

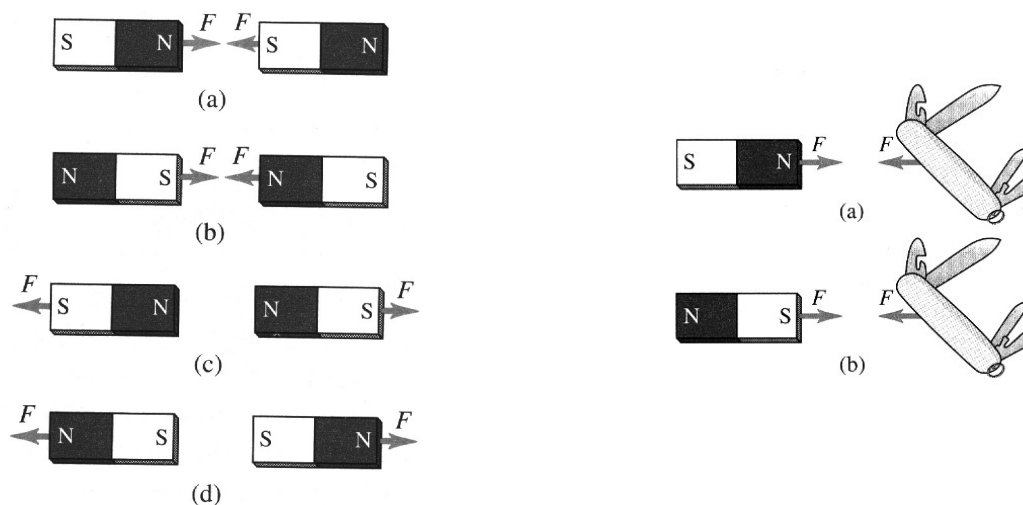
II. MAGNETOSTATIQUE DANS LE VIDE

Comme le nom du chapitre l'indique, nous allons étudier l'ensemble des phénomènes magnétiques tout d'abord en absence de matière (dans le vide) et en ne considérant que les champs magnétiques ne variant pas dans le temps, c'est-à-dire constant.

1. Notions fondamentales de base

1.1 Introduction historique

Le phénomène du magnétisme a été observé et étudié dès l'antiquité par les Grecs, plus spécialement par Thalès de Milet vers l'an -600. Il tire son nom d'une contrée de l'Asie Mineure, la Magnésie, et d'une ville appelée de nos jours Manisa sur la côte Ouest de la Turquie actuelle. Cette région contenait des gisements d'un minerai (la magnétite) possédant des propriétés spéciales. En effet, il a été observé d'une part que 2 morceaux de minerai pouvaient exercer des forces d'attraction et de répulsion l'un sur l'autre et, d'autre part, qu'ils pouvaient transmettre leur propriété à des morceaux de fer placés à proximité.



D'autre part, au début du 19^{ème} siècle, le physicien danois Hans Christian Oersted (1777-1851) découvrit qu'un fil parcouru par un courant électrique présentait les mêmes propriétés magnétiques que les aimants naturels, à savoir générait un champ magnétique similaire à celui produit par un aimant naturel.

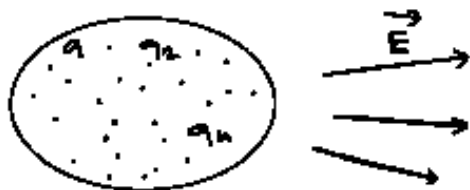
De nos jours, il est généralement reconnu que tous les phénomènes magnétiques observés sont dus à 2 causes ; à savoir :

- 1) au mouvement de charges électriques (courant)
- 2) à certaines propriétés intrinsèques de la matière (magnétisation)

1.2 Champ magnétique

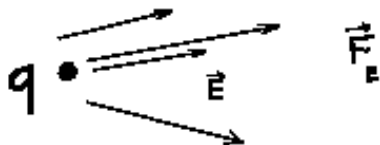
Pour introduire le concept de champ magnétique, pensons à l'interaction électrique où nous avons introduit le concept de champ électrique. Nous avons procédé en 2 phases :

1)



une distribution de charges électriques q_i au repos crée un champ électrique $\vec{E}$ dans son espace avoisinant.

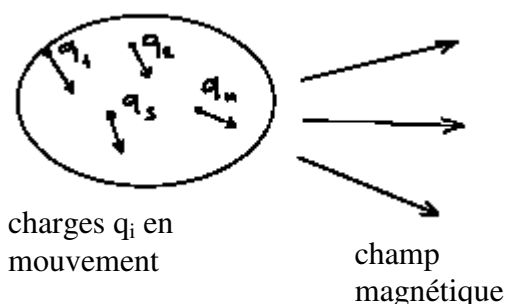
2)



le champ électrique $\vec{E}$ exerce sur une charge électrique extérieure q une force déterminée par $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$ [N]

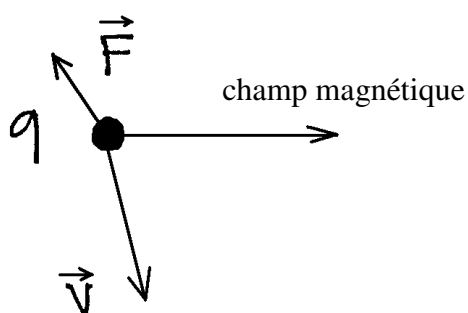
Nous pouvons alors, par analogie, introduire le concept d'interaction magnétique de la façon suivante :

1)



une charge ou une distribution de charges électriques en mouvement crée dans son espace avoisinant un champ dit « magnétique ».

2)



ce champ magnétique exerce sur une charge électrique extérieure q en mouvement une force $\vec{F}$ (ou sur un courant puisqu'un courant n'est rien d'autre qu'un ensemble de charges en mouvement).

Tout comme le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique est aussi un champ vectoriel. Ce champ vectoriel est symbolisé par la lettre $\vec{B}$ et appelé plus précisément :

$$\vec{B} = \text{champ d'induction magnétique}$$

ses unités :

$$[\vec{B}] = T = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{V \cdot s}{m^2} \quad (II-1)$$

T est l'abréviation de tesla en souvenir de l'ingénieur scientifique génial serbo-américain que fut Nikola Tesla (1857-1943) qui a émigré aux USA vers 1880 !

2. Champ d'induction magnétique $\vec{B}$ et forces

2.1 Définition du champ d'induction magnétique $\vec{B}$

Soit une charge ou une distribution de charges électriques en mouvement. En plus du champ électrique $\vec{E}$, un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est créé par ces charges en mouvement.

Une charge électrique extérieure test q va subir de la part de $\vec{B}$ une force magnétique :

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad [N]$$

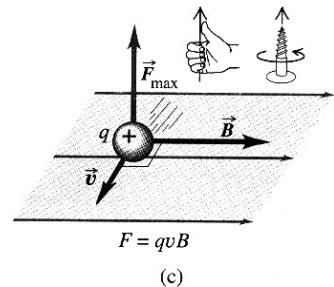
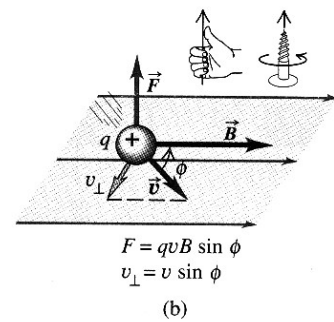
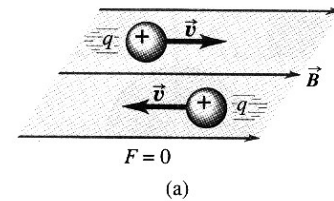
(II-2)

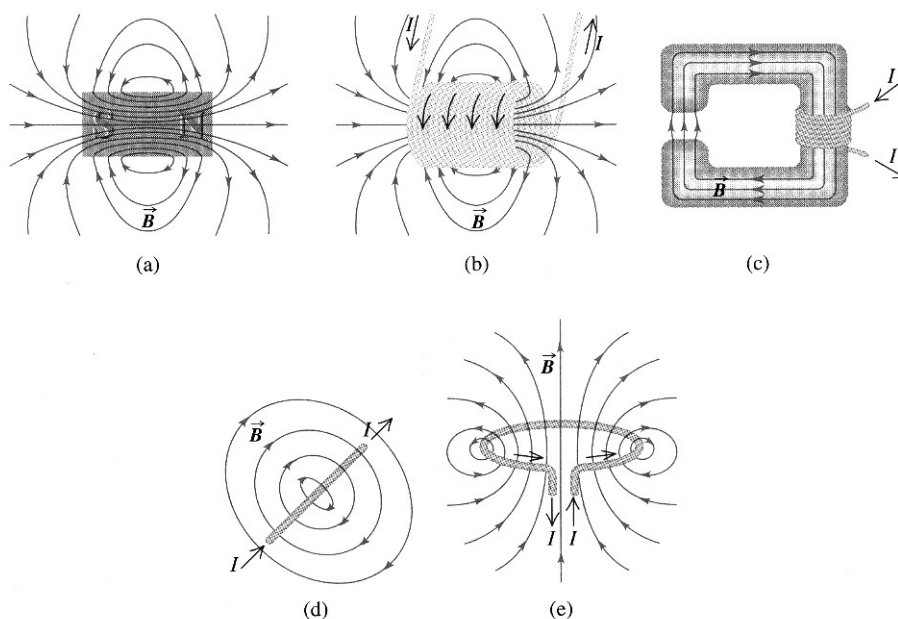
Le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ (aussi dit densité de flux magnétique) est défini à travers la relation (II-2). A noter que cette relation n'est pas déduite théoriquement, mais est basée sur des observations expérimentales.

La combinaison du champ électrique $\vec{E}$ et du champ d'induction magnétique $\vec{B}$ permet de définir un nouveau champ dit champ électromagnétique, d'où le nom de théorie de l'électromagnétisme ou électromagnétique.

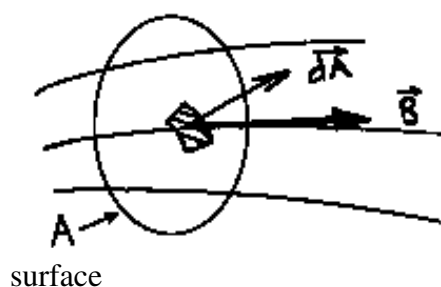
2.2 Lignes de champ magnétique et flux magnétique

Tout comme dans le cas du champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$ peut être géométriquement représenté par des lignes de champ magnétique. Les lignes de champ sont ainsi des courbes dans l'espace dessinées de telle sorte qu'en chaque point de l'espace, la courbe soit tangente au vecteur champ d'induction magnétique $\vec{B}$.





Soit une surface A non fermée traversée par un champ $\vec{B}$.



On appelle flux magnétique élémentaire la grandeur

scalaire : $d\Phi = (\vec{B} \cdot d\vec{A}) \quad \left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{s} \right]$

Le flux total à travers toute la surface A non fermée sur elle-même est alors :

Flux magnétique :

$$\Phi = \iint_A (\vec{B} \cdot d\vec{A}) \quad [\text{V} \cdot \text{s}] \quad (\text{II-3})$$

l'unité de Φ , volt · seconde, est dite aussi le Weber abrégé Wb.

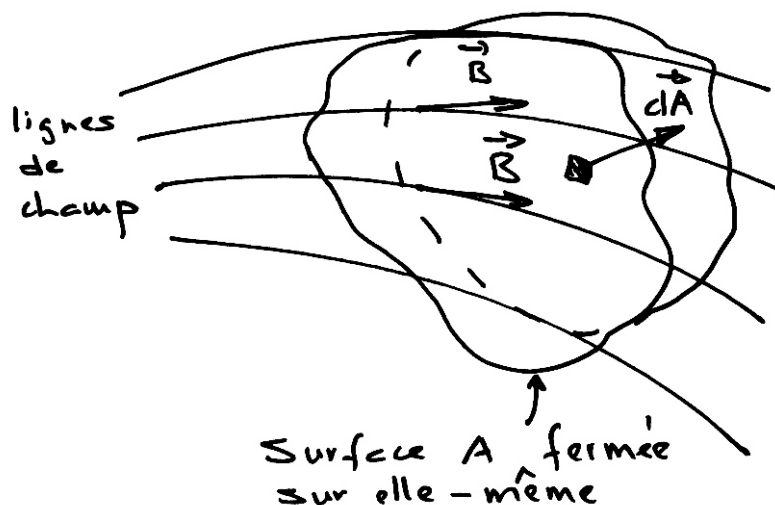
$$[\Phi] = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ V} \cdot \text{s} = 1 \text{ Wb} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{A}}$$

en l'honneur du physicien allemand Wilhelm Weber (1804-1891).

De par l'équation (II-3), on comprend pourquoi le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est aussi appelé champ de densité de flux magnétique.

2.3 Loi de Gauss du magnétisme

Considérons une surface A fermée (c'est-à-dire comprenant un volume comme par exemple un ballon) plongée dans un champ $\vec{B}$.



La loi de Gauss du magnétisme s'exprime par :

$$\Phi = \oint_A (\vec{B} \cdot d\vec{A}) = 0 \quad [\text{V} \cdot \text{s}] \quad (\text{II-4})$$

Le flux magnétique net traversant une surface fermée est nul. Ceci traduit le fait que contrairement au cas électrique où il existe évidemment des « monopôles » électriques (c'est ce que l'on appelle les charges), il n'y a pas de monopôle magnétique. De plus, contrairement aux lignes de champ électrique qui peuvent aboutir en un point (sur une charge électrique par exemple), les lignes de champ magnétique ne peuvent pas se concentrer en un point de l'espace, ce qui indiquerait la présence d'un monopôle magnétique.

2.4 Force de Lorentz et mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique $\vec{B}$

Soit une charge électrique q en mouvement dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ d'induction $\vec{B}$.

Nous savons que : $\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}$ [N] force électrique

$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ [N] force magnétique



Donc la force totale $\vec{F}$ due aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ agissant sur q est :

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

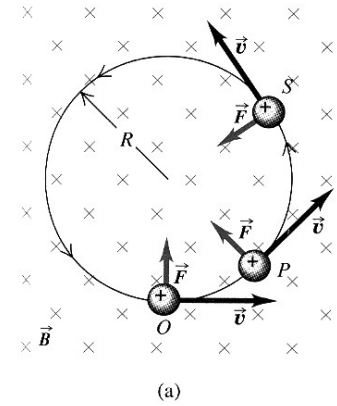
$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [\text{N}] \quad (\text{II-5})$$

$\vec{F}$ est dite force de Lorentz, en hommage au physicien néerlandais Hendrik Artoon Lorentz (1853-1928).

Considérons une particule de masse m , de charge électrique q , placée dans un champ $\vec{B}$ constant, de vitesse $\vec{v}$ parallèle à $\vec{B}$ et dont $|\vec{v}|$ constante.

par l'équation (II-5) :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



Comme $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, $\vec{F}$ est un vecteur contenu dans le plan et toujours perpendiculaire à $\vec{v}$. Il s'agit d'une force centripète :

$$F = |q| \cdot v \times B = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v^2}{R}$$

d'où :

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B} \quad [\text{m}]$$

qui équivaut au rayon du cercle de la trajectoire circulaire.

L'impulsion (ou la quantité de mouvement) de la particule vaut :

$$p = m \cdot v \quad [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$$

d'où :

$$R = \frac{p}{|q| \cdot B} \quad [\text{m}] \quad (\text{II-6})$$

La trajectoire de la particule est donc un cercle de rayon R .

La vitesse angulaire :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v}{\frac{m \cdot v}{|q| \cdot B}} = \frac{|q| \cdot B}{m} \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

d'où, la fréquence cyclotronique :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q| \cdot B}{2\pi \cdot m} \quad [\text{Hz}]$$

L'idée de faire effectuer des trajectoires circulaires à des particules chargées est à la base de la technologie des accélérateurs cyclotron. Pour accroître l'énergie des particules, un champ $\vec{E}$ est superposé au champ $\vec{B}$ et c'est la force électrique $\vec{F}_E$ qui accroît la vitesse $|\vec{v}|$.

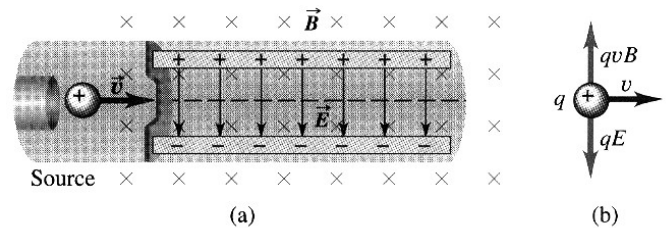
2.5 Applications du mouvement de particules chargées

Nous allons décrire brièvement 4 applications du principe introduit dans le paragraphe précédent :

- A. Sélecteur de vitesse
- B. Expérience de Thomson (e/m)
- C. Spectromètre de masse
- D. Cyclotron

A. Sélecteur de vitesse

Soit à gauche de la figure une source de particules chargées ayant des vitesses différentes. Seules les charges ayant une vitesse v bien particulière seront recueillies à droite.



Pour ces particules :

$$F_E = q \cdot E = F_B = q \cdot v \cdot B$$

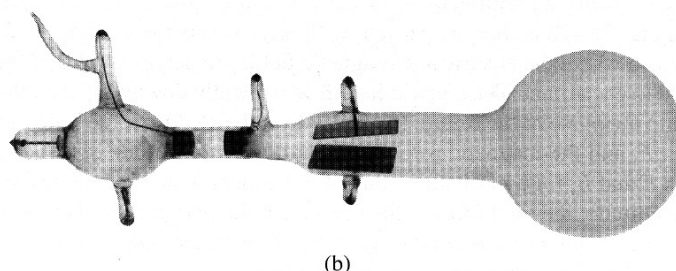
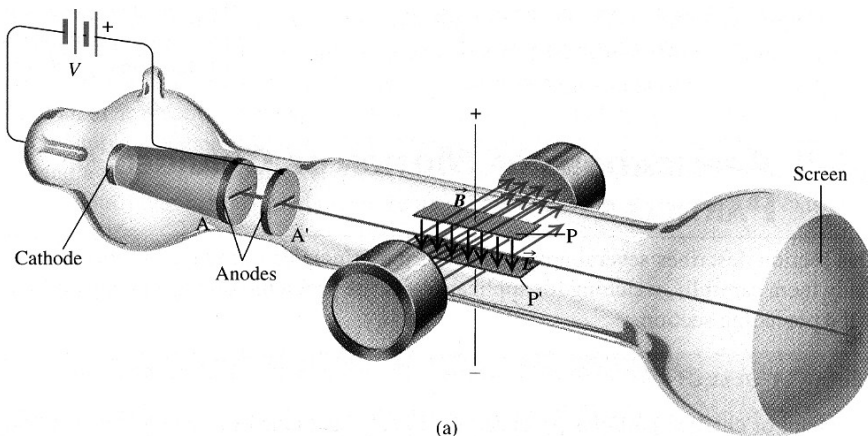
d'où :

$$v = \frac{E}{B} \quad [\text{m / s}]$$

B. Expérience de Thomson : détermination du rapport e / m

Sir Joseph John Thomson (1856-1940); à ne pas confondre avec :

- son fils sir George Paget Thomson (1892-1975) et
- sir William Thomson (1824-1907) dit Lord Kelvin



Cette expérience fondamentale en physique a consisté à déterminer le rapport $\left(\frac{e}{m}\right)$ dit « charge spécifique de l'électron ». Réalisée en 1897 au Cavendish laboratory, Cambridge, UK.

énergie : $\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot V$ d'où : $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ [m / s]

vitesse : $v = \frac{E}{B}$ (voir sélecteur de vitesse)

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

donc : $\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2VB^2} = 1.75881962 \cdot 10^{11}$ [C / kg]

V étant le potentiel électrique en volt.

Quinze ans après l'expérience de Thomson, le physicien américain Robert Millikan (1868-1953) mesure, en 1911, la charge électrique de l'électron, soit :

$$e = -1.60217733 \cdot 10^{-19} \text{ [C = As]}$$

d'où : $m = 9.1093897 \cdot 10^{-31} \text{ [kg]}$

A partir de cette date, l'électron est une particule élémentaire parfaitement identifiée.

C. Spectromètre de masse

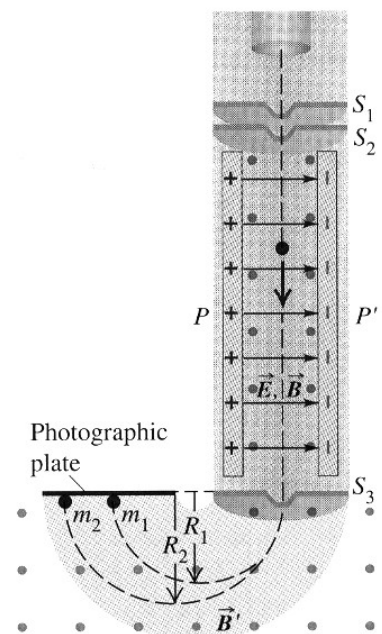
En 1919, Francis Aston (1877-1945), un étudiant de Sir Thomson à Cambridge, construisit la première famille de spectromètre de masse. Il s'agit d'un appareil pouvant sélectionner des particules chargées de masses différentes.

v : vitesse connue [m / s]

$$R_1 = \frac{m_1 \cdot v}{q \cdot B'} \text{ [m]}$$

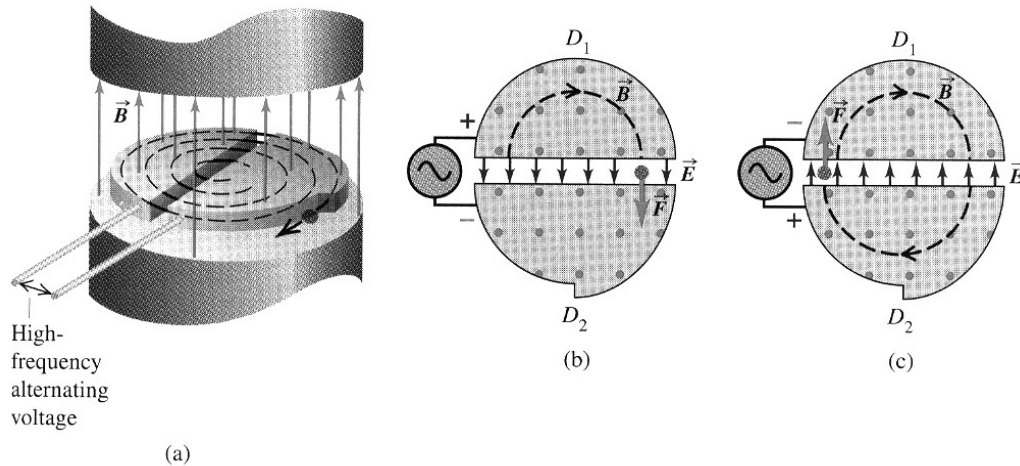
$$R_2 = \frac{m_2 \cdot v}{q \cdot B'} \text{ [m]}$$

donc des charges de masse différente seront récoltées à des endroits différents. La précision actuelle d'un tel appareil est de 1 partie sur 10000 !



D. Accélérateur cyclotron

Il s'agit d'une superposition du champ électrique $\vec{E}$ pour accélérer les particules chargées (électrons ou protons) et d'un champ $\vec{B}$ pour obtenir des trajectoires circulaires de ces particules. Inventé par Ernest O. Lawrence (1901-1958) en 1932 à Berkeley, USA.



$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| \text{ augmente puisque il y a accélération}$$

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \text{trajectoire circulaire}$$

Le temps de passage T (période) dans la cavité reste constant (période cyclotronique) :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi \cdot m}{|q| \cdot B} \quad [\text{s}]$$

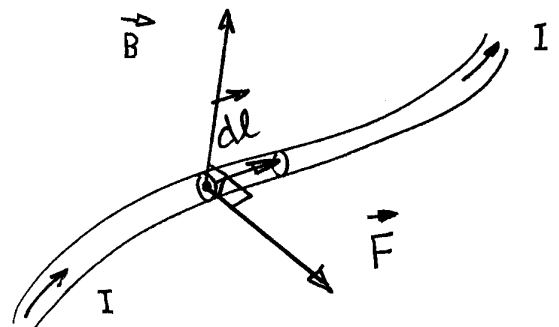
et ne dépend pas de la vitesse.

Ce processus successif d'accélération et de courbure se poursuit jusqu'à ce que la particule se fasse dévier à la périphérie de l'accélérateur. Suite de quoi elle est éjectée tangentiellement à l'accélérateur avec une énergie cinétique maximum de :

$$E_c^{\max} = \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} \quad [\text{J}]$$

2.6 Force magnétique agissant sur un courant, loi de Laplace

Soit un conducteur parcouru par un courant I constant plongé dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ extérieur. Comme le courant I n'est rien d'autre qu'un déplacement de charges à l'intérieur du conducteur, de par la force de Lorentz le conducteur lui-même va subir une force due à la présence du champ $\vec{B}$.



La force élémentaire sur un élément $d\vec{l}$ est :

Loi de Laplace :
$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \quad [\text{N}] \quad (\text{II-7})$$

où la croix $\times$ signifie « produit vectoriel ».

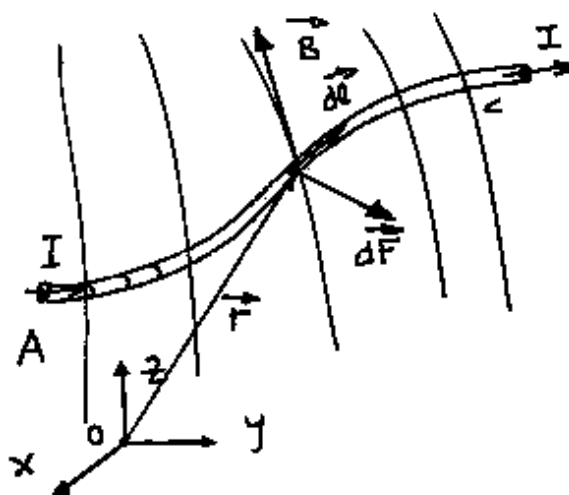
Il s'agit de la force résultante exercée par $\vec{B}$ sur l'ensemble des porteurs de charges électriques en mouvement dans le conducteur $d\vec{l}$.

Force magnétique sur un conducteur de forme quelconque :

Appliquons (II-7) sur un conducteur de forme quelconque parcouru par un courant électrique I . Si $\vec{B}$ varie dans l'espace, il faut alors connaître ses composantes :

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} B_x(x, y, z) \\ B_y(x, y, z) \\ B_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

De même il faut connaître les équations paramétriques donnant la forme du conducteur dans l'espace



$$\vec{F} = \int_A^C d\vec{F} = \int_A^C I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} \quad [\text{N}]$$

L'intégration peut s'avérer compliquée si $\vec{v}$ et $\vec{B}$ varient de façon compliquée dans l'espace.

Cas où le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ est constant :

Dans le cas où $\vec{B}$ ne varie pas dans l'espace (c'est-à-dire $\vec{B}$ est le même en chaque point (x, y, z)) alors :

$$\vec{F} = \int_A^C I \cdot d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\int_A^C d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \cdot \overrightarrow{AC} \times \vec{B}$$

si le champ $\vec{B}$ est uniforme, la force est la même que celle d'un conducteur rectiligne joignant les extrémités du conducteur de forme quelconque :

$$\vec{F} = I \cdot \overrightarrow{AC} \times \vec{B} \quad [\text{N}] \quad (\text{II-8})$$

Conducteur rectiligne dans un champ $\vec{B}$ uniforme :

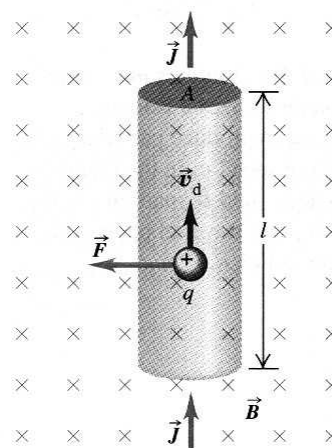
C'est le cas le plus simple mais aussi le plus réaliste car souvent les conducteurs électriques dans la pratique sont rectilignes.

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \quad [\text{N}] \quad (\text{II-9})$$

La force magnétique est donc perpendiculaire à $\vec{l}$ et à $\vec{B}$.

Si le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{l}$, on a simplement :

$$F = I \cdot l \cdot B \quad [\text{N}] \quad (\text{II-9}')$$



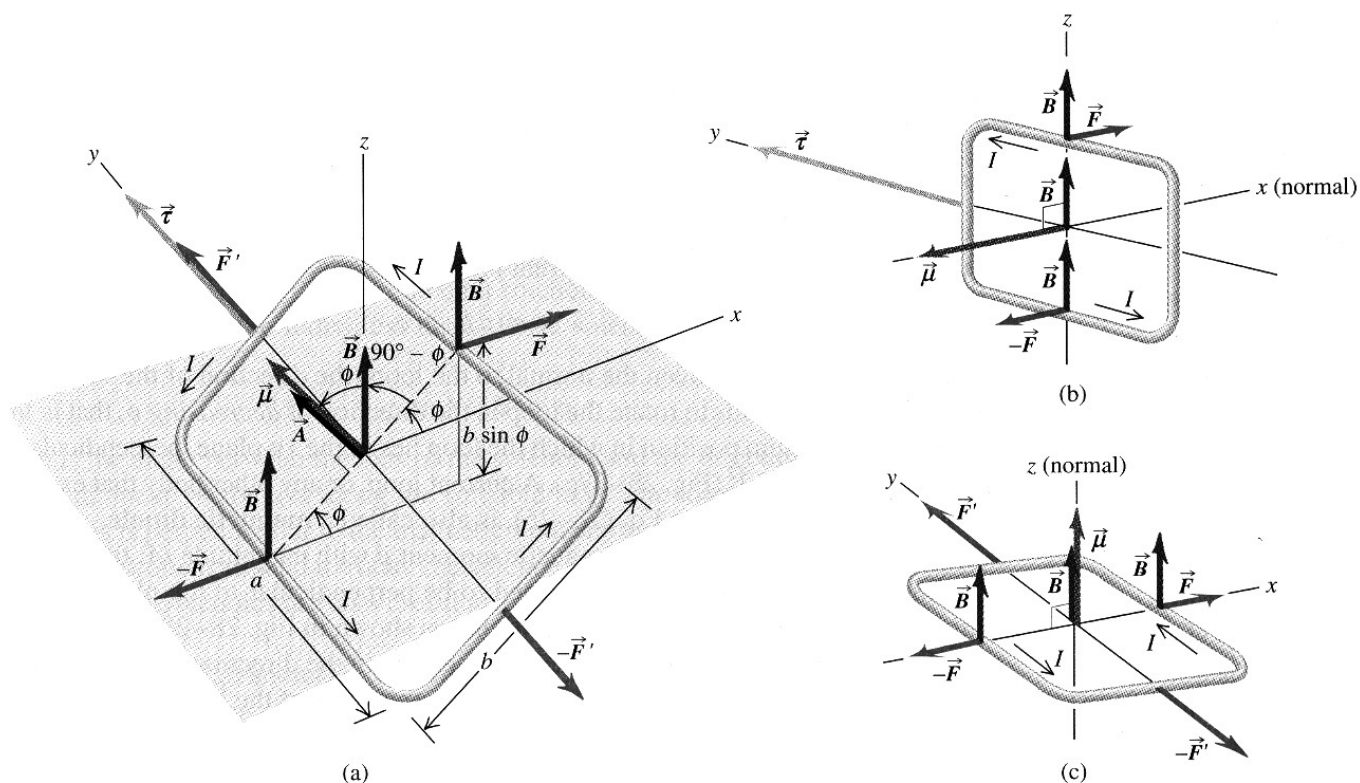
2.7 Deux applications de forces magnétiques

Nous allons considérer 2 applications directes de forces magnétiques :

- Boucle conductrice en forme de cadre
- Le moteur à courant continu

Application 1 : Boucle conductrice cadre dans un champ magnétique

Considérons la boucle ci-dessous dans un champ $\vec{B}$:



La boucle est parcourue par un courant I et le champ $\vec{B}$ est uniforme.

De la figure :

$$F = I \cdot a \cdot B$$

$$F' = I \cdot b \cdot B \cdot \cos \Phi$$

$$\vec{F} = \vec{F} + (-\vec{F}) + \vec{F}' + (-\vec{F}') \equiv \vec{0}$$

La force totale agissant sur le cadre est nulle. Par contre, calculons le couple $\vec{\tau}$ (moment de force) exercé par les forces magnétiques sur le cadre :

$$\tau = I \cdot ab \cdot B \cdot \sin \Phi = I \cdot AB \sin \Phi \quad [\text{N} \cdot \text{m}]$$

Définition :

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{A} \quad [\text{A} \cdot \text{m}^2]$$

est dit le moment magnétique ou le moment dipolaire magnétique de la boucle-cadre de surface A.

La boucle de courant (ou tout autre objet) sur laquelle est exercée un moment de force magnétique est dite « dipôle magnétique » par analogie au dipôle électrique.

Sous forme vectorielle :

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad [\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}] \quad (\text{II-10})$$

L'énergie potentielle du dipôle magnétique est :

$$U = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad [\text{N} \cdot \text{m} = \text{J}] \quad (\text{II-11})$$

Rappelons que dans le cas électrique, nous avons obtenu des résultats analogues :

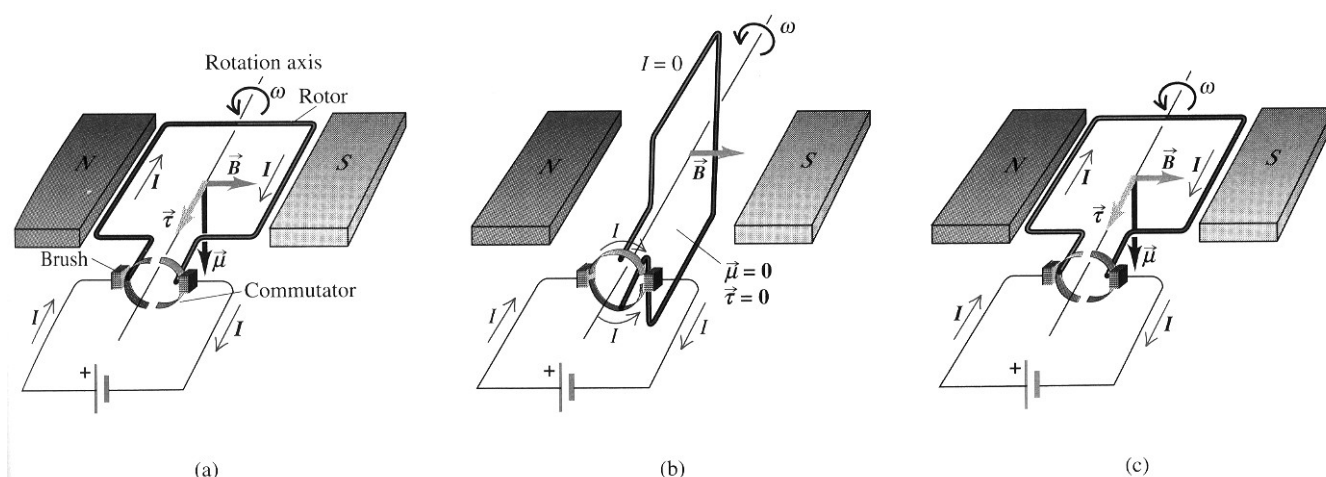
- $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{E} \quad [\text{J}]$ avec $\vec{\mu} = q \cdot \vec{d} \quad [\text{As} \cdot \text{m}]$ le moment dipolaire électrique.
- $U = -(\vec{\mu} \cdot \vec{E}) \quad [\text{J}]$

Donc en résumé, la boucle parcourue par I et plongée dans un champ d'induction $\vec{B}$ uniforme subira de la part de ce champ une force totale nulle d'une part et un moment de force magnétique non nul dont l'effet va engendrer une rotation du cadre autour d'un axe (y dans la figure).

Application : galvanomètre permettant la mesure pratique d'un faible courant électrique I.

Application 2 : Principe du moteur à courant continu

Considérons les figures ci-dessous :



La spire, alimentée par une source de tension continue, est parcourue par un courant I . Cette spire est placée dans un champ d'induction magnétique extérieur $\vec{B}$ produit par un aimant permanent ou par des bobines. La spire placée sur un support mécanique possédant un axe de rotation va subir un moment de force magnétique, donc se mettre à tourner.

Dans la pratique, il n'y a pas seulement une spire, mais un ensemble de spires constituant le rotor. L'aimant, ou les bobines fixes, générant le champ $\vec{B}$ dans lequel baigne le rotor, est appelé stator.

3. Loi d'Ampère et applications

Jusqu'à ce point, nous avons étudié l'effet des champs d'induction magnétique sur des courants électriques, mais nous n'avons pas dit comment il est possible de déterminer la valeur du champ $\vec{B}$ produit par les courants. Il y a 2 approches possibles :

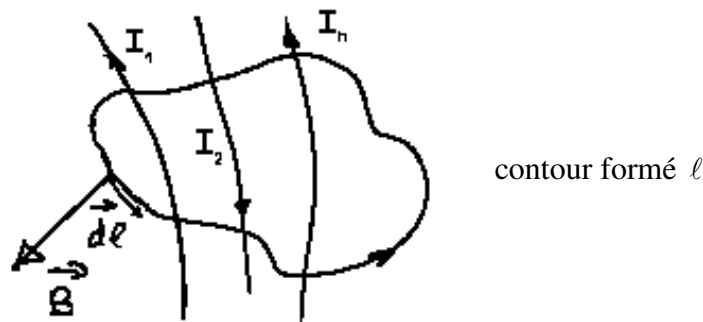
- par la loi d'Ampère (la plus simple)
- plus généralement par la loi de Biot-Savart (plus compliquée, mais plus générale).

Nous allons tout d'abord considérer la loi d'Ampère puis dans le paragraphe suivant la loi de Biot-Savart.

3.1 Loi (ou théorème) d'Ampère

André Marie Ampère (1775-1836), physicien français, est impressionné par les travaux de Hans Christian Oersted. Il reprend en 1826 l'étude de l'action d'un courant électrique sur une aiguille aimantée et en quelques jours « découvre » la loi expérimentale qui porte son nom.

Considérons n conducteurs $I_1, I_2, \dots, I_n$ dans l'espace et un contour fermé ℓ entourant ces n conducteurs.



La loi d'Ampère stipule :

$$\oint_{\ell} (\vec{B} \cdot d\vec{\ell}) = \text{constante} \cdot \sum_{i=1}^n I_i$$

La constante de proportionnalité est notée μ_0 et est dite perméabilité magnétique du vide. Sa valeur numérique est déterminée par la définition même de l'unité de l'ampère, via la loi d'Ampère !

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{N \cdot s^2}{C^2} = \frac{Wb}{A \cdot m} = \frac{T \cdot m}{A} = \frac{H}{m} = \frac{V \cdot s}{A \cdot m} \right] \quad (\text{II-12})$$

Ayant défini cette constante de proportionnalité, la loi devient :

$$\oint_{\ell} (\vec{B} \cdot d\vec{\ell}) = \mu_0 \cdot \sum_{i=1}^n I_i \quad [V \cdot s / m] \quad (\text{II-13})$$

Ceci est la loi d'Ampère.

Fixer un sens de parcours de ℓ revient par la règle du tire-bouchon à fixer un signe aux courants électriques. Le signe est + si la règle est vérifiée, - dans le cas contraire. Dans la somme en (II-13), les courants doivent être comptés avec leur signe respectif !

Condition d'utilisation de la loi d'Ampère

La loi d'Ampère est simple à utiliser et permet de calculer le champ B lorsque la forme des lignes de champ d'induction peut être déterminée par symétrie. Le contour fermé ℓ doit avoir une position simple (tangent ou perpendiculaire) par rapport aux lignes de champ. Souvent, le contour ℓ représente lui-même une ligne de champ d'induction.

3.2 Deux applications de la loi d'Ampère

Nous allons calculer le champ d'induction magnétique créé :

- par un conducteur rectiligne parcouru par un courant I
- par une bobine toroïdale (tore) parcouru par I.

Conducteur long, rectiligne parcouru par un courant I

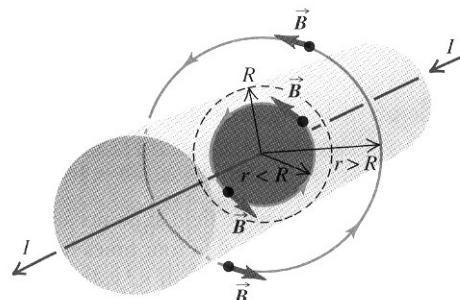
Soit un conducteur de rayon R et de longueur $l > R$, droit et parcouru par un courant constant

I .

Le conducteur est non ferromagnétique.

Deux régions sont à considérer :

- l'intérieur du conducteur
- l'extérieur du conducteur



Pour des raisons de symétrie, les lignes de champ $\vec{B}$ sont des cercles concentriques centrés sur l'axe du conducteur et dans un plan perpendiculaire à cet axe.

$r < R$: intérieur du conducteur

$$\oint_{\ell} (\vec{B} \cdot d\vec{\ell}) = \int_{\ell} B \cdot d\ell = B \cdot \int_{\ell} d\ell = 2\pi r \cdot B$$

courant enfermé dans la surface délimitée par r :

$$\sum_{i=1}^n I_i = I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot I$$

Ampère :

$$2\pi r \cdot B = \frac{r^2}{R^2} \cdot I \cdot \mu_0$$

d'où :

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{r^2}{R^2} \quad [\text{T}] \quad r < R$$

En $r = 0$ (centre) $B(0) = 0$ et le champ $B(r)$ augmente linéairement avec r jusqu'en $r = R$

$r \geq R$ extérieur du conducteur

$$\oint_{\ell} (\vec{B} \cdot d\vec{\ell}) = 2\pi r \cdot B \quad (\text{idem à l'intérieur})$$

le courant parcourant le conducteur : $\sum_{i=1}^n I_i = I$

Ampère :

$$2\pi r \cdot B = \mu_0 \cdot I$$

d'où :

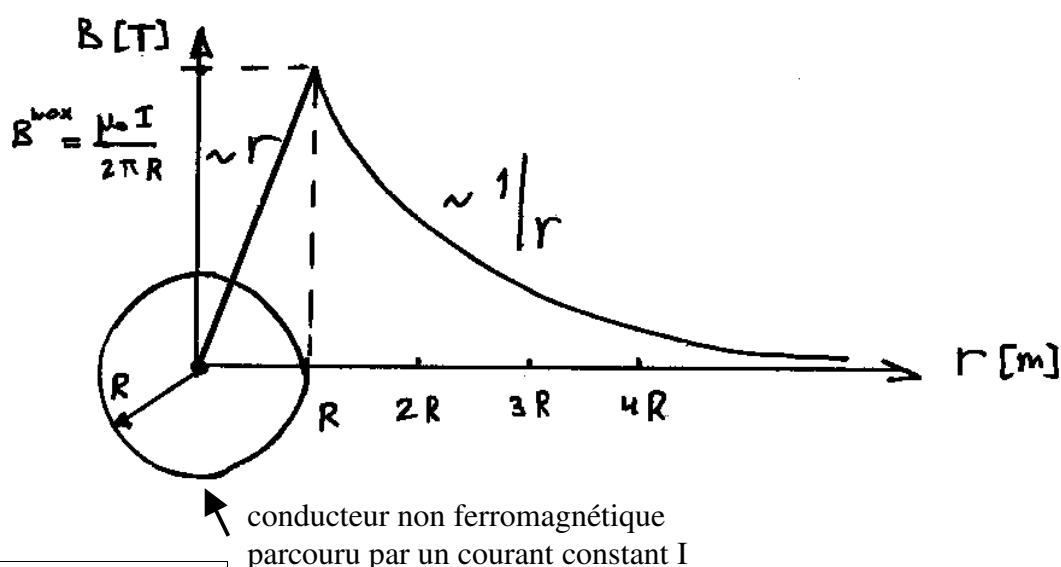
$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-14})$$

Ce résultat est extrêmement important, car il permettra de définir l'unité Ampère comme nous le verrons plus tard. Notons qu'à l'extérieur du conducteur, $B(r) \approx 1/r$, donc le champ magnétique décroît hyperboliquement avec r .

En résumé :

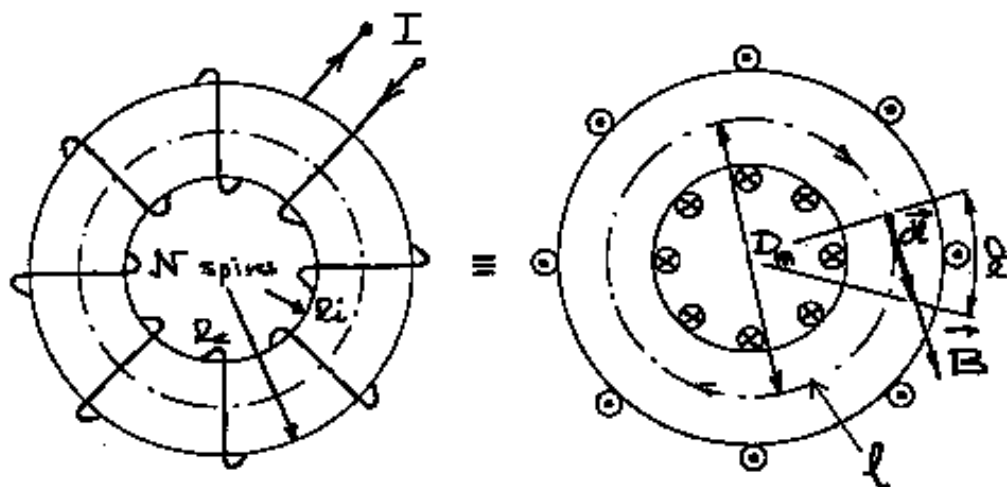
$$\begin{aligned} B_{\text{int}}(r) &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{r}{R^2} \quad [\text{T}] \\ B_{\text{ext}}(r) &= \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad [\text{T}] \end{aligned}$$

$$B(0) = B(\infty) = 0 \quad \text{et} \quad B^{\text{max}} = B(r = R) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi R}$$



Bobine toroïdale (ou tore)

Soit la bobine toroïdale de section circulaire ou rectangulaire, constituée de N spires parcourues par un courant I .



Pour des raisons de symétrie, les lignes de champ sont des cercles concentriques de rayon r , centrés sur l'axe de la bobine. Par symétrie, le champ $\vec{B}$ est confiné à l'intérieur de l'anneau.

Prenons pour ℓ la ligne de champ de rayon r .

$$\oint_{\ell} (\vec{B} \cdot d\vec{l}) = \oint_{\ell} B \cdot dl = B \cdot \oint_{\ell} dl = B \cdot 2\pi r$$

$$\sum_{i=1}^N I_i = N \cdot I$$

Ampère :

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot N \cdot I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-15})$$

On pourra prendre pour champ B_{moyen} :

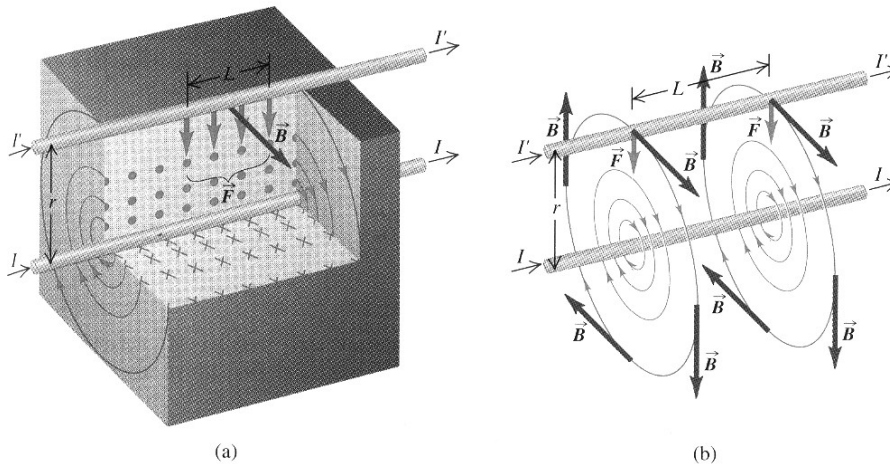
$$B_{\text{moyen}} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\pi \cdot D_m} \quad [\text{T}] \quad \text{avec } D_m = R_i + R_e \quad [\text{m}]$$

B_{moyen} est le champ d'induction magnétique situé sur le diamètre D_m (cercle de rayon moyen). Si

$\frac{R_e}{R_i} \approx 1$, alors le champ est constant à l'intérieur de la bobine.

3.3 Force magnétique s'exerçant entre deux conducteurs parallèles et définition de l'ampère

Soient 2 conducteurs parallèles, rectilignes, distants de r , parcourus par des courants électriques I et I' et de longueur beaucoup plus grande que leur propre rayon.



Le conducteur parcouru par I produit un champ d'induction déterminé par la loi (II-14) :

$$B(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$$

Ce champ $B(r)$ produit, sur le conducteur parcouru par le courant I' , une force magnétique donnée par (II-9')

$$F = I' \cdot L \cdot B(r) = \frac{\mu_0 \cdot L}{2\pi r} \cdot I \cdot I' \quad [\text{N}]$$

d'où :

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot I \cdot I' \quad [\text{N / m}] \quad (\text{II-16})$$

si $I = I'$, alors :

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I^2}{2\pi r} \quad [\text{N / m}] \quad (\text{II-16'})$$

Définition de l'unité d'intensité du courant électrique

On appelle 1 ampère [A], l'unité de l'intensité du courant électrique qui, circulant dans 2 conducteurs parallèles, rectilignes, infinis, distants de 1 mètre, produit entre-eux une force de $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur du conducteur. (II-17)

Pour calculer la valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 donnée en (II-12), reprenons la relation (II-16') et insérons la définition de l'ampère :

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot 1^2}{2\pi \cdot 1} \equiv 2 \cdot 10^{-7} \quad [\text{N / m}]$$

($\equiv$ signifiant « par définition »)

d'où :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \left[\frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} \right]$$

comme annoncé en relation (II-12) !

Donc la valeur de μ_0 est trouvée via la loi d'Ampère et sa valeur numérique est dictée par le choix de l'unité de courant électrique !

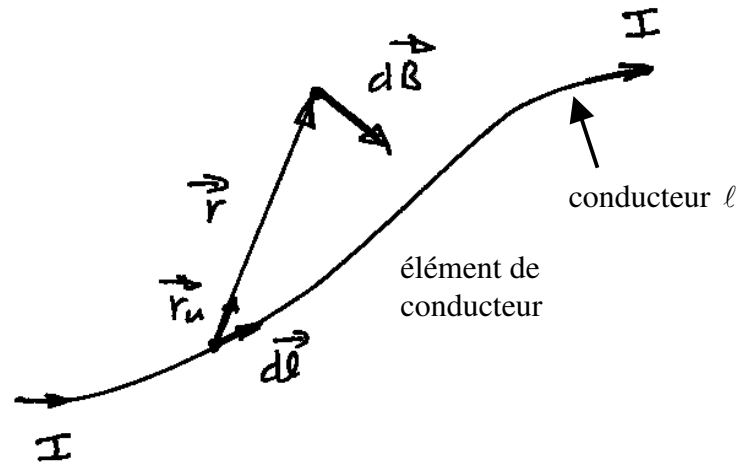
4. Loi de Biot et Savart et applications

Comme indiqué préalablement, la loi de Biot-Savart permet de calculer le champ d'induction magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ en un point de l'espace, créé par un conducteur de forme quelconque et parcouru par un courant I .

4.1 Loi de Biot-Savart

Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841) sont tous deux des scientifiques français. Ils formulent en 1820 la loi expérimentale qui porte leurs noms.

En un point P de l'espace, l'élément de conducteur $d\vec{l}$, parcouru par I , génère un champ d'induction magnétique élémentaire $d\vec{B}$.



avec $\vec{r}_u = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ le rayon vecteur unité : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} d\vec{l} \times \vec{r}_u$

Loi de Biot et Savart :
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot r^2} d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-18})$$

Si l'on veut déterminer en P le champ d'induction $\vec{B}$ dû à l'ensemble du fil conducteur, alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \int_{\ell} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_u}{r^2} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-19})$$

Le sens de $d\vec{B}$ est donné par la règle du tire-bouchon. La direction de $d\vec{B}$ est elle donnée par le produit vectoriel $d\vec{l} \times \vec{r}_u$.

Calculer avec la loi de Biot-Savart n'est pas toujours facile. Il faut être très prudent dans son choix du système de coordonnées. De plus, il faut que le fil conducteur ℓ ait une forme possédant une symétrie. Si la forme est vraiment quelconque (sans aucune symétrie), la loi de Biot et Savart devra être résolue par calcul numérique !

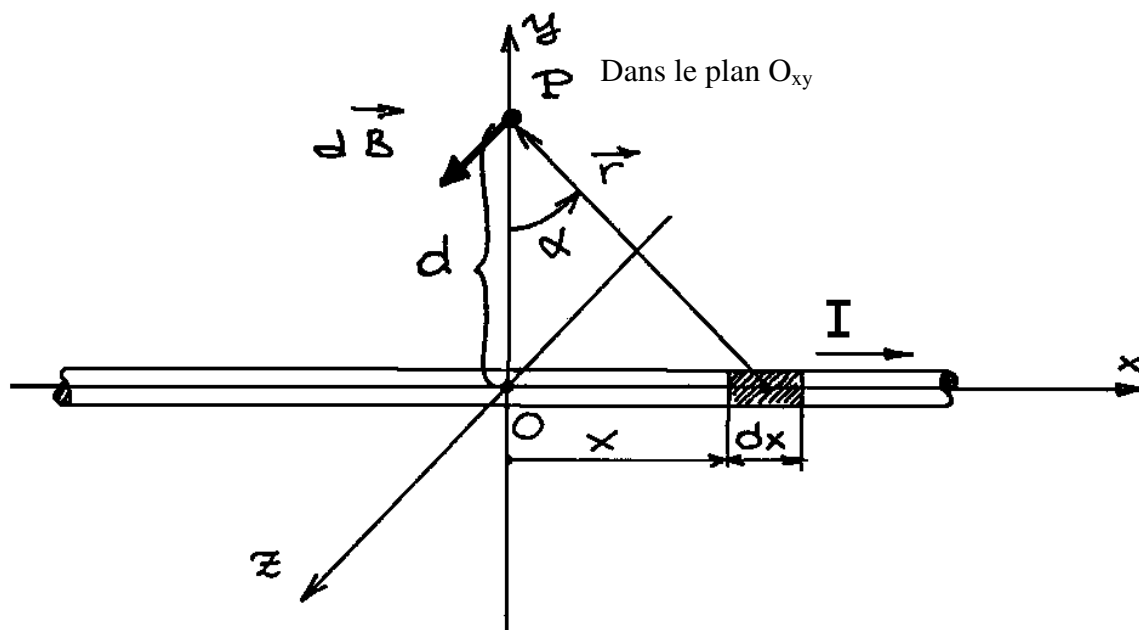
4.2 Applications de la loi de Biot-Savart

Quatre cas seront étudiés :

- conducteur rectiligne de longueur infinie
- boucle de courant de rayon a
- solénoïde (bobine) de N spires
- conducteur de longueur finie

Cas 1 : conducteur rectiligne de longueur infinie

Ce cas a déjà été étudié via la loi d'Ampère. Nous devrions retrouver le résultat important (II-14).



$$d\vec{l} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot d\vec{l} \times \vec{r} = \frac{d \cdot \mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \cdot dx \cdot \vec{k}$$

mais : $r = d / \cos \alpha$ $x = d \cdot \tan \alpha$

d'où : $dx = d \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha$

le long de l'axe Oz : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{k}$

$$\vec{B} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d} \cdot \vec{k} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d} \cdot \vec{k}$$

finalement :

$$\vec{B}(d) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-20})$$

ceci est absolument équivalent au résultat (II-14).

Cas 2 : boucle de courant circulaire

Considérons la boucle de courant circulaire de rayon a et parcourue par un courant I .
Calculons le champ d'induction $\vec{B}$ sur l'axe de la boucle.

En $b = 0$ (centre de la bobine) :

$$\vec{B}(b = 0) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot I}{2a} \end{vmatrix} \quad [\text{T}] \quad \text{avec } a = \text{rayon de la spire.}$$

Cas 3 : Solénoïde ou bobine de N spires

Soit une bobine de longueur l , formée de N spires, parcourue par un courant I et calculons le champ $\vec{B}$ en un point quelconque P situé sur l'axe de la bobine O_z . En prenant le point P pour origine et en utilisant le résultat obtenu dans l'application précédente, il vient :

$$d\vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot a^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}} \cdot \frac{N \cdot I}{l} \cdot dz \end{vmatrix}$$

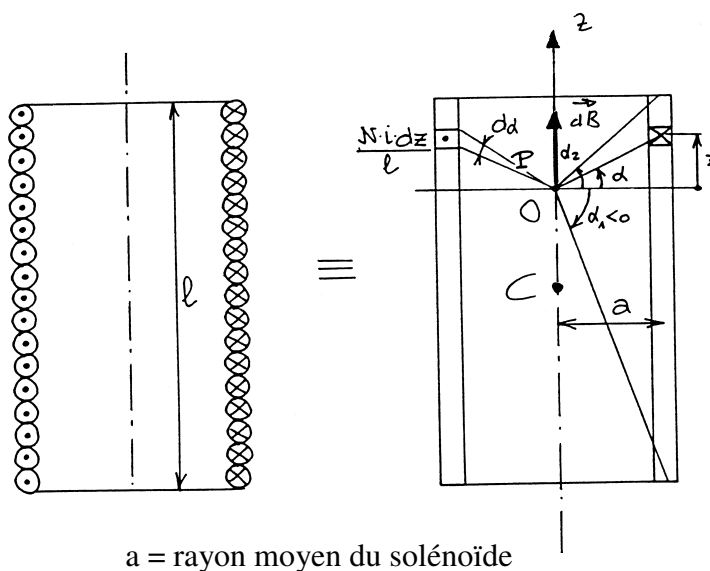
mais $z = a \cdot \tan \alpha$

$$\text{d'où : } dz = \frac{a}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha$$

$$dB_z = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0}{2l} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \quad \text{car} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$B_z = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dB_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha \cdot d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \cdot (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2l} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \end{vmatrix} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-22})$$



Au centre C de la bobine :

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{l}{2a}\right)$$

$$\sin \alpha_2 = -\sin \alpha_1 = \frac{l}{2\left(a^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{1/2}}$$

$$B_z(\text{centre}) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{\sqrt{4a^2 + l^2}} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-23})$$

Pour un solénoïde de longueur infinie ($l \gg a$) le champ sur l'axe O_z est :

$$B = B_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \quad [\text{T}]$$

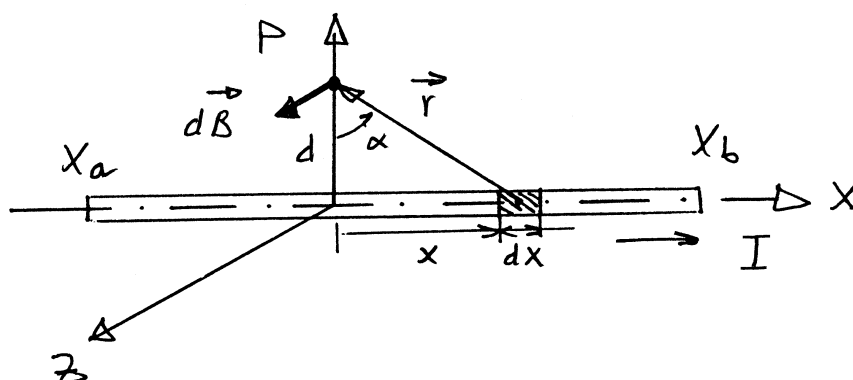
Donc dans le cas d'un solénoïde de longueur $l \gg a$, le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ sur l'axe du solénoïde vaut :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \end{pmatrix} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-24})$$

Par la loi d'Ampère, à l'extérieur du solénoïde, le champ d'induction magnétique est nul !

Cas 4 : conducteur de longueur finie

Finalement, considérons le cas d'un conducteur rectiligne, de longueur finie ($x_a + x_b$) et parcouru par I .



Comme nous l'avons vu précédemment, seul la composante en z subsiste :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d}{4\pi r^3} \cdot dx \cdot \vec{k} \quad r = \sqrt{d^2 + x^2}$$

$$\vec{B} = \int_{x_a}^{x_b} d\vec{B} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d}{4\pi} \cdot \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \vec{k}$$

mais :

$$\int \frac{dx}{(d^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{d^2 \cdot \sqrt{x^2 + d^2}}$$

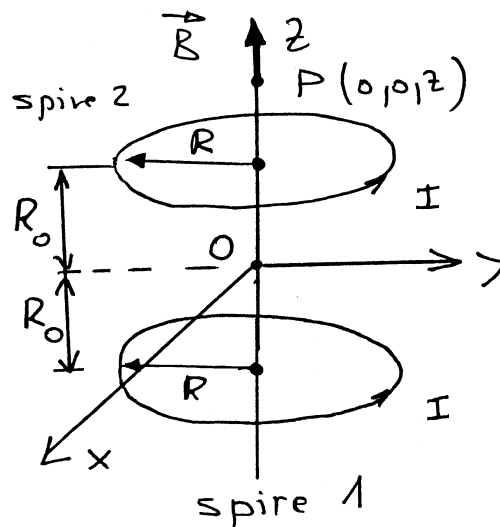
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot d}{4\pi d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \Big|_{x_a}^{x_b}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi d} \cdot \left(\frac{x_b}{\sqrt{d^2 + x_b^2}} - \frac{x_a}{\sqrt{d^2 + x_a^2}} \right) \end{pmatrix} \quad [\text{T}]$$

(II-25)

4.3 Bobines de Helmholtz

Considérons tout d'abord le cas simple de 2 spires circulaires parallèles, distantes de $2R_0$ et parcourues par le même courant I .



En un point $P(0,0,z)$ situé sur l'axe Oz du système, le champ d'induction $\vec{B}$ est : $\vec{B} = \vec{B}_{spire 1} + \vec{B}_{spire 2}$

Par la relation (II-21) ces champs sont connus :

$$\vec{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2[R^2 + (z + R_0)^2]^{3/2}} \end{pmatrix} \quad \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2[R^2 + (z - R_0)^2]^{3/2}} \end{pmatrix}$$

donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{[R^2 + (z + R_0)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (z - R_0)^2]^{3/2}} \end{vmatrix}$$

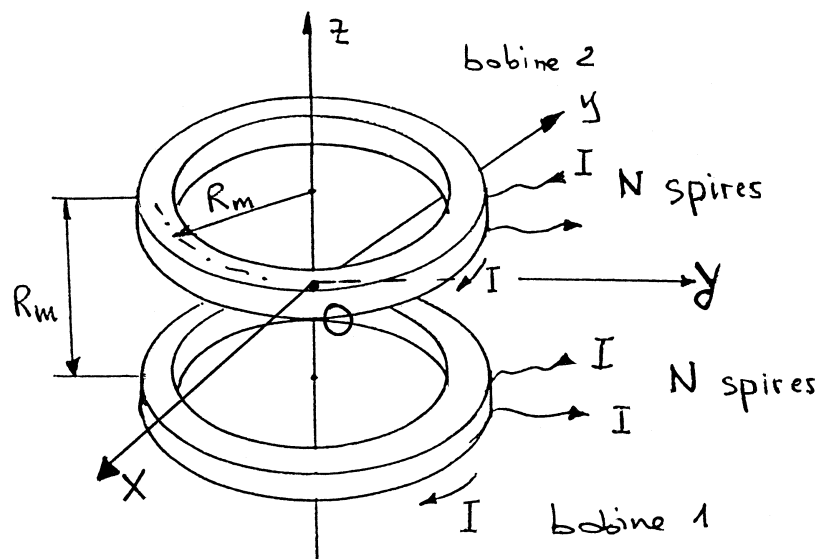
En point 0, le centre du système, le champ $\vec{B}$:

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{[R^2 + R_0^2]^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-26})$$

Bobines de Helmholtz

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) imagina un système composé de 2 bobines annulaires plates, de grand diamètre, montées sur un même axe. Les spires ont pratiquement toutes le même diamètre et la distance entre les bobines est égale au rayon moyen R_m d'une bobine.

Chaque bobine est composée de N spires parcourues par le même courant I .



Pour calculer $\vec{B}$ sur l'axe Oz du dispositif, on utilise la relation (II-26)

avec :

$$I \rightarrow N \cdot I \qquad R \rightarrow R_{\text{moyen}} \qquad R_0 = \frac{1}{2} \cdot R_{\text{moyen}}$$

$$\vec{B}(z) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(z) \end{vmatrix}$$

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot R_m^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{\left[R_m^2 + \left(z + \frac{R_m}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[R_m^2 + \left(z - \frac{R_m}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Au centre du système en $z = 0$, le champ $\vec{B}$ est pratiquement uniforme et c'est là toute son utilité pratique. Ce champ est :

$$\vec{B}(0) = \frac{8\mu_0 \cdot N \cdot I}{5\sqrt{5} \cdot R_m} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad [\text{T}] \quad (\text{II-27})$$