞
$ k G_2(j\omega) _{db}$	0		+20 db
$\arg(k G_2(j\omega))$	0		-90°

On peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_0	∞
$(k G_2(j\omega) _{db}) \times 20 \text{ db}$	0		1
$\arg(k G_2(j\omega)) \times 90^\circ$	0		-1

Le dessin : $k G_2(s) = k (1 + \tau s)$



Pour $k G_3(s) = \frac{k}{s}$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	∞
$ k G_3(j\omega) _{db}$		-20 db
$\arg(k G_3(j\omega))$		-90°

On peut présenter le tableau par :

ω	0	∞
$ k G_3(j\omega) _{db} \times 20 \text{ db}$		-1
$\arg(k G_3(j\omega)) \times 90^\circ$		-1

Pour $k G_4(s) = k s$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	∞
$ k G_4(j\omega) _{db}$		+20 db
$\arg(k G_4(j\omega))$		90°

On peut présenter le tableau par :

ω	0	∞
$ k G_4(j\omega) _{db} \times 20 \text{ db}$		1
$\arg(k G_4(j\omega)) \times 90^\circ$		1

Pour $k G_5(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$ Avec $0 \leq \xi < 1$

$$s = j\omega \rightarrow k G_5(s) = \frac{K}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + j\frac{2\xi}{\omega_n}\omega}$$

$$|k G_5(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi}{\omega_n}\omega\right]^2}}$$

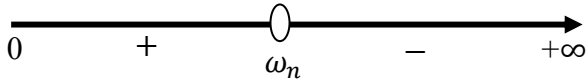
$$|k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log \left(\frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi}{\omega_n}\omega\right]^2}} \right)$$

$$|k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

Avant de calculer $\arg(k G_5(j\omega))$, il faut étudier le signe de $\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\}$ pour $\omega \in [0, +\infty[$

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = 0 \rightarrow \omega = \omega_n$$

Variation de ω :



Alors :

Si $\omega = \omega_n$ $\arg(k G_5(j\omega)) = (-\arctg(\infty)) \times \frac{180}{\pi} = -90^\circ$

Si $\omega < \omega_n$ $\arg(k G_5(j\omega)) = -\left(\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)\right) \times \frac{180}{\pi}$

Si $\omega > \omega_n$ $\arg(k G_5(j\omega)) = -\left(\left(\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \times \frac{180}{\pi}\right) + 180^\circ\right)$
 $= \left(-\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \times \frac{180}{\pi}\right) - 180^\circ$

Les asymptotes :

1^{er} cas : $\omega \ll \omega_n \rightarrow |k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log k \rightarrow \text{pente} = 0$ et $\arg(k G(j\omega)) = 0$

2^{ème} cas : $\omega \gg \omega_n \rightarrow |k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \rightarrow$

$$|k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \rightarrow \text{pente} = -40 \text{ db et}$$

$$\arg(k G_5(j\omega)) = -180^\circ$$

Cas particulier ($\omega = \omega_n$) $\rightarrow |k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log k - 20 \log(2\xi) = 20 \log k - 3 \text{ db}$

$$\arg(k G_5(j\omega)) = \left(-\arctg(\infty) \times \frac{180}{\pi} \right) = -90^\circ$$

On envisage 2 cas $\begin{cases} \text{le module } |k G_5(j\omega)|_{db} \text{ possède un maximum} \\ \text{le module } |k G_5(j\omega)|_{db} \text{ ne possède pas un maximum} \end{cases}$

$$|k G_5(j\omega)|_{db} = 20 \log \left(\frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{2\xi}{\omega_n} \omega\right]^2}} \right)$$

$$\frac{d|k G_5(j\omega)|_{db}}{d\omega} = 20k \frac{1}{2} \left[\frac{-4\omega}{\omega_n^2} + \frac{4\omega^3}{\omega_n^4} + 4\xi^2 \frac{2\omega}{\omega_n} \right] = 0$$

$$\frac{-4\omega}{\omega_n^2} + \frac{4\omega^3}{\omega_n^4} + 4\xi^2 \frac{2\omega}{\omega_n} = 0 \rightarrow 4(2\xi^2 - 1) + \frac{4\omega^2}{\omega_n^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_n^2 (1 - 2\xi^2)$$

$$\boxed{\omega = \omega_a = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2)}} \rightarrow \exists \text{ Pulsation de résonance} \rightarrow (1 - 2\xi^2) > 0$$

$\rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$, pour ce cas on définit un facteur de résonance comme suit :

$$M_p = \frac{|k G_5(j\omega_a)|}{|k G_5(0)|} = \frac{1}{2\xi \sqrt{(1 - \xi^2)}}$$

Alors On envisage 2 cas $\begin{cases} \xi \geq 0.7 \text{ le diagramme du module est sous (تحت) l'asymptotes} \\ \xi < 0.7 \text{ le diagramme du module est dessus (فوق) l'asymptotes} \end{cases}$

Le premier point de la courbe : $20 [\log(k) - \alpha m]$

$$\text{Avec } \alpha \text{ est classe du système } k G_5(s) = \frac{K}{s^\alpha \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)} = \frac{K}{s^0 \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)} \rightarrow \alpha=0$$

Et m est la puissance du premier 10 du papier semi log.

Pour le cas $k G_5(s)$ Le premier point de la courbe est $20 [\log(k)]$

La distance entre la courbe réelle et l'asymptote est $\boxed{20 \log(2\xi)}$

Pour $k G_5(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_n	∞
$ k G_5(j\omega) _{db}$		0	-40 db
$\arg(k G_5(j\omega))$		0	-180°

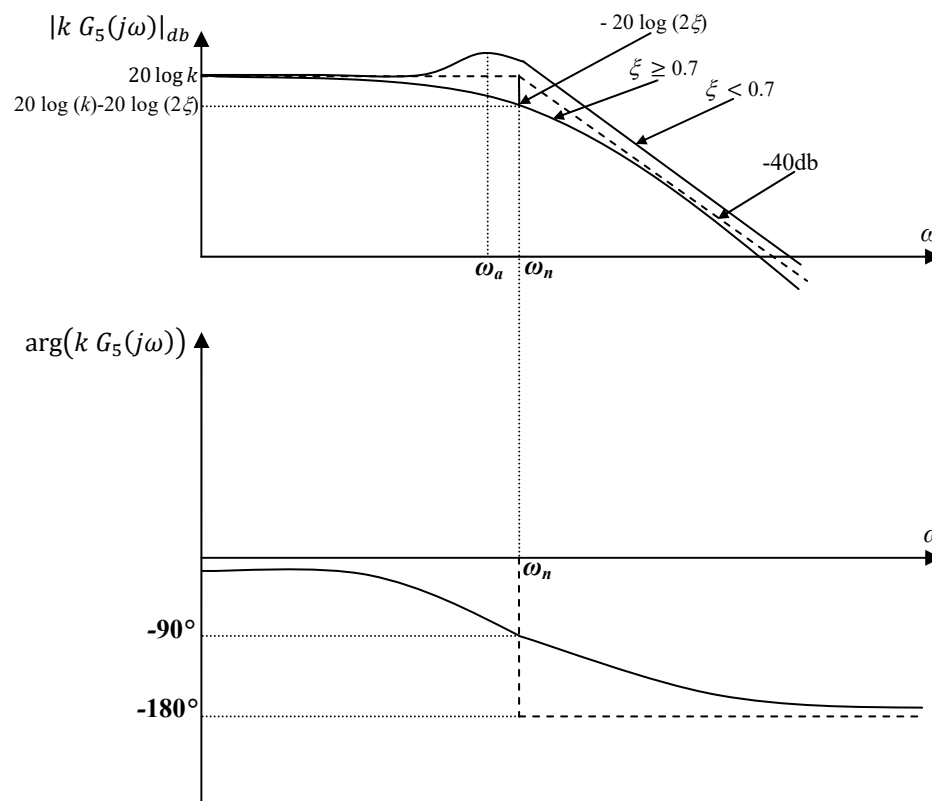
On peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_n	∞
$(k G_5(j\omega) _{db}) \times 20 \text{ db}$	0	-2	
$\arg(k G_5(j\omega)) \times 90^\circ$	0	-2	

Position de diagramme du module

ξ	0	0.7	1
Position de diagramme du $ k G_5(j\omega) _{db}$	Le diagramme est en dessus (فوق) de l'asymptote	Le diagramme est en dessous (تحت) de l'asymptote	

Le dessin : $k G_5(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$



Pour $k G_6(s) = K \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)$ Avec $0 \leq \xi < 1$

$$s = j\omega \rightarrow k G_6(s) = K \left(\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right] + j \frac{2\xi}{\omega_n} \omega \right)$$

$$|k G_6(j\omega)| = k \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\xi}{\omega_n} \omega \right]^2}$$

$$|k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\xi}{\omega_n} \omega \right]^2}$$

$$|k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}$$

$$\text{Si } \omega = \omega_n \quad \arg(k G_6(j\omega)) = (\arctg(\infty)) \times \frac{180}{\pi} = 90^\circ$$

$$\text{Si } \omega < \omega_n \quad \arg(k G_6(j\omega)) = \left(\arctg \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

$$\text{Si } \omega > \omega_n \quad \arg(k G_6(j\omega)) = \left(\left(\arctg \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \times \frac{180}{\pi} \right) + 180^\circ \right)$$

Les asymptotes :

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \omega \ll \omega_n \rightarrow |k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k \rightarrow \text{pente} = 0 \text{ et } \arg(k G_6(j\omega)) = 0$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } \omega \gg \omega_n \rightarrow |k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \rightarrow$$

$$|k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow \text{pente} = +40 \text{ db et}$$

$$\arg(k G_6(j\omega)) = 180^\circ$$

$$\text{Cas particulier } (\omega = \omega_n) \rightarrow |k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log k + 20 \log(2\xi)$$

$$\arg(k G_5(j\omega)) = (\arctg(\infty)) \times \frac{180}{\pi} = 90^\circ$$

On envisage 2 cas $\begin{cases} \text{le module } |k G_6(j\omega)|_{db} \text{ possède un maximum} \\ \text{le module } |k G_6(j\omega)|_{db} \text{ ne possède pas un maximum} \end{cases}$

$$|k G_6(j\omega)|_{db} = 20 \log \left(k \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2} \right)$$

$$\frac{d|k G_6(j\omega)|_{db}}{d\omega} = 20k \frac{1}{2} \left[\frac{-4\omega}{\omega_n^2} + \frac{4\omega^3}{\omega_n^4} + 4\xi^2 \frac{2\omega}{\omega_n} \right] = 0$$

$$\frac{-4\omega}{\omega_n^2} + \frac{4\omega^3}{\omega_n^4} + 4\xi^2 \frac{2\omega}{\omega_n} = 0 \rightarrow 4(2\xi^2 - 1) + \frac{4\omega^2}{\omega_n^2} = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_n^2 (1 - 2\xi^2)$$

$$\boxed{\omega = \omega_a = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2)}} \rightarrow \exists \text{ Pulsation de résonance } \rightarrow (1 - 2\xi^2) > 0$$

$\rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$, pour ce cas on définit un facteur de résonance comme suit :

$$M_p = \frac{|k G_6(j\omega_a)|}{|k G_6(0)|_{db}} = \frac{1}{2\xi \sqrt{(1 - \xi^2)}}$$

Alors On envisage 2 cas $\begin{cases} \xi \geq 0.7 \text{ le diagramme du module est sous (تحت) l'asymptotes} \\ \xi < 0.7 \text{ le diagramme du module est dessus (فوق) l'asymptotes} \end{cases}$

Le premier point de la courbe : $20 [\log(k) - \alpha m]$

Avec α est classe du système $k G_6(s) = \frac{K \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)}{s^\alpha} = \frac{K \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)}{s^0} \rightarrow \alpha=0$

Et m est la puissance du premier 10 du papier semi log.

Pour le cas $k G_6(s)$ Le premier point de la courbe est $20 [\log(k)]$

La distance entre la courbe réelle et l'asymptote est $20 \log(2\xi)$

Pour $k G_6(s) = K \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)$ nous avons le tableau d'asymptotes suivant :

ω	0	ω_n	∞
$ k G_6(j\omega) _{db}$	0		+40 db
$\arg(k G_6(j\omega))$	0		+180°

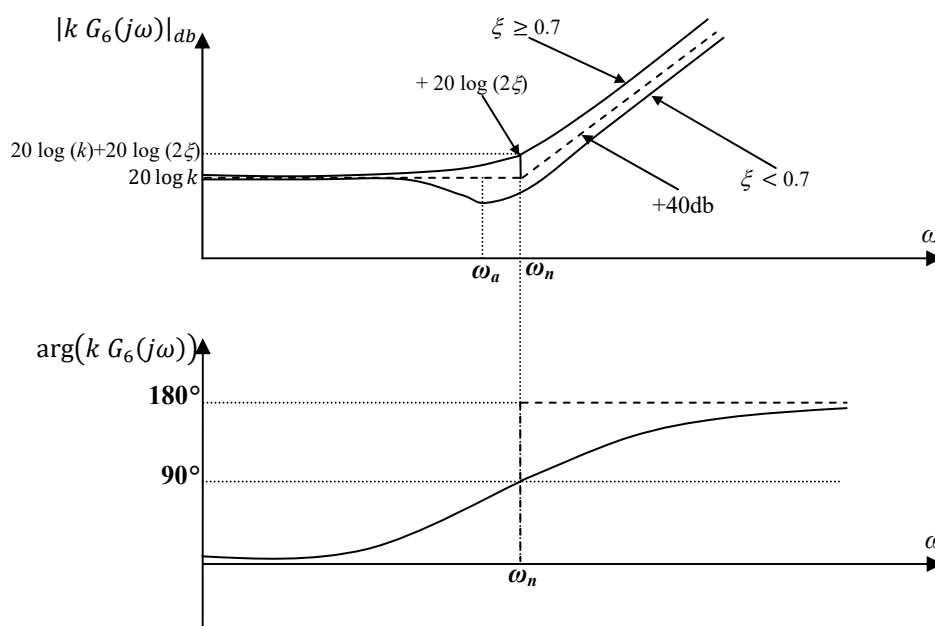
Ont peut présenter le tableau par :

ω	0	ω_0	∞
$(k G_6(j\omega) _{db}) \times 20 \text{ db}$	0	2	
$\arg(k G_6(j\omega)) \times 90^\circ$	0	2	

Position de diagramme du module

ξ	0	0.7	1
Position de diagramme du $ k G_6(j\omega) _{db}$	Le diagramme est en dessous (تحت) de l'asymptote		Le diagramme est en dessus (فوق) de l'asymptote

Le dessin : $k G_6(s) = K \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right)$



Exemple 1 :

Dessiner le diagramme de Bode de la fonction suivante :

$$k G(s) = \frac{(1+\tau_0 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)^2} \quad \text{avec } \tau_0 = \frac{1}{\omega_0}, \tau_1 = \frac{1}{\omega_1}, \tau_2 = \frac{1}{\omega_2} \text{ et } \omega_0 < \omega_1 < \omega_2$$

Solution

On effectue le tableau suivant :

	0	ω_0	ω_1	ω_2	∞
$1 + \frac{1}{\omega_0} s$	0	×	1	1	1
$\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_1} s}$	0	0	×	-1	-1
$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\omega_2} s\right)^2}$	0	0	0	×	-2
$ k G(s) \times 20 \text{ db}$ les pentes	0 0 db	1 +20 db	0 0 db	-2 -40 db	
$\arg(k G(s)) \times 90^\circ$	0 0°	1 90°	0 90°	-2 -180°	

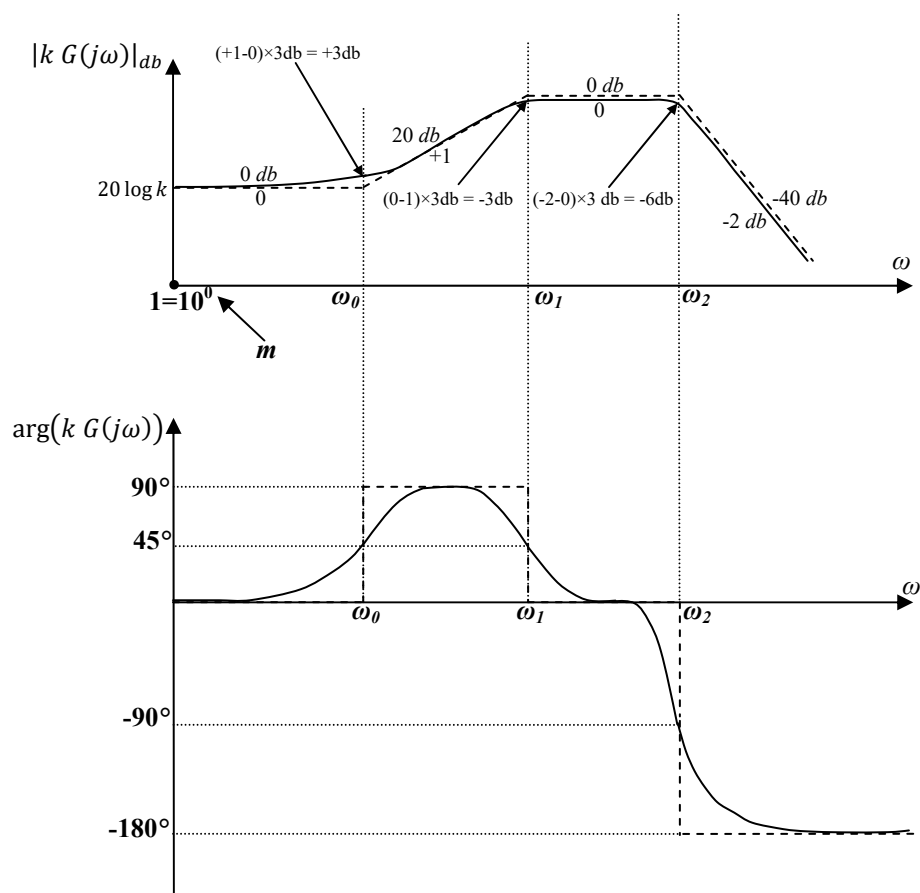
Le premier point de la courbe : $20 [\log(k) - \alpha m]$

Avec α est classe du système $\rightarrow$

$$k G(s) = \frac{(1+\tau_0 s)}{s^\alpha (1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)^2} = \frac{(1+\tau_0 s)}{s^0 (1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)^2} \rightarrow \alpha=0$$

Et m est la puissance du premier 10 du papier semi log.

Pour le cas $k G(s)$ Le premier point de la courbe est $20 [\log(k)]$

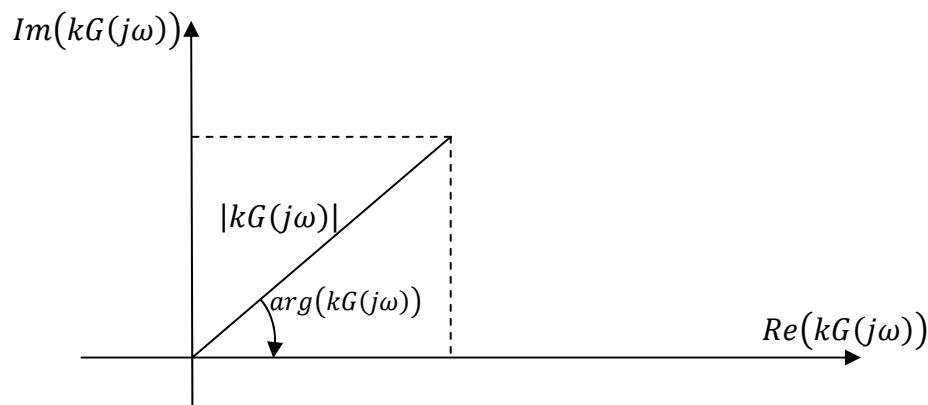


4.2 Diagramme de Nysuist

4.2.1 Définition

Le diagramme de Nyquist en coordonnées polaires, c'est une représentation dans le plan complexe de la partie imaginaire de la fonction de transfert complexe $Im(kG(j\omega))$ en fonction de la partie réelle de la fonction de transfert complexe $Re(kG(j\omega))$ graduée en valeur de ω et orientée dans le sens des ω croissants de 0 à $+\infty$.

$$kG(j\omega) = Re(kG(j\omega)) + j Im(kG(j\omega))$$



Le lieu de Nyquist complet correspond à ω variant de $-\infty$ à $+\infty$, il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.

Exemple 1

Tracer le lieu de nyquist de la fonction suivante :

$$k G(s) = \frac{2 k}{(2s + 1)(s + 1) \left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

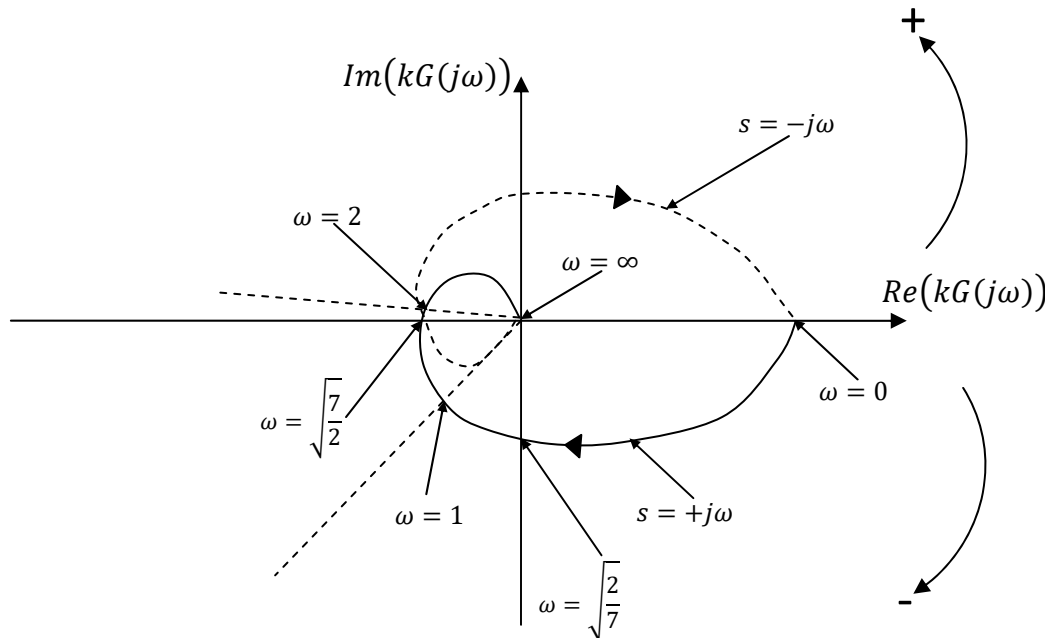
Solution

$$s = j\omega \rightarrow k G(j\omega) = \frac{2 k}{(2j\omega + 1)(j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)}$$

$$|k G(j\omega)| = \frac{2 k}{\sqrt{1 + 4\omega^2} \sqrt{1 + \omega^2} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}}}$$

$$arg(k G(j\omega)) \left(= -artg(2\omega) - arctg(\omega) - arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega \rightarrow \infty$
$ k G(j\omega) $	$2 k$	$0.56 k$	$0.15 k$	0
$arg(k G(j\omega))$	0°	-135°	-184.4°	-270°



Intersection avec l'axe imaginaire

$$arg(k G(j\omega)) = -artg(2\omega) - arctg(\omega) - arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) = -90^\circ$$

$$\rightarrow artg(2\omega) + arctg(\omega) = 90^\circ - arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\rightarrow \text{tant que } \omega > 0 \text{ alors } 90^\circ - arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) = arctg\left(\frac{2}{\omega}\right)$$

$$\text{Et on a aussi : } arctg(2\omega) + arctg(\omega) = arctg\left(\frac{3\omega}{1-2\omega^2}\right)$$

$$arctg\left(\frac{3\omega}{1-2\omega^2}\right) = arctg\left(\frac{2}{\omega}\right) \rightarrow \frac{3\omega}{1-2\omega^2} = \frac{2}{\omega}$$

$$2(1 - 2\omega^2) = 3\omega^2 \rightarrow 2 - 4\omega^2 = 3\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{2}{7} \rightarrow$$

$$\text{Alors : } \omega = \pm \sqrt{\frac{2}{7}} \text{ puisque } \omega > 0 \text{ alors } \omega = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

	$\omega = \sqrt{\frac{2}{7}}$
$ k G(j\omega) $	$3.68 k$
$arg(k G(j\omega))$	-90°

Intersection avec l'axe réel

$$\arg(k G(j\omega)) = -\arctg(2\omega) - \arctg(\omega) - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) = -180^\circ$$

$$\rightarrow \arctg(2\omega) + \arctg(\omega) = 180^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\rightarrow \text{tant que } \omega > 0 \text{ alors } 180^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) = \arctg\left(\frac{-\omega}{2}\right)$$

$$\text{Et on a aussi : } \arctg(2\omega) + \arctg(\omega) = \arctg\left(\frac{3\omega}{1-2\omega^2}\right)$$

$$\arctg\left(\frac{3\omega}{1-2\omega^2}\right) = \arctg\left(\frac{-\omega}{2}\right) \rightarrow \frac{3\omega}{1-2\omega^2} = \frac{-\omega}{2}$$

$$-1 + 2\omega^2 = 6 \rightarrow 2\omega^2 = 7 \rightarrow \omega^2 = \frac{7}{2} \rightarrow$$

$$\text{Alors : } \omega = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ puisque } \omega > 0 \text{ alors } \omega = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

	$\omega = \sqrt{\frac{7}{2}}$
$ k G(j\omega) $	$0.178 k$
$\arg(k G(j\omega))$	-180°

Exemple 2

Tracer le lieu de nyquist de la fonction suivante :

$$k G_1(s) = \frac{k(s+8)(s-3)}{s(s+4)(s-2)}$$

Solution

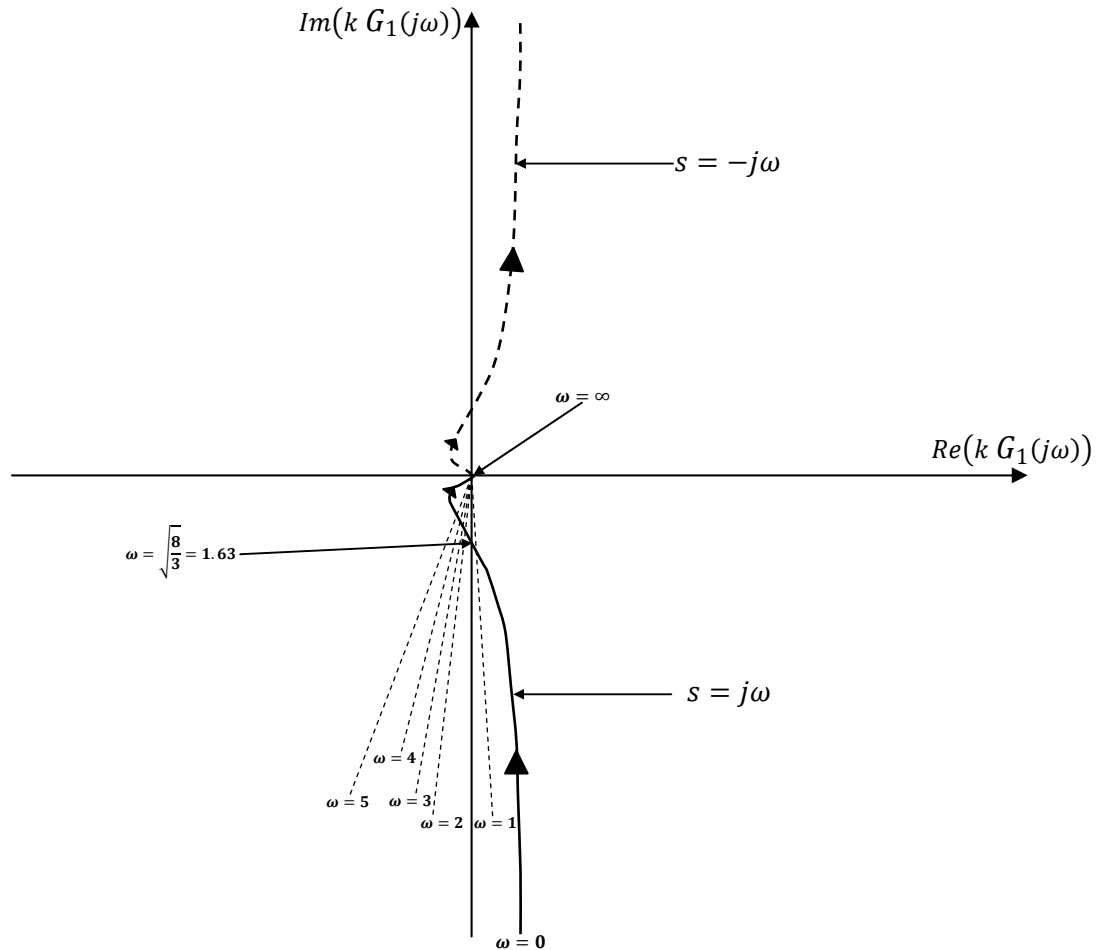
$$s = j\omega \rightarrow k G_1(j\omega) = \frac{k(j\omega+8)(j\omega-3)}{j\omega(j\omega+4)(j\omega-2)}$$

$$|k G_1(j\omega)| = \frac{k \sqrt{\omega^2 + 64} \sqrt{\omega^2 + 9}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 16} \sqrt{\omega^2 + 4}}$$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{-3}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} + 180^\circ - \left(90^\circ + \left(\arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{-2}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} + 180^\circ \right)$$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} - 90^\circ - \left(\arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \times \frac{180}{\pi}$$

	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = 3$	$\omega = 4$	$\omega = 5$	$\omega \rightarrow \infty$
$ k G(j\omega) $	∞	$2.77 k$	$1.18 k$	$0.67 k$	$0.44 k$	$0.32 k$	0
$\arg(k G(j\omega))$	-90°	-88.72°	-91.20°	-95°	-95°	-100.17°	-90°



Intersection avec l'axe imaginaire

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) - 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \times \frac{180}{\pi} = -90^\circ$$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) - 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) = -90^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\arg(k G_1(j\omega)) = \left(\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) - 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

$$\arctg\left(\frac{\omega}{8}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{3}\right) = \arctg\left(\frac{\omega}{4}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\arctg\left(\frac{\frac{\omega}{8} - \frac{\omega}{3}}{1 + \frac{\omega^2}{24}}\right) = \arctg\left(\frac{\frac{\omega}{4} - \frac{\omega}{2}}{1 + \frac{\omega^2}{8}}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{\omega}{8} - \frac{\omega}{3}}{1 + \frac{\omega^2}{24}} \right) = \left(\frac{\frac{\omega}{4} - \frac{\omega}{2}}{1 + \frac{\omega^2}{8}} \right)$$

$$\left(\frac{\frac{-5}{24}}{1 + \frac{\omega^2}{24}} \right) = \left(\frac{\frac{-1}{4}}{1 + \frac{\omega^2}{8}} \right)$$

$$\frac{-5}{24} \left(1 + \frac{\omega^2}{8} \right) = \frac{-1}{4} \left(1 + \frac{\omega^2}{24} \right)$$

$$\omega^2 = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \text{Alors : } \omega = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} \text{ puisque } \omega > 0 \text{ alors } \omega = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

	$\omega = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63$
$ k G(j\omega) $	$1.53 k$
$\arg(k G(j\omega))$	-90°

4.3 Marge de phase et de gain

C'est des indicateurs relatifs pour un système asservis en fonction de réponse fréquentielle en B.O.

Soit : ω_π : pulsation correspondant à $\arg(k G(j\omega_\pi)) = -180^\circ$

ω_0 : pulsation correspondant à $|k G(j\omega_0)|_{db} = 0 \text{ db}$ ou $|k G(j\omega_0)| = 1$

4.3.1 Marge de phase

La marge de phase est déterminée par la formule suivante :

$$\Phi_M = 180^\circ + \frac{180^\circ}{\pi} \times \{ \arg(k G(j\omega_0)) \}$$

4.3.2 Marge de gain

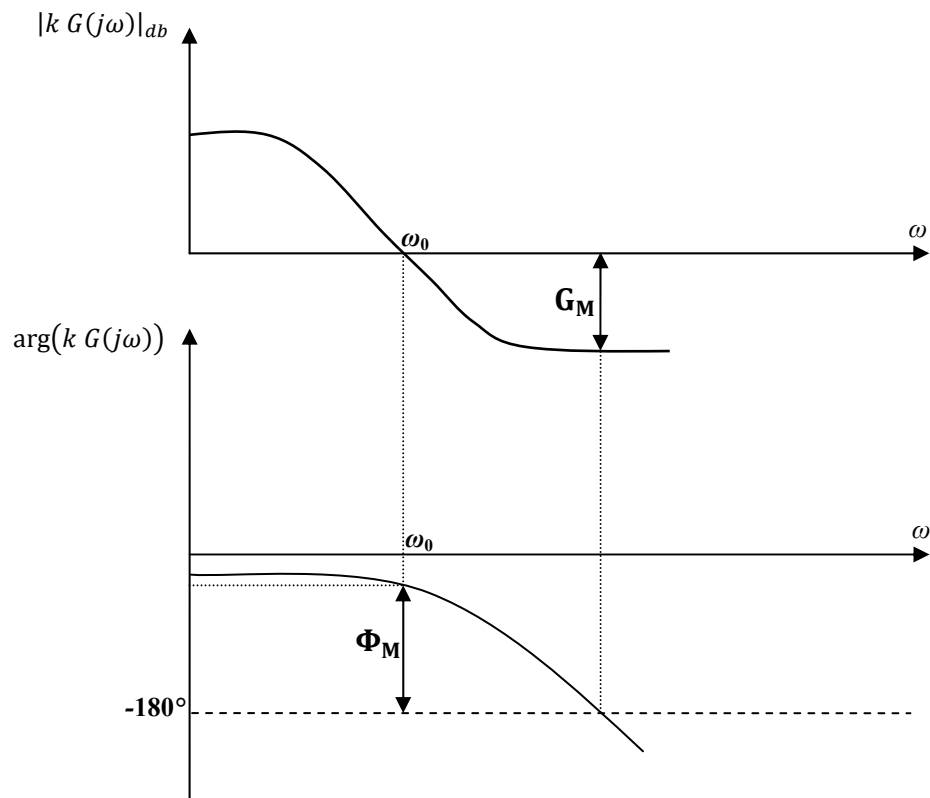
La marge de gain est déterminée par la formule suivante :

$$G_M = \frac{1}{|k G(j\omega_\pi)|}$$

ou en décibel

$$G_{Mdb} = -20 \log (|k G(j\omega_\pi)|)$$

4.3.3 visualisation des marges de phase et de gain dans le plan de Bode



4.3.4 visualisation des marges de phase et de gain dans le plan de Nyquist

