

Solution du problème 1. Régulation de la température d'un four.

8.7 a) La fonction de transfert en boucle ouverte s'obtient aisément à partir de l'équation différentielle de fonctionnement du four en lui appliquant la transformation de Laplace.

$$\frac{d\theta}{dt} + 2000 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0,02 \cdot v(t) \Rightarrow p\Theta(p) + 2000p^2\Theta(p) = 0,02V(p)$$

d'où :

$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{V(p)} = \frac{0,02}{p(1 + 2000p)}$$

Si on alimentait le four en boucle ouverte à l'aide d'une tension continue (signal d'entrée en échelon), on aurait :

$$\Theta(p) = \frac{0,02}{p(1 + 2000p)} \cdot \frac{V_0}{p} = \frac{0,02V_0}{p^2(1 + 2000p)}$$

Si on applique le théorème de la valeur finale, on montre que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\Theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{0,02V_0}{p(1 + 2000p)} \rightarrow \infty$$

Il est donc impossible de stabiliser la température du four en boucle ouverte.

b) Si on suppose malgré tout qu'on alimente le four en plaçant à son entrée un signal en échelon de 100 V, on aura :

$$\Theta(p) = \frac{2}{p^2(1 + 2000p)} \Rightarrow \theta(t) = 2t + 4000e^{-\frac{t}{2000}} - 4000$$

On atteint alors 1200 °C au bout d'un temps t_1 tel que :

$$1200 = 2t_1 + 4000e^{-\frac{t_1}{2000}} - 4000$$

En résolvant numériquement cette équation, on obtient :

$$t_1 \approx 1778 \text{ s} \approx 30 \text{ mn}$$

c) La fonction de transfert du capteur est obtenue à partir de son équation :

$$u(t) + 2 \frac{du}{dt} = 5 \cdot 10^{-3} \theta(t) \Rightarrow U(p) + 2pU(p) = 5 \cdot 10^{-3} \Theta(p)$$

d'où :

$$B(p) = \frac{U(p)}{\Theta(p)} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 2p}$$

La figure 8.13 présente l'ensemble de la boucle de régulation dans laquelle on a introduit également un gain K .

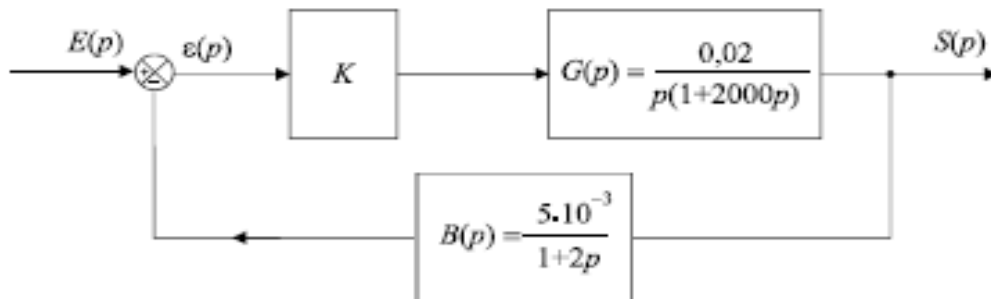


Figure 8.13 Schéma fonctionnel de la boucle de régulation.

La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)B(p)} = \frac{\frac{0,02K}{p(1 + 2000p)}}{1 + \frac{0,02K}{p(1 + 2000p)} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 2p}}$$

soit :

$$H(p) = \frac{0,02K(1+2p)}{p(1+2p)(1+2000p)+10^{-4}K} = \frac{0,02K(1+2p)}{4000p^3+2002p^2+p+10^{-4}K}$$

Les conditions de stabilité en boucle fermée nous sont données par le critère de Routh :

$$\begin{array}{ccc} 4000 & 1 & 0 \\ 2002 & 10^{-4}K & 0 \\ \frac{2002-0,4K}{2002} & 0 & 0 \\ 10^{-4}K & 0 & 0 \end{array}$$

Le système est stable si et seulement si :

$$2002 - 0,4K > 0 \Rightarrow K < 5005$$

d) La fonction de transfert en boucle ouverte a pour expression :

$$KG(p)B(p) = \frac{10^{-4}K}{p(1+2000p)(1+2p)}$$

Si on impose une marge de phase de 45° , on a :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{co} - \arctan 2\omega_{co} = \frac{\pi}{4}$$

En négligeant le dernier terme, on obtient : $\omega_{co} = \frac{1}{2000} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$

d'où :

$$t_n = \frac{3}{\omega_{co}} = \frac{3}{5 \cdot 10^{-4}} = 6000 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ mn}$$

e) Pour déterminer la valeur du signal de consigne, il convient de calculer la valeur du signal délivré par le capteur lorsque la température atteint 1200°C : en régime permanent, le capteur se comporte comme un gain de $5 \cdot 10^{-3} \text{ V}/^\circ\text{C}$.

Par conséquent :

$$\theta = 1200^\circ\text{C} \Rightarrow u = 6 \text{ V}$$

Comme la chaîne directe comporte un intégrateur, l'erreur statique sera nulle. Le système ne peut donc se stabiliser à 1200°C que si le signal d'entrée est un échelon de hauteur 6 V.

Si le système est réglé pour obtenir une marge de phase de 45° , la réponse du système, en boucle fermée, sera caractérisée par un facteur d'amortissement égal à 0,45. D'après les abaques des réponses indicielles, cela correspond à un dépassement de 20 %. La température maximale atteinte dans le four (temporairement) est donc égale à 1440°C .

Ce dépassement est bien évidemment trop important puisque les objets à cuire ne peuvent être soumis à des températures dépassant 1400°C .

f) Si on souhaite limiter le dépassement à 10 %, nous devons régler le système de sorte qu'il présente une marge de phase de 60° . Cette marge de phase correspond à une pulsation ω_{co} telle que :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2000\omega_{co} - \arctan 2\omega_{co} = \frac{\pi}{3}$$

soit :

$$\arctan 2000\omega_{co} \approx \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_{co} \approx \frac{\tan \pi/6}{2000} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Par conséquent :

$$t_n \approx \frac{3}{\omega_{co}} \approx 3 \text{ h } 10 \text{ mn}$$

Dans ces conditions, chaque traitement durera 4 heures et 50 minutes (temps de montée en température ajouté à une heure de cuisson et à 24 minutes de manutention et refroidissement). On ne pourra donc en réaliser que 5 par 24 heures. Le nombre maximum d'objets que l'on pourra traiter par jour est donc limité à 50.

g) Pour atteindre une cadence de 100 objets par jour, il est nécessaire de réduire à 2 h 24 mn la durée d'une opération. La cuisson d'une heure et le temps de manutention étant incompressibles, la seule marge de manoeuvre se situe au niveau du réglage du temps de montée qui doit donc être égal à 1 heure.

$$\text{On a donc :} \quad t_m = 3\,600 \text{ s} \Rightarrow \omega_{co} \approx \frac{3}{t_m} = 0,675 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

Il faut donc régler le gain K de manière à caler la pulsation de coupure à 0 dB sur cette valeur.

$$\text{Soit :} \quad KG(\omega_{co})B(\omega_{co}) = \frac{10^{-4}K}{\omega_{co}\sqrt{1+4 \cdot 10^6\omega_{co}^2}\sqrt{1+4\omega_{co}^2}} = 1$$

$$\text{d'où :} \quad K = 10^4 \omega_{co} \sqrt{1+4 \cdot 10^6\omega_{co}^2} \sqrt{1+4\omega_{co}^2} = 11,3$$

La marge de phase vaut alors :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan 2\,000\omega_{co} - \arctan 2\omega_{co} = 36^\circ$$

Pour avoir un dépassement limité à 10 % tout en conservant la cadence imposée, il faut introduire un correcteur à avance de phase qui permette d'obtenir, à la pulsation ω_{co} , une remontée de phase de 24° .

$$\text{On a donc :} \quad C(p) = \frac{1+aTp}{1+Tp}$$

$$\text{avec :} \quad \varphi_{\max} = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 24^\circ \Rightarrow a = 2,37$$

$$\text{et :} \quad \omega_{\max} = \omega_{co} = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_{co}\sqrt{a}} = 962 \text{ s}$$

$$\text{d'où :} \quad C(p) = \frac{1+2\,280p}{1+962p}$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 1.

1- Soit la F.T : $G(p) = \frac{5}{(\frac{p}{100} + 1)^3}$ placée dans une boucle de régulation à retour unitaire.

Déterminer la marge de gain et la marge de phase.

2- Déterminer la marge de gain et la marge de phase pour un système dont la FTBO est donnée par :

$$GH(p) = \frac{22.8}{(p+1)(p+2)(p+3)}. \quad (\text{Indication : Utiliser le plan de Nyquist}).$$

Exercice 2

Soit un SALC à retour unitaire dont la FTBO est donnée par :

$$T(p) = \frac{1}{p(1+\tau p)}$$

1. Tracer l'allure des diagrammes de Bode et de Black de T(p)

2. Déterminer la correction proportionnelle permettant d'obtenir une marge de phase : $M\phi=60^\circ$.

Exercice 3.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{(p+1)(p+8)^2}$$

Déterminer les conditions de stabilité de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.

Pour annuler l'erreur statique, on introduit un intégrateur dans la chaîne directe. Déterminer les nouvelles conditions de stabilité et conclure.

Exercice4.

Soit le système suivant :



$$\text{Où } G(p) = \frac{(p+5)}{p(p+6)(p+7)(p+8)}$$

1-Trouver la valeur de K qui permet d'obtenir une erreur de trainage de 10%.

2- Vérifier ensuite la stabilité du système en utilisant le critère de Routh.

Exercice 5.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{K}{p(p+10)^2} \text{ avec } K > 0$$

Déterminer la valeur de K qui permet d'obtenir une pulsation de coupure à 0 dB égale à :

$$\omega_{c0} = 20 \text{ rad/s}$$

Déterminer la valeur de la marge de phase pour cette valeur de K .

Solution

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 100)} = 1 \text{ avec } K > 0$$

Par conséquent :

$$K = \omega_{c0}(\omega_{c0}^2 + 100) = 10^4$$

Par ailleurs :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 10)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{10}$$

On a donc :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{20}{10} = -0,64 \text{ rad}$$

La marge de phase étant négative, le système est instable. Il est donc impossible de régler K de manière à obtenir $\omega_{c0} = 20 \text{ rad/s}$ tout en assurant la stabilité du système.