

Chapitre 3 : Réponse temporelles des systèmes linéaires

3.1 Introduction

Toute système physique représente un système linéaire est donné par l'équation différentielle suivante :

$$b_n \frac{d^n o(t)}{dt^n} + \dots + b_0 o(t) = a_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + a_0 e(t)$$

La réponse temporelle est donnée par le régime permanent et transitoire.

3.2 Système du 1^{er} ordre

Un système du premier ordre est décrit par l'équation différentielle de la forme :

$$b_1 \frac{do(t)}{dt} + b_0 o(t) = a_0 e(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

L'équation (1) peut se réécrit sous la forme :

$$\left(\frac{b_1}{b_0}\right) \frac{do(t)}{dt} + o(t) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) e(t) \dots\dots\dots (2)$$

On pose : $\frac{b_1}{b_0} = \tau$ constante de temps

$$K = \frac{a_0}{b_0} \text{ gain statique}$$

L'équation (2) peut se réécrit sous la forme :

$$\tau \frac{do(t)}{dt} + o(t) = K e(t) \dots\dots\dots (3)$$

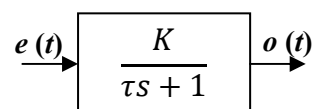
3.2.1 Fonction de transfert

$$F(s) = \frac{O(s)}{E(s)} \quad \text{avec CI}=0$$

$$L\{3\} \rightarrow \tau s O(s) + O(s) = K E(s)$$

$$(\tau s + 1) O(s) = K E(s)$$

$$F(s) = \frac{O(s)}{E(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$



3.2.2 Réponse à un échelon

$$e(t) = E_0 u(t) \quad \text{T.L} \rightarrow E(s) = \frac{E_0}{s}$$

$$O(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{E_0}{s} = \frac{\frac{KE_0}{\tau}}{s \left(s + \frac{1}{\tau}\right)}$$

$$O(s) = \frac{KE_0}{s} - \frac{KE_0}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$\begin{aligned} \text{T.L}^{-1} \rightarrow o(t) &= KE_0 - KE_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ o(t) &= KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

On définit :

Valeur initial : $O(0) = 0$

Valeur finale (régime permanent) : $O_p = o(\infty) = KE_0$

L'erreur statique : $\varepsilon_s = O_p - o(\infty)$

L'erreur dynamique : $\varepsilon_d = O_p - o(t)$

Temps de réponse (t_r) à 5% : est le temps obtenu jusqu'à ce que le système atteigne les 95% de la valeur $O_p = KE_0$ c'est-à-dire ($0.95KE_0$), alors :

$$o(t_r) = 0.95KE_0 = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$t_r = -\tau \ln(0.05) \rightarrow \boxed{t_r = 3\tau}$$

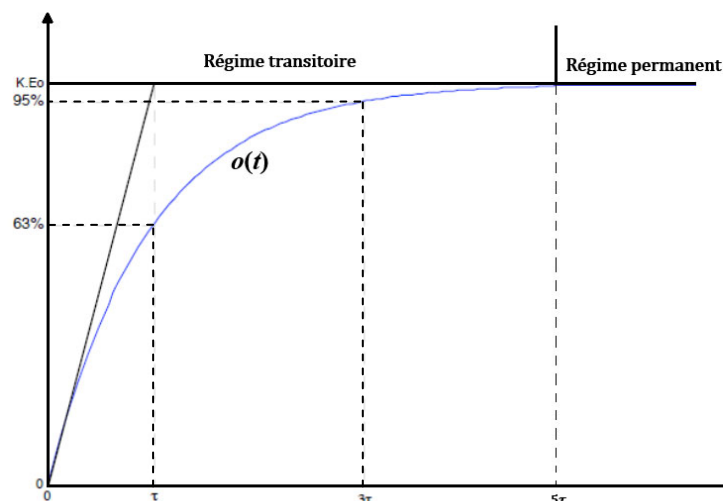
On a aussi : $o(\tau) = KE_0(1 - e^{-1}) = 0.63 KE_0 = (63\%)$

Temps de montée (t_m) : est le temps pendant lequel $o(t)$ passe de $0.1 O_p$ à $0.9 O_p$

Avec : $O_p = KE_0$, $t_m \approx 2\tau$

Le régime permanent d'un système du premier ordre qui correspond à sa stabilisation à la valeur $O_p = KE_0$, peut être considéré atteint au bout d'un temps

$t = 5\tau$.



3.2.3 Réponse à une rampe

L'entrée est une rampe de pente a : $e(t) = a t$ sa transformée de Laplace est

$E(s) = \frac{a}{s^2}$, la sortie est obtenue par :

$$O(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \cdot \frac{E_0}{s} = \frac{\frac{Ka}{\tau}}{s^2 \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$O(s) = \frac{Ka}{s^2} - \frac{Ka\tau}{s} + \frac{Ka\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$\text{T.L}^{-1} \rightarrow o(t) = Kat - Ka\tau + Ka\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

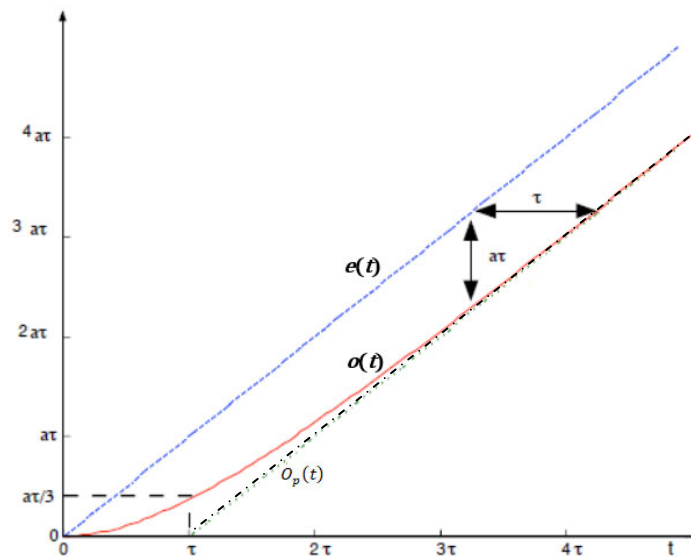
$$o(t) = Ka(t - \tau) + Ka\tau e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Les caractéristiques de cette réponse sont :

Valeur finale (régime permanent) : $O_p(t) = Ka(t - \tau)$

- Si $K = 1$, la sortie $o(t)$ suit l'entrée avec un retard constant (τ) la différence entre la sortie $O_p(t) = at - a\tau$ et l'entrée ($e(t) = at$) est appelée erreur de traînage et vaut $a\tau$.

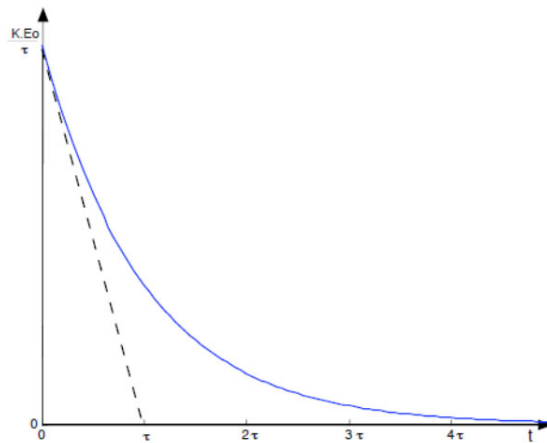
- Si $K \neq 1$, la sortie $O_p(t) = Kat - Ka$ et l'entrée ($e(t) = at$) n'ont pas la même pente. Ils divergent.



3.2.4 Réponse à une impulsionnelle

L'entrée est donnée par $e(t) = E_0 \delta(t)$ En Laplace $E(s) = E_0$. La sortie est donnée par :

$$O(s) = \frac{KE_0}{\tau s + 1} = \frac{\frac{KE_0}{\tau}}{\left(s + \frac{1}{\tau} \right)} \quad \text{TL}^{-1} \rightarrow O(t) = \frac{KE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



3.3 Réponse des systèmes du second ordre

3.3.1 Fonction de transfert

L'équation différentielle la plus générale de second ordre est :

$$b_2 \frac{d^2 o(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d o(t)}{dt} + b_0 o(t) = a_0 e(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

L'équation (1) peut se réécrire sous la forme :

$$\left(\frac{b_2}{b_0}\right) \frac{d^2 o(t)}{dt^2} + \left(\frac{b_1}{b_0}\right) \frac{d o(t)}{dt} + o(t) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right) e(t) \dots\dots\dots (2)$$

On pose : $\frac{b_2}{b_0} = \frac{1}{\omega_n^2}$

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{2\xi}{\omega_n} \rightarrow \xi = \frac{1}{2} \frac{b_1}{b_0} \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}$$

$$K = \frac{a_0}{b_0}$$

La fonction de transfert est obtenue par :

$$\text{T.L à l'équation (2)} \rightarrow \left(\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 \right) O(s) = K E(s)$$

$$F(s) = \frac{O(s)}{E(s)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1} = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

Avec K le gain statique du système ω_n La pulsation naturelle (en rd/s). On pourra poser $\tau_n = \frac{1}{\omega_n}$ et ξ est le coefficient d'amortissement.

Si on cherche les racines de la fonction de transfert : $\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1 = 0$

$$\sqrt{\Delta'} = \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

On distingue trois cas possibles :

1 : $\xi > 1$, dans ce cas les racines sont réels (**Régime apériodique**) : $-\omega_n(\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1})$

2 : $\xi = 1$, les deux racines sont égales et réelles (**Régime critique**) : $-\omega_n$

3 : $0 \leq \xi < 1$, les deux racines sont complexe conjuguées (**Régime oscillatoire amorti**) : $-\xi \omega_n \mp j \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$, un cas particulier ($\xi = 0$), les deux racines sont imaginaires pures $\mp j \omega_n$.

3.3.2 Réponse à un échelon pour $\xi > 1$ (Régime apériodique)

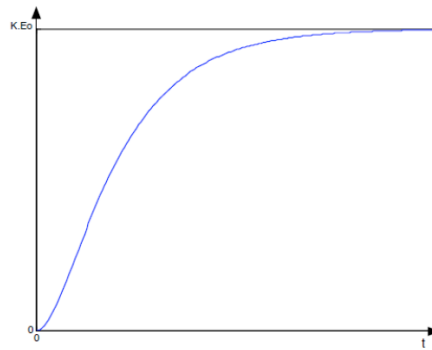
Pour une entrée $e(t) = E_0 u(t)$, T.L $\rightarrow E(s) = \frac{E_0}{s}$

$$O(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{E_0}{s} = \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s - r_1)(s - r_2)}$$

$$= \frac{KE_0}{s} + \frac{\frac{KE_0\omega_n^2}{r_1(r_1 - r_2)}}{s - r_1} + \frac{\frac{KE_0\omega_n^2}{r_2(r_2 - r_1)}}{s - r_2}$$

Avec :
$$\begin{cases} r_1 = -\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ r_2 = -\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 + \frac{\omega_n^2}{r_1 - r_2} \left(\frac{e^{r_1 t}}{r_1} + \frac{e^{r_2 t}}{r_2} \right) \right]$$



Réponse indicielle pour $\xi > 1$ le transitoire est apériodique $o(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} o(t) = KE_0$

Remarque :

- Le comportement du système est non oscillant, il tend vers la valeur KE_0 sans jamais la dépasser.
- Plus le coefficient d'amortissement est grand plus le temps de réponse est important.
- La propriété de « **non dépassement** » est très recherchée dans certains asservissements où le dépassement est interdit.

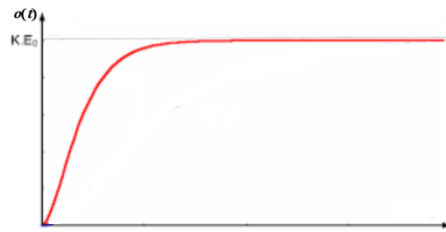
3.3.3 Réponse à un échelon pour $\xi = 1$ (Régime critique)

Régime critique $\rightarrow$ Les racines sont multiples $r_{1,2} = -\omega_n$

$$O(s) = \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{KE_0}{s} - \frac{KE_0\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{KE_0}{(s + \omega_n)}$$

$$o(t) = KE_0 [1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}]$$

$$o(t) = KE_0 [1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t}]$$



$$o(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} o(t) = KE_0$$

La courbe de réponse ressemble à la courbe du cas précédent ($\xi > 1$), mais la croissance est plus rapide.

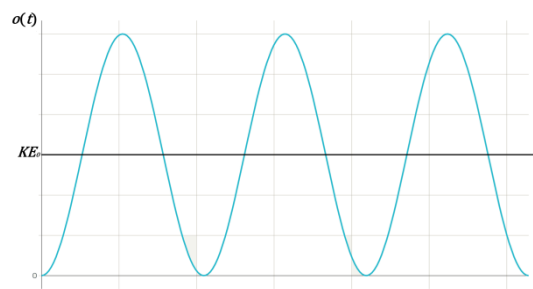
3.3.4 Réponse à un échelon pour $0 \leq \xi < 1$ (Régime oscillatoire amorti)

a- Cas particulier ($\xi = 0$)

Les racines sont multiples $r_{1,2} = \pm j\omega_n$

$$O(s) = \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{KE_0}{s} - \frac{KE_0s}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$o(t) = KE_0 [1 - \cos(\omega_n t)]$$



a- Cas générale $0 \leq \xi < 1$

C'est le régime oscillatoire amorti ou bien le régime sous critique.

$$r_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$r_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$O(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{E_0}{s} = \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s-r_1)(s-r_2)}$$

$$= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-r_1} + \frac{A_3}{s-r_2}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s-r_1)(s-r_2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{KE_0\omega_n^2}{(s-r_1)(s-r_2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{(-r_1)(-r_2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{\omega_n^2} = KE_0$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow r_1} (s-r_1) \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s-r_1)(s-r_2)} = \lim_{s \rightarrow r_1} \frac{KE_0\omega_n^2}{s(s-r_2)} = \frac{KE_0\omega_n^2}{r_1^2 - r_1 r_2} = \frac{-KE_0}{2} \left(\frac{1}{(1-\xi^2) + j\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

$$= \frac{-KE_0}{2} \left(\frac{(1-\xi^2) - j\xi\sqrt{1-\xi^2}}{(1-\xi^2)} \right) = \frac{-KE_0}{2} \left(1 - j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

$$A_3 = \lim_{s \rightarrow r_2} (s - r_2) \frac{KE_0 \omega_n^2}{s(s-r_1)(s-r_2)} = \lim_{s \rightarrow r_2} \frac{KE_0 \omega_n^2}{s(s-r_1)} = \frac{KE_0 \omega_n^2}{r_2^2 - r_1 r_2} = \frac{-KE_0}{2} \left(\frac{1}{(1-\xi^2) - j\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

$$= \frac{-KE_0}{2} \left(\frac{(1-\xi^2) + j\xi\sqrt{1-\xi^2}}{(1-\xi^2)} \right) = \frac{-KE_0}{2} \left(1 + j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

Alors, la réponse du système sera :

$$o(t) = A_1 + A_2 e^{r_1 t} + A_3 e^{r_2 t}$$

$$o(t) = KE_0 - \frac{KE_0}{2} \left(1 - j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) e^{(-\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t} - \frac{KE_0}{2} \left(1 + j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) A_3 e^{(-\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t}$$

$$\text{Posant : } \omega_a = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$C_1 = 1 - j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \text{et} \quad C_2 = 1 + j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\xi\omega_n t} \{ C_1 e^{j\omega_a t} + C_2 e^{-j\omega_a t} \} \right]$$

$$\text{Appliquant la transformation : } e^{j\omega_a t} = \cos(\omega_a t) + j \sin(\omega_a t)$$

$$e^{-j\omega_a t} = \cos(\omega_a t) - j \sin(\omega_a t)$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\xi\omega_n t} \{ C_1 (\cos(\omega_a t) + j \sin(\omega_a t)) + C_2 (\cos(\omega_a t) - j \sin(\omega_a t)) \} \right]$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{2} e^{-\xi\omega_n t} \left\{ 2 (\cos(\omega_a t)) + j \left(-2 j \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) (\sin(\omega_a t)) \right\} \right]$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left\{ (\cos(\omega_a t)) + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) (\sin(\omega_a t)) \right\} \right]$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_n t} \left\{ (\cos(\omega_a t)) + \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) (\sin(\omega_a t)) \right\} \right]$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \sqrt{1-\xi^2} (\cos(\omega_a t)) + \xi (\sin(\omega_a t)) \right\} \right]$$

$$\text{Posant : } \sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi) = \xi$$

$$\text{Afin de vérifier que : } \sqrt{1-\xi^2} < 1 \quad \text{et} \quad \xi < 1 \quad \text{et} \quad \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = \left(\sqrt{1-\xi^2} \right)^2 + \xi^2 = 1$$

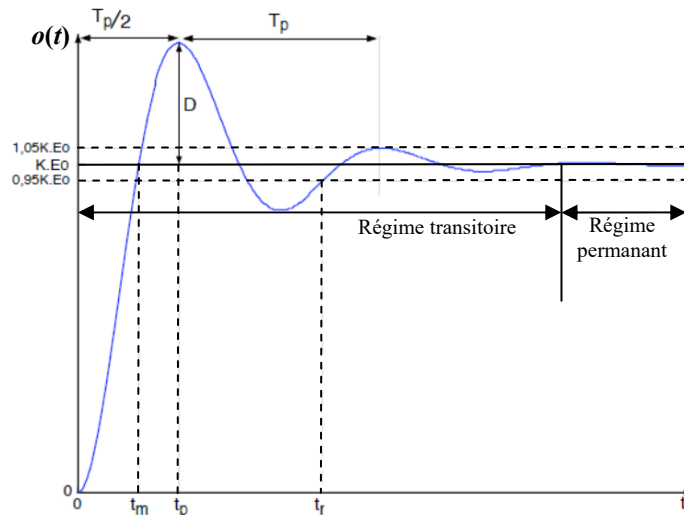
$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left\{ \sin(\varphi) (\cos(\omega_a t)) + \cos(\varphi) (\sin(\omega_a t)) \right\} \right]$$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_a t + \varphi) \right]$$

La réponse d'un système de second ordre lorsque $\xi < 1$

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) \right]$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$$



Les caractéristiques de cette réponse sont :

1 : Régime permanent : $o(\infty) = o_p(t) = KE_0$

2 : Pulsation propre amortie (La pseudo-pulsation) : $\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$

3 : Pseudo-période des oscillations : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_a}$

4 : Temps de montée (temps au bout duquel $o(t)$ atteint pour la première fois $o_p(t)$)

$$t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi} \right) \quad \text{avec} \quad \cos(\varphi) = \xi$$

5 : Temps de pic (le temps du premier dépassement) : $t_p = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_a}$

6 : Le temps de réponse à 5% (t_r) est donné avec une approximation : $t_r = \frac{3}{\xi \omega_n}$

7 : L'enveloppe d'amortissement donnée par : $e^{-\xi \omega_n t}$

8 : Le premier dépassement correspond au maximum de la fonction mesuré au-delà de l'asymptote finale ($o_p(t) = KE_0$) à l'instant t_p . On définit le dépassement relatif $D(\%)$:

$$D(\%) = 100 \frac{o(t_p) - o_p(t)}{o_p(t)}$$

Le $D(\%)$ est obtenu aussi en fonction de ξ comme suit :

$$D(\%) = 100. e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

ξ	0	0.7	1
Réponse indicielle	Oscillatoire	Oscillatoire	apériodique
Dépassement	visible	invisible	inexistant

Exemple :

Soit la fonction de transfert d'un système de second ordre suivante :

$$F(s) = \frac{4}{2s^2 + 2s + 1}$$

1 : Déterminer l'amortissement ξ , la pulsation ω_n et le gain statique K

2 : Quelle serait la réponse face à un échelon unitaire

3 : Déterminer ces performances en régime transitoire

Solution :

$$1 : F(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + 1}$$

$$\begin{cases} K = 4 \\ \frac{1}{\omega_n^2} = 2 \\ \frac{2\xi}{\omega_n} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = 4 \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \rightarrow$ Régime oscillatoire amortie alors les racines sont complexe

$$\begin{cases} r_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ r_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \\ r_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \end{cases}$$

La réponse face à un échelon unitaire

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \right]$$

$$K=4, E_0=1, \omega_n = \frac{1}{\sqrt{2}}, \xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$o(t) = 4 \left[1 - \sqrt{2} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

1 : Pulsation propre amortie (La pseudo-pulsation) : $\omega_a = \frac{1}{2}$ (rad/sec)

2 : Pseudo-période des oscillations : $T_p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \text{ sec}$

3 : Temps de pic (le temps du premier dépassement) : $t_p = \frac{T_p}{2} = 2\pi \text{ sec}$

4 : Le temps de montée : $t_m = \frac{T_p}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) = \frac{4\pi}{2} \left(1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\right) = \frac{3\pi}{2} \text{ sec}$

5 : Le temps de réponse à 5% (t_r) est donné avec une approximation : $t_r = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}} = 6 \text{ sec}$

6 : L'enveloppe d'amortissement donnée par : $e^{-\frac{t}{2}}$

7 : Le premier dépassement : $D(\%) = 100 \cdot e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 100 \cdot e^{-\pi} = 4.32 \%$

3.4 Systèmes d'ordre supérieur à 2 et racines dominants

Les formules développées pour le calcul du dépassement, du temps de montée et du temps de pic,...etc., sont faites pour un système 2^{ème} ordre canonique. Ce qui implique ces formules ne sont pas valables pour des systèmes d'ordre supérieur à 2. Toutefois, sous certaines conditions des systèmes d'ordre supérieur peuvent être rapprochés par un second ordre avec une paire de racines complexes dites racines dominantes. Pour étudier la validité de cette approximation considérons le système suivant :

$$F(s) = \frac{O(s)}{E(s)} = \frac{K\omega_n^2}{(s + K)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Sa réponse indicielle est :

$$O(t) = E_0 \left(1 - A_1 e^{-Kt} - A_2 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi)\right) \text{ avec } \omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}, \phi, A_1 \text{ et } A_2 \text{ des constantes.}$$

La question qui se pose est sous quelle condition, on peut l'approximer par un 2^{ème} ordre

$$F(s) = \frac{O(s)}{E(s)} \approx \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\text{Avec la réponse indicielle : } o(t) \approx E_0 \left(1 - A_2 e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_a t - \phi)\right)$$

On peut remarquer que si K est proche de $\xi\omega_n$, alors l'effet du terme e^{-Kt} sera bien significatif sur le dépassement maximale et le temps de réponse. Pour que l'effet du terme e^{-Kt} à l'instant t_p du dépassement maximale soit négligeable, il est nécessaire que $e^{-Kt_p} \approx 0$ ceci peut être obtenu si $K \geq 5\xi\omega_n$ puisque au bout de cinq fois, la constante du terme e^{-Kt} sera éteint (le sous-système d'ordre 2 est dominant).

Exemple 1: Soit le système du 2^{ème} ordre suivant :

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

1- Déterminer sa réponse indicielle à un échelon unitaire

Considérons maintenant le système du 3^{ème} ordre suivant

$$G_1(s) = \frac{16}{(s+1)(s^2 + 4s + 16)}$$

2- Déterminer sa réponse indicielle à un échelon unitaire

3- Es que le système du 2^{ème} ordre est dominant.

Solution :

$$1 : G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1 \times (4)^2}{s^2 + \{2(0.5).4\}s + (4)^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ \omega_n = 4 \\ \xi = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \omega_a = 4\sqrt{1 - (0.5)^2} = 2\sqrt{3}$$

$\xi = 0.5 < 1 \rightarrow$ Régime oscillatoire amortie alors les racines sont complexe

$$\begin{cases} r_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ r_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 + j 2\sqrt{3} \\ r_2 = -2 - j 2\sqrt{3} \end{cases}$$

La réponse face à un échelon unitaire

$$o(t) = KE_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} t + \varphi) \right]$$

$$K=1, E_0=1, \omega_n = 4, \xi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$o(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-2t} \sin \left(2\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3} \right)$$

On peut écrire $o(t)$ en utilisant le cosinus comme suit :

$$o(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-2t} \cos \left(-2\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$o(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-2t} \cos \left(-2\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2 : G_1(s) = \frac{16}{(s+1)(s^2 + 4s + 16)}$$

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ K = 1 \\ \omega_n = 4 \\ \xi = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \omega_a = 4\sqrt{1 - (0.5)^2} = 2\sqrt{3}$$

Décomposition de $o_1(s)$ en élément simple :

$$O_1(s) = G_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3s + A_4}{s^2+4s+16}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{16}{(s+1)(s^2+4s+16)} = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{16}{s(s^2+4s+16)} = -\frac{16}{13}$$

$$\frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{16}{13} \frac{1}{s+1} + \frac{A_3s + A_4}{s^2+4s+16}$$

$$\frac{16}{s(s+1)} = \frac{1}{s}(s^2+4s+16) - \frac{16}{13} \frac{1}{s+1}(s^2+4s+16) + A_3s + A_4$$

Avec l'utilisation de la racine $r_1 = -2 + j 2\sqrt{3}$, on obtient :

$$\frac{16}{(-2+j 2\sqrt{3})(-2+j 2\sqrt{3}+1)} = A_3(-2+j 2\sqrt{3}) + A_4$$

$$\frac{16}{-10-j 6\sqrt{3}} = (-2A_3 + A_4) + j A_3 2\sqrt{3}$$

$$\frac{-160}{208} + j \frac{96\sqrt{3}}{208} = (-2A_3 + A_4) + j A_3 2\sqrt{3}$$

Par superposition :

$$\begin{cases} A_3 2\sqrt{3} = \frac{96\sqrt{3}}{208} \\ -2A_3 + A_4 = \frac{-160}{208} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{48}{208} = \frac{3}{13} \\ A_4 = \frac{-160}{208} + \frac{96}{208} = \frac{-64}{208} = \frac{-4}{13} \end{cases}$$

$$O_1(s) = \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{16}{13} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{13} \frac{3s-4}{s^2+4s+16}$$

On peut écrire le polynôme $s^2 + 4s + 16$ sous la forme $(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2$

$$O_1(s) = \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{16}{13} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{13} \frac{3s-4}{(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2}$$

On utilisant la transformée de Laplace suivante :

$\frac{\theta s + \beta}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$A \cdot e^{-at} \cos(\omega t + \phi)$ Avec : $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{(\theta\omega)^2 + (\beta - a\theta)^2} \\ \phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\beta - a\theta}{\theta\omega} \right) \end{cases}$
---	--

Appliquant cette transformation sur $\frac{1}{13} \frac{3s-4}{(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2}$, on obtient :

$$\frac{1}{13} \frac{3s-4}{(s+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \rightarrow a = 2, \theta = 3, \beta = -4, \omega = 2\sqrt{3}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(3 \times 2\sqrt{3})^2 + (-4 - (2 \times 3))^2} = \frac{\sqrt{208}}{2\sqrt{3}} = 4.1633,$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{(-4 - (2 \times 3))}{(3 \times 2\sqrt{3})} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{-10}{6\sqrt{3}} \right) = -\tan^{-1}(-0.9623) = 0.7662$$

$$(TL^{-1}) \rightarrow \frac{1}{13} \times (4.1633) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t + 0.7662)$$

$$(0.3203) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t + 0.7662)$$

$$o_1(t) = 1 - (1.2308) \cdot e^{-t} + (0.3203) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t + 0.7662)$$

3 : il est clair qu'à l'instant du pic maximale $t_p = \frac{\pi}{\omega_a} = \frac{3.14}{2\sqrt{3}} = 0.907$,

$\left(\frac{16}{13}\right) e^{-t_p} = 0.5$ n'est pas négligeable devant $\left(\frac{1}{13}\right) e^{-2t_p} = 0.0543$, ce qui implique que le système du 2^{ème} ordre n'est pas dominant.

Exemple 2:

Considérons le système du 3^{ème} ordre suivant

$$G_2(s) = \frac{160}{(s+10)(s^2+4s+16)}$$

1- Déterminer sa réponse indicielle à un échelon unitaire

2- Es que le système du 2^{ème} ordre est dominant.

Solution :

$$\begin{cases} E_0 = 1 \\ K = 10 \\ \omega_n = 4 \\ \xi = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \omega_a = 4\sqrt{1 - (0.5)^2} = 2\sqrt{3}$$

Décomposition de $o_1(s)$ en élément simple :

$$O_2(s) = G_1(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{160}{s(s+10)(s^2+4s+16)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+10} + \frac{A_3s+A_4}{s^2+4s+16}$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{160}{s(s+10)(s^2+4s+16)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{160}{(s+10)(s^2+4s+16)} = 1$$

$$A_2 = \lim_{s \rightarrow -10} (s+10) \frac{160}{s(s+10)(s^2+4s+16)} = \lim_{s \rightarrow -10} \frac{160}{s(s^2+4s+16)} = -\frac{160}{760} = -\frac{4}{19}$$

$$\frac{160}{s(s+10)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{19s+19} + \frac{A_3s+A_4}{s^2+4s+16}$$

$$\frac{160}{s(s+10)} = \frac{1}{s}(s^2 + 4s + 16) - \frac{16}{13} \frac{1}{s+1} (s^2 + 4s + 16) + A_3 s + A_4$$

Avec l'utilisation de la racine $r_1 = -2 + j 2\sqrt{3}$, on obtient :

$$\frac{160}{(-2+j 2\sqrt{3})(-2+j 2\sqrt{3}+10)} = A_3(-2 + j 2\sqrt{3}) + A_4$$

$$\frac{160}{-28+j 6\sqrt{3}} = (-2A_3 + A_4) + jA_3 2\sqrt{3}$$

$$\frac{-4480}{1216} - j \frac{1920\sqrt{3}}{1216} = (-2A_3 + A_4) + jA_3 2\sqrt{3}$$

Par superposition :

$$\begin{cases} A_3 2\sqrt{3} = \frac{-1920\sqrt{3}}{1216} \\ -2A_3 + A_4 = \frac{-4480}{1216} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{-960}{1216} = \frac{-15}{19} \\ A_4 = \frac{-4480}{1216} - \frac{1920}{1216} = \frac{-6400}{1216} = \frac{-100}{19} \end{cases}$$

$$O_1(s) = \frac{16}{s(s+1)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{19} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{19} \frac{15s+100}{s^2+4s+16}$$

On peut écrire le polynôme $s^2 + 4s + 16$ sous la forme $(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2$

$$O_2(s) = \frac{16}{s(s+10)(s^2+4s+16)} = \frac{1}{s} - \frac{4}{19} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{19} \frac{15s+100}{(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2}$$

Appliquant la transformation de Laplace inverse sur $\frac{1}{19} \frac{15s+100}{(s+2)^2 + (\sqrt{12})^2}$, on obtient :

$$\frac{1}{13} \frac{15s+100}{(s+2)^2 + (2\sqrt{3})^2} \rightarrow a = 2, \theta = 15, \beta = 100, \omega = 2\sqrt{3}$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(15 \times 2\sqrt{3})^2 + (100 - (2 \times 15))^2} = \frac{\sqrt{7600}}{2\sqrt{3}} = 25.1661,$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{(100 - (2 \times 15))}{(15 \times 2\sqrt{3})} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{70}{30\sqrt{3}} \right) = -\tan^{-1}(1.3472) = -0.9322$$

$$(TL^{-1}) \rightarrow \frac{1}{19} \times (25.1661) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t - 0.9322)$$

$$(1.3245) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t - 0.9322)$$

$$o_2(t) = 1 - (0.21053) \cdot e^{-10t} + (1.3245) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t - 0.9322)$$

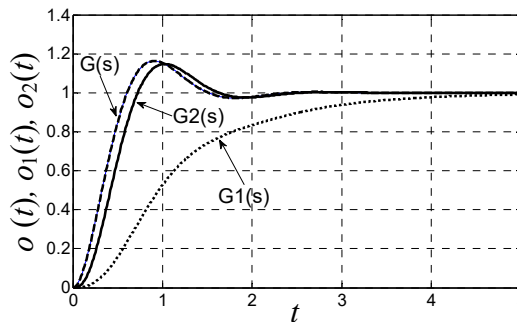
$e^{-10t_p} = 0.00011$ est négligeable devant $e^{-2t_p} = 0.16303$, ce qui implique que le système du 2^{ème} ordre est dominant. Ceci est dû que : $K = 10 \geq 5 \times (\xi \omega_n)$. Ainsi on peut dire aussi

que les racines $\begin{cases} r_1 = -2 + j 2\sqrt{3} \\ r_2 = -2 - j 2\sqrt{3} \end{cases}$ sont les racines dominantes du système.

La réponse du système peut se récrier par :

$$o_2(t) \approx 1 - (1.3245) \cdot e^{-2t} \cos(2\sqrt{3}t - 0.9322)$$

Ce résultat est confirmé par la figure suivante :



3.5 Effet des pôles et zéros sur la réponse d'un système

3.5.1 Définition

Soit un système régi par la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Les pôles : Sont les racines qui annulent le Dénominateur.

Les zéros : Sont les racines qui annulent le Numérateur.

3.5.2 Effet des pôles sur la réponse d'un système

L'effet des pôles sur la réponse d'un système linéaire est fondamental pour comprendre sa dynamique et sa stabilité.

- **Pôles à partie réelle négative :** Système stable (la réponse converge vers une valeur finie).
- **Pôles à partie réelle positive :** Système instable (la réponse diverge).
- **Pôles sur l'axe imaginaire (Pôles imaginaire pur) :** Système marginalement stable (oscillations persistantes, ex: $\sin(\omega t)$).

Exemple : Pour voir l'effet des pôles sur la réponse indicielle face à un échelon unitaire d'un système du 2^{ème} ordre $F(s)$ **stable**, tel que :

$$F(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

Le système possède deux pôles à partie réelle négative (système stable)

$$s^2 + 4s + 16 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 + j 2\sqrt{3} \\ r_2 = -2 - j 2\sqrt{3} \end{cases}$$

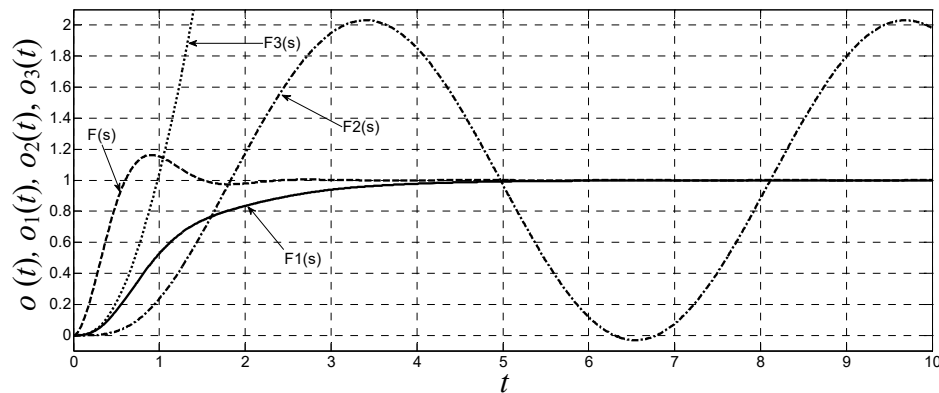
Pour étudier l'effet des pôles sur la réponse du système, on considère les cas suivant :

$$F_1(s) = \frac{16}{(s+1)(s^2+4s+16)}, \text{ Les pôles } (-1, -2 + j 2\sqrt{3}, -2 - j 2\sqrt{3})$$

$$F_2(s) = \frac{16}{(s^2+1)(s^2+4s+16)}, \text{ Les pôles } (-j, +j, -2 + j 2\sqrt{3}, -2 - j 2\sqrt{3})$$

$$F_3(s) = \frac{16}{(s-1)(s^2+4s+16)} \text{ Les pôles } (1, -2 + j 2\sqrt{3}, -2 - j 2\sqrt{3})$$

Les réponses indicielles des 4 systèmes $F(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ et $F_3(s)$ sont montrée dans la figure suivantes :



On remarque que :

- 1- La réponse des systèmes $F(s)$ et $F_1(s)$ **convergent vers la valeur 1** en régime permanent, car ces systèmes possèdent tous les pôles à partie réelle négatives (système stable).
- 2- La réponse du système $F_2(s)$ présente **une réponse oscillatoire** (sinusoïdale), car le système contient des pôles imaginaires purs (Système marginalement stable).
- 3- La réponse du système $F_3(s)$ présente **une réponse divergente vers l'infinie**, car le système contient des pôles à partie réelle positives (Système instable).

3.5.2 Effet des zéros

Pour mesurer l'effet des zéros sur le régime transitoire de la réponse d'un système, on va considérer l'ajout, à un système du 2^{ème} ordre $F(s)$, d'un zéros dans trois positions possibles.

$$F(s) = \frac{16}{s^2 + 4s + 16}$$

$$\text{Le système possède deux pôles } s^2 + 4s + 16 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 + j 2\sqrt{3} \\ r_2 = -2 - j 2\sqrt{3} \end{cases}$$

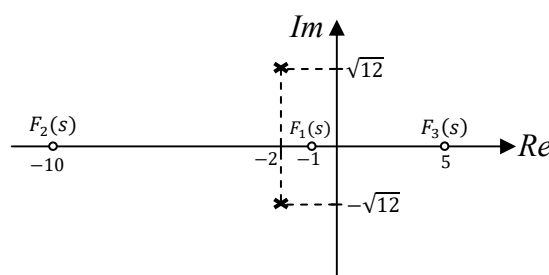
Pour étudier l'effet des zéros sur la réponse, on considère les cas suivant :

$$F_1(s) = \frac{16(s+1)}{s^2 + 4s + 16}$$

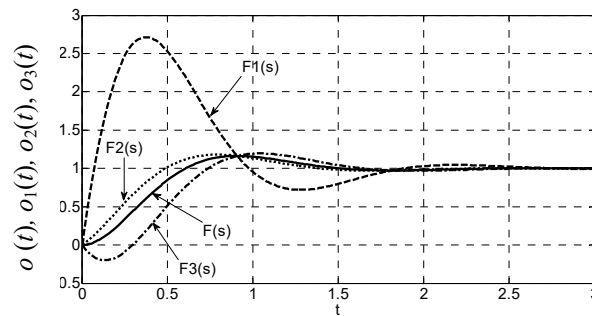
$$F_2(s) = \frac{16(s+10)}{s^2 + 4s + 16}$$

$$F_3(s) = \frac{16(-s+5)}{s^2 + 4s + 16}$$

La position des zéros ajouté dans chaque cas est montrée su la figure suivante



Les réponses indicielles des systèmes $F(s)$, $F_1(s)$, $F_2(s)$ et $F_3(s)$ sont tracées sur la figure suivante :



Remarquons que :

- 1 : L'ajout d'un zéros (-1) ($F_1(s)$) proche de la partie réelle des pôles (-2) → modifié largement la réponse du système et un grand dépassement.**
- 2 : L'ajout d'un zéros (-10) ($F_2(s)$) très éloigné de la partie réelle des pôles (-2) → modifié peut la réponse du système.**
- 3 : L'ajout d'un zéros positif (5) ($F_3(s)$) → un recule initiale dans la réponse du système et dépassement remarqué.** Ce type de système est dit à déphasage minimale.