

1.3 Conducteurs et isolants

La conduction d'un élément solide est déterminée par sa structure atomique. Dans un atome, les électrons orbitent autour du noyau selon des couches distinctes les unes des autres. Ce sont uniquement les électrons de la couche extérieure qui sont susceptibles d'être libérés et de participer ainsi à la conduction électrique.

- si la couche extérieure de l'atome d'un élément est très voisine de la saturation, elle ne libérera pas d'électrons, au contraire, elle cherchera à en capter pour être saturée; un tel élément sera donc un isolant.
- si au contraire, la couche extérieure est loin de la saturation, l'élément cèdera facilement un ou des électrons; un tel élément sera un bon conducteur.

(voir en annexe les structures électroniques de divers éléments et repérer les bons conducteurs et les isolants!)

Donc un bon conducteur solide est un élément possédant un grand nombre d'électrons libres (= libres de se mouvoir). A l'opposé, un élément est classé dans la catégorie des isolants s'il ne possède que très peu d'électrons libres. Un parfait isolant n'a aucun électron libre!

Dans les liquides, les atomes sont libres de se mouvoir. Les porteurs mobiles de charges électriques sont des ions. (Un ion positif est un atome ayant perdu un ou des électrons; un ion négatif est un atome ayant capté un ou des électrons supplémentaires).

En électricité et dans la pratique, les conducteurs sont des éléments solides et métalliques, comme par exemple le cuivre (Cu) et l'aluminium (Al).

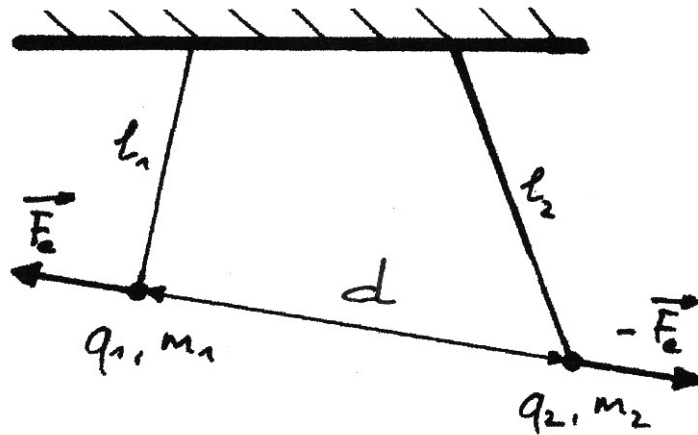
2. Loi de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806), physicien français, s'est intéressé d'abord à la résistance des matériaux, puis à l'électricité. La loi qui porte son nom a été établie en 1785; elle décrit quantitativement la force électrique agissant entre 2 charges électriques en présence l'une de l'autre. Vers 1800, Charles de Coulomb s'intéressa aussi au magnétisme et définit le concept d'aimantation. A noter que selon l'histoire des Sciences, la loi de Coulomb aurait été découverte en premier par le physicien anglais Henry Cavendish, mais que ses travaux restèrent longtemps non publiés. Il faudrait donc appeler cette relation, la loi de Cavendish-Coulomb.

2.1 Aspects qualitatifs de la loi de Coulomb

Pour obtenir une mesure quantitative de la force d'attraction ou de répulsion entre corps chargés, on utiliserait deux petites sphères conductrices. Ces sphères sont considérées comme petites si leur rayon est négligeable par rapport à la distance qui les sépare. Dans ce cas, on peut considérer ces sphères comme des particules ponctuelles chargées.

Considérons le montage suivant où q_1 et q_2 sont 2 charges électriques de masse m_1 et m_2 respectivement. A l'aide de ce dispositif, on peut montrer, qualitativement, les 4 propriétés suivantes :



- La direction de la force électrique $\vec{F}_e$ est sur la droite reliant les deux particules chargées.
- L'amplitude de la force $\vec{F}_e$ varie comme l'inverse du carré de la distance d entre les deux particules.
- La force est directement proportionnelle à la charge de chaque particule q_1 et q_2 .
- Pour une distance d donnée entre les particules, l'amplitude (pas le sens !) de la force est indépendante du signe des charges.

L'appareil utilisé en réalité par Coulomb pour ses recherches s'apparentait à une balance de torsion. Le but de ce chapitre était toutefois de montrer qu'une vérification pratique de la loi de Coulomb est foncièrement possible avec le dispositif ci-dessus.

2.2 Aspects quantitatifs de la loi de Coulomb

Si l'on considère deux particules de charges q et Q , la force s'exerçant entre-elles vaut :

$$F = K \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \quad F > 0 : \text{répulsion}, F < 0 : \text{attraction}$$

où K est une constante et r la distance entre les particules. La force F est située sur la droite joignant les deux particules.

Si les charges ont le même signe, le produit $q \cdot Q$ est positif, la force est répulsive. Au contraire, si les deux charges sont de signes différents, $q \cdot Q$ est négatif, il y a attraction.

Pour tenir compte du sens de la force, il convient donc de remplacer la relation scalaire ci-dessus par une relation plus riche en informations, à savoir une relation vectorielle. Avant de le faire, on veut encore donner une valeur numérique à K .

En partant de l'unité électrique de base qui est l'Ampère, on définit l'unité de charge, le Coulomb, comme la charge transportée pendant une seconde par un courant de un Ampère.

$$1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ Ampère} \cdot \text{seconde}$$

Une fois l'unité de charge définie, l'obtention de la valeur numérique de K se fait par voie expérimentale.

Il est habituel de remplacer, dans le système international, la constante K par la grandeur :

$$K = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0}$$

où ε_0 est appelée constante de permittivité du vide.

La valeur expérimentale de K étant :

$$K = 8.9875 \cdot 10^{+9} \quad \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2} \right]$$

ε_0 doit valoir :

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \quad \left[\frac{C^2}{N \cdot m^2} \right] \quad (I-4)$$

Cette grandeur apparaîtra par la suite dans plusieurs autres lois. On l'utilisera plus volontiers que la constante K.

L'unité de ε_0 est $\frac{C^2}{N \cdot m^2}$.

Comme :

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$$

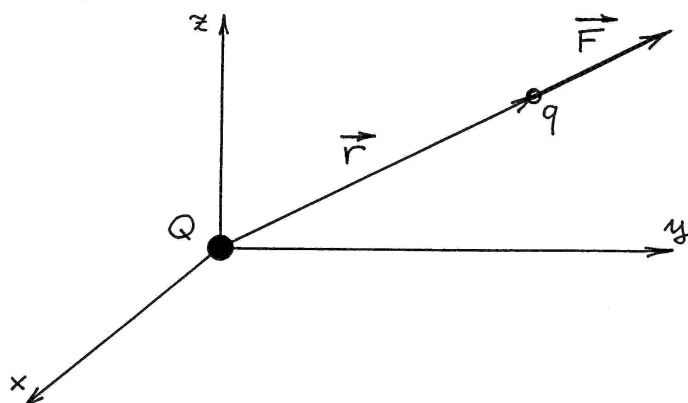
$$1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s} = 1 \text{ A} \cdot \text{V} \cdot \text{s} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}$$

$$\text{on obtient: } 1 \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 1 \frac{A \cdot s}{V \cdot m} = 1 \frac{C}{V \cdot m} = 1 \text{ F/m avec } 1 \text{ F} = 1 \text{ C/V (Farad)}$$

La loi de Coulomb devient donc, sous forme scalaire :

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \quad [N] \quad (I-5)$$

Pour mettre cette relation sous forme vectorielle, on définit, en prenant comme origine le centre de la charge Q, un repère de coordonnées cartésiennes.



La force $\vec{F}$ exercée par la charge située au centre des coordonnées sur l'autre charge a la direction du vecteur-unité selon $\vec{r}$. Ce vecteur $\vec{F}$ peut s'exprimer à l'aide du vecteur-unité selon $\vec{r}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$$

En multipliant ce vecteur par la grandeur scalaire (positive ou négative) F, on obtient la relation vectorielle :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (\text{I-6})$$

Q et q doivent être prises avec leur signe. Si ces signes sont opposés, le scalaire précédent est négatif, $\vec{F}$ est donc pointée vers Q (attraction).

La loi de Coulomb est valable lorsque les charges q et Q sont concentrées, c'est-à-dire lorsque l'on est en présence de deux particules chargées infiniment petites. Lorsqu'on a affaire à plusieurs charges réparties, la loi de Coulomb reste valable à condition qu'on l'applique à toutes les charges élémentaires.

Rigoureusement, ce principe de superposition n'est valable que si les particules chargées sont de très petites dimensions (relativement à la distance qui les sépare). Si l'on avait affaire à des sphères chargées de dimensions finies, la force agissant entre les sphères 1 et 2 dépendrait de la position de la troisième sphère. Ceci résulte du fait que la présence de la sphère 3 créerait une redistribution des charges dans les deux autres.

Dans le cas général où nous avons n charges électriques dans le vide, par le principe de superposition, les forces électrostatiques s'additionnent.

Soit : $q_1, q_2, \dots, q_n$ n charges électriques, et $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ leurs positions respectives.

La force $\vec{F}_i$ exercée sur q_i par les (n-1) charges :

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}^3} \cdot \vec{r}_{ij} \quad [\text{N}] \quad (\text{I-7})$$

3. Le champ électrique $\vec{E}$ et la loi de Gauss

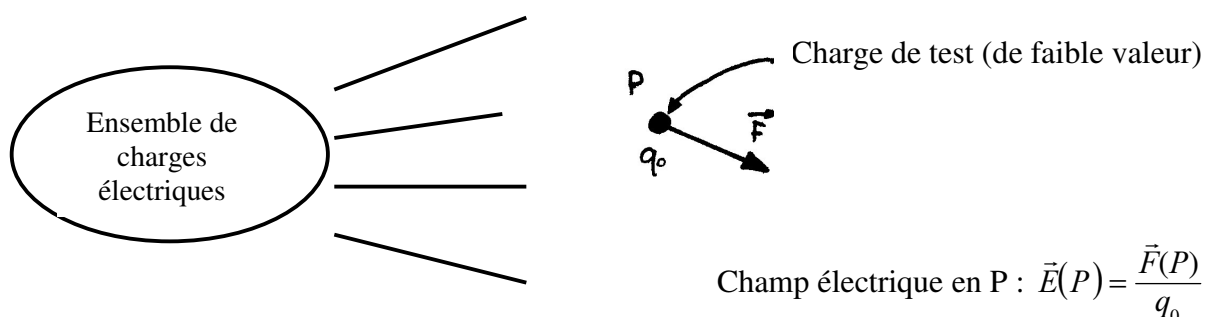
Nous allons tout d'abord introduire la notion de champ, puis définir le champ électrique et donner la loi de Gauss.

3.1 Notion de champ et champ électrique $\vec{E}$

Le fait que deux charges électriques voisines soient soumises à des forces d'attraction ou de répulsion nous amène à considérer que toute charge électrique modifie les caractéristiques physiques de l'espace environnant. Pour qualifier cette modification, on dit que toute charge crée dans l'espace environnant un champ électrique.

Ceci permet d'expliquer de façon satisfaisante l'effet d'attraction ou de répulsion électrique qui, avant le physicien Faraday, était considéré comme mystérieux et comme un phénomène « à distance » instantané sans en connaître le support.

Ainsi, pour trouver le champ créé par un ensemble de charges électriques, on mesure la force $\vec{F}$ à laquelle est soumise une charge électrique de test q_0 , ceci pour tout point de l'espace.



Si l'on veut vraiment mesurer $\vec{E}$ tel qu'il existe lorsque q_0 n'est pas là, il faut faire en sorte que la charge q_0 soit suffisamment petite pour ne pas influencer la répartition dans l'espace des charges produisant le champ.

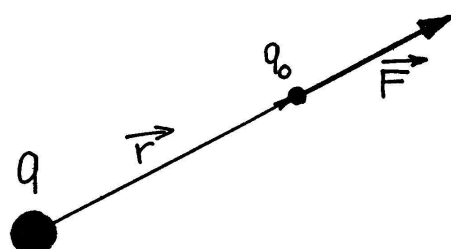
$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{q_0} \right) \quad \left[\frac{N}{C} \right] = \left[\frac{V \cdot A \cdot s / m}{A \cdot s} = \frac{V}{m} \right] \quad (I-8)$$

En pratique, $q_0 \geq e$ ($1.602 \cdot 10^{-19}$ C)

En SI, le champ électrique s'exprime donc en volt par mètre, soit [V / m].

3.2 Champ créé par une particule chargée.

On considère une particule de charge q et une particule test q_0 située à une distance $\vec{r}$ de la première :



$\vec{F}$ est située sur la droite reliant q à q_0 . En divisant la force $\vec{F}$ par q_0 , on trouve le champ $\vec{E}$:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \left[\frac{V}{m} \right]} \quad (I-9)$$

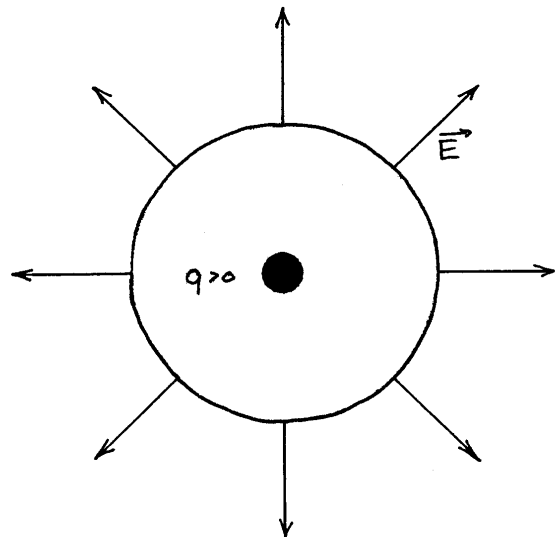
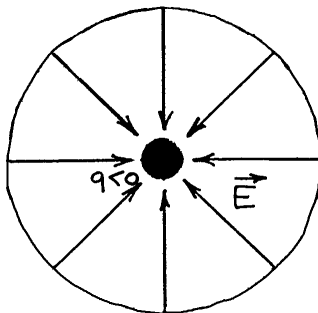
Le champ créé par une charge ponctuelle q est donc radial : sa direction passe par la charge. Son amplitude varie avec l'inverse du carré de la distance à la charge. Le champ électrique est donc d'amplitude constante sur des sphères centrées en q .

Il reste à préciser le sens de $\vec{E}$. On a dit que l'on considérait q_0 comme positive. Si q est aussi positive, il y a répulsion, $\vec{F}$ est radial vers l'extérieur et $\vec{E}$ aussi. Si q est négatif, il y a attraction, $\vec{F}$ et $\vec{E}$ sont radiaux vers l'intérieur. Ceci correspond bien à la définition vectorielle donnée ci-dessus : le vecteur-unité $\frac{\vec{r}}{r}$ y est bien multiplié par la charge q qu'il faut, bien entendu, prendre avec son signe.

En résumé donc :

Le champ électrique créé par une charge ponctuelle q est :

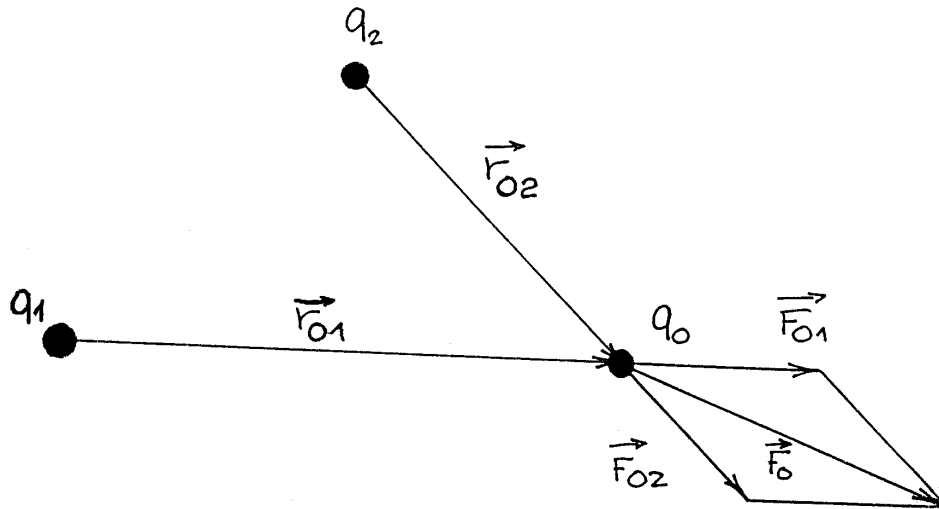
- radial
- vers l'extérieur si $q > 0$
vers l'intérieur si $q < 0$
- amplitude : $E(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad [V / m]$



3.3 Champ électrique créé par un ensemble de particules chargées

Comme on l'a vu plus haut, la force exercée sur une particule par un ensemble d'autres particules est égale à la somme vectorielle des forces exercées par les particules prises séparément.

Ainsi, pour les trois particules suivantes :



la force $\vec{F}_0$ totale s'exprime par :

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot q_0 \cdot \left[\frac{q_1}{r_{01}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{01}}{r_{01}} + \frac{q_2}{r_{02}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{02}}{r_{02}} \right]$$

Pour trouver le champ électrique créé par q_1 et q_2 au point où se trouve q_0 , il faut diviser par q_0 la force $\vec{F}_0$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{q_1}{r_{01}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{01}}{r_{01}} + \frac{q_2}{r_{02}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{02}}{r_{02}} \right]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Comme on pouvait s'y attendre, le principe de superposition est aussi valable dans le cas du champ électrique. Comme pour la force, il ne faut pas oublier que le champ est un vecteur et qu'il faut par conséquent faire la somme vectorielle des champs créés par les charges prises séparément.

Ainsi, le champ créé en un point par un ensemble de n particules chargées s'exprime par :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i} \right) \quad \left[\frac{V}{m} \right]} \quad (I-10)$$

où $\vec{r}_i$ est le rayon-vecteur ayant son origine à l'emplacement de q_i et son extrémité au point où l'on calcule le champ.

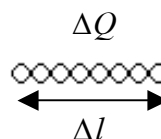
3.4 Champ électrique créé par des distributions continues de la charge

Les charges définies jusqu'ici sont dites ponctuelles car de dimensions très petites.

Dans le cas d'un grand nombre de charges, on distingue :

- les charges « alignées », caractérisées par

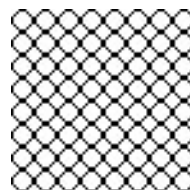
une densité linéique de charges : $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$ [C / m]



charge : ΔQ
longueur : Δl

- les charges disposées sur une surface, caractérisées par

une densité surfacique de charges : $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ [C / m²]

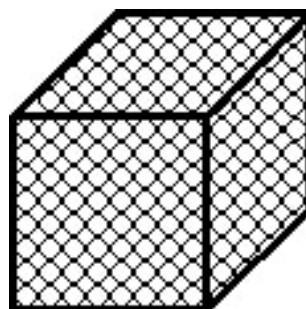


charge : ΔQ
aire : ΔA

les charges disposées dans un volume,

caractérisées par une densité volumique

de charges : $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ [C / m³]



charge : ΔQ
volume : ΔV

On désigne également par :
 n le nombre d'électrons libres par unité de volume
 p le nombre de charges positives par unité de volume

La densité de charges vaut donc :

$\rho = -n \cdot e$ pour des charges négatives (p. ex. électrons libres)

$\rho = +p \cdot e$ pour des charges positives

$\rho = p \cdot e - n \cdot e$ lorsque les deux types de charges sont présentes simultanément.

Bien que dans la nature la charge électrique soit concentrée sur les particules élémentaires, on peut considérer dans beaucoup d'applications que la charge est répartie continûment à l'intérieur ou à la surface d'un solide.

Cela revient donc à introduire une densité de charge qui peut être :

volumique : ρ [C / m³]

surfacique : σ [C / m²]

linéique : λ [C / m]

Ces densités ne sont pas forcément constantes dans le corps ou sur tout le corps considéré.

Dans le cas de telles répartitions de charge, le principe de superposition reste valable : il faut considérer une infinité de petits volumes, surfaces ou segments élémentaires chargés, calculer le champ $d\vec{E}$ que chacun de ces éléments crée et faire la somme vectorielle des champs $d\vec{E}$. Comme on prend des éléments infiniment petits, cette somme revient à une intégrale (triple, double ou simple) si l'on considère un volume, une surface ou une longueur.

On aura donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Les $d\vec{E}$ sont des vecteurs non forcément tous parallèles entre eux. Il serait donc faux de faire la somme de leurs modules :

$$E \neq \int dE \quad !!!$$

La méthode applicable dans ce cas est la sommation des composantes entre elles.

Ainsi, dans un système d'axes cartésiens O_{xyz} , on aura :

$$d\vec{E} = dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j} + dE_z \cdot \vec{k}$$

($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont les vecteurs-unité selon les axes x, y et z).

En sommant, on aura donc :

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k} = \int (dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j} + dE_z \cdot \vec{k})$$

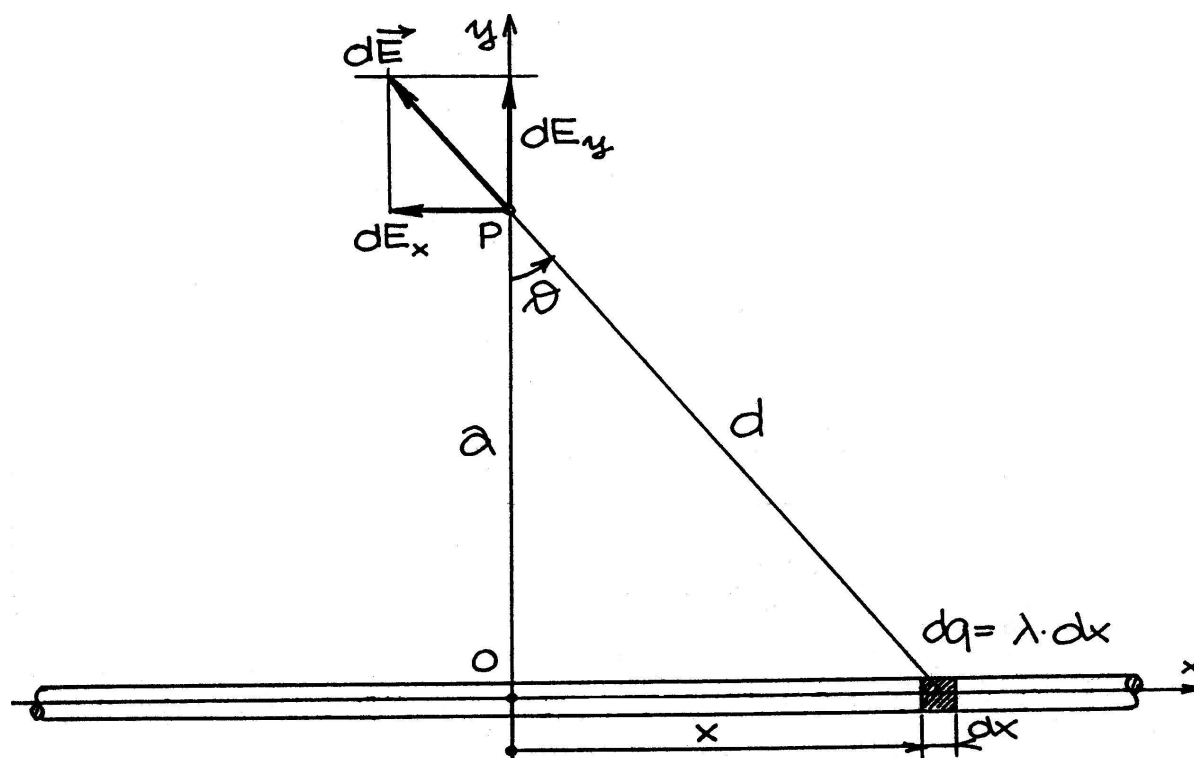
En égalant les composantes, on aura :

$E_x = \int dE_x$ $E_y = \int dE_y \quad [\text{V / m}]$ $E = \int dE$
--

C'est donc là le principe bien connu que les composantes d'une somme vectorielle sont égales aux sommes des composantes des termes de la somme.

Dans ce qui suit, on va étudier trois applications de ce principe.

1^{ère} application : champ créé par un barreau de longueur infinie et de densité linéique de charge λ constante.



Charge linéique constante λ [C / m]

On se propose de calculer le champ électrique $\vec{E}$ créé en P par l'ensemble du barreau. En prenant l'axe de ce dernier comme axe des x et la perpendiculaire au barreau par P comme axe des y, on obtient un repère cartésien suffisant au calcul de E (il n'y a pas besoin de troisième axe, car le champ reste dans le plan contenant le barreau et le point P).

Le petit élément à considérer est un segment de longueur dx. Si les dimensions de la section du barreau sont petites en comparaison de la distance a, le petit élément choisi peut être considéré comme une charge ponctuelle. Sa charge vaut :

$$dq = \lambda \cdot dx$$

Le champ $d\vec{E}$ créé par dq est dans le prolongement du segment de longueur d reliant P à dq. En appliquant la relation du paragraphe 3.2, on obtient :

$$dE = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{d^2}$$

Cette relation donne le module de $d\vec{E}$. On peut appliquer également la relation vectorielle : le rayon-vecteur reliant dq à P a les composantes (-x, a). Sa longueur vaut $d = (x^2 + a^2)^{1/2}$

On obtient donc :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dx}{x^2 + a^2} \cdot \left(\frac{-x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{i} + \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \vec{j} \right)$$

On peut en tirer :

$$dE_x = \frac{-\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad [\text{V / m}]$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{a \cdot dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad [\text{V / m}]$$

On pourrait, à ce stade, effectuer les deux intégrations. On peut s'épargner la moitié de ce travail en remarquant que deux charges dq et dq' situées symétriquement de part et d'autre de l'axe y (donc de positions $+x$ et $-x$) créent des composantes horizontales du champ égales et de signes opposés. Elles s'annulent donc mutuellement. Comme le barreau a été admis de longueur infinie, on peut en tirer la conclusion que l'axe y , quelle que soit sa position dans l'espace fini, sépare le barreau en deux segments de longueurs égales. La composante selon x de $\vec{E}$ sera donc nulle.

$$E_x = 0$$

On aura donc : $\vec{E} = E_y \cdot \vec{j}$ et, en module :

$$E = E_y$$

Si le barreau n'était pas de longueur infinie, cette conclusion ne resterait valable que si le point P était situé sur la médiatrice du barreau.

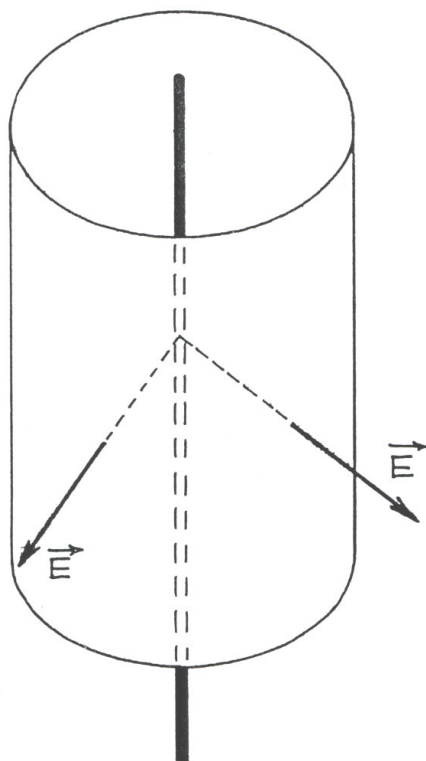
On a donc finalement :

$$\begin{aligned} E = E_y &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{a}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \cdot dx \\ &= \frac{\lambda \cdot a}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{x}{a^2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{\lambda \cdot a}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{a^2} - \frac{(-1)}{a^2} \right] = \frac{\lambda \cdot a}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

On a finalement :

$$E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi a \cdot \epsilon_0} \quad [\text{V / m}]$$

On voit donc que le champ électrique à une distance a d'un barreau chargé infiniment long est radial. Son module est proportionnel à l'inverse de la distance a (contrairement à celui créé par une charge ponctuelle qui est proportionnel à l'inverse du carré de la distance). Le champ $\vec{E}$ est d'amplitude constante sur des cylindres d'axe coïncidant avec celui du barreau chargé.



Si le barreau chargé n'était pas de longueur infinie, mais d'une longueur $2l$ finie, on trouverait que le champ électrique dans le plan médiateur du barreau est aussi radial. L'amplitude de ce champ à une distance a du barreau vaut :

$$E = \frac{\lambda l}{2\pi a \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(a^2 + l^2)^{3/2}} \quad [\text{V / m}]$$

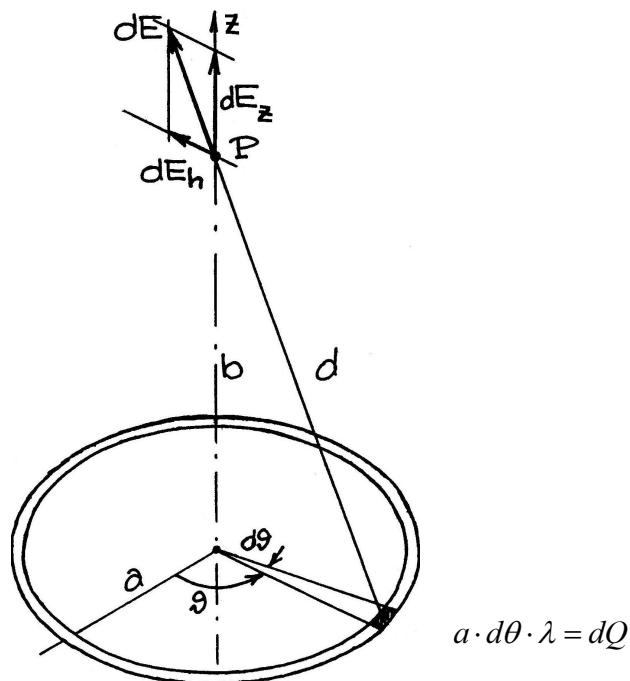
Si l'on compare ceci au champ à une distance a du barreau de longueur infinie, on obtient :

$$\frac{E(2l)}{E(\infty)} = \frac{l}{(a^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right)^{3/2}} \quad [1]$$

Ce rapport vaut 95 % pour $l = 3a$ et 99.5 % pour $l = 10a$. C'est pour cette raison que le champ au voisinage immédiat d'un barreau chargé fini peut souvent, sans grosse erreur, être calculé à l'aide de la formule établie dans le cas du barreau infini.

2^{ème} application : champ créé par un anneau mince chargé uniformément.

On considère un anneau de section faible par rapport à sa longueur :



On veut calculer le champ électrique au point P situé à la verticale du centre de l'anneau et à une hauteur b. Le petit élément habituel est cette fois-ci un petit arc élémentaire d'angle au centre $d\theta$. La longueur de cet arc vaut donc $a \cdot d\theta$ et sa charge $dq = \lambda \cdot a \cdot d\theta$.

Dans le plan formé par l'axe z et la distance d, on peut utiliser les résultats de l'application précédente. On trouve ainsi :

$$dE_h = -\frac{\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{a \cdot a \cdot d\theta}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dE_z = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{b \cdot a \cdot d\theta}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On voit que l'amplitude de ces deux composantes ne dépend pas de l'angle θ . Comme un petit élément dq' diamétralement opposé à dq crée un champ horizontal égal et opposé à celui créé par dq , on peut en déduire que la composante horizontale du champ total est nulle.

On a donc :

$$E_h = 0$$

$$E_z = \int dE_z = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{ab}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot d\theta$$

Finalement :

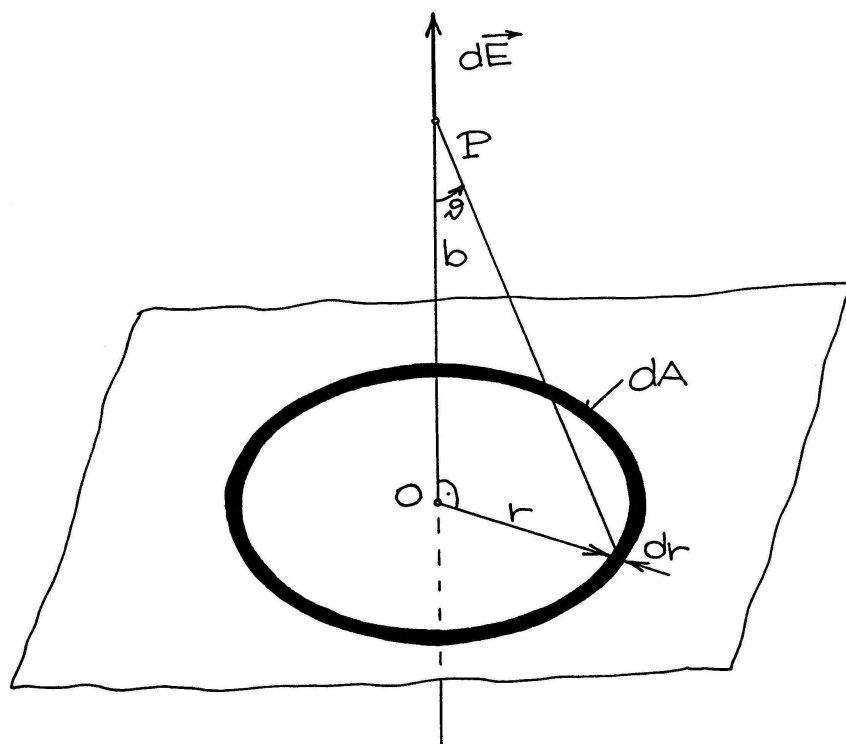
Sur l'axe de l'anneau : $\vec{E}$ est porté par l'axe $E = \frac{(2\pi a) \cdot b \cdot \lambda}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot (a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad [\text{V / m}]$
--

$2\pi a \lambda = Q$ est la charge totale de l'anneau.

Le résultat ainsi trouvé va permettre un calcul rapide du cas suivant.

3^{ème} application : champ créé par une plaque infinie de charge uniformément répartie (plaque non conductrice).

On considère une plaque de dimensions infinies portant une charge de densité surfacique σ [C/m²].



On prend comme petit élément de surface un anneau de rayon r et d'épaisseur dr dont le centre O est la trace dans le plan de la plaque du point P où l'on veut calculer le champ. Comme on l'a vu dans l'application précédente, un tel anneau crée un champ vertical (les composantes horizontales s'annulent mutuellement). Pour calculer dE , on peut utiliser la formule de l'application précédente où l'on introduit, comme charge totale de l'anneau, la valeur : $2\pi \cdot dr \cdot \sigma$, $2\pi \cdot dr$ correspondant à la surface en noir de l'anneau.

On obtient ainsi :

$$dE = \frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot b}{4\pi\epsilon_0 \cdot (r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dr$$

Pour trouver le champ total, on intègre entre $r = 0$ et $r = \infty$:

$$E = \frac{\sigma \cdot b}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^{\infty} \frac{r \cdot dr}{(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On fait le même changement de variable que dans la première application :

$$r = b \cdot \tan \theta = b \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$dr = \frac{b}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$(r^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{b^3}{\cos^3 \theta}$$

On arrive à :

$$E = \frac{\sigma \cdot b}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\text{car } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cdot d\theta = 1$$

Le champ créé par une plaque chargée infinie est perpendiculaire à la plaque. Son amplitude vaut :

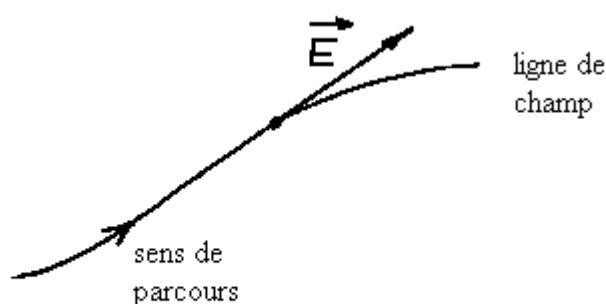
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad [\text{V} / \text{m}]$$

Elle ne dépend pas de la distance par rapport à la plaque.

3.5 Représentation géométrique du champ électrique

Il est pratique de représenter le champ électrique associé à une distribution de charges par une série de courbes appelées lignes de champ électrique. Ces lignes, en plus du fait qu'elles sont dotées d'un sens de parcours, sont construites de telle manière qu'elles aient les propriétés suivantes :

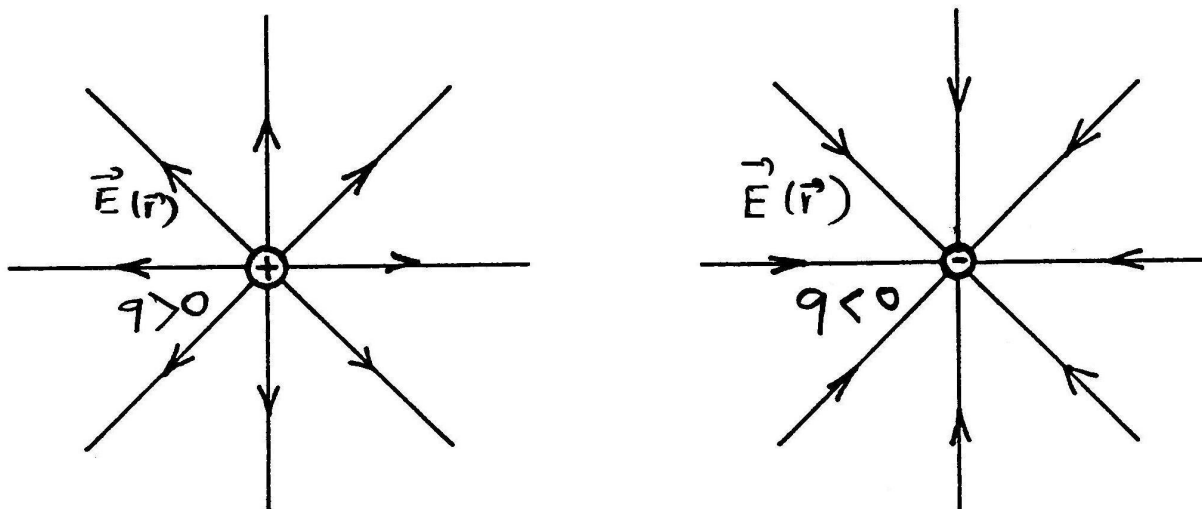
- en tout point d'une ligne de champ, le champ électrique $\vec{E}$ est tangent à la ligne. Le sens de $\vec{E}$ est le même que le sens de parcours de la ligne.



- le nombre de lignes de champ traversant une région de l'espace est proportionnel à l'amplitude du champ dans cette région. Donc :
forte « densité » de lignes de champ $\cong$ grand champ électrique
faible « densité » de lignes de champ $\cong$ faible champ électrique

On peut facilement trouver la forme des lignes de champ dans le cas d'une charge ponctuelle. Comme on l'a vu plus haut, le champ créé par une telle charge est radial. Les lignes de

champ sont donc des demi-droites se coupant au point où est située la charge. Dans le cas d'une charge positive, le champ est dirigé vers l'extérieur : il en va de même des lignes de champ. Si la charge est négative, les sens de parcours des différentes lignes convergent vers la charge.



On voit sur les figures qu'au voisinage de la charge le nombre de lignes de champ par unité de surface est plus grand qu'à une distance supérieure.

Si l'on prend comme surfaces des sphères centrées sur la charge, le nombre de lignes de champ par unité de surface vaut :

$$N' = \frac{N}{4\pi r^2}$$

où N est le nombre de lignes considérées

On retrouve donc la loi selon laquelle le champ créé par une charge ponctuelle est proportionnel à l'inverse du carré de la distance.

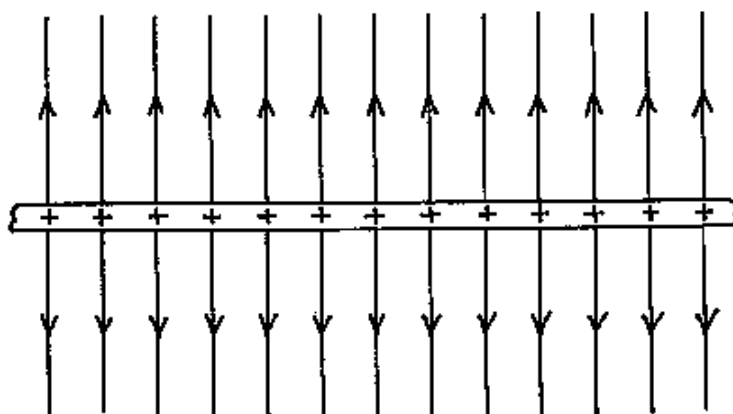
Lorsqu'on a plusieurs charges en présence, on peut dire que le champ au voisinage de l'une d'elles est essentiellement créé par elle-même (en vertu de la loi de l'inverse du carré de la distance). Ceci entraîne que les lignes de champ ont, au voisinage immédiat d'une charge, la même allure qu'elles auraient si la charge était seule.

Dans des régions de l'espace où le champ d'aucune des particules ne prédomine, la recherche des lignes de champ est moins aisée. Il faut dans un tel cas observer les deux règles suivantes :

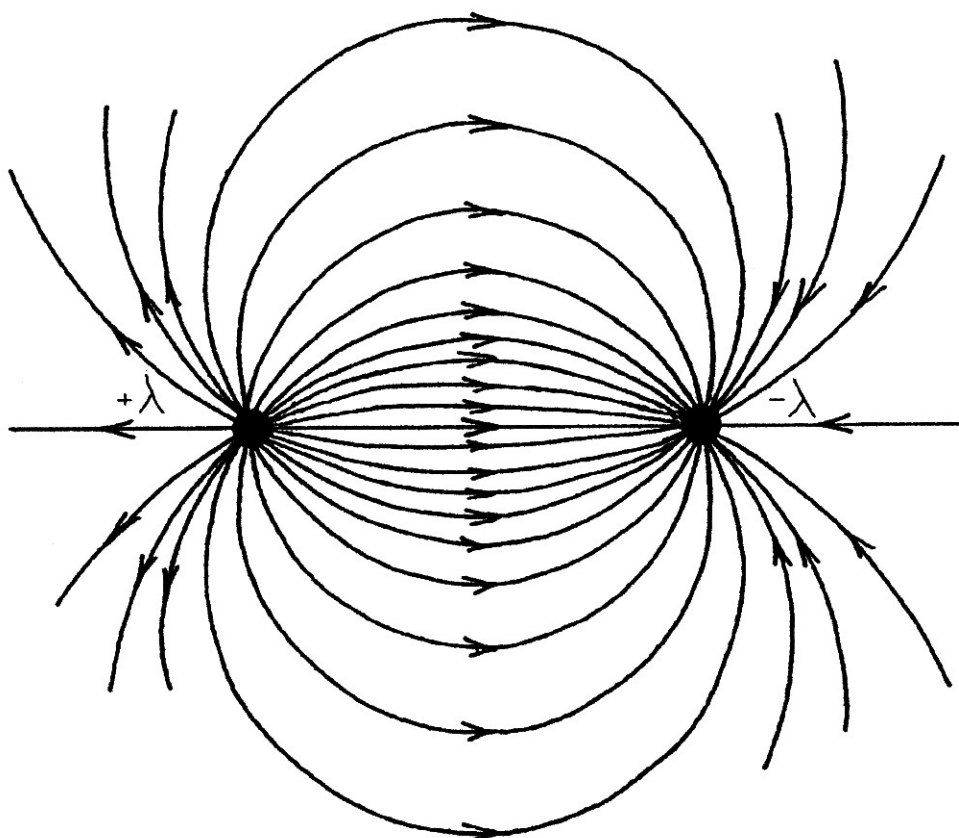
- le seul cas où deux lignes de champ se croisent est celui où une particule chargée se trouve à leur intersection. Donc, en l'absence de particules chargées, les lignes de charge ne se croisent pas.
- les lignes de champ sont continues dans toute région de l'espace ne contenant aucune charge. Ainsi, une ligne de champ doit avoir son origine sur une particule chargée positive et son extrémité sur une particule chargée négative. Aucune ligne de champ ne peut s'effacer en un point où ne figure aucune charge. Lorsqu'on est en présence que d'une seule charge (positive ou

négative), les lignes de champ aboutissent à l'infini, ce qui revient à dire qu'il existe à l'infini une charge de signe opposé telle que les lignes de champ y aient leur origine ou leur extrémité.

Comme exemple, on peut considérer le champ créé par une plaque chargée de dimensions infinies. Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le champ en tout point de l'espace est perpendiculaire à la plaque et d'amplitude constante. On obtient donc la figure suivante :



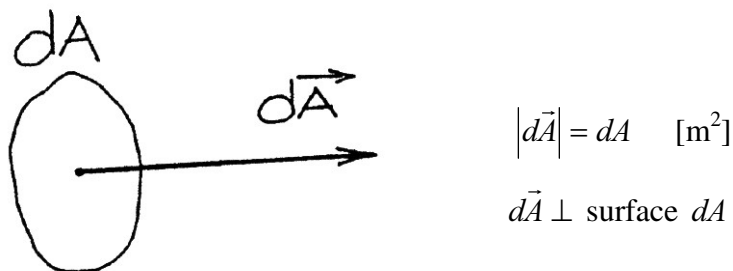
Dans le cas de deux droites parallèles de charges opposées (les deux droites pénètrent dans la feuille), les lignes de champ dans tout plan perpendiculaire aux deux droites ont l'allure suivante :



3.6 Flux électrique

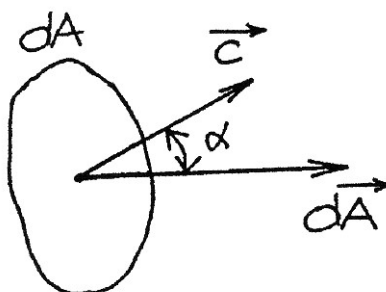
La notion de flux est une notion qui se retrouve dans plusieurs branches de la physique, telles par exemple l'électrostatique, l'électromagnétisme et l'hydraulique. Par flux, on entend en réalité le flux d'un vecteur à travers une surface.

Considérons par exemple un champ vectoriel $\vec{c}$ quelconque : en tout point de l'espace existe donc un vecteur $\vec{c}$ d'amplitude et de direction pas forcément constantes dans cet espace. On considère d'autre part une petite surface élémentaire dA quelconque. Il est courant de représenter cette surface par un vecteur de module égal à la surface et de direction normale à la surface :



L'orientation de $d\vec{A}$ est arbitraire. Dans le cas de surfaces fermées (c'est-à-dire délimitant un volume) on prendra les $d\vec{A}$ pointant vers l'extérieur du volume.

La surface dA est infiniment petite : elle se réduit à un point. On peut donc définir en ce point une valeur de $\vec{c}$.



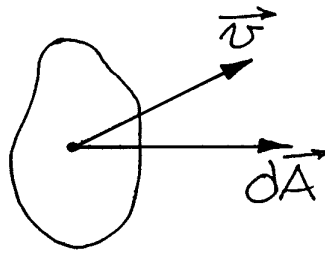
Le flux élémentaire de $\vec{c}$ à travers dA est défini par :

$$d\Phi_c = (\vec{c} \cdot d\vec{A})$$

Il s'agit donc du produit scalaire de deux vecteurs. Si l'angle formé par ces deux vecteurs est α , ce produit scalaire vaut :

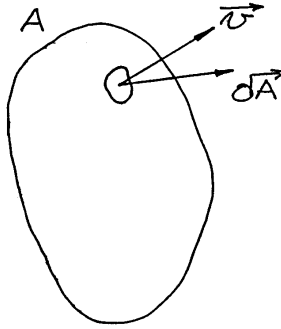
$$d\Phi_c = (\vec{c} \cdot d\vec{A}) = c \cdot dA \cdot \cos \alpha$$

Pour le moment, la notion de flux paraît être très théorique. Elle cesse de l'être si l'on prend par exemple comme vecteur $\vec{c}$, la vitesse d'écoulement $\vec{v}$ de l'eau dans une conduite. On admettra dans ce qui suit que l'eau garde une masse volumique constante. Si l'on prend une petite surface au sein de l'écoulement, on voit que le flux de $\vec{v}$ à travers cette surface n'est rien d'autre que le débit-volume d'eau traversant la surface (en m^3 / s).



$$d\Phi_v = (\vec{v} \cdot d\vec{A}) = d\dot{V} = \frac{dV}{dt}$$

Si l'on prend une surface non forcément plane A , le débit-volume traversant la surface s'exprime par la somme (intégrale) de tous les débits-volumes élémentaires $d\dot{V}$.



Le débit-volume $\dot{V}$ total traversant la surface A vaut :

$$\Phi_v = \dot{V} = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad [\text{m}^3 / \text{s}]$$

On peut noter encore que seule la composante de $\vec{v}$ parallèle à $d\vec{A}$ produit une contribution au débit-volume. En hydraulique, le flux traversant toute surface fermée est nul. Ce n'est pas le cas en électrostatique où le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée peut être soit positif, soit nul, soit négatif. Si le flux d'un vecteur au travers d'une surface fermée est positif, on dit qu'il y a une source à l'intérieur de la surface. Si le flux est négatif, on dit que la surface fermée renferme un puit ou un gouffre. Dans le cas où le flux traversant la surface fermée est nul, on dit qu'il y a absence de sources ou de puits.

Pour revenir à l'électrostatique, on appelle flux du champ électrique au travers d'une surface A la grandeur :

$$\Phi_E = \iint_A (\vec{E} \cdot d\vec{A}) \quad [\text{V} \cdot \text{m}] \quad (\text{I-12})$$

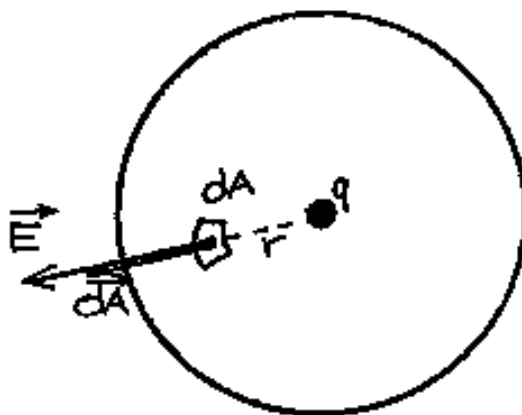
3.7 Loi de Gauss

La loi de Gauss exprime la relation entre le flux électrique traversant une surface fermée et le nombre de charges comprises à l'intérieur du volume délimité par cette surface. Pour commencer, on considère une charge ponctuelle q positive. Celle-ci crée un champ radial dirigé vers l'extérieur

et de module valant :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

On prend ensuite comme surface fermée une sphère de rayon r centrée sur la charge.



Comme on est en présence d'une sphère, tous les vecteurs $d\vec{A}$ sont radiaux, donc de même support et direction que $\vec{E}$.

Le flux du champ électrique à travers une petite surface vaut donc :

$$d\Phi_E = (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = E \cdot dA$$

Si l'on intègre sur toute la sphère, on obtient :

$$\Phi_E = \oint_{\text{sphère}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \oint_{\text{sphère}} \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot dA$$

Comme r est constant sur la sphère, il reste :

$$\Phi_E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot q \oint_{\text{sphère}} dA$$

L'intégrale se réduit à la surface A de la sphère qui vaut :

$$A = 4\pi r^2$$

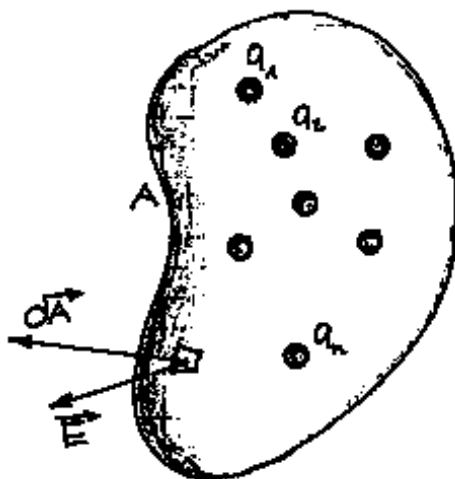
En remplaçant, on trouve :

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Flux du champ électrique sortant de la sphère au centre de laquelle se trouve q .

Le flux du champ électrique sortant d'une sphère au centre de laquelle se trouve une charge ponctuelle positive q vaut q/ϵ_0 .

Si la charge est négative, le champ $\vec{E}$ pointe vers le centre de la sphère. Le produit scalaire est négatif, donc Φ_E aussi. Dans ce cas, c'est donc le flux entrant qui vaut q/ϵ_0 . La relation trouvée par le calcul pour une seule charge et une sphère est en réalité valable dans le cas général. On considère pour cela une surface fermée renfermant n charges $q_1, q_2, \dots, q_n$ pas forcément toutes positives :



On peut montrer que dans un tel cas, on a la relation :

$$\Phi_E = \oint_A (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \frac{1}{\epsilon_0} \quad [\text{V} \cdot \text{m}] \quad (\text{I-12})$$

Le flux du champ électrique sortant d'une surface fermée est égal à la somme algébrique des charges comprises dans le volume délimité par la surface, divisée par la permittivité du vide ϵ_0 .

Cette loi est connue sous le nom de LOI DE GAUSS. Elle permet de calculer facilement, comme on va le voir, le champ électrique créé par des répartitions de charge simples. Il faut noter que, sous le signe somme, les charges doivent être prises avec leur signe. Ainsi, le flux électrique sortant de toute surface fermée comprenant deux charges égales et de signes opposés est nul.

Si les charges positives prédominent dans le volume délimité par la surface fermée A, on est en présence d'une « source de champ électrique ». Si les charges négatives prédominent, il s'agit d'un « puits » pour le champ électrique.

3.8 Calcul du champ électrique à l'aide de la loi de Gauss

La loi de Gauss est une relation de forme intégrale, donc d'abord plutôt difficile. Dans certains cas, elle permet toutefois de calculer simplement le champ électrique. Ces cas sont ceux où l'on peut, a priori, trouver la direction du champ, en général par des considérations de symétrie. On va en donner trois exemples.

1^{er} exemple : calcul du champ électrique créé par une charge ponctuelle q.

On se propose de montrer le raisonnement qui, basé sur la loi de Gauss, permet de retrouver la relation donnant le champ électrique.

Pour des raisons de symétrie, on peut dire que :

- que le champ doit être radial (toute composante non radiale du champ amènerait avec elle une rupture de la symétrie)
- que le champ doit être constant en module sur des sphères ayant la charge q en leur centre.

Pour appliquer la loi de Gauss, on choisit une de ces sphères de rayon r . Sur une telle sphère, tous les $d\vec{A}$ sont radiaux, donc de même support que $\vec{E}$.

On a donc :

$$(\vec{E} \cdot d\vec{A}) = E \cdot dA$$

En intégrant, on obtient :

$$\oint_{\text{sphère}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \oint_{\text{sphère}} E \cdot dA = E \cdot \oint_{\text{sphère}} dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

On en tire donc :

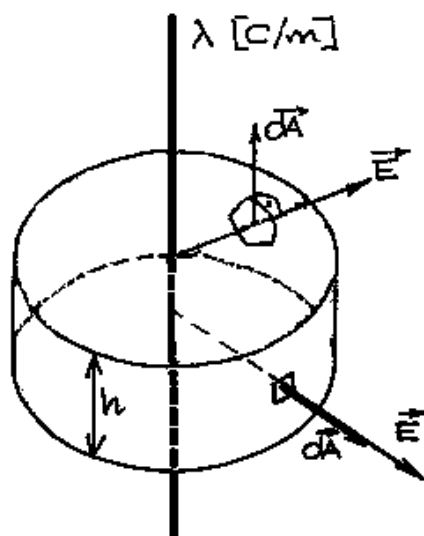
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \quad [\text{V /m}]$$

Cet exemple va évidemment de soi puisqu'on était parti de cette relation pour trouver la loi de Gauss. En reprenant dans ce qui suit la droite chargée et le plan chargé, on va montrer que la loi de Gauss est un instrument très puissant pour le calcul du champ.

2^{ème} exemple : champ créé par un barreau uniformément chargé de longueur infinie.

Comme le barreau est de longueur infinie, tout plan perpendiculaire à celui-ci est un plan de symétrie. Le champ est donc radial et d'amplitude constante sur des cylindres d'axes confondus avec le barreau.

Pour l'intégration, on prend une portion d'un tel cylindre de hauteur h .



Sur les surfaces supérieure et inférieure, le champ $\vec{E}$ est perpendiculaire au vecteur $d\vec{A}$. Il n'y a donc aucun flux traversant ces surfaces car le produit scalaire est nul.

$$\oint_{\text{surface fermée}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \underbrace{\oint_{\text{surface supérieure}} (\vec{E} \cdot d\vec{A})}_{(=0)} + \underbrace{\oint_{\text{surface latérale}} (\vec{E} \cdot d\vec{A})}_{(=0)} + \underbrace{\oint_{\text{surface inférieure}} (\vec{E} \cdot d\vec{A})}_{(=0)}$$

Sur la surface latérale, les $d\vec{A}$ sont radiaux, tout comme le champ.

On a donc :

$$\oint_{\text{surface fermée}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = \iint_{\text{surface latérale}} E \cdot dA = E(r) \cdot \iint_{\text{surface latérale}} dA = E(r) \cdot 2\pi r \cdot h$$

La charge comprise dans la portion de cylindre vaut, divisée par ε_0 :

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot q = \lambda \cdot h \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$$

En égalant les deux relations ci-dessus, on obtient :

$$E(r) \cdot 2\pi r = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \lambda$$

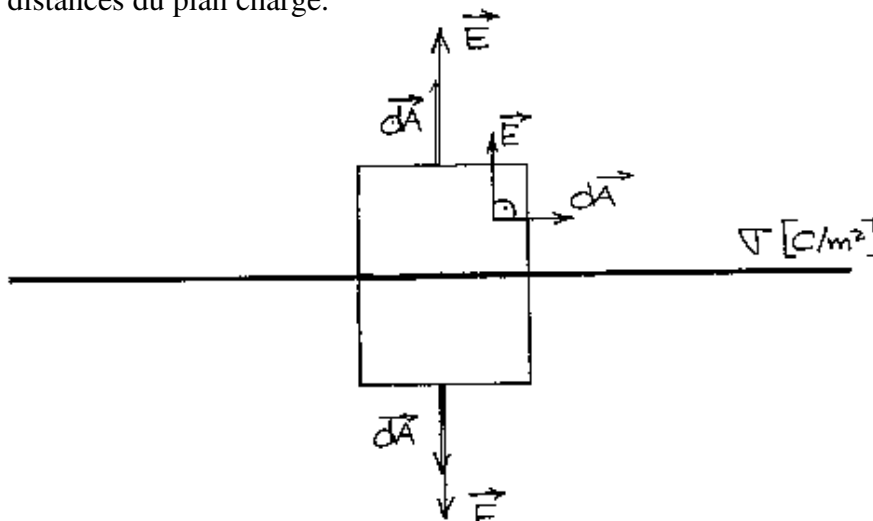
On en tire :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0} \quad [\text{V / m}]$$

On retrouve donc bien le même résultat que dans la première application du paragraphe 3.4.

3^{ème} exemple : champ créé par une plaque de dimensions infinies chargée uniformément (plaque non conductrice).

Vu les dimensions infinies de la plaque, le champ doit être perpendiculaire à la plaque. Son module doit être constant en tout cas à distance constante du plan. On prend comme surface fermée d'intégration un cylindre perpendiculaire au plan et dont les faces supérieure et inférieure sont situées à égales distances du plan chargé.



Sur la surface latérale du cylindre, $d\vec{A}$ est perpendiculaire à $\vec{E}$. Il n'y a donc pas de flux électrique traversant cette surface. D'autre part, le flux traversant la surface supérieure du cylindre est égal à celui traversant la surface inférieure. On a donc, si A est la section du cylindre :

$$\oint_{\text{surface fermée}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = 2 \cdot \int_{\text{surface supérieure}} (\vec{E} \cdot d\vec{A}) = 2 \cdot \int_{\text{surface supérieure}} E \cdot dA = 2EA$$

La charge comprise dans le cylindre vaut :

$$q = \sigma \cdot A$$

d'où :

$$2EA = \sigma \cdot A \cdot \frac{1}{\epsilon_0}$$

ou, finalement :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad [\text{V / m}]$$

On retrouve le résultat de la troisième application du paragraphe 3.4.

Les trois exemples ci-dessus ont montré comment on peut arriver simplement à calculer le champ électrique lorsque la configuration de la charge possède des symétries telles que l'on peut prévoir la direction du champ et prévoir également sur quelles surfaces ce champ est constant. Lorsque ceci n'est pas faisable, il faut avoir recours à la formule générale de calcul du champ :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad [\text{V / m}]$$

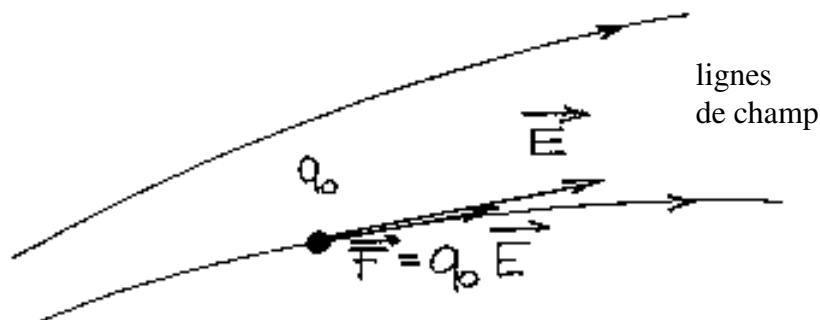
4. Le potentiel électrique

4.1 Energie et champ électrique

On considère une région de l'espace où règne un champ électrique. Toute particule q_0 située dans ce champ est soumise à une force électrique

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E} \quad [\text{N}]$$

de même sens que $\vec{E}$ si q_0 est positive.



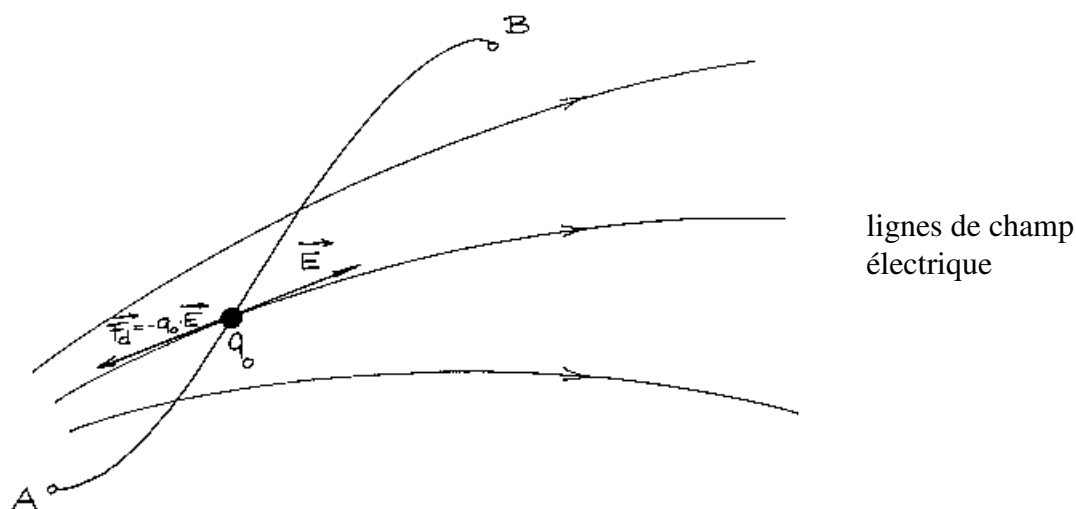
Si elle n'est pas retenue, la charge q_0 se déplace dans le sens de $\vec{F}$.

Considérons maintenant qu'un observateur veuille faire parcourir un certain trajet à la particule q_0 , et ceci très lentement. Pour cela, il faut tout d'abord neutraliser la force électrique (en exerçant une force égale et de sens opposé) et exercer une force supplémentaire dans la direction où l'on veut mouvoir la charge. La vitesse de déplacement dépendra de l'amplitude de cette force supplémentaire. A la limite, pour avoir un déplacement infiniment lent, on peut considérer qu'il ne faut, en tout point où se trouve la charge q_0 , que compenser la force électrique.

Ceci revient donc à exercer sur la charge une force

$$\vec{F}_d = -q_0 \cdot \vec{E}$$

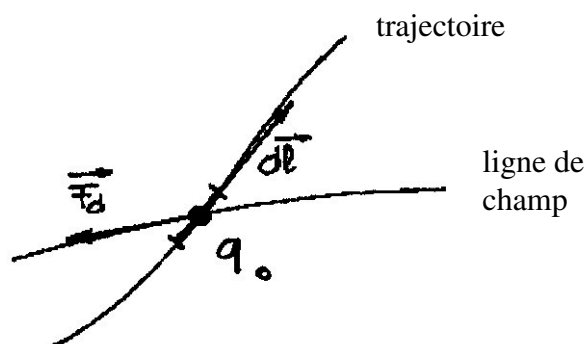
Si l'on veut faire parcourir à q_0 un trajet AB quelconque, il faut fournir un certain travail W_{AB} , c'est-à-dire une certaine quantité d'énergie.



Pour calculer la petite quantité d'énergie (travail) qu'il faut fournir pour faire parcourir à q_0 une petite distance dl le long de la trajectoire, on introduit, en tout point de cette trajectoire, un vecteur élémentaire $d\vec{l}$ tel que :

- $d\vec{l}$ tangent à la trajectoire
- $|d\vec{l}| = dl$

Pour une position quelconque de q_0 sur la trajectoire, on a donc :



Le travail élémentaire à fournir s'exprime alors par :

$$dW = (\vec{F}_d \cdot d\vec{l}) = \text{produit scalaire de } \vec{F}_d \text{ par } d\vec{l}.$$

En remplaçant $\vec{F}_d$ par sa valeur, on trouve :

$$dW = -q_0 \cdot (\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

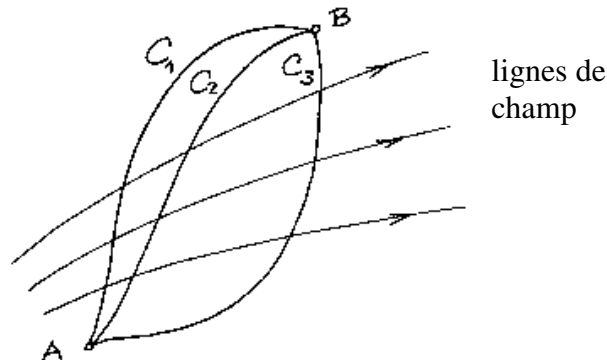
La grandeur $(\vec{E} \cdot d\vec{l})$ est appelée circulation du champ électrique le long de dl.

L'énergie à fournir pour faire passer q_0 du point A au point B s'obtient en sommant tous les travaux élémentaire dW :

$$W_{AB} = -q_0 \cdot \int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{l}) \quad [\text{J}] \quad (\text{I-13})$$

4.2 Potentiel électrique

L'intégrale ci-dessus est appelée circulation de $\vec{E}$ le long de la trajectoire AB. En général, en mathématique, une telle intégrale ne dépend non seulement des limites, mais également du parcours emprunté pour relier A à B. Dans le cas de l'électrostatique, ce n'est pas le cas. Ainsi, dans l'exemple suivant :



on aurait :

$$\int_{\text{Contour } C_1}^B (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_{\text{Contour } C_2}^B (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = \int_{\text{Contour } C_3}^B (\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

L'énergie à fournir pour faire passer q_0 de A à B ne dépend donc pas du trajet emprunté.

Lorsque la circulation d'un champ le long d'un contour ne dépend pas de ce contour, mais uniquement des points de départ et d'arrivée, on dit que le champ est conservatif. C'est donc le cas du champ électrostatique (= champ électrique dans le cas de l'électrostatique).

Le fait que l'intégrale $\int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{l})$ ne dépende pas du trajet emprunté exige mathématiquement

que l'expression sous l'intégrale soit une différentielle totale.

Ceci entraîne qu'il doit exister une fonction de potentiel électrique V telle que sa différentielle s'exprime par :

$$dV = -(\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

(le signe – est posé ici par pure convention).

V est un scalaire appelé potentiel électrique. Un contrôle des unités permet de constater qu'il est bien exprimé en Volt. On dit également dans un tel cas que le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V .

L'énergie à fournir à la charge q_0 pour la faire passer de A à B vaut donc :

$$W_{AB} = -q_0 \cdot \int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = +q_0 \cdot |V|_A^B = (V_B - V_A) \cdot q_0$$

La grandeur $(V_B - V_A)$ est appelée tension ou différence de potentiel entre les points B et A et désignée par le symbole U_{BA} :

$$U_{BA} = V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad \left[\frac{J}{As} = V \right] \quad (I-14)$$

On voit ici qu'aussi bien le potentiel électrique V que la tension U_{AB} correspondent à une énergie par unité de charge.

On retrouve la définition que l'on avait donnée au premier chapitre de ce cours d'électrotechnique : la tension aux bornes d'une source est égale à l'énergie fournie par la source à toute charge unité de 1 C la traversant.

Cette fois-ci, d'une manière plus générale, on peut dire :

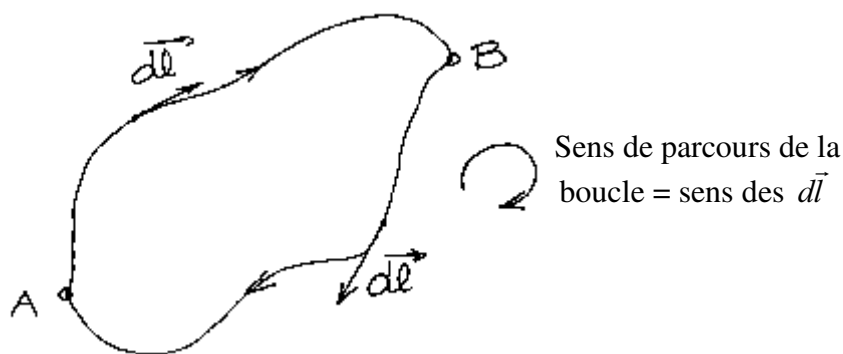
La différence de potentiel ($V_B - V_A$) est égale au travail qu'il faut fournir à une charge unitaire pour la faire passer d'un point A à un point B.

4.3 Circulation du champ électrique le long d'un contour fermé

Comme on vient de le voir, la circulation du champ électrique le long de contours ouverts vaut :

$$(I-15) \quad \begin{array}{l} \text{contour élémentaire : } (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -dV \\ \text{contour AB : } \int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = V_A - V_B \end{array}$$

On peut se poser la question de savoir ce que devient la circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour fermé



On trouve facilement la réponse si l'on définit sur ce contour fermé deux points A et B.

On a en effet :

$$\oint_{\ell} (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) = \int_A^B (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) + \int_B^A (\vec{E} \cdot d\vec{\ell})$$

$$= (V_A - V_B) + (V_B - V_A) = 0$$

En électrostatique, la circulation du champ électrique le long de tout contour fermé est nulle :

$$\oint_{\ell} (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) = 0$$

Ceci est toujours le cas lorsque le champ dérive d'un potentiel.

4.4 Calcul du potentiel en électrostatique

La relation fondamentale permettant de calculer le potentiel est, comme on l'a vu plus haut :

$$dV = -(\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) \quad [\text{V}] \quad (\text{I-16})$$

Si, par la formule classique ou par la loi de Gauss, on arrive à calculer le champ dû à un ensemble de charges, on peut, à l'aide de la relation ci-dessus, calculer le potentiel.

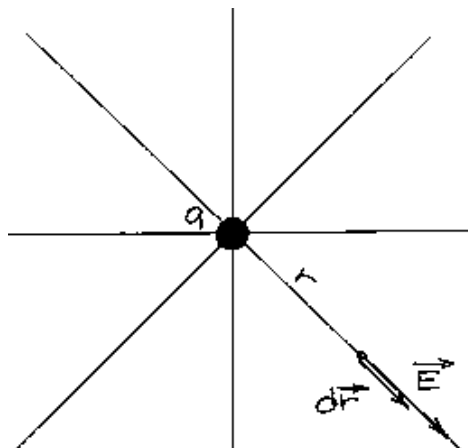
Ceci se fera par intégration de la relation. Il en résulte que le potentiel ne sera connu qu'à une constante près (constante d'intégration). Ainsi, en prenant la circulation de A à B, on trouve la différence de potentiel entre A et B, mais pas la valeur absolue du potentiel.

Dans plusieurs cas, on admettra que le potentiel est nul à une distance infinie des charges qui créent le champ. Ceci est une pure convention.

1^{er} exemple : potentiel dû à une charge ponctuelle q.

Comme on l'a vu plus haut, le champ créé par une telle charge est radial. Son module vaut :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$



Pour calculer V , on calcule la circulation de $\vec{E}$ le long d'un des rayons.

On a alors :

$$d\vec{l} = d\vec{r}$$

$d\vec{r}$ parallèle à $\vec{E}$

On obtient :

$$dV = -(\vec{E} \cdot d\vec{r}) = -E \cdot dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dr}{r^2}$$

En prenant l'intégrale indéfinie, on obtient :

$$V(r) = \int dV = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + Cste$$

Si l'on admet que le potentiel est nul lorsque le rayon est infini, on trouve que la constante est nulle.

On a donc :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{V}]$$

Le potentiel est constant sur des sphères de rayon r centrées sur la charge. On dit que de telles sphères constituent des surfaces équipotentielles.

La différence de potentiel entre deux sphères de rayons r_1 et r_2 s'exprime par :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad [\text{V}]$$

2^{ème} exemple : potentiel créé par une droite chargée

On sait que dans un tel cas, le champ est également radial et que son amplitude vaut :

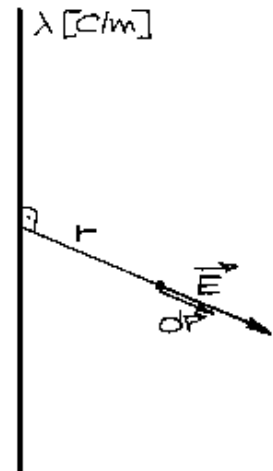
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

On pose de nouveau : $d\vec{l} = d\vec{r}$ et on intègre le long du rayon :

$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{dr}{r} = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln(r) + Cste$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln(r) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln(k)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{k}{r}\right) \quad \text{où } k = cste$$



Ici, on ne pourrait pas poser que le potentiel est nul à l'infini, car cela nous donnerait un potentiel infini à toute distance finie de la droite.

On posera plutôt que le potentiel est nul à une certaine distance r_0 de la droite. On en tire :

$$V(r_0) = 0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{k}{r_0}\right)$$

Ceci est vérifié si $k=r_0$. Donc :

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \quad \text{avec } V(r_0) = 0$$

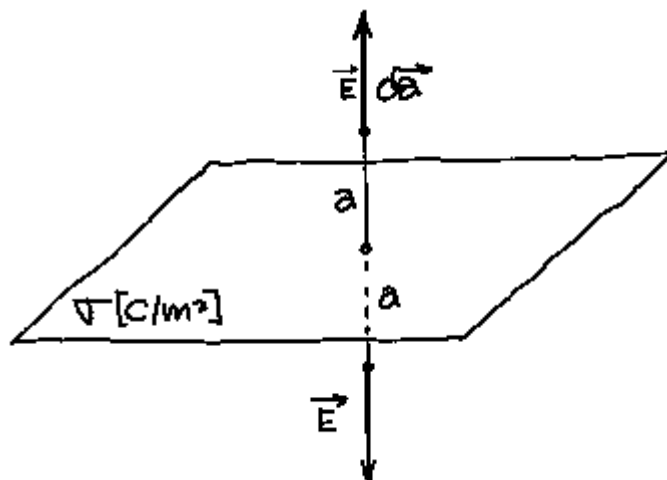
Les surfaces équipotentiellles sont des cylindres axés sur la droite chargée. La différence de potentiel entre deux cylindres de rayons r_1 et r_2 vaut :

$$V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad [\text{V}]$$

Ceci est valable quel que soit le potentiel de référence choisi.

3^{ème} exemple : potentiel dû à une plaque chargée infinie

Le champ est perpendiculaire à la plaque. Son amplitude vaut : $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$



En prenant la circulation le long d'une droite perpendiculaire à la plaque, on trouve :

$$dV = -E \cdot da = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot da$$

ou, en intégrant :

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot a + cste$$

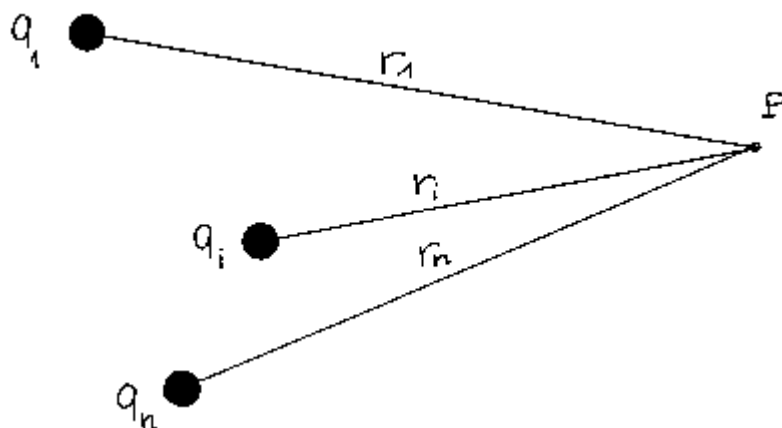
Si l'on admet que $V = 0$ à une distance a_0 de la plaque, on a :

$$V(a) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot (a_0 - a) \quad \text{avec } V(a_0) = 0$$

Les surfaces équipotentielles sont donc des plans parallèles à la plaque chargée. La différence de potentiel entre deux plans distants de d vaut :

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot d \quad [\text{V}]$$

4^{ème} exemple : calcul du potentiel créé par n charges concentrées $q_1, q_2, \dots, q_n$



Le principe de superposition qui était valable pour le champ $\vec{E}$ est encore valable pour le potentiel V . Si l'on admet que V est nul à l'infini, le potentiel créé par q_i en P vaut :

$$V_i(P) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

En sommant, on trouve :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \text{ avec } V(\infty) = 0 \quad [V] \quad (\text{I-17})$$

Alors que, dans le cas du champ, on avait à faire à une somme vectorielle des champs partiels, ici, on n'a plus qu'une somme de grandeurs scalaires. Les r_i sont des grandeurs positives (distances). Les q_i peuvent être positives ou négatives et doivent être prises avec leur signe.

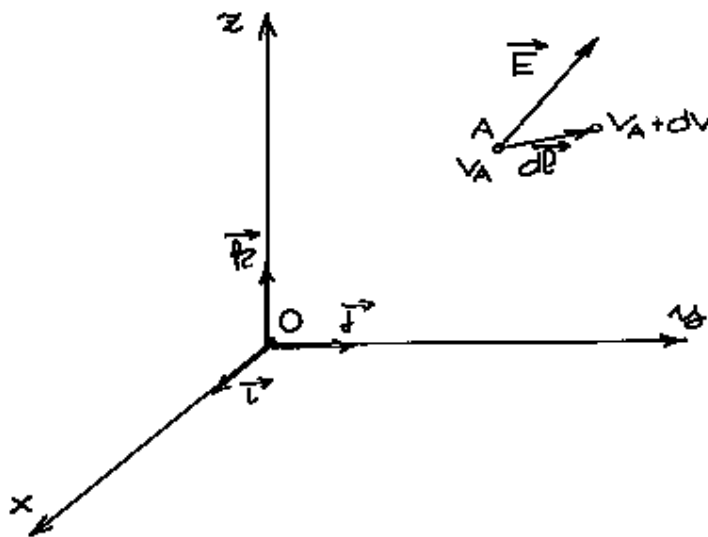
4.5 Calcul de $\vec{E}$ à partir de V

Dans ce qui précède, on a admis que l'on partait des charges, que l'on en tirait le champ $\vec{E}$ et, qu'à partir de $\vec{E}$, on calculait V . On pourrait concevoir le problème inverse, c'est-à-dire celui où V serait donné en tout point de l'espace et où il faudrait calculer $\vec{E}$.

La relation de départ est donc toujours la même :

$$dV = -(\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

Elle nous permet, si le potentiel et le champ $\vec{E}$ sont connus en un point A de l'espace, de calculer le potentiel $V_A + dV$ en tout point relié à A par le vecteur infinitésimal $d\vec{l}$. Considérons un repère cartésien O_{xyz} :



Considérons tout d'abord que l'on s'éloigne de A dans la direction x (en laissant constantes les coordonnées y et z). On a alors :

$$d\vec{l} = \vec{i} \cdot dx$$

d'où :

$$dV|_{y=cste, z=cste} = -(\vec{E} \cdot \vec{i}) \cdot dx = -E_x \cdot dx$$

On obtient dans ce cas particulier où y et z sont constantes :

$$E_x = -\frac{dV|_{y=cste, z=cste}}{dx}$$

où dV est la variation de V lorsque y et z sont constantes et que seul x varie.

Cette condition correspond tout à fait à celle posée dans le cas de la dérivation partielle. On peut donc écrire :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

et, en répétant le raisonnement pour y et z :

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ou encore :

$$\boxed{-\vec{E} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad [\text{V / m}]} \quad (\text{I-18})$$

On comprend bien ici l'expression « le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V ».

Exemple :

$$V(x, y, z) = ax^2y + bz^2 \quad [\text{V}]$$

donné

$$\vec{E} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2axy \\ ax^2 \\ 2bz \end{vmatrix} \quad [\text{V / m}]$$

vecteur
champ
électrique

Le champ $\vec{E}(\vec{r})$ dérive du potentiel électrique $V(\vec{r})$.

4.6 Surfaces équipotentielles et conducteurs

On considère une région de l'espace où existe un champ électrique $\vec{E}$, accompagné de la fonction de potentiel V qui lui est associée.

On dit qu'une surface (qu'elle soit mathématique ou physique) est une surface équipotentielle si le potentiel est le même en tout point de la surface. Sur une telle surface, le potentiel obéit à la relation :

$$V(x, y, z) = cste$$

Les surfaces équipotentielles ont diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles les deux suivantes, qui découlent directement de la définition :

- 1) Le travail requis pour mouvoir une particule chargée d'un point à un autre de la même surface équipotentielle est nul.
- 2) Les lignes de champ électrique sont en tout point de l'espace perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

La première propriété est évidente puisque le travail nécessaire à mouvoir une charge q_0 de A à B s'exprime par :

$$W_{AB} = q_0 \cdot (V_B - V_A)$$

W_{AB} est donc nul si $V_A = V_B$.

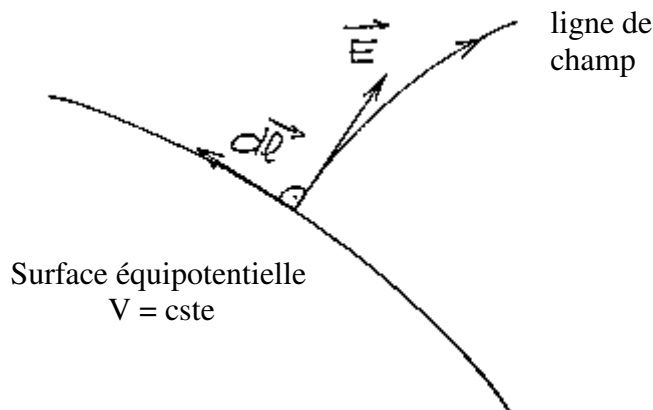
La seconde propriété s'explique par la relation :

$$(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -dV$$

Pour tout trajet situé sur une surface équipotentielle, on doit avoir $dV = 0$, donc

$$(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0$$

Ceci est le cas lorsque $\vec{E}$ est perpendiculaire à $d\vec{l}$. Comme $d\vec{l}$ est tangent à la surface équipotentielle, $\vec{E}$ lui est donc perpendiculaire. Il en va de même des lignes de champ puisque $\vec{E}$ est tangent à celles-ci.



Une des plus importantes applications de cette notion de surfaces équipotentielles concerne les conducteurs placés dans un champ électrique.

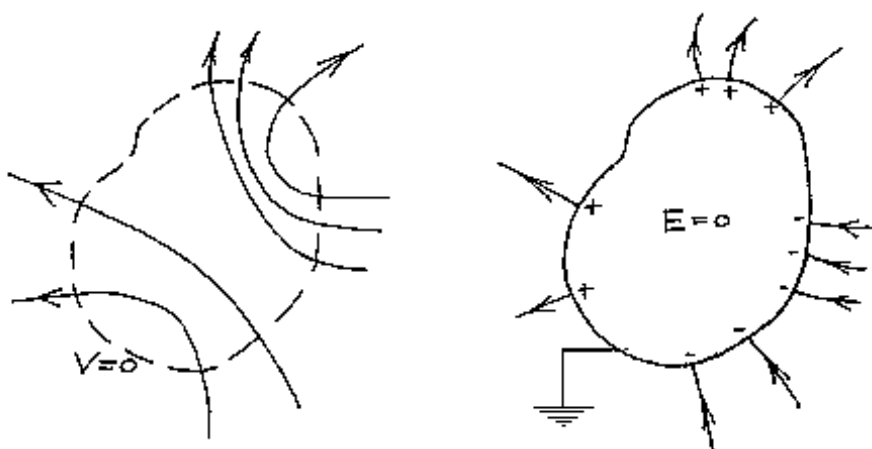
On peut en effet montrer que tout point d'un conducteur placé dans un champ électrique est au même potentiel. A l'intérieur du conducteur, ceci est évident puisque $\vec{E}$ y est nul :

$$(\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -dV = 0$$

A la surface, $\vec{E}$ n'est pas nul, mais il est, comme on l'a montré, perpendiculaire à la surface. La surface du conducteur est donc équipotentielle. On en conclut donc que dV est nul pour tout déplacement à l'intérieur et à la surface du conducteur. D'où :

Tous les points d'un conducteur placé dans un champ électrostatique extérieur sont au même potentiel.

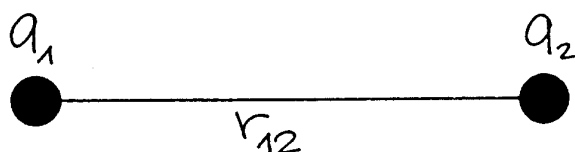
Considérons maintenant une région de l'espace où règne un champ électrique et, dans ce champ, une surface équipotentielle géométrique ayant par exemple le potentiel de la terre (par convention $V=0$).



Supposons que l'on place à l'emplacement de cette surface un conducteur ayant exactement les mêmes dimensions qu'elle et qu'on lui impose le même potentiel (en l'occurrence celui de la terre). Il n'y aura aucun changement dans le champ extérieur, mais, par contre, le champ à l'intérieur disparaîtra. Ainsi, si une surface équipotentielle est remplacée par un conducteur de mêmes dimensions et de même potentiel, les lignes de champ restent les mêmes à l'extérieur. Toutefois, les lignes qui, à l'origine, traversaient la surface équipotentielle prennent dorénavant leur origine ou aboutissent sur les charges induites à la surface du conducteur.

4.7 Energie dans le champ électrostatique

On considère tout d'abord le cas de deux particules chargées q_1 et q_2 situées à une distance r_{12} l'une de l'autre :



L'énergie électrostatique W_Q associée à un tel système est numériquement égale au travail qu'il faudrait fournir pour les amener à la distance r_{12} l'une de l'autre (en admettant qu'au départ la

distance qui les sépare est infinie). Pour calculer W_Q , on part du principe que l'on amène successivement q_1 et q_2 de l'infini à leur position finale.

Si l'on considère tout d'abord q_1 séparément, il ne faut fournir aucun travail puisque il n'existe aucun potentiel dans l'espace dû à d'autres charges. Une fois q_1 en place, elle produit dans l'espace une répartition du potentiel V s'exprimant par :

$$V(q_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r} + cste$$

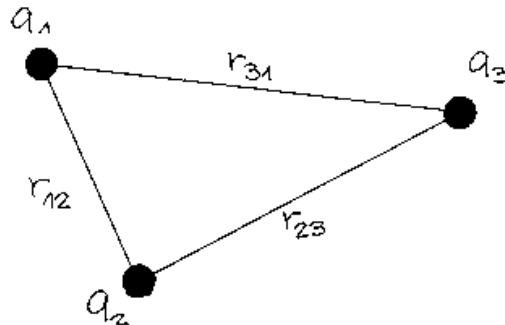
Pour amener q_2 de l'infini, on doit lui faire traverser le champ créé par q_1 , donc lui fournir une énergie :

$$W = q_2 \cdot [V(r = r_{12}) - V(r = \infty)] = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_{12}}$$

L'énergie associée au système des deux particules vaut donc :

$$W_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad [\text{J}] \quad (\text{I-19})$$

Pour un système de trois particules chargées, il suffit d'ajouter à cette énergie celle qu'il faut fournir pour amener à sa position finale, c'est-à-dire pour lui faire traverser le champ dû à q_1 et q_2 .



Le potentiel dû à q_1 et q_2 s'exprime par :

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) + cste$$

Le travail à fournir pour déplacer q_3 vaut :

$$W_{q_3} = V(r_1 = r_{31} / r_2 = r_{23}) - V(r_1 = \infty / r_2 = \infty)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$

En l'ajoutant à l'énergie associée à q_1 et q_2 seules, on arrive à :

$$W_Q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_3 q_1}{r_{31}} \right) \quad [\text{J}] \quad (\text{I-20})$$