

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE



وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة محمد بوضياف المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية

2018-2019

Systemes asservis linéaires continus

[Support de cours]

Destiné aux étudiants, 3^{ème} Année Licence
Électrotechnique & Électromécanique.

Réalisé par : Dr. Yahia LAAMARI

*(Maitre de Conférences Classe B, Département de
Génie-Électrique, Université de M'sila).*

Yahia.laamari@univ-msila.dz

Avant-propos

Depuis très longtemps, l'homme a eu l'idée d'imiter la nature en créant des systèmes à réaction en vue de la régulation de certaines grandeurs physiques. On peut citer à titre d'exemple le régulateur de James Watt (inventé en 1788).

Ce présent travail, issu d'une longue expérience pédagogique acquise au sein du département de Génie-Électrique de l'université de Msila, est destiné particulièrement aux étudiants de 3ème année Licence LMD qui suivent leurs études dans les filières : Électromécanique et Électrotechnique voire les filières automatique et électronique.

Ce support de cours permettra à l'étudiant d'acquérir des connaissances de base sur la théorie des asservissements linéaires continus ainsi que sur les méthodes de représentation et d'analyse transitoire et harmonique des systèmes qui sont à la base de la connaissance des chaînes d'asservissement.

Le présent document peut être scindé en quatre parties essentielles :

La première partie (chapitres 1 et 2) explique la notion de système asservi et expose la base des méthodes linéaires (équations différentielles, Transformées de Laplace, fonction de transfert, pôles et zéros, schémas fonctionnels et graphes de fluence des signaux...etc.)

Une deuxième partie (chapitres 3 et 4) est consacrée à l'analyse des systèmes linéaires continus dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel.

La troisième partie (chapitre 5) traite les performances des systèmes asservis linéaires continus à savoir la stabilité et la précision.

Des exemples et exercices complètent le présent ouvrage. Ils provoquent la réflexion du lecteur, et à ce titre, nous pensons que ce document intéressera non seulement l'étudiant mais aussi bien les esprits curieux de s'initier au nouveau concept de système.

A la fin, on trouve des indications bibliographiques permettant un approfondissement général de l'étude et analyse des systèmes linéaires continus.

J'espère que ce recueil sera apprécié par mes collègues et les étudiants et je serais très content de recevoir avec reconnaissance leurs éventuelles remarques, critiques et suggestions.

Sommaire

Avant-propos	i
Sommaire	ii

Chapitre .I. Introduction aux systèmes asservis

I.1. Introduction	1
I.2. Historique des systèmes asservis.....	3
I.3. Généralités sur les systèmes asservis	4
I.3.1. Définition d'un système de commande	4
I.3.2. Classification des systèmes de commande	6
I.3.2.a. Systèmes linéaires et non linéaires	6
I.3.2.b. Systèmes continus et discrets.....	7
I.3.2.c. Systèmes invariants et variants.	8
I.3.2.d. Système causal et déterministe.	8
I.3.3. Commandes en boucle ouverte et en boucle fermée	9
I.3.3.a. Commande en boucle ouverte.....	9
I.3.3.b. Commande en boucle fermée.....	10
I.4. Système asservi (ou asservissement).....	12
I.4.1. Définition :	12
I.4.2. Régulation et asservissement	13
I.4.2.a. Régulation	13
I.4.2.b. Asservissement	13
I.4.3. Organisation générale d'un système asservi	14
I.4.3.a. Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement	14
I.4.3.b. Nature des signaux d'entrée et de sortie d'un système asservi	14
I.5. Performances des systèmes asservis	16
I.6. Méthodologie d'étude des systèmes asservis	18
I.7. Conclusion.....	18

Chapitre .II. Modélisation des systèmes asservis linéaires

II.1. Introduction	1
II.2. Modélisation mathématique des systèmes	1
II.2.1. Définition	1
II.2.2. Étapes d'obtention du modèle de comportement	1
II.3. Transformation de Laplace.....	3
II.3.1. Transformée de Laplace (directe)	3
II.3.2. Transformée de Laplace inverse	4
II.4. Propriétés des Transformées de Laplace	4
II.4.1. Linéarité.....	4
II.4.2. Théorème de la valeur finale et initiale	5
II.4.3. Théorème de dérivation.....	5
II.4.4. Théorème de l'intégration	6
II.4.5. Théorème de retard (translation des temps)	6
II.4.6. Théorème de décalage fréquentiel.....	7
II.4.7. Changement d'échelle du temps	7
II.4.8. Quelques opérations dans le domaine complexe.....	7
II.5. Décomposition en fractions simples	9
II.6. Représentation des systèmes linéaires continus	12

II.6.1.	Fonction de transfert.....	12
II.6.2.	Schéma fonctionnel	14
II.6.2.a.	Connexion en cascade (ou série).....	14
II.6.2.b.	Connexion en parallèle	14
II.6.2.c.	Connexion en opposition parallèle (cas du système asservi).....	15
II.6.2.d.	Cas d'un système asservi à entrées multiples (ou avec perturbation).....	16
II.6.3.	Procédure à suivre pour établir un schéma fonctionnel	17
II.6.4.	Règles de transformation des schémas fonctionnels	18
II.6.5.	Graphe de fluence des signaux (GFS).....	20
II.6.5.a.	Définitions.....	20
II.6.5.b.	Règles de construction du GFS	21
II.6.5.c.	Règle de Mason.....	22

Chapitre .III. Réponses temporelles des systèmes linéaires

III.1.	Introduction	26
III.2.	Réponses temporelle des systèmes linéaires	27
III.2.1.	Système du premier ordre.....	27
III.2.2.	Réponses temporelles du système de 1er ordre :.....	27
III.2.3.	Système du second ordre	31
III.2.4.	Réponses temporelles du système de 2 ^{ème} ordre	31
III.3.	Caractéristiques de la réponse d'un système de second ordre	36
III.3.1.	En régime transitoire	36
III.4.	Systèmes d'ordre supérieur	41
III.5.	Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système	42

Chapitre .IV. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

IV.1.	Introduction	44
IV.2.	Vue d'ensemble des méthodes d'analyse fréquentielle.....	44
IV.3.	Notions de base sur les fonctions complexes	45
IV.4.	Principe de l'analyse fréquentielle (ou harmonique)	45
IV.5.	Représentation de la réponse fréquentielle.....	47
IV.5.1.	Courbes de Bode et diagrammes asymptotiques	47
IV.5.2.	Diagramme de Nyquist.....	52
IV.5.3.	Diagramme de Black (ou de Nichols)	54

Chapitre .V. Stabilité et précision des systèmes asservis linéaires continus

V.1.	Introduction	56
V.2.	Concept de stabilité.....	56
V.3.	Stabilité des systèmes.....	57
V.3.2.	Condition générale de la stabilité des systèmes	57
V.3.3.	Détermination de la stabilité d'un système asservi	58
V.4.	Méthodes algébriques de Stabilité.....	59
V.4.1.	Calcul des pôles de la fonction de transfert.....	59
V.4.2.	Critère de stabilité de Routh.....	60
V.4.3.	Critère de Hurwitz	64
V.4.4.	Critère de Mikhaïlov	65
V.5.	Méthodes graphiques de Stabilité.....	66
V.5.1.	Critère de stabilité de Nyquist (1932)	66
V.5.1.a.	Théorème de Cauchy	66
V.5.1.b.	Application du théorème de Cauchy au système asservi	67

V.5.1.c. Énoncé du critère de Nyquist	68
V.5.1.d. Choix du contour d'exclusion de Nyquist	69
V.5.2. Critère du Revers (critère graphique)	71
V.5.2.a. Critère du Revers dans le plan de Bode	71
V.5.2.b. Critère du Revers dans le plan de Nyquist	71
V.5.2.c. Critère du Revers dans le plan de Black ou Nichols	72
V.5.3. Marge de stabilité (stabilité relative)	72
V.5.3.a. Marge de gain (MG)	72
V.5.3.b. Marge de phase ($M\phi$)	72
V.6. Précision des systèmes asservis	74
V.6.1. Précision statique	74
V.6.1.a. Système sans perturbation et avec une entrée variable	75
V.6.1.b. Système avec perturbations seules	80
V.6.1.c. Cas d'un système quelconque	82
V.6.2. Précision dynamique	82
Annexe A	83
Annexe B	84
Travaux Dirigés	86
Références Bibliographiques	92

Chapitre .I. Introduction aux systèmes asservis

I.1. Introduction

De nos jours, l'automatique s'est introduite dans quasiment tous les domaines qui affectent notre vie quotidienne à savoir : l'électroménager (machine à laver, réfrigérateur,...), les distributeurs de boisson, les ascenseurs, le transport, la robotique, l'aéronautique, l'économétrie...etc.

L'industrie a fait très largement appel à l'automatique : depuis l'introduction de robots dans les chaînes de montage dans le domaine de l'automobile remplaçant certaines interventions humaines jusqu'à la présence de ceux-ci dans des milieux trop hostiles pour l'homme (domaine nucléaire par exemple).

L'automatique communément qualifiée de science des automatismes signifie systèmes qui peuvent réaliser un certain nombre d'opérations sans intervention humaine. Comme nous pouvons le constater dans certains cas, le but est de remplacer l'homme pour des raisons économiques voire sécuritaires.

En effet, un système automatique consiste à substituer les organes humains d'effort, d'observation, de mémoire et de décision par des éléments technologiques (calculateur, automates, circuits électroniques...) et ce, dans le but de:

- ✓ décharger l'homme des tâches répétitives, pénibles et parfois dangereuses;
- ✓ améliorer le rendement et la qualité de la production ;
- ✓ améliorer la précision et la qualité des tâches à effectuer ;
- ✓ augmenter la sécurité des personnes et des équipements...etc.

En fait, par l'automatisation nous souhaitons maîtriser le contrôle d'un certain nombre de grandeurs issues de processus industriels. Ces grandeurs, peuvent être électrique (tension, courant, puissance,...), mécanique (force, vitesse, couple, position,...), hydraulique (débit, pression, niveau,...), thermique (température, gradient) ou autres : humidité, viscosité,...etc.

- Le courant ou la tension de sortie d'une source.
- La vitesse de rotation d'un moteur.
- La température d'un local...etc.

Ainsi, comme le montre le schéma ci-dessous (figure 1.1), on peut distinguer trois grandes catégories de systèmes automatiques :

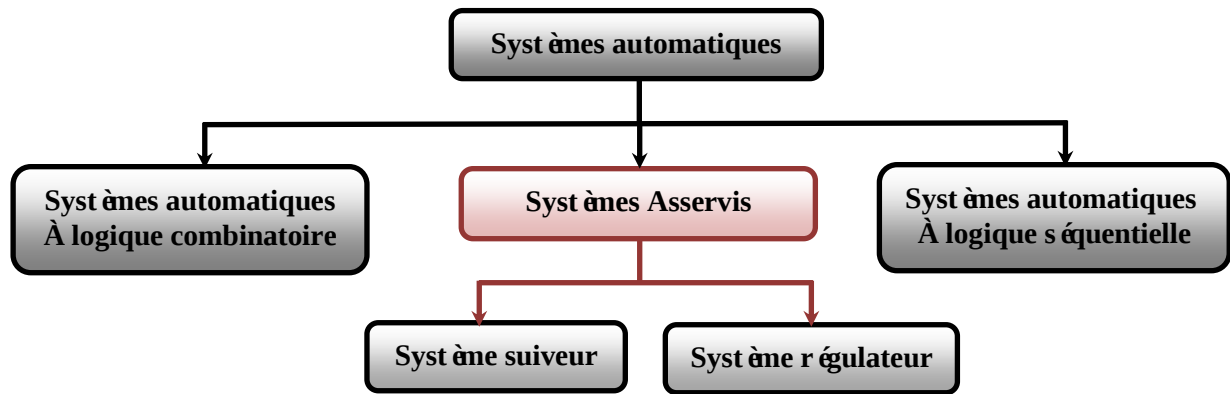


Figure .1.1 Classification des systèmes automatiques

Dans les systèmes automatiques à logique combinatoire (figure 1.2), l'état des variables de sortie à un instant donné ne dépend que du système et des états des variables d'entrée à cet instant. Alors que, dans les systèmes automatiques à logique séquentielle (figure 1.3) l'état des variables de sortie à un instant donné ne dépend pas seulement des états des variables d'entrée à cet instant mais aussi de la valeur de la sortie aux instants antérieurs (i.e. état précédent du système).

Exemples : - Afficheur sept segments, distributeur de boissons ;
- Ascenseur et machine à laver...etc.

En revanche, un système asservi (ou asservissement) est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une entrée donnée (consigne) voir figure 1.4. A titre d'exemples on peut citer: le pilotage automatique d'un avion, le contrôle de la position ou de la vitesse d'un moteur électrique...etc.



Figure .1. 2 Système automatique combinatoire

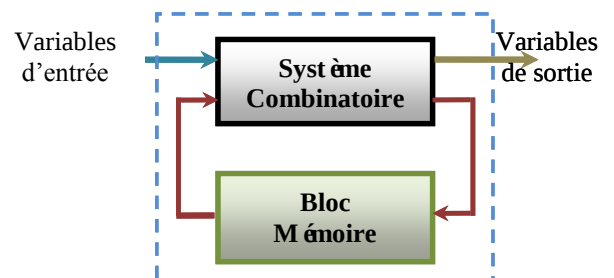


Figure .1. 3 Système automatique séquentiel

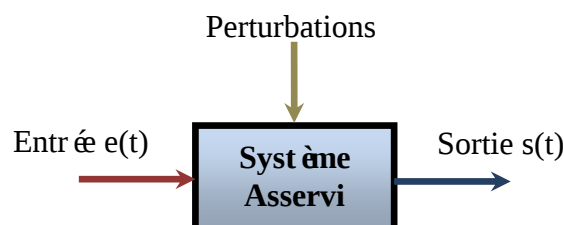


Figure 1.4 Système asservi

Dans ce qui suit, on s'intéressera uniquement **aux systèmes asservis linéaires continus et invariants** qui feront l'objet principal de ce fascicule.

I.2. Historique des systèmes asservis

Le fait que la technique de régulation ait précédé la science de l'automatique s'inscrit dans un processus historique fréquent en science. L'origine de cette technique remonte à l'antiquité (les anciens Grecs), mais le moment déterminant de son histoire est l'invention du régulateur de Watt à la fin du XVIII^e Si ècle. A sa suite, de nouveaux régulateurs sont inventés, souvent inspirés de celui-ci, pour aboutir au début du XX^e si ècle à l'élaboration du régulateur à effets proportionnel, intégral et dérivé (régulateur PID).

Parmi les premiers travaux importants, classés selon l'ordre chronologiques, on peut citer :

- ~ 250 av JC, premières réalisations d'automatismes par les grecs dans l'irrigation et le comptage du temps (clepsydre de Ktesybios). Le principe est fondé sur l'utilisation d'un flotteur régulant le niveau d'un premier bac permettant ainsi de fournir un débit constant dans un second bac dont le niveau établit ainsi la durée écoulée (voir figure 1.5).
- 1785 : L'invention du régulateur à boules par James watt pour la machine à vapeur a permet l'adaptation de la vitesse de rotation d'un arbre à la variation de la charge.
- 1873 : Joseph Farcot (ingénieur français), invente le servomoteur (régulateur de vitesse).
- 1922, Nicolas Minorsky: Étude de la stabilité selon les équations différentielles.
- 1932, Nyquist (Ingénieur américain), étude de la stabilité dans le domaine fréquentiel.
- 1934, Harold Huzen : Mathématisation de la théorie de la régulation avec le premier trait théorique sur les servomécanismes.
- 1940-1950 : Étude théorique des servomécanismes par l'analyse fréquentielle et introduction des notions de marge par Hendrik Bode.
- 1942 : Perfectionnement du régulateur PID en technologie pneumatique et notamment énoncé des règles de réglage du PID par J.G. Ziegler et N.B. Nichols (réglage optimum du régulateur PID).
- 1950 : Naissance de l'automatique (prise en compte de la boucle d'asservissement).
- 1960 : Étude des représentations d'état, de la commande optimale, des systèmes échantillonnés et des systèmes non linéaires.
- 1975 Création en France de l'AFCET, groupe de normalisation, qui proposa le GRAFCET comme méthode d'étude des systèmes automatiques séquentiels et qui devint en 1987 norme internationale. Essor des Automates Programmables Industriels (API).
- 1980 : Régulateur de vitesse automobile ; un capteur renseigne directement le calculateur qui pilote l'injecteur pour maintenir la vitesse désirée (consigne du conducteur),...etc.

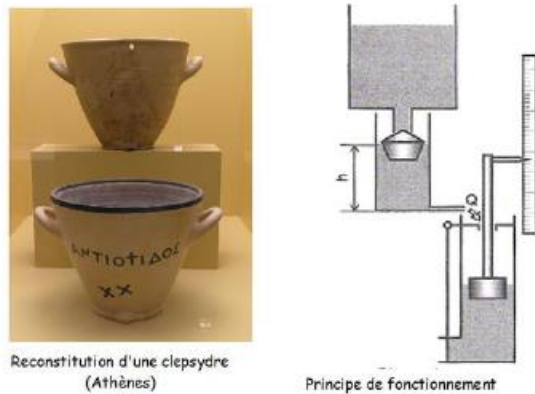


Figure 1.5 Comptage du temps Clepsydre de Ktesybios (~ 250 av. JC)

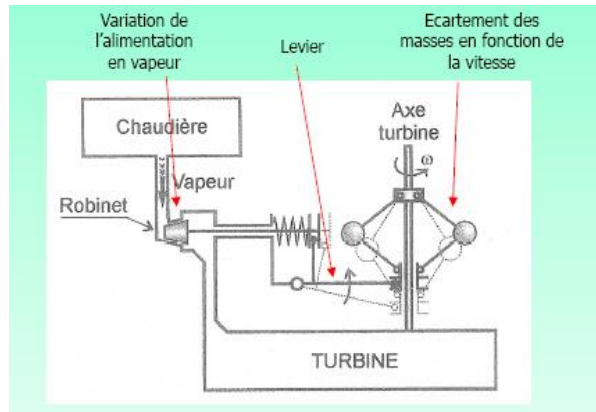


Figure 1.6 Régulateur à boules de James Watt (1785)



Figure 1.7 Régulateur de vitesse automobile (1980)

I.3. Généralités sur les systèmes asservis

I.3.1. Définition d'un système de commande

Un système de commande peut être défini comme une combinaison d'éléments physiques, chimiques, biologiques, ...etc., associés les uns aux autres de façon à former une entité unique, et agissant comme telle, dans le but de s'auto-commander, s'auto-régler et s'auto-diriger ou bien commander, régler, diriger un autre système.

Pour l'automaticien un système de commande ou processus correspond à un ensemble de relations causales entre des grandeurs d'entrées (causes) et des grandeurs de sortie (effets). D'une manière générale, un système peut être représenté par le schéma bloc suivant (figure 1.8):

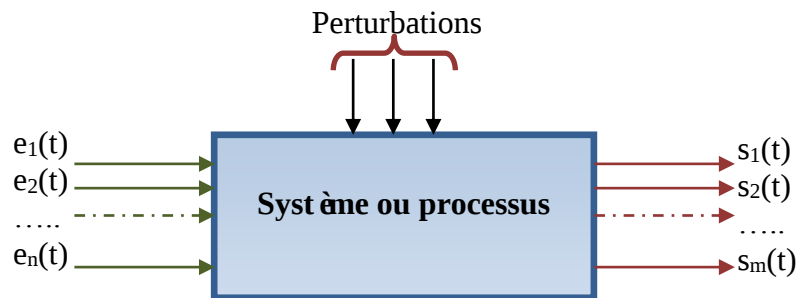


Figure 1.8 Schéma bloc élémentaire d'un système multi-variable

Remarque :

- En général les grandeurs d'entrées et de sortie ne sont pas de même nature. De plus le nombre (m) peut être différent de (n).
- Le nombre (m) est toujours inférieur ou égale à (n) cela veut dire que le système est causal : à chaque entrée il faut au moins une sortie (principe de cause à effet).
- Nous pouvons distinguer les systèmes multi-variables suivants : SIMO, MISO et MIMO. (En anglais les lettres S, M, I et O signifient : S: Single, I: Input, M: Multiple, O: Output).
- Le système à une entrée principale (n=1) et une seule sortie (m=1) est appelé système mono-variable (SISO en anglais).

Un système uni-variable peut être représenté par le schéma suivant (figure 1.9) :

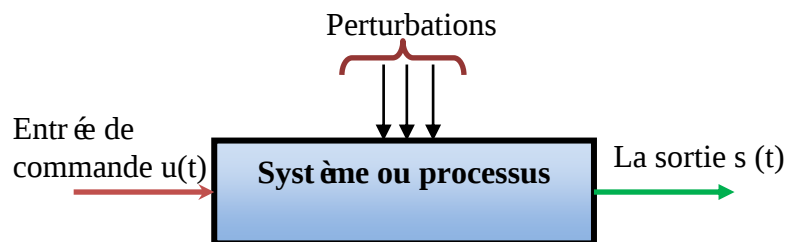


Figure 1.9 Schéma bloc élémentaire d'un système mono-variable

Exemples:

- Un moteur à courant continu est un système (électromécanique) de commande simple.

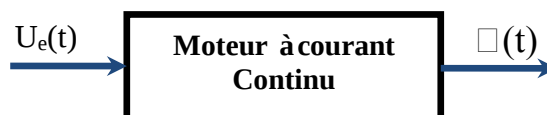


Figure 1.10 Un moteur à courant continu

- Un thermomètre qui contrôle la température d'une pièce est un système de commande ou de contrôle simple.



Figure 1.11 Contrôle de la température d'une pièce par un thermomètre

Un système de commande qu'il soit **multi-variable** ou **mono-variable** communique souvent avec son milieu extérieur par des grandeurs physiques appelées : signaux. Ces derniers peuvent être classés comme suit :

1. **Signaux d'entrée** : Ce sont des grandeurs indépendantes du système (solicitations externes) mais ayant une action sur son état. Ces grandeurs peuvent être de deux types :
 - **Grandeurs contrôlables** : Elles sont appliquées, à partir d'une source d'énergie extérieure, afin de provoquer une réponse spécifique du système.
 - **Grandeurs non contrôlables** : Ce sont des grandeurs d'entrée parasites ou **perturbations** agissant sur le système et qui sont susceptibles de nuire ou modifier la relation fonctionnelle entrée-sortie.
2. **Signal de sortie** : C'est la réponse effective élaborée par le système évoluant à partir de son état initial, sous l'action des signaux d'entrée. Elle peut être coïncidé ou non avec la réponse que doit normalement provoquer le signal d'entrée.
3. **Signal de commande** : Quantité donnant au système l'impulsion nécessaire à la formation du signal de sortie (réponse du système).

I.3.2. Classification des systèmes de commande

I.3.2.a. Systèmes linéaires et non linéaires

Un système physique est dit linéaire si la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est une équation(s) différentielle(s) linéaire(s) et s'il obéit au principe de superposition linéaire. Dans le cas contraire le système est dit non linéaire.

Principe de superposition linéaire:

- Homogénéité : il y a proportionnalité de l'effet à la cause : si $e(t) \rightarrow s(t)$ alors $a.e(t) \rightarrow a.s(t)$ où a est une constante.
- Additivité : les causes ajoutent leurs effets : si $e_1(t) \rightarrow s_1(t)$ et si $e_2(t) \rightarrow s_2(t)$ alors $e_1(t) + e_2(t) \rightarrow s_1(t) + s_2(t)$.

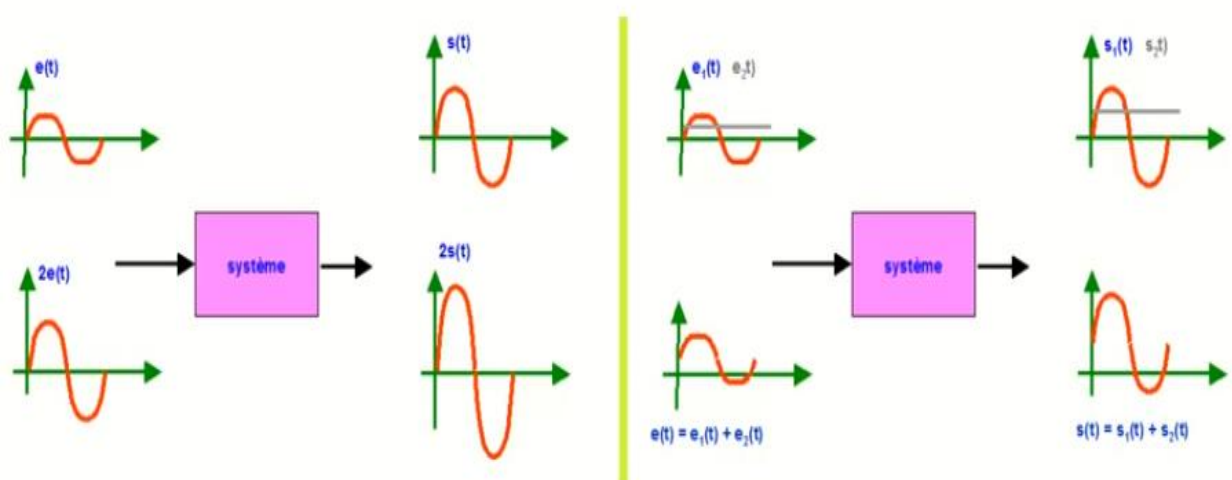


Figure 1.12 Illustration du principe de superposition linéaire

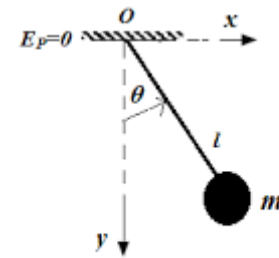
Exemple : Cas d'un pendule simple (sans frottements)

D'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\sum M_f = J\ddot{\theta} \quad \text{avec} \quad J = m.l^2$$

$$\Rightarrow -mgl \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{d'où? } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \Rightarrow \text{Equation différentielle non linéaire}$$



Pendule simple

Le pendule est donc un système non linéaire. Mais pour les oscillations réduites ($\theta \ll 1$) $\Rightarrow \sin \theta \cong \theta$, alors l'équation différentielle précédente devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \text{Equation différentielle linéaire (ou système linéaire)}$$

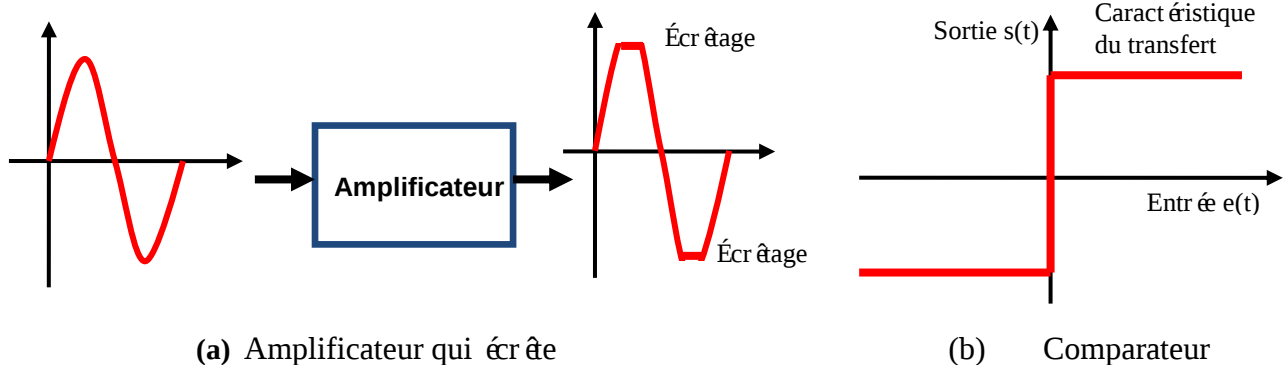


Figure 1.13 Exemples de systèmes non linéaires

I.3.2.b. Systèmes continus et discrets.

- Un système est dit continu si toutes les grandeurs qui le caractérisent sont de nature continue ou analogiques (disponibles à tout moment, à chaque instant).
- Un système est discret (ou échantillonné) si toutes les grandeurs qui le caractérisent ne sont connues qu'à certains instants ($t_1, t_2, \dots$), appelés instants d'échantillonnage.

Exemple : - Radar de poursuite (l'objet est détecté à chaque passage du pinceau) où l'information est disponible périodiquement.

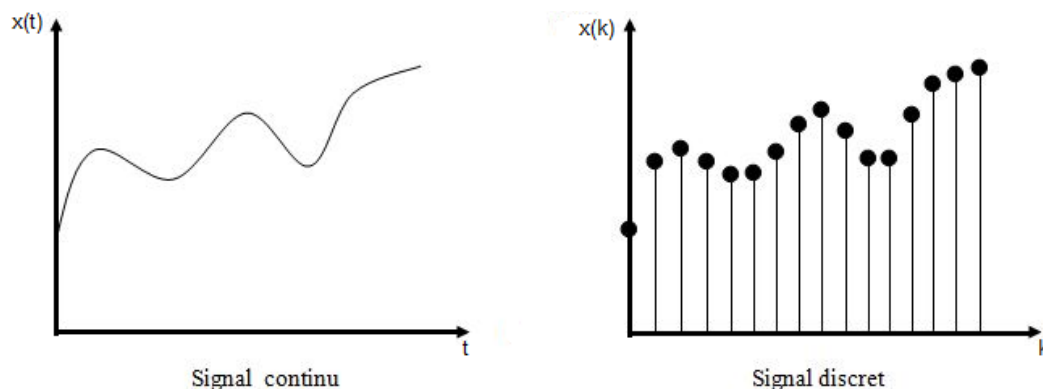


Figure 1.14 Signal continu et signal discret

I.3.2.c. Systèmes invariants et variants.

- Un système est dit **invariant** si la réponse à un signal $e(t)$ différé (retardé) d'un temps τ est la même que la réponse $s(t)$ du système mais retardée de τ . Le système invariant est aussi appelé système à paramètres constants localisés. En d'autres termes, un retard de τ ne change pas la loi du modèle :

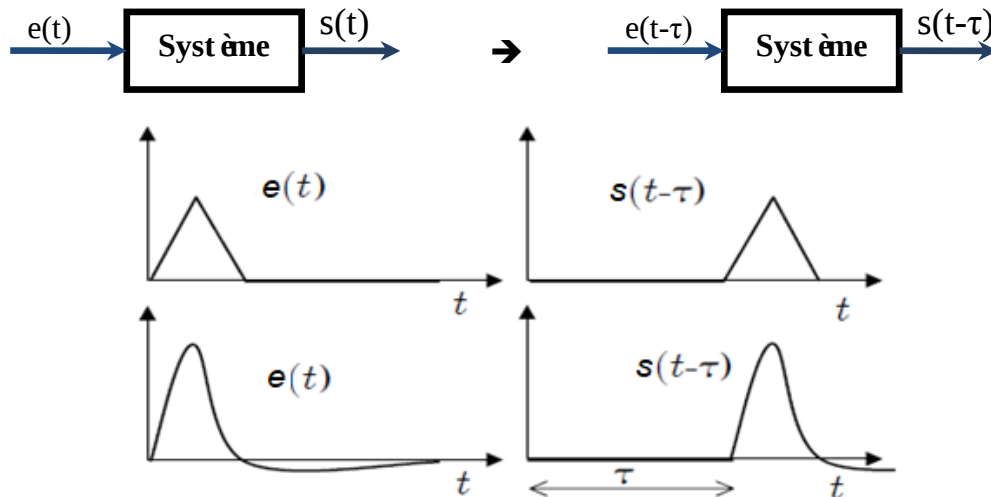


Figure 1.15 Système invariant

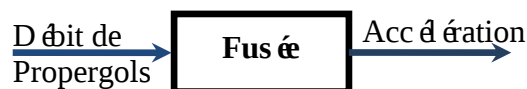
Exemple: Moteur électrique

Si on néglige l'usure, le moteur n'évolue pas dans le temps $\Rightarrow$ le système est invariant.



- Un système est dit **variant** si ses paramètres évoluent avec le temps. C'est à dire on tient compte de vieillissement du système.

Exemple: La fusée



La masse de la fusée diminue au cours de son ascension : En effet, pour un même débit de propergols, l'accélération augmente avec le temps $\Rightarrow$ le système est variant.

I.3.2.d. Système causal et déterministe.

- Un système est dit **causal** si la valeur de la sortie $s(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de l'entrée $e(t)$ pour $t \leq t_0$. C'est le cas de tous les systèmes physiques.
- Un système est **déterministe** si pour chaque valeur d'entrée $e(t)$, il n'existe qu'une seule valeur de sortie $s(t)$ possible. Dans le cas contraire, le système est dit **stochastique** (ou **aléatoire**). Chaque sortie possible est alors affectée d'une probabilité.

La figure 1.16 donne un aperçu sommaire d'une classification des modèles mathématiques associées aux différents types de systèmes. En gras, sont indiquées les classes de modèles qui sont l'objet de ce cours.

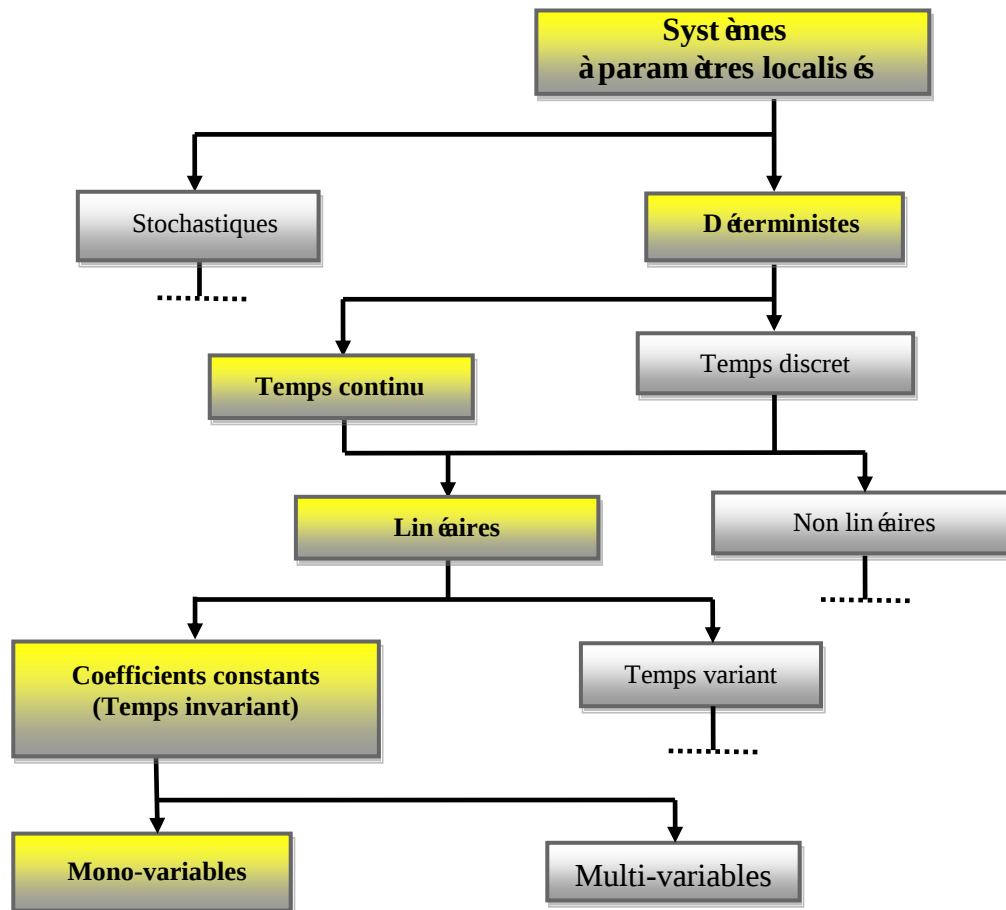


Figure 1.16 Classification des systèmes

Ce cours a pour but l'étude des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires **déterministes continus linéaires à coefficients constants (invariants) et mono-variables**.

I.3.3. Commandes en boucle ouverte et en boucle fermée

Quelle que soit la nature du système à commander (électrique, mécanique, hydraulique...etc.), il est toujours possible de classer les différentes structures de commande en deux grandes familles. Les structures de commande en boucle ouverte et les structures de commande à contre-réaction, appelées également structures de commande en boucle fermée.

I.3.3.a. Commande en boucle ouverte

Dans ce cas, la commande est envoyée en entrée sans contrôle sur la sortie, en d'autres termes le signal de commande est indépendant du signal de sortie.

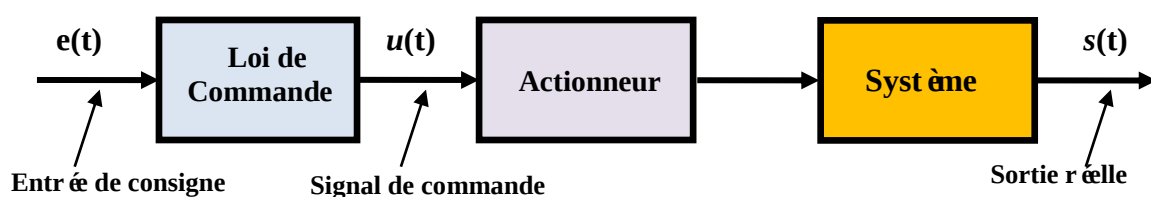


Figure 1.17 Commande en boucle ouverte

Exemples :

- **Machine à laver :** L'exemple typique de ce type de commande est constitué par la machine à laver fonctionnant sur la base de cycles préprogrammés ne possédant pas d'informations mesurées concernant le degré de propreté du linge.

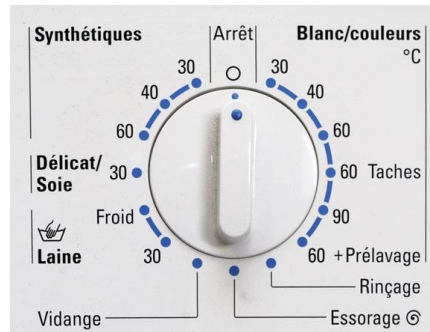


Figure 1.18 Vue externe d'un bouton de commande des cycles de lavage

- **Contrôle du niveau d'eau dans un réservoir**

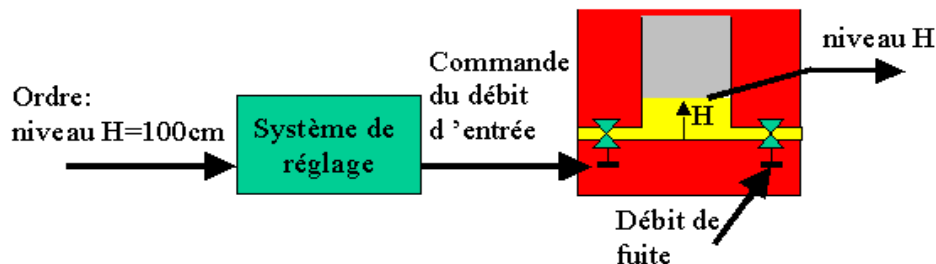


Figure 1.19 Contrôle en boucle ouverte du niveau d'eau dans un réservoir

On peut citer d'autres exemples de commande en boucle ouverte à savoir :

- Interrupteur électrique réglant le passage du courant dans un circuit,
- Chauffage d'une salle par un radiateur électrique commandé par un rhéostat,
- Contrôle de la position d'un lance missile...etc.

Note : Pour utiliser ce type de commande, il est nécessaire de connaître le système et les réponses aux commandes envoyées et en particulier de l'influence des perturbations sur le système, ce qui est rarement le cas en pratique. Cette commande ne permet pas de régler précisément la sortie désirée et corriger l'effet des perturbations. Cette solution est donc envisageable dans le cas où le système est parfaitement connu et modélisé et dans le cas où l'obtention d'une mesure de la sortie n'est pas économiquement possible.

I.3.3.b. Commande en boucle fermée

Pour améliorer les performances de la commande en boucle ouverte et réduire sa sensibilité vis-à-vis aux perturbations, il s'avère alors indispensable de mener cette commande d'un retour (Feedback en anglais) permettant d'observer (ou de mesurer) la sortie réelle du système afin de la comparer à chaque instant à ce que l'on désire obtenir (la consigne). Le résultat de cette comparaison (l'écart ou l'erreur) forme le signal de commande approprié (figure 1.20).

Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante :

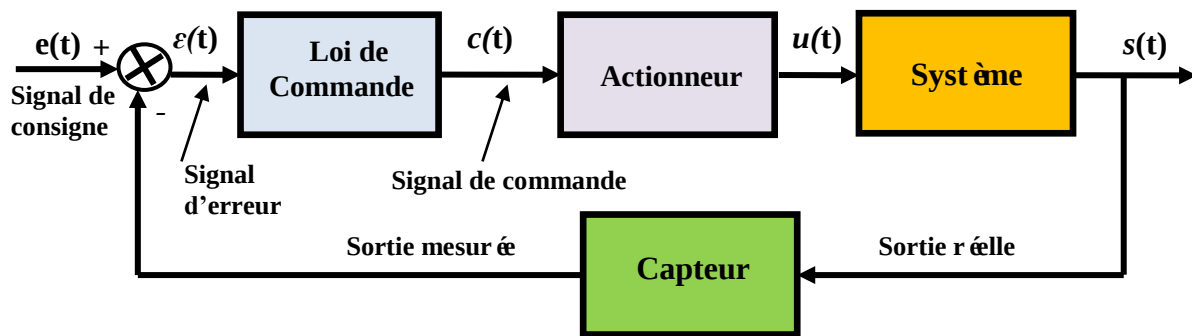


Figure 1.20 Schéma de principe de la commande bouclée

Note : La commande en boucle fermée est ainsi préférable notamment si le système à commander n'est pas parfaitement connu ou si des perturbations non modélisables et/ou des variations imprévisibles des paramètres sont présentes.

Exemples :

Exemple 1- Contrôle de la température d'une enceinte chauffée par un échangeur thermique.

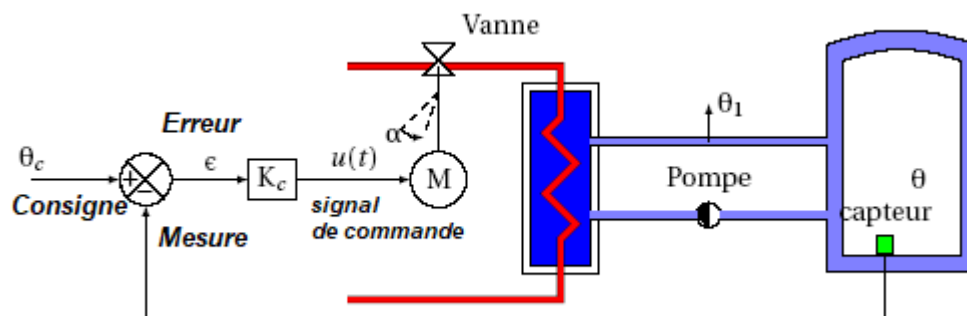


Figure 1.21 Contrôle de la température d'une enceinte

Le système représenté sur la figure 1.21 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v , permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur, afin de réguler la température θ_1 . On choisit de motoriser la vanne et on installe un capteur dans l'enceinte qui permet de mesurer la température $\theta(t)$. Cette température est comparée à la température de consigne θ_c . Un amplificateur K_c génère la tension de commande $u(t)$ du moteur (M) qui ouvre ou ferme la vanne en fonction de l'écart de température.

Exemple 2- Contrôle en boucle fermée de niveau d'eau dans un réservoir

Le dispositif de la figure 1.22 met en oeuvre le réglage de niveau d'eau dans un réservoir. Le débit de fuite est perçu comme une perturbation et donc le but de la régulation est de maintenir le niveau constant égal à un niveau désiré $H_c = 100\text{cm}$ quel que soit ce débit de fuite. Pour ce faire, le niveau H est mesuré indirectement par un capteur de niveau. Le débit Q_e est réglé par une vanne électromécanique (actionneur) dont la commande $u(t)$ est proportionnel à l'écart instantané $e(t)$ entre le niveau de référence et le niveau mesuré. Le schéma fonctionnel de ce dispositif de régulation est représenté par la figure 1.22.

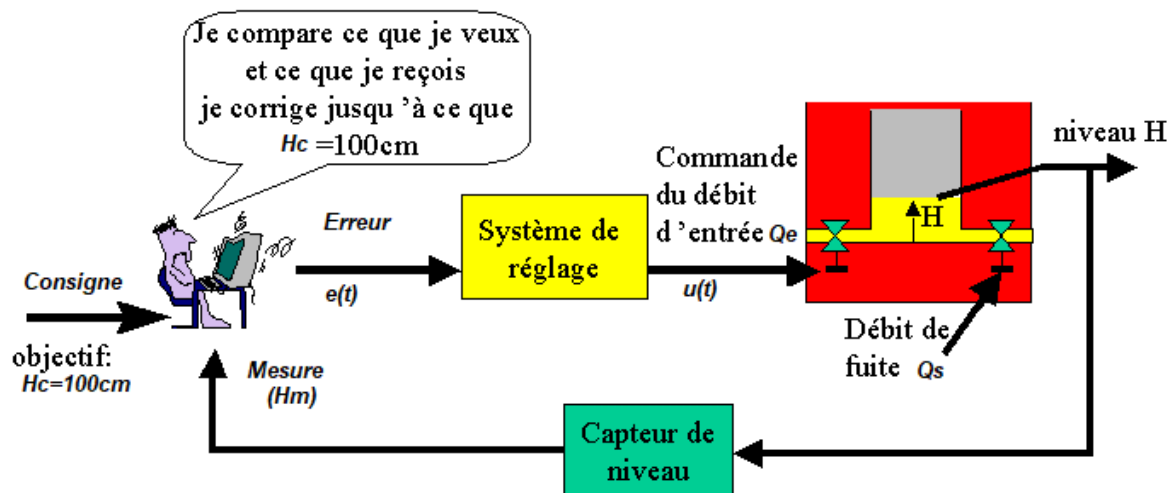


Figure 1.22 Exemple de Régulation de niveau d'eau dans un réservoir

Exemple 3- Le conducteur et son automobile.

Le conducteur doit suivre la direction de la route, pour cela : il observe la route et son environnement et évalue la distance qui sépare son véhicule du bord de la route. Il détermine l'angle qu'il doit donner au volant pour suivre la route. Il agit en conséquence sur le volant, puis il recommence son observation toute la durée du déplacement et ainsi de suite. Le schéma fonctionnel de ce dispositif de régulation est représenté par la figure 1.23.

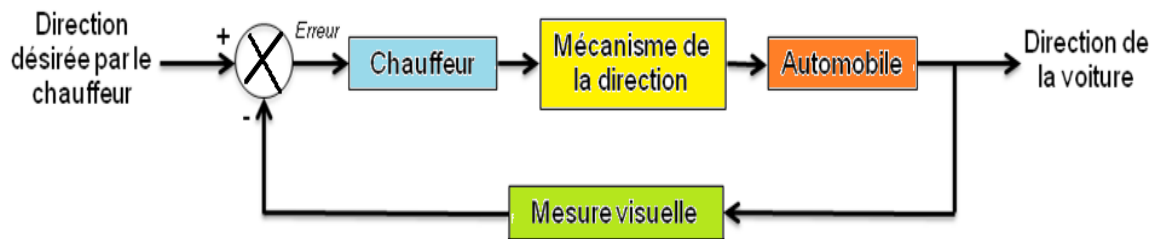


Figure 1.23 Contrôle de la direction de la voiture selon la direction de la route.

I.4. Système asservi (ou asservissement)

I.4.1. Définition :

Un système asservi ou asservissement est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne. Il peut être défini aussi, comme étant, un système de commande muni d'une chaîne de retour (feedback : en anglais), c'est-à-dire il possède une réaction (rétro-action) de la sortie sur l'entrée.

D'une manière générale, un système asservi copie le comportement de l'homme dans les trois phases essentielles de son travail. Cela peut être schématisé comme suit (figure 1.24):

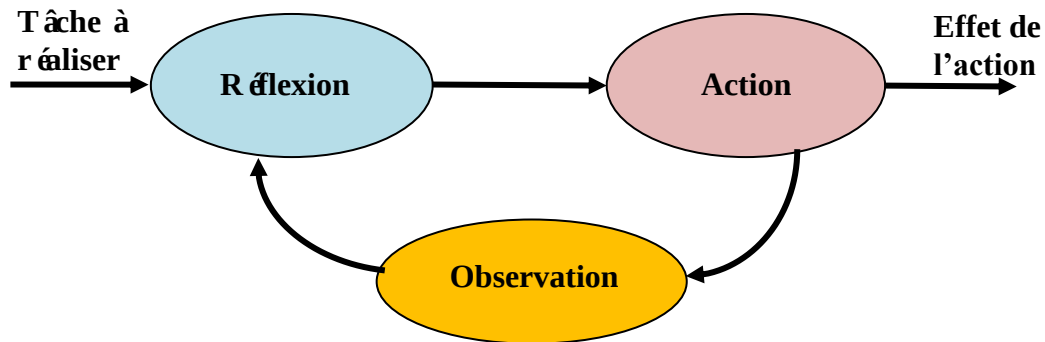


Figure 1.24 Concept d'un système asservi

I.4.2. Régulation et asservissement

I.4.2.a. Régulation

On appelle une régulation un système asservi qui doit maintenir constante la sortie conformément à la consigne indépendamment des perturbations. Cela veut dire, la consigne est constante ou évolue en paliers et le système doit compenser l'effet des perturbations. À titre d'exemples on cite, la régulation de la température dans un four, de la pression dans un réacteur ou du niveau d'eau dans un réservoir.

I.4.2.b. Asservissement

On appelle asservissement un système asservi dont la sortie suivre le plus fidèlement possible la consigne (variable).

Exemples : Suivi de la trajectoire d'un objet mobile (radar de poursuite) ou l'usinage d'une pièce mécanique à partir d'un modèle.



(a) Régulateur de débit



(b) Régulateur de pression



(c) Régulateur de température

Figure 1.25 Quelques types de régulateurs



(a) Radar de poursuite



(b) Usinage d'une pièce mécanique

Figure 1.26 Systèmes de poursuite (asservissement)

I.4.3. Organisation générale d'un système asservi

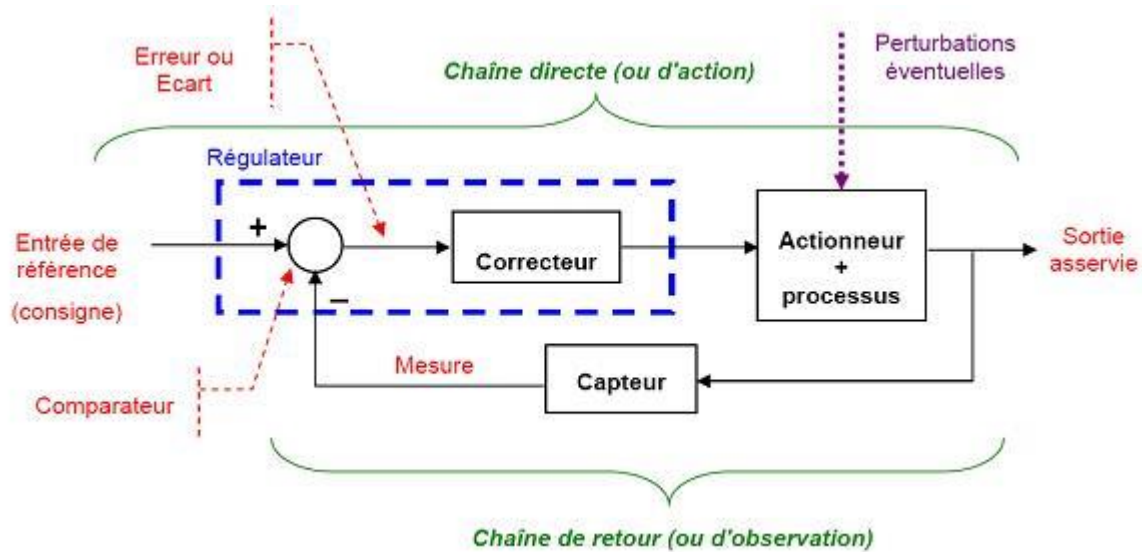


Figure 1.27 Schéma global d'un système asservi

I.4.3.a. Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement

Sous une forme générale et plus simple un système asservi (figure 1.27) est composé de :

- **Chaîne d'action** (ou directe) : assure la commande du processus à régler, elle est souvent appelée chaîne de puissance et dirigée de l'entrée vers la sortie.
- **Chaîne de réaction** (ou de retour) : C'est une chaîne de faible puissance appelée chaîne de précision, elle transmet avec précision la variation de la sortie.

Mais d'une manière plus détaillée dans un système asservi on trouve :

- **Régulateur** : Il se compose d'un comparateur qui détermine l'écart (ou erreur) entre la consigne et la sortie mesurée et d'un correcteur (élément intelligent) qui élabore à partir du signal d'erreur la commande $u(t)$.
Exemple: Le thermostat, Les régulateurs P, PI, PD et PID.
- **Actionneur** : c'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système (processus) pour produire l'effet souhaité. Sa fonction fondamentale est donc l'exécution. Il travaille souvent à de très hautes puissances. C'est le muscle du système.
Exemple: Le servomoteur.
- **Le processus** : c'est l'élément ou la machine qui fait partie du processus technologique et qu'on désire lui imposer une régulation de certains de ces paramètres. Il représente la partie invariable.
- **Capteur** : C'est l'organe qui prélève sur le système la grandeur asservie et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur (mesure).
Exemples : Le potentiomètre, le tachymètre et le thermocouple.

I.4.3.b. Nature des signaux d'entrée et de sortie d'un système asservi

Les signaux d'entrée et de sortie d'un système sont des fonctions du temps :

- Si à chaque instant leur amplitude est parfaitement connue, le signal est dit **déterministe** (Exemple : échelon unitaire, rampe, sinusoïdale,...).
- Si par contre à chaque instant on ne connaît pour le signal que la probabilité d'avoir telle ou telle amplitude on dit que celui-ci est **aléatoire** (Exemple : bruit).

Dans le cadre de notre cours on se limitera aux signaux déterministes. Les entrées typiques d'un système asservi souvent utilisées seront brièvement décrites ci-dessous :

1. **Echelon** : C'est une fonction nulle pour t négatif, égale à une constante E_0 pour t positif (fig.1.28). On la note :

$$e(t) = E_0 \cdot u(t) \quad \text{où } u(t) \text{ est la fonction échelon unitaire}$$

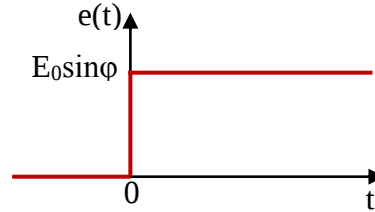


Figure 1.28 Echelon

2. **Rampe (ou échelon de vitesse)** : C'est une fonction nulle pour t négatif, de pente constante α pour t positif (fig.1.29). On la note : $e(t) = \alpha t u(t)$

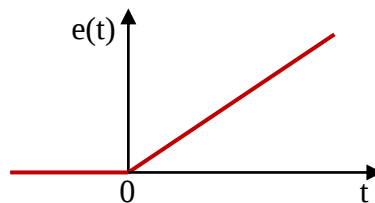


Figure 1.29 Rampe

3. **Impulsion** : C'est la limite d'une fonction nulle en dehors d'un intervalle de temps, mais qui prend dans cet intervalle des valeurs suffisamment grandes pour que son effet total soit notable.

On la note : $e(t) = A \delta(t)$ où $\delta(t)$ est l'impulsion de Dirac, ou impulsion unitaire.

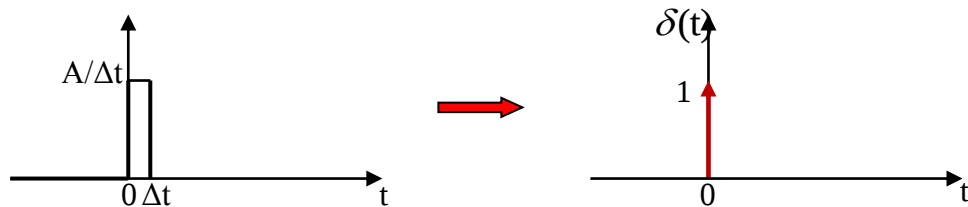


Figure 1.30 Impulsion d'air A lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

La fonction impulsion unitaire possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 & \text{si } t=0 \\ \delta(t)=0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

4. **Parabole** : C'est une fonction causale non linéaire (fig.1.31) donnée par :

$$e(t) = \begin{cases} at^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

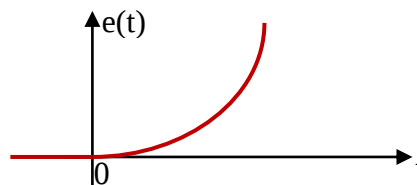


Figure 1.31 fonction parabole

5. **Entrée harmonique** : C'est une fonction sinusoïdale du temps donnée par:

$$e(t) = A \sin(\omega t + \varphi) u(t)$$

On appelle : A l'amplitude (ou valeur de crête)

$\omega = 2\pi f$ la pulsation ou la fréquence angulaire [rad/sec]

f la fréquence en hertz [Hz] ou cycles par secondes.

φ la phase à l'origine, ou phase [radians].

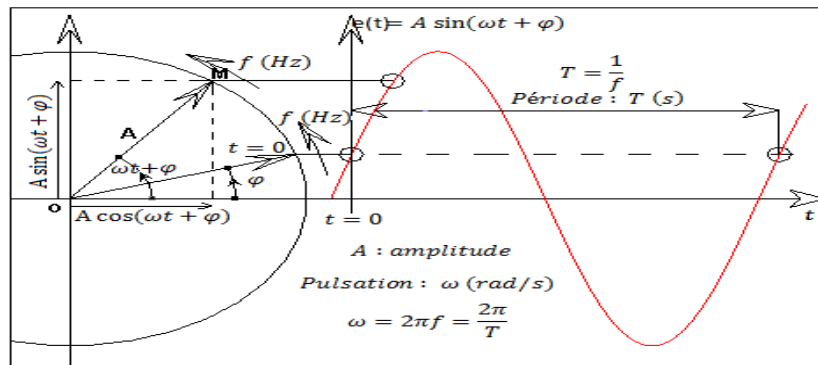


Figure 1.32 Fonction sinusoïdale

I.5. Performances des systèmes asservis

Généralement, les entrées (commandées ou perturbations) auxquelles sont soumis les systèmes asservis sont aléatoires. Cependant, dans la pratique, pour juger les performances de ces systèmes on utilise plus couramment les entrées typiques évoquées ci-dessus (échelon, impulsion, rampe,...etc). Un système asservi est caractérisé par quatre facteurs révélateurs de ses performances :

- Stabilité
- Rapidité
- Précision,
- Amortissement.

Dans ce qui suit, on décrit brièvement, ces quatre principales performances.

• Stabilité

On dit qu'un système est stable si sa sortie tend vers une constante pour une entrée constante. La stabilité est donc le critère que l'on regarde en premier, sinon on ne peut pas analyser les autres critères de performances. Alors, l'instabilité est l'un des problèmes majeurs à régler dans le cadre des systèmes asservis.

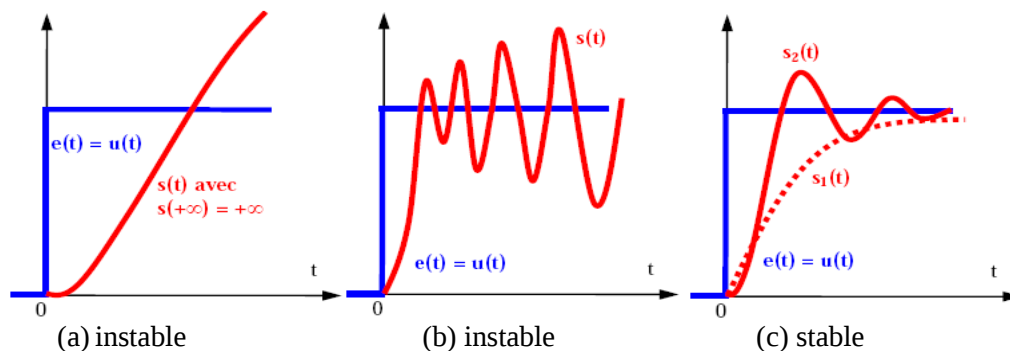


Figure 1.33 Stabilité d'un système

• Rapidité

La rapidité est caractérisée par le temps que met le système pour réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à $\pm 5\%$. Dans la pratique, on utilise le temps de réponse à $\pm 5\%$, c'est le temps mis par le système pour atteindre sa valeur de régime permanent.

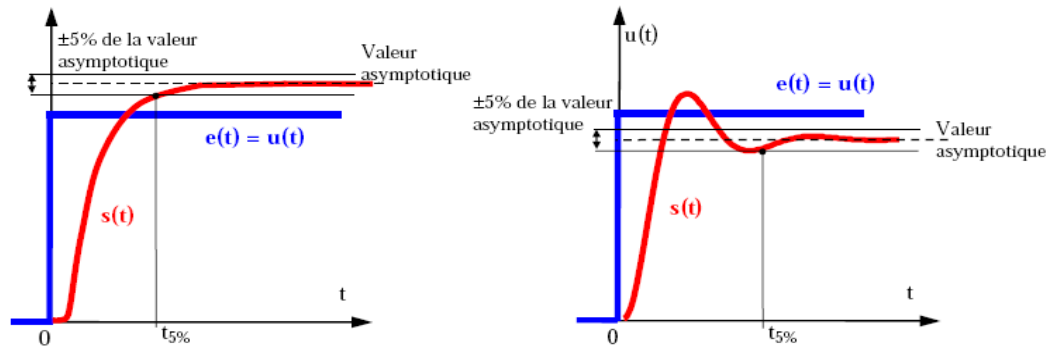


Figure 1.34 Rapidité d'une réponse d'un système

• Précision

Un système est précis si la sortie suit la consigne en toute circonstance (perturbations) et revient à la valeur de consigne après une perturbation. Elle est caractérisée par l'erreur entre la consigne et la valeur de la grandeur de sortie effectivement atteinte. Si l'erreur est nulle, on dit que le système est précis.

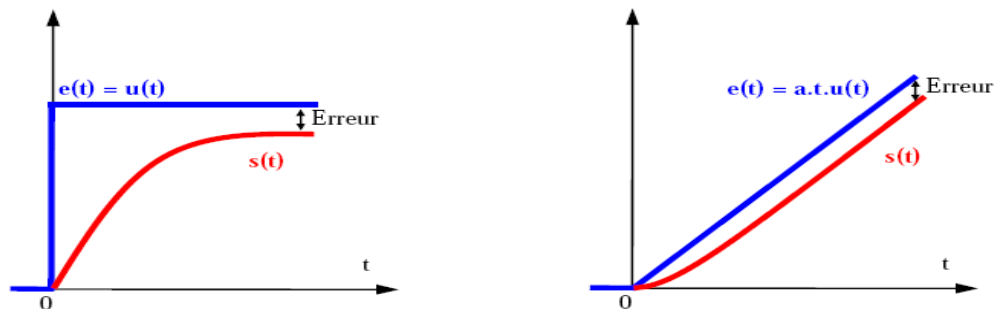


Figure 1.35 Précisions statique et dynamique d'une réponse

• Amortissement (système d'ordre ≥ 2)

L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus la réponse du système est bien amortie.

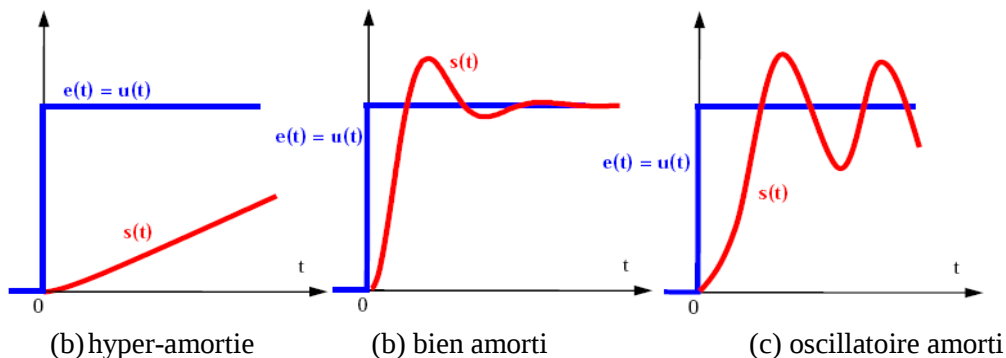


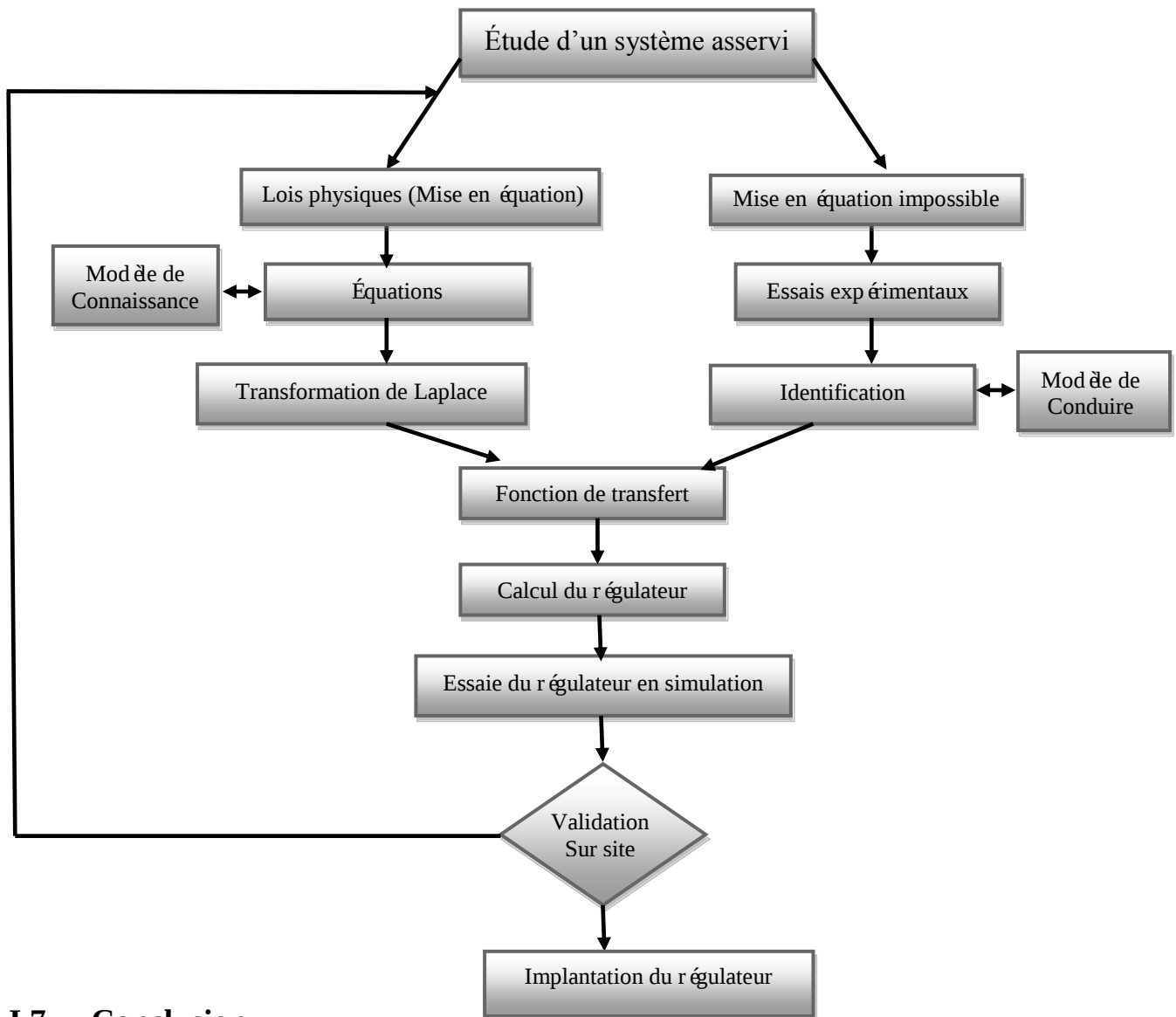
Figure 1.36 Amortissement d'une réponse d'un système

I.6. Méthodologie d'étude des systèmes asservis

Pour concevoir un système asservi, on pourra opérer de la manière suivante :

- Modéliser le système ;
- Choisir le type de commande ;
- Synthétiser le correcteur (ou le régulateur) ;
- Essais et validation.

L'étude d'un système asservi peut se résumer par l'organigramme suivant :



I.7. Conclusion

L'asservissement « idéal » est un système ayant une **bonne stabilité** une **bonne précision** ainsi qu'un **régime transitoire rapide et bien amorti**. Cependant ces critères de performances ne sont pas toujours compatibles. Par exemple, un processus rapide est généralement léger, il a ainsi une faible inertie et risque d'être peu amorti voire instable. D'autre part si on veut améliorer la précision, on raidit l'asservissement et on risque de tomber alors sur un phénomène d'instabilité. Tout l'art de l'automaticien est de réaliser une partie commande permettant de respecter au mieux ces critères est d'aboutir à un bon compromis entre ces performances.

Chapitre .II. Modélisation des systèmes asservis linéaires

II.1. Introduction

Pour pouvoir analyser le comportement des systèmes asservis, il est intéressant de disposer d'un modèle mathématique permettant de décrire leurs comportements dynamiques. En effet, l'étude des systèmes dynamiques revient à étudier les relations mathématiques qui les gouvernent (en l'occurrence des équations différentielles). La manipulation d'équations différentielles étant complexe. Pour cela, nous allons introduire un outil mathématique puissant, qui est la transformation de Laplace.

Le but de ce chapitre n'est pas d'étudier en détails la modélisation des systèmes dynamiques. On se contentera donc de savoir modéliser rapidement et simplement le système (modèles élémentaires) et d'apprendre à écrire à partir des équations différentielles, les fonctions de transfert pour différents types de systèmes : électriques, mécaniques, ou électromécaniques...etc., et d'établir par la suite leurs schémas fonctionnels et/ou leurs graphes de fluences de signaux adéquats.

II.2. Modélisation mathématique des systèmes

II.2.1. Définition

Le modèle mathématique d'un système dynamique peut être défini comme étant un ensemble d'équations représentant le comportement dynamique du système avec la précision souhaitée. Il est obtenu en écrivant les lois de la physique qui régissent le comportement du système (lois de Kirchhoff, lois fondamentales de la dynamique, bilan des forces,...etc.).

II.2.2. Étapes d'obtention du modèle de comportement

La démarche globale pour établir le modèle comportemental d'un système donné peut se résumer de la manière suivante :

- Définir le système étudié et ses composants élémentaires ;
- Formuler le modèle mathématique idéal (modèle de connaissance) et dresser la liste des hypothèses simplificatrices à retenir ;
- Écrire les lois de la physique régissant le comportement du système et les équations différentielles et algébriques associées ;
- Définir le modèle dédié à l'automatique (modèle de comportement).

Remarque : Le modèle mathématique devra être suffisamment précis pour refléter le comportement réel du système. On voit donc apparaître un compromis précision/complexité dans l'étape de modélisation. De plus, étant donné le caractère non-linéaire des processus réels, on est naturellement amené à faire des simplifications telles que la linéarisation autour d'un point de fonctionnement (développement en série de Taylor).

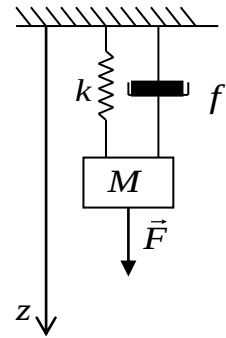
Exemple:

On considère les deux systèmes physiques suivants :

- a) Une masse M , retenue à un mur par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux f et un ressort d'amortissement k que l'on tire par une tension F vers le bas.

Entrée : Force appliquée à la masse (F).

Sortie : Position de la masse (z).

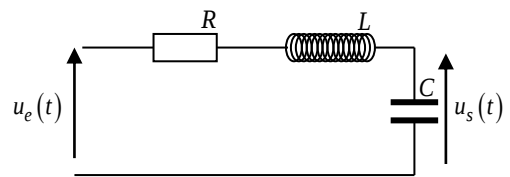


(a) Système mécanique

- b) Un circuit RLC série.

Entrée : Tension aux bornes du circuit $u_e(t)$.

Sortie : Tension aux bornes du condensateur $u_s(t)$.



(b) Système électrique

Écrire les équations différentielles régissant la dynamique des sorties de ces 2 systèmes.

Solution:Cas du système (a) :

Par application de loi fondamentale de la dynamique (Mouvement de translation) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F - k.z(t) - f.\dot{z}(t) = M\ddot{z}(t) \text{ Qu'on peut écrire :}$$

$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + f \frac{dz(t)}{dt} + k.z(t) = F, \text{ Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de second ordre.}$$

Cas du système (b) :

Par application de la deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles) on obtient :

$$\sum u_i = 0 \Rightarrow u_e(t) - Ri(t) - L \frac{di(t)}{dt} - u_s(t) = 0$$

$$\text{avec } u_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow i(t) = C \frac{du_s(t)}{dt}$$

D'où l'équation mathématique qui lie l'entrée et la sortie du circuit s'écrit :

$$LC \frac{d^2 u_s(t)}{dt^2} + RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t), \text{ Il s'agit aussi d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants de second ordre.}$$

II.3. Transformation de Laplace

La transformation de Laplace est l'une des outils mathématiques qui permet de résoudre aisément les équations différentielles dès que le système étudié devient complexe, c.à.d. lorsqu'il s'agit d'équations différentielles d'ordre assez élevé (ordre > 2). En d'autres termes, c'est un moyen de ramener l'étude et l'analyse d'un système asservi du domaine temporel (où la variable est le temps) au domaine fréquentiel ou symbolique (où la variable est complexe dépendant de la fréquence). Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Le diagramme de la figure 2.1 ci-dessous illustre bien ce concept.

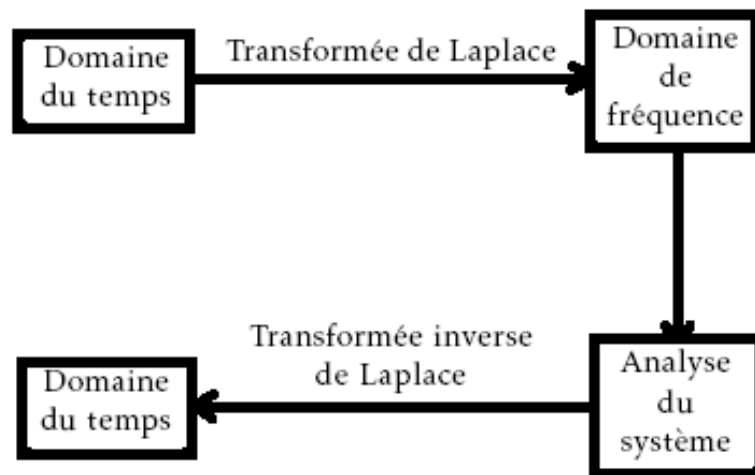


Figure 2.1 Étapes d'analyse d'un système avec la transformée de Laplace

L'intérêt fondamental de la transformée de Laplace (calcul opérationnel) s'explique par la facilité de résoudre un système d'équations différentielles puisqu'elle permet de transformer ce dernier en un système d'équations algébriques. En effet, elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques.

II.3.1. Transformée de Laplace (directe)

A toute fonction du temps $f(t)$ nulle pour $t < 0$ (fonction causale), on lui associe une fonction $F(p)$ de la variable complexe p , [où $p = \delta + j\omega$ (δ et ω sont des variables réelles et $j = \sqrt{-1}$)] qu'on appelle la transformée de Laplace de $f(t)$ et qu'on note :

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2.1)$$

On dit que $F(p)$ est l'image de $f(t)$.

N.B/ L'existence de cette transformée est soumise à la convergence de l'intégrale qui la définit. Dans ce manuscrit nous n'insisterons pas sur ce point car les fonctions ou les signaux que nous sommes susceptibles de rencontrer remplissant cette condition.

Exemple 1. Calculer la transformée de Laplace de la fonction échelon unité (ou la fonction Heaviside) notée $u(t)$ définie par : $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

$$L(u(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} ; \quad \text{Avec } \Re_e(p) > 0$$

Exemple 2.

Calculer la transformée de Laplace de la fonction causale suivante :

$$e^{-at}u(t) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

$$L(e^{-at}u(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-at}u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{p+a} e^{-(p+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a} ;$$

$$\text{Avec } \Re_e(p) > -\Re_e(a)$$

II.3.2. Transformée de Laplace inverse

D'une manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver la fonction originale $f(t)$ à partir de sa transformée $F(p)$. Cette dernière est donnée par :

$$f(t) = L^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (2.2)$$

On dit que $f(t)$ est l'origine de $F(p)$.

N.B/ Il est rare dans la pratique d'avoir recours à cet intégrale de contour définie par la relation (2.2). En effet, la correspondance entre $f(t)$ et $F(p)$ se fait grâce à des tableaux appelés : Tableaux des transformées (voir annexe1)

II.4. Propriétés des Transformées de Laplace

L'utilité de la transformée de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires analogiques apparaîtra à la découverte de ses propriétés, que nous allons évoquer dans ce qui suit.

II.4.1. Linéarité

La transformation de Laplace est linéaire c'est-à-dire que quelles soient les fonctions f, g et deux nombres complexes a et b :

$$L[a.f(t) + b.g(t)] = a.L[f(t)] + b.L[g(t)] = a.F(p) + b.G(p) \quad (2.3)$$

Cette linéarité se démontre de façon évidente, et découle de celle de l'intégrale.

$$\text{De même on a : } L^{-1}[a.F(p) + b.G(p)] = a.L^{-1}[F(p)] + b.L^{-1}[G(p)] = a.f(t) + b.g(t) \quad (2.4)$$

Remarque : Le produit de deux fonctions du temps $f(t)$ et $g(t)$ n'a pas pour transformée le produit de $F(p)$ et $G(p)$ et vice versa.

À titre indicatif $L^{-1}(F(p).G(p))$ peut être calculée par l'intégrale de convolution comme suit :

$$L^{-1}(F(p).G(p)) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = f(t) * g(t) \quad (2.5)$$

Le symbole $(*)$ représente le produit de convolution (voir cours de théorie du signal).

II.4.2. Théorème de la valeur finale et initiale

Il est possible d'obtenir les valeurs initiale et finale de la fonction causale $f(t)$ à partir de sa transformée de Laplace directe $F(p)$ comme suit :

- **Théorème de la valeur initiale :**

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \quad (2.6)$$

- **Théorème de la valeur finale :**

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad (2.7)$$

Exemple :

Soit la fonction : $f(t) = (1 + e^{-3t})u(t)$

Déterminer la valeur initiale et finale de $f(t)$

Solution :

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+3}\right) = 2$$

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+3}\right) = 1$$

II.4.3. Théorème de dérivation

Soit la fonction $f(t)$ définie pour $t > 0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0) \quad (2.8)$$

Où $f(0)$ est la valeur initiale de $f(t)$

Démonstration :

D'après la définition de la transformée de Laplace on a :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \quad \text{Si on pose } du = \frac{df(t)}{dt} dt \Rightarrow u = f(t) \text{ et } v = e^{-pt} \Rightarrow dv = -pe^{-pt} \text{ alors}$$

$$\text{l'intégrale par parties nous donne : } \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

En généralisant ce théorème pour la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $f(t)$ on obtient :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.f(0) - \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0}$$

$$L\left[\frac{d^3f(t)}{dt^3}\right] = p^3.F(p) - p^2.f(0) - p \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0} - \frac{d^2f(t)}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{ et ainsi de suite jusqu'à l'obtention du cas général}$$

$$\vdots$$

$$L\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p) - p^{n-1}.f(0) - p^{n-2} \cdot \frac{df(t)}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - \frac{d^{n-1}f(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} \quad (2.9)$$

II.4.4. Théorème de l'intégration

Soit la fonction $f(t)$ définie pour $t > 0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{\int_0^t f(t)dt|_{t=0}}{p} \quad (2.10)$$

Remarque :

Lorsque les conditions initiales sont nulles :

- Dériver dans le domaine temporel, revient à multiplier par p dans le domaine complexe (domaine de Laplace).

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$$

- Intégrer dans le domaine temporel, revient à diviser par p dans le domaine complexe (domaine de Laplace).

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

II.4.5. Théorème de retard (translation des temps)

Soit $f(t)$ une fonction du temps définie pour $t > 0$, ait une transformée de Laplace $F(p)$. Considérons une fonction $f(t-T)$ obtenue en décalant $f(t)$ d'un temps égale à T , vers les temps positifs. On obtient alors :

$$L[f(t-T)u(t-T)] = e^{-pT} \cdot F(p) \quad (2.11)$$

Démonstration :

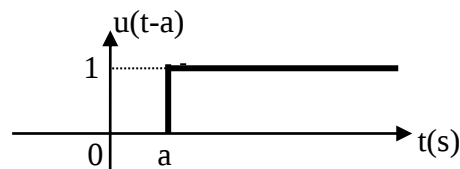
$$L[f(t-T)u(t-T)] = \int_0^{+\infty} f(t-T) \cdot u(t-T) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t-T) \cdot e^{-pt} dt$$

Si on pose $\alpha = t - T \Rightarrow t = T + \alpha$ alors on aura :

$$L[f(t-T)u(t-T)] = \int_0^{+\infty} f(\alpha) \cdot e^{-p(T+\alpha)} d\alpha = e^{-pT} \int_0^{+\infty} f(\alpha) \cdot e^{-p\alpha} d\alpha = e^{-pT} \cdot F(p) \quad \text{C.Q.F.D}$$

Exemple :

Calculer la transformée de Laplace de la fonction échelon retardée suivante :



Fonction échelon retardé

Solution

Selon le théorème de retard on a :

$$L[u(t-a)] = \int_0^{+\infty} u(t-T).e^{-pa} dt = e^{-pa} U(p) = \frac{e^{-pa}}{p}$$

II.4.6. Théorème de d'écalage fréquentiel

Soit $f(t)$ une fonction du temps définie pour $t>0$ et qui admet une transformée de Laplace $F(p)$ alors :

$$L[f(t).e^{\pm at}] = F(p \mp a) \quad (2.12)$$

Où : a peut-être réel ou complexe.

Exemple :

Calculer la transformée de Laplace de la fonction : $g(t)=e^{-2t}\sin(t)$

Solution :

Selon le théorème de d'écalage fréquentiel ci-dessous on a :

$$L[\sin(t).e^{-2t}] = F(p+a) = \frac{1}{(p+2)^2+1} \text{ puisque } F(p)=L(\sin(t))=\frac{1}{p^2+1}$$

II.4.7. Changement d'échelle du temps

Si la fonction causale $f(t)$ admet une transformée de Laplace $F(p)$ et si la variable t est changée en t/a , où a est une constante positive, alors $f(t)$ est changée au $f(t/a)$.

On peut démontrer alors que :

$$L[f(t/a)] = a.F(a.p) \quad (2.13)$$

D'une manière analogue on peut facilement démontrer que :

$$L[f(a.t)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (2.14)$$

II.4.8. Quelques opérations dans le domaine complexe

a) Translation

Soit α un nombre complexe à partie réelle positive. Calculons l'original de $F(p+\alpha)$ en connaissant $F(p)$.

$$\text{On a : } [F(p+\alpha)] = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\alpha)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} [e^{-\alpha t} f(t)] dt = L[e^{-\alpha t} f(t)]$$

Comme la transformation de Laplace est réversible c'est-à-dire $e^{-\alpha t} f(t) \xrightleftharpoons[TL^{-1}]{TL} F(p+\alpha)$ alors :

$$L^{-1}[F(p+\alpha)] = e^{-\alpha t} f(t) \quad (2.15)$$

Donc la translation dans le domaine complexe se traduit sur l'original par la multiplication par $e^{-\alpha t}$.

b) Dérivation dans le domaine complexe

La dérivée par rapport à p de la fonction $F(p)$ qui est la transformée de $f(t)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dp} F(p) = -L[t.f(t)] \quad (2.16)$$

Démonstration :

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [e^{-pt} f(t)] dt = \int_0^{+\infty} -t \cdot e^{-pt} f(t) dt = L[-t \cdot f(t)] = -L[t \cdot f(t)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp} F(p) = -L[t \cdot f(t)] \quad \text{C.Q.F.D}$$

c) Intégration dans le domaine complexe

L'intégral par rapport à p la fonction $F(p)$ qui est la transformée de $f(t)$ est donnée par :

$$\int_p^{+\infty} F(p) dp = L \left[\frac{f(t)}{t} \right] \quad (2.17)$$

Démonstration

$$\text{On a } \int_p^{+\infty} F(p) dp = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_p^m F(p) dp \quad \text{tel que } \int_p^m F(p) dp = \int_p^m \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt dp$$

Si on inverse l'ordre des intégrations on aura :

$$\int_p^m \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt dp = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\int_p^m e^{-pt} dp \right] dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[-\frac{e^{-pt}}{t} \right]_p^m dt = \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{e^{-pt} - e^{-mt}}{t} \right] dt$$

$$\Rightarrow \int_p^{+\infty} F(p) dp = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_p^m F(p) dp = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(t) \left[\frac{e^{-pt} - e^{-mt}}{t} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = L \left[\frac{f(t)}{t} \right] \quad \text{C.Q.F.D}$$

TABLEAU 2.1 : RECAPITULATIF DES PROPRIETES DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

1	$L[af(t)] = a \cdot L[f(t)] \quad \text{où } a = c^{te}$
2	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = L[f_1(t)] \pm L[f_2(t)]$
3	$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = pF(p) - f(0)$
4	$L\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
5	$L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{(k-1)} f^{(k-1)}(0) \quad \text{where } f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)$
6	$L\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0}}{p}$
7	$L\left[\int \int f(t) dt dt\right] = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{\left[\int f(t) dt\right]_{t=0}}{p^2} + \frac{\left[\int \int f(t) dt dt\right]_{t=0}}{p}$
8	$L\left[\int \dots \int f(t) (dt)^n\right] = \frac{F(p)}{p^n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p^{n-k+1}} \left[\int \dots \int f(t) (dt)^k\right]_{t=0}$
9	$L[e^{-at} f(t)] = F(p+a)$
10	$L[f(t-a)u(t-a)] = e^{-ap} F(p)$
11	$L[t f(t)] = -\frac{dF(p)}{dp}$

12	$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_p^\infty F(p)dp$
13	$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(ap)$

II.5. Décomposition en fractions simples

Pour la plupart des problèmes rencontrés en théorie de la commande des systèmes linéaires, la fonction $F(p)$ est souvent donnée sous la forme d'un rapport entre deux polynômes dépendant de la variable complexe p , qui peut être exprimé comme suit : $F(p) = N(p)/D(p)$. En général, le degré de numérateur $N(p)$ est toujours inférieur ou égale à celui de dénominateur $D(p)$. Notons que les racines de $N(p)=0$ sont appelées les zéros de $F(p)$ et celles de $D(p)=0$, sont appelées les pôles de $F(p)$.

Alors, pour pouvoir calculer la transformée inverse de la fonction $F(p)$, on doit tout d'abord décomposer cette dernière en une somme de termes de fonctions simples. Ensuite grâce aux tableaux des transformées (voir annexe 1) on en déduit les fonctions originaux de ces termes simples.

Si on suppose que $F(p)$ est décomposée en termes simples telle que :

$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_n(p)$$

et si la transformée inverse de chaque terme existe alors :

$f(t) = L^{-1}[F(p)] = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t)$ où $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ sont respectivement les transformées de Laplace inverses des termes : $F_1(p), F_1(p), \dots, F_n(p)$.

Il est à noter que la décomposition de $F(p)$, dépend particulièrement des pôles de la fonction $F(p)$ obtenue, d'où on en distingue trois cas :

a) Cas où $F(p)$ admet des pôles réels distincts

Supposant que $F(p)$ possède n pôles réels distincts $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, alors on peut écrire cette fonction sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (2.18)$$

Pour cela, on peut faire appel à des techniques de décomposition des résidus. Alors on écrit :

$$F(p) = \frac{a_1}{p - p_1} + \frac{a_2}{p - p_2} + \dots + \frac{a_n}{p - p_n} + E(p) \quad (2.19)$$

Le plus souvent, le degré de $N(p)$ est inférieur à celui de $D(p)$ alors $E(p)=0$.

Pour déterminer le coefficient a_1 on multiplie les deux membres de l'équation (2.19) par $(p - p_1)$ puis on fait tendre p vers p_1 . On procède de la même manière pour déterminer les autres coefficients.

$\lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p) = \lim_{p \rightarrow p_1} \left[\frac{a_1}{p - p_1} + \frac{a_2}{p - p_2} + \dots + \frac{a_n}{p - p_n} \right] (p - p_1)$ On obtient donc : $a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1)F(p)$, $a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2)F(p)$, ..., $a_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p - p_n)F(p)$ d'où

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{a_1}{p-p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{a_2}{p-p_2}\right] + \dots + L^{-1}\left[\frac{a_n}{p-p_n}\right] = (a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t} + \dots + a_n e^{p_n t})u(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = L^{-1}[F(p)] = \sum_{k=1}^n a_k e^{p_k t} u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

Exemple : Soit à déterminer la transformée inverse de la fonction : $F(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2}$

On peut écrire alors : $F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} = \frac{a_1}{p+1} + \frac{a_2}{p+2}$ où

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1)F(p) = \frac{p+3}{p+2} \Big|_{p=-1} = 2 \quad \text{et} \quad a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p-p_2)F(p) = \frac{p+3}{p+1} \Big|_{p=-2} = -1$$

$$\text{d'où } f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{2}{p+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1}{p+2}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

b) Cas où $F(p)$ admet des pôles réels multiples

Si on considère que $F(p)$ admet un pôle réel multiple (p_0) de multiplicité égale à (q), le reste des pôles sont supposés réels distincts. Alors $F(p)$ peut être écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_0)^q \prod_{j=q+1}^n (p-p_j)} = \frac{N(p)}{(p-p_0)^q (p-p_{q+1})(p-p_{q+2}) \dots (p-p_n)} \quad (2.20)$$

D'après la technique de décomposition des résidus on écrit :

$$F(p) = \frac{b_q}{(p-p_0)^q} + \frac{b_{q-1}}{(p-p_0)^{q-1}} + \dots + \frac{b_1}{p-p_0} + \frac{a_{q+1}}{p-p_{q+1}} + \frac{a_{q+2}}{p-p_{q+2}} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n} \quad (2.21)$$

Où les résidus $b_q, b_{q-1}, b_{q-2}, \dots, b_1$ se calculent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_q = \lim_{p \rightarrow p_0} (p-p_0)^q F(p); \\ b_{q-1} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{d}{dp} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ b_{q-2} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dp^2} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ \vdots \\ b_{q-j} = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dp^j} [(p-p_0)^q F(p)]; \\ \vdots \\ b_1 = \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dp^{q-1}} [(p-p_0)^q F(p)]; \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Et les coefficients a_i seront déterminés comme pour le premier cas(a):

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1)F(p), \quad a_2 = \lim_{p \rightarrow p_2} (p-p_2)F(p), \dots, a_n = \lim_{p \rightarrow p_n} (p-p_n)F(p)$$

Exemple :

Soit à déterminer la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

On peut écrire alors : $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)} = \frac{b_2}{(p+1)^2} + \frac{b_1}{p+1} + \frac{a_1}{p+2}$

Où $b_2 = \lim_{p \rightarrow -1} (p+1)^2 F(p) = \frac{1}{p+2} \Big|_{p=-1} = 1$ et

$$b_1 = \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} [(p+1)^2 F(p)] = \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{p+2} \right] \Big|_{p=-1} = \frac{1}{(p+2)^2} \Big|_{p=-1} = 1$$

$$a_1 = \lim_{p \rightarrow -2} (p+2) F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} \Big|_{p=-2} = 1$$

d'où $f(t) = L^{-1}[F(p)] = L^{-1} \left[\frac{1}{(p+1)^2} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{p+1} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] = t.e^{-t} + e^{-t} + e^{-2t}$

c) Cas où F(p) admet des pôles complexes conjugués

Considérons que F(p) admet deux pôles complexes conjugués (p_1 et $p_2 = \bar{p}_1$), bien que le reste des pôles sont supposés réels distincts. Alors F(p) peut être écrit sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1)(p-\bar{p}_1) \prod_{j=3}^n (p-p_j)} = \frac{\alpha}{(p-p_1)} + \frac{\bar{\alpha}}{(p-\bar{p}_1)} + \frac{a_3}{p-p_3} + \dots + \frac{a_n}{p-p_n} \quad (2.23)$$

Où: Les coefficients α , $\bar{\alpha}$ et a_j se calculent de la même façon que dans le cas (II.4a). Notons que $\bar{\alpha}$ est le conjugué de α

Exemple :

Soit à déterminer la fonction originale f(t) de la transformée $F(p) = \frac{p+5}{p^2+4p+13}$

On remarque que la F(p) admet deux pôles complexes conjugués p_1 et $p_2 = \bar{p}_1$: avec $p_1 = -2+3j$ et $p_2 = \bar{p}_1 = -2-3j$

Or selon la technique de décomposition des résidus F(p) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{p+5}{p^2+4p+13} = \frac{p+5}{[p-(-2+3j)][p-(-2-3j)]} = \frac{\alpha}{p-(-2+3j)} + \frac{\bar{\alpha}}{p-(-2-3j)}$$

On procède de la même façon que le cas (a) précédent on trouve :

$$\alpha = \lim_{p \rightarrow p_1} (p-p_1) F(p) = \frac{p+5}{[p-(-2-3j)]} \Big|_{p=-2+3j} = \frac{(-2+3j)+5}{(-2+3j)+2+3j} = \frac{(j+1)}{2j} = \frac{1}{2}(1-j)$$

et on en déduit son conjugué : $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}(1+j)$ alors la transformée inverse de F(p) sera alors :

$$f(t) = \frac{1}{2}(1-j)e^{(-2+3j)t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{(-2-3j)t} = \frac{1}{2}e^{-2t} \left[(1-j)e^{j3t} + \frac{1}{2}(1+j)e^{-j3t} \right]$$

Nous pouvons appliquer les formules d'Euler on obtient:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \left[(1-j)(\cos 3t + j \sin 3t) + \frac{1}{2}(1+j)(\cos 3t - \sin 3t) \right] = \frac{1}{2} e^{-2t} [2(\cos 3t + \sin 3t)]$$

Ainsi vous pouvez écrire comme suit :

$$f(t) = \sqrt{2} e^{-2t} \sin(3t + \phi) \quad \text{où} \quad \phi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \quad (\text{soit } 45^\circ)$$

Remarque :

En pratique, on utilise rarement la technique de décomposition en fractions simples dans le cas où $F(p)$ admet deux pôles complexes conjugués (comme dans l'exemple ci-dessus). On peut trouver la fonction originale $f(t)$ après avoir réorganiser le dénominateur de la fonction $F(p)$ de la manière suivante : $p^2 + 4p + 13 = (p+2)^2 + 9 = (p+2)^2 + 3^2$

$$\text{Ensuite, on écrit } F(p) \text{ comme suit : } F(p) = \frac{p+5}{p^2+4p+13} = \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} + \frac{3}{(p+2)^2+3^2}$$

On se sert des tables de Laplace (voir annexe), on obtient : $f(t) = e^{-2t} \cos 3t + e^{-2t} \sin 3t$

II.6. Représentation des systèmes linéaires continus

Dans cette partie on s'intéresse à l'explication de la fonction de transfert et le schéma fonctionnel ainsi que le graphe de fluence des signaux comme outils de représentation d'un système linéaire continu invariant (SLCI). On donnera leur définition, techniques de réalisations ou d'élaboration suivi d'exemple d'application.

II.6.1. Fonction de transfert

a) Définition

Considérons un système asservi linéaire continu régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants donnée par :

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_0 x(t)$$

Où $x(t)$ et $y(t)$ sont respectivement le signal d'entrée et de sortie.

Supposons que les conditions initiales sont nulles (c'est-à-dire le système part du repos). Si on calcule les transformées de Laplace des deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$(b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0) Y(p) = (a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0) X(p)$$

$$\text{Soit } Y(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} X(p) = G(p) \cdot X(p)$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad (2.24)$$

Où la fonction $G(p)$ qui caractérise le système, est appelée la fonction du transfert du système ou sa transmittance.

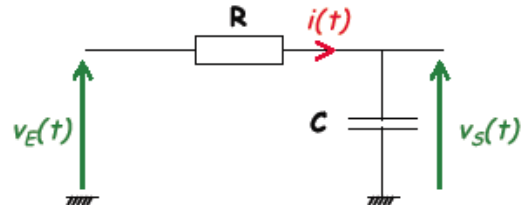
- La fonction de transfert étant le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et celle du signal d'entrée quand toutes les conditions initiales sont nulles.

- La fonction de transfert caractérise la dynamique du système. Elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques. Ainsi, dorénavant, un système sera décrit par sa fonction de transfert et non par l'équation différentielle qui le régit.
- Notons enfin, que cette fonction de transfert est aussi appelée transmittance par analogie avec l'impédance dans les systèmes électriques.

Exemple :

Soit à déterminer la fonction du transfert

$$G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} \text{ du circuit électrique suivant :}$$



Selon la loi des mailles (2^{ème} loi de Kirchhoff) on a :

$$v_e(t) = Ri(t) + v_s(t) \quad \text{soit} \quad i(t) = C \frac{dv_s(t)}{dt} \quad \text{Si on remplace l'expression de } i(t) \text{ dans l'équation}$$

on aura: $v_e(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t)$ le calcul de la transformée de Laplace des deux membres

de l'équation résultante nous permet d'écrire : $V_e(p) = RCpV_s(p) + V_s(p)$ d'où la fonction

$$\text{de transfert : } G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

b) Formes générales d'écriture d'une fonction de transfert

$$\text{Soit } G(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (2.25)$$

Si le numérateur $N(p)$ et le dénominateur $D(p)$ ont des racines, alors :

$$N(p) = a_m (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_m) \quad \text{ou} \quad N(p) = a_m \prod_{i=1}^m (p - p_i)$$

$$D(p) = b_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad \text{ou} \quad D(p) = b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)$$

$$G(p) \text{ s'écrit donc : } G(p) = \frac{a_m \prod_{i=1}^m (p - z_i)}{b_n \prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad (2.26)$$

On a toujours $m < n$ (pour un système réel)

- Les racines (z_i) du $N(p)$ sont appelées « **les zéros** de la fonction de transfert ».
- Les racines (p_j) du $D(p)$ sont appelées « **les pôles** de la fonction de transfert ».

$$\text{Si on pose } k = \frac{a_m}{b_n} \quad \text{et} \quad K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad \text{on obtient alors } G(p) = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{p}{p_j})}$$

K est appelé gain du système ou le gain de la fonction de transfert.

Dans la fonction de transfert $G(p)$:

- k caractérise le régime statique (ou permanent)
- $\frac{\prod_{i=1}^m (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{p}{p_j})}$ caractérise le régime transitoire (ou dynamique).

II.6.2. Schéma fonctionnel

Le schéma fonctionnel est la représentation graphique la plus couramment employée, il montre graphiquement d'une façon abrégée les relations de cause à effet entre le signal d'entrée et le signal de sortie du système.

Il existe trois modes de connexions types des éléments qui constituent le système.

II.6.2.a. Connexion en cascade (ou série)

La fonction de transfert d'un système constitué d'un ensemble d'éléments connectés en série, c'est-à-dire de sorte que la sortie de l'un constitue l'entrée du suivant (voir figure 2.2) s'obtient comme suit :

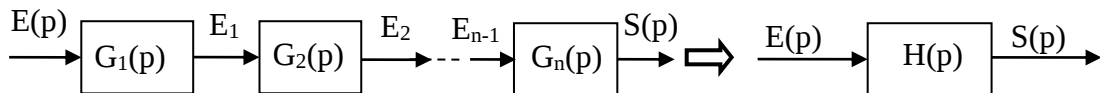


Figure 2.2 Connexion en série (ou cascade) de fonctions de transfert

On a :

$$E_1(p) = E(p).G_1(p)$$

$$E_2(p) = E_1(p).G_2(p) = E(p).G_1(p).G_2(p)$$

⋮

$$S(p) = E_{n-1}(p).G_n(p) = E(p).G_1(p).G_2(p) \dots G_n(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = E(p) \prod_{i=1}^n G_i(p)$$

$$\text{d'où } \boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \prod_{i=1}^n G_i(p) = G_1(p).G_2(p) \dots G_n(p)} \quad (2.27)$$

La fonction de transfert de l'ensemble est égale donc au produit de toutes les fonctions de transfert des éléments en série.

II.6.2.b. Connexion en parallèle

La fonction de transfert d'un système composé de plusieurs éléments telle que l'entrée d'un élément constitue l'entrée du système et la somme des sorties de tous les éléments constitue la sortie du système (voir figure 2.3) s'obtient comme suit :

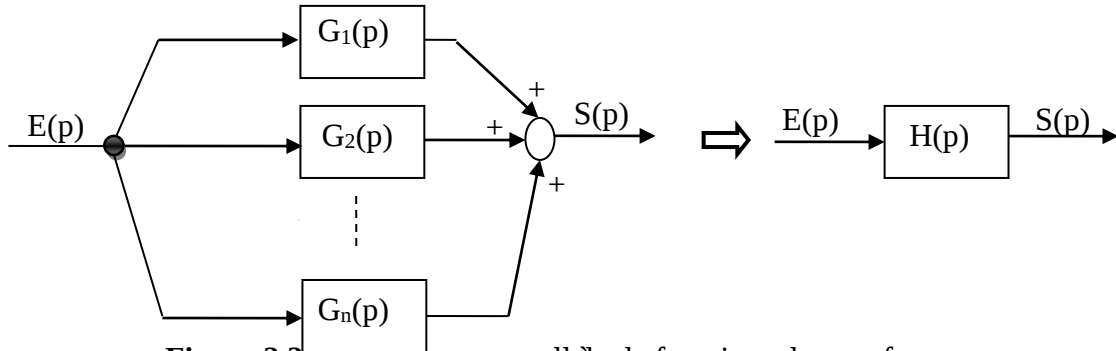


Figure 2.3 Connexion en parallèle de fonctions de transfert

$$S_1(p) = E(p).G_1(p)$$

$$S_2(p) = E(p).G_2(p)$$

$$\vdots$$

$$S_n(p) = E(p).G_n(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \sum_{i=1}^n S_i(p) = E(p) \sum_{i=1}^n G_i(p)$$

$$\text{D'où } \boxed{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \sum_{i=1}^n G_i(p) = G_1(p) + G_2(p) + \dots + G_n(p)} \quad (2.28)$$

On constate que la fonction de transfert générale des éléments connectés en parallèle est la somme des fonctions de transfert de tous les éléments :

II.6.2.c. Connexion en opposition parallèle (cas du système asservi)

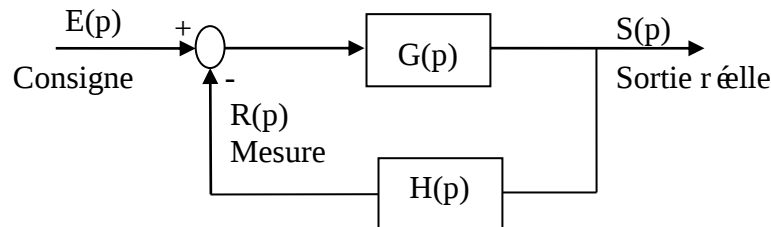


Figure 2.4 Connexion en opposition parallèle de fonctions de transfert

On a :

$$S(p) = \varepsilon(p).G(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) \pm S(p)$$

$$R(p) = S(p).H(p)$$

Remplaçant ces relations l'une dans l'autre on obtient :

$$S(p) = [E(p) \pm R(p)]G(p) = [E(p) \pm S(p)H(p)]G(p)$$

$$\Rightarrow S(p)[1 \mp G(p)H(p)] = E(p)G(p)$$

$$\text{D'où } \boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \mp G(p)H(p)}} \quad (2.29)$$

Où $F(p)$ est la fonction de transfert du système en boucle fermée (F.T.B.F).

$G(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne d'action.

$H(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne d'action (ou de retour).

$G(p).H(p)$ est appelée fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O).

$1 \mp G(p)H(p) = 0$ est appelée équation caractéristique du système bouclé

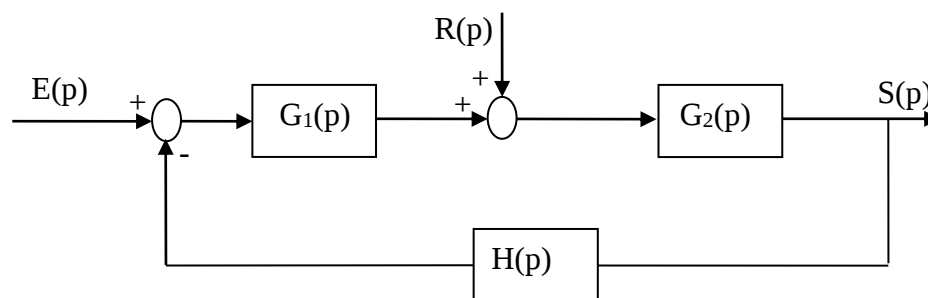
Note : Lorsque $H(p)=1$, on aura donc
$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 \mp G(p)} = \frac{FTBO}{1 \mp FTBO} \quad (2.30)$$

(dans ce cas on dit qu'il s'agit d'un système asservi à retour unitaire).

II.6.2.d. Cas d'un système asservi à entrées multiples (ou avec perturbation)

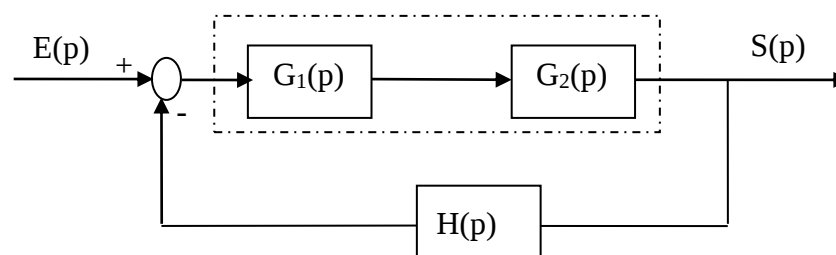
Dans le cas de la présence de plusieurs entrées dans un système asservi linéaire, on traite chacun d'effet indépendamment des autres et la réponse totale du système sera la somme des réponses partielles.

Exemple :



Nous appliquons le principe de superposition linéaire à ce système comme suit :

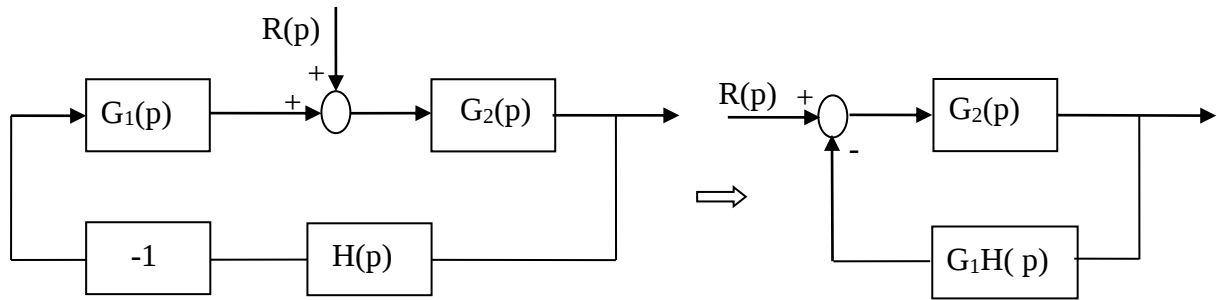
- On pose $R(p)=0$, le système se réduit



D'où la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} \Rightarrow S(p) = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} E(p)$$

- Ensuite on pose $E(p)=0$, le schéma devient :



$$F(p) = \frac{S(p)}{R(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} \Rightarrow S(p) = \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} R(p)$$

D'où la sortie global :

$$S(p) = \frac{G_1 G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} E(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1 G_2 H(p)} R(p)$$

II.6.3. Procédure à suivre pour établir un schéma fonctionnel

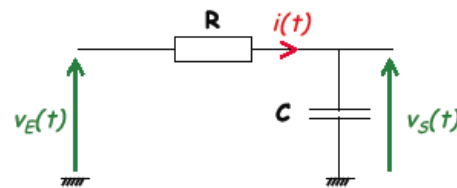
Pour concevoir un schéma bloc d'un système quelconque on doit suivre les étapes suivantes :

1. Écrire les équations décrivant le comportement dynamique de chaque élément du système ;
2. Établir les transformées de Laplace de ces équations en supposant que les conditions initiales sont nulles ;
3. Représenter chaque équation algébrique obtenue par un schéma bloc individuel ;
4. Assembler tous les schémas individuels en un seul schéma bloc (schéma fonctionnel global).

Exemple : Considérons le circuit électrique simple ci-dessous :

Étape 1. Les équations du circuit sont :

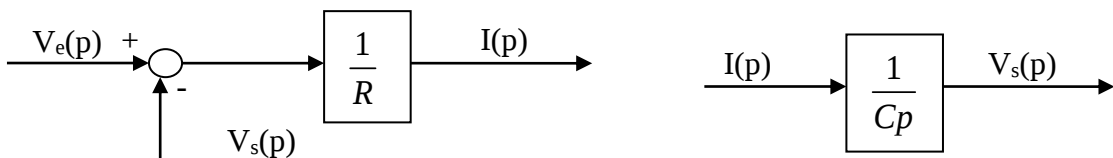
$$\begin{cases} i = \frac{v_e(t) - v_s(t)}{R} \\ v_s(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$



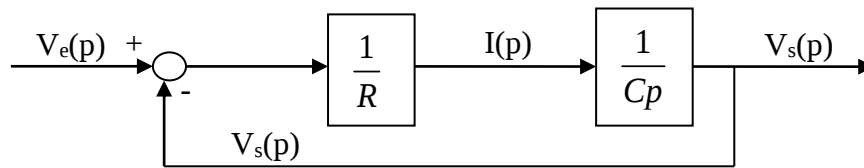
Étape 2. Les transformées de Laplace obtenues avec conditions initiales nulles sont :

$$\begin{cases} I(p) = \frac{V_e(p) - V_s(p)}{R} \\ V_s(p) = \frac{1}{C} \frac{I(p)}{p} \end{cases}$$

Étape 3. Établir les schémas bloc individuels des deux équations algébriques obtenues :



Étape 4. Assembler les deux schémas ci-dessus pour aboutir enfin au schéma fonctionnel global suivant :



II.6.4. Règles de transformation des schémas fonctionnels

D'une manière générale, pour simplifier un schéma fonctionnel ou le réduire à une forme plus simple (appelée aussi forme canonique), il est souvent plus judicieux de déplacer les points de connexion et/ou les comparateurs (ou additionneurs), d'inter-changer ces derniers, puis de réduire les boucles internes.

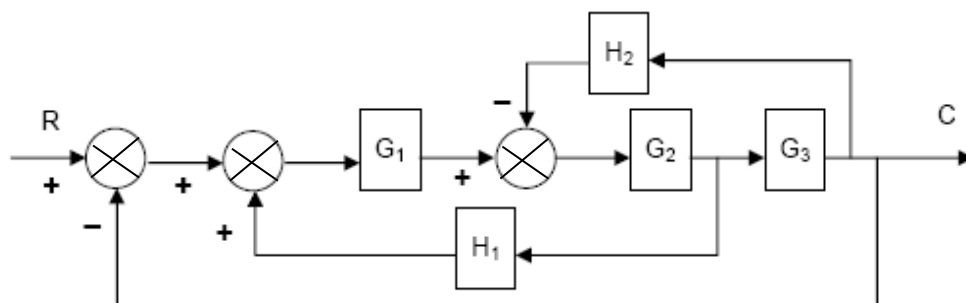
Tableau 2.2. Quelques transformations usuelles des schémas fonctionnels

Transformation	Schéma fonctionnel original	Schéma fonctionnel équivalent
1. Redisposition des comparateurs.		
2. Décomposition d'un comparateur.		
3. Redisposition des éléments en cascade.		
4. Association des éléments en cascade.		
5. Association des éléments en parallèle.		
6. Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément.		
7. Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément.		

8. Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément.		
9. Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément.		
10. Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur.		
11. Retrait d'un élément d'une chaîne d'action.		
12. Retrait d'un élément d'une boucle de retour.		
13. Élimination d'une boucle de retour.		

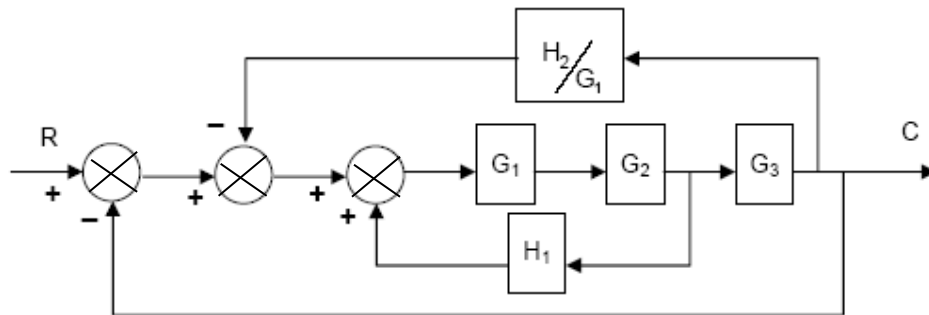
Exemple : Réduction (ou simplification) d'un schéma fonctionnel :

Soit à réduire le schéma fonctionnel suivant :

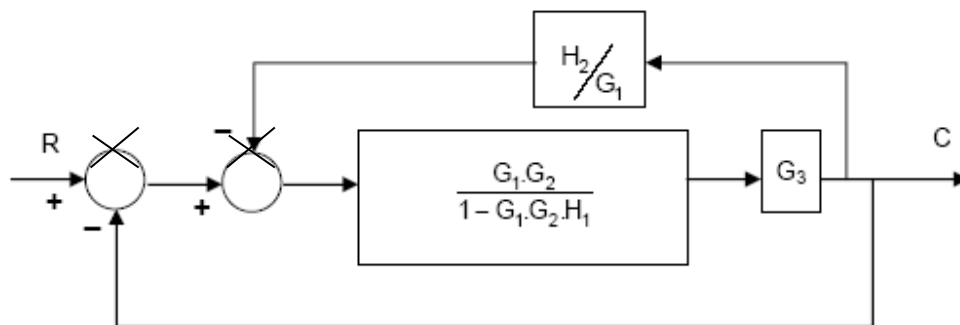


Solution :

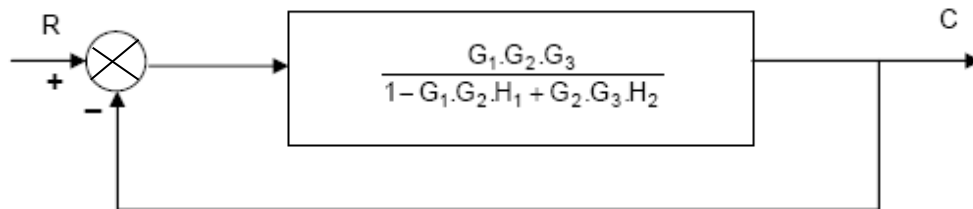
- En appliquant la transformation n°6, ensuite la transformation n°1, on obtient :



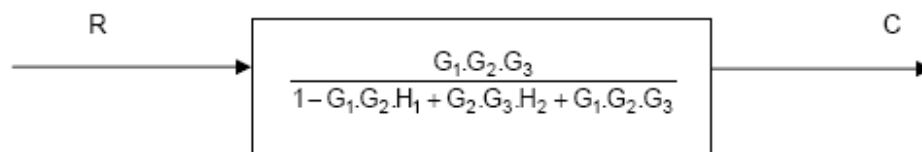
- Puis on applique la transformation n°4, puis la transformation n°13, on aura :



- Ensuite on applique aussi, successivement la transformation n°4 et n°13, on obtient :



- Enfin et par application de la transformation n°13 encore, on obtient :



II.6.5. Graphe de fluence des signaux (GFS)

II.6.5.a. Définitions

- Un graphe de fluence des signaux est une représentation graphique des équations simultanées décrivant le système. Il montre graphiquement la transmission des signaux à travers le système comme le fait le schéma fonctionnel. Mais, il est plus facile à tracer et plus facile à manipuler par rapport au schéma fonctionnel.
- Un graphe de fluence (ou de transfert) des signaux permet de simplifier l'écriture et la

mise en équation des processus lorsque le nombre de variables augmente.

- Un graphe de fluence ressemble à un réseau, il est constitué d'un ensemble de **nœuds** reliés entre eux par des **branches** orientées (arcs).

II.6.5.b. Règles de construction du GFS

Afin de faciliter le dessin du graphe de fluence des signaux, on donne les propriétés de base suivantes :

1. Les nœuds représentent les variables du système et sont disposés selon l'ordre de succession de cause à effet dans le système.
2. Chaque branche est affectée d'un coefficient correspondant à la transmittance (ou **fonction de gain**) qui relie entre deux nœuds (variables).

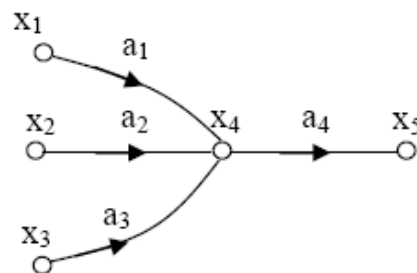


Figure 2.5 Graphe de fluence.

Le graphe de la figure 4.1, appelé graphe de fluence, est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} X_4 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \\ X_5 = a_4 X_4 = a_4 (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3) \end{cases}$$

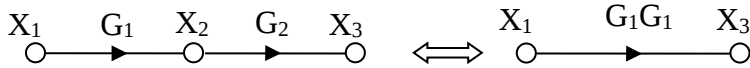
3. Un nœud auquel arrive plusieurs branches est appelé : **puits (nœud secondaire)**.
4. Un nœud à partir duquel peuvent partir plusieurs branches est appelé : **nœud source**.

Exemples : dans la figure 4.1 :

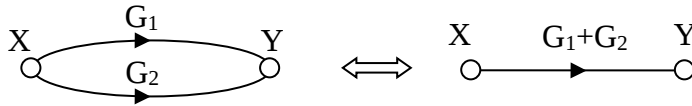
X_1, X_2 et X_3 : Nœuds sources

X_4 : Nœud puits

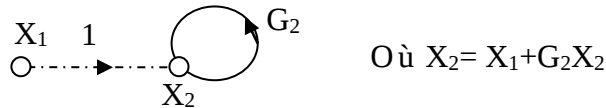
5. **Le chemin direct** est une liaison qui lie le nœud d'entrée au nœud de sortie en suivant le sens des flèches tout en passant une seule fois par chaque nœud (c.à.d. sans passage double par un nœud quelconque).
6. **Le gain d'un chemin direct** est le produit de tous les gains en parcourant ce chemin.
7. Une **boucle de retour** est un chemin qui commence par un nœud et qui revient à ce même nœud sans passer deux fois par le même nœud.
8. Les boucles de retour qui ne se touchent pas, sont des boucles qui n'ont aucun nœud en commun (**boucles non contigües**).
9. Le **gain d'une boucle** est le produit des gains rencontrés lors de son parcours.
10. Chemins série (nœuds en cascade)



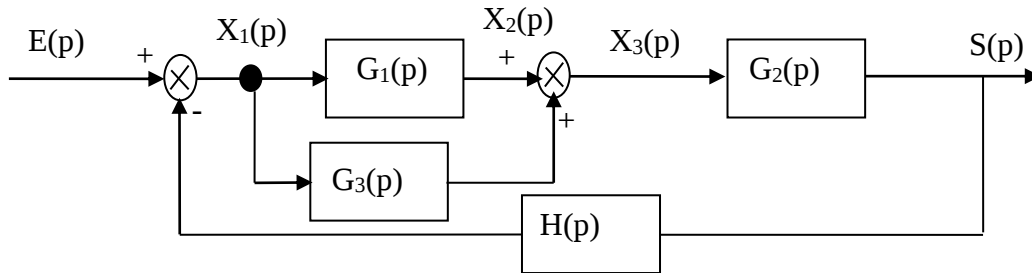
11. Chemins parallèles



12. Un **circuit fermé** est une boucle de retour fermée d'un arc unique.



Exemple : Considérons le schéma fonctionnel représenté par la figure ci-dessous :

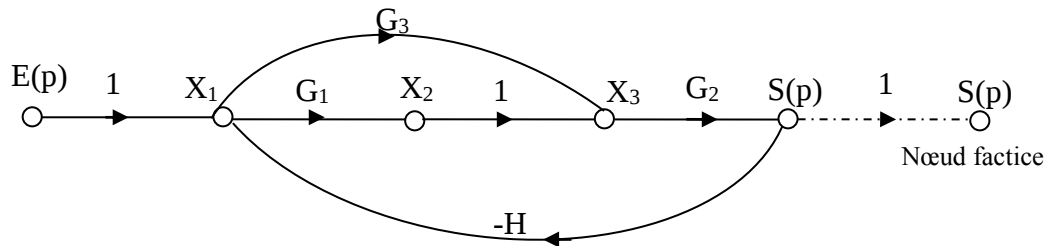


Établir le graphe de fluence correspondant à ce schéma :

A partir du schéma fonctionnel on a :

$$\begin{cases} X_1 = E - HS(p) \\ X_2 = G_1 X_1 \\ X_3 = X_2 + G_3 X_1 \\ S = G_2 X_3 \end{cases}$$

Avec les règles citées précédemment, nous traçons le graphe de fluence des signaux suivant :



Remarque :

Notons qu'il n'est pas nécessaire de tracer le schéma fonctionnel du système. Si nous avons les équations nous pourrions directement construire le graphe de fluence des signaux.

II.6.5.c. Règle de Mason

Une fois le graphe de fluence des signaux est construit, la fonction de transfert global peut être déterminée en utilisant la formule de Mason donnée par :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{n=1}^N P_n \Delta_n}{\Delta} \quad (2.31)$$

Où P_n : est la fonction de transfert (ou gain) du $n^{\text{ième}}$ chemin direct, obtenue en faisant le produit des gains du chemin (avec n est un entier).

N : nombres de chemins directs.

Δ : est appelé déterminant du graphe de fluence ou son équation caractéristique.

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$$

Avec P_{jk} est le $j^{\text{ième}}$ produit de gains de k boucles non contiguës, donc :

$$\Delta = 1 - (\sum \ell_i) + (\sum \ell_i \ell_j) - (\sum \ell_i \ell_j \ell_p) + (\sum \ell_i \ell_j \ell_p \ell_q) - \dots \quad (2.32)$$

$\sum \ell_i$: est la somme des gains de tous les chemins fermés (boucles) prisent un à un.

$\sum \ell_i \ell_j$: est la somme de produits des gains de toutes les boucles fermées non contiguës prisent deux à deux.

$\sum \ell_i \ell_j \ell_p$: est la somme de produits des gains de toutes les boucles fermées non contiguës prisent trois à trois. Idem pour $\sum \ell_i \ell_j \ell_p \ell_q \dots$ etc.

Δ_n : est la valeur de Δ en éliminant toutes les boucles touchant le $n^{\text{ième}}$ chemin direct (ou valeur de Δ par exclusion des termes qui touchent le $n^{\text{ième}}$ chemin), appelé aussi cofacteurs du chemin direct. Il est à noter qu'à chaque chemin n correspond un Δ_n .

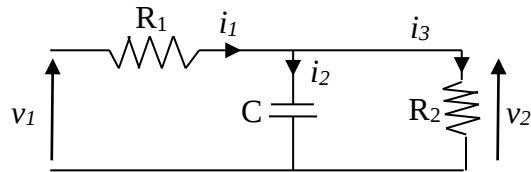
Exemple 1:

Soit le schéma électrique suivant :

1- Mettre le système en équations.

2- Représenter le système par un graphe de fluence.

3- Déterminer la fonction du transfert $F(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)}$ en utilisant la formule de Mason.



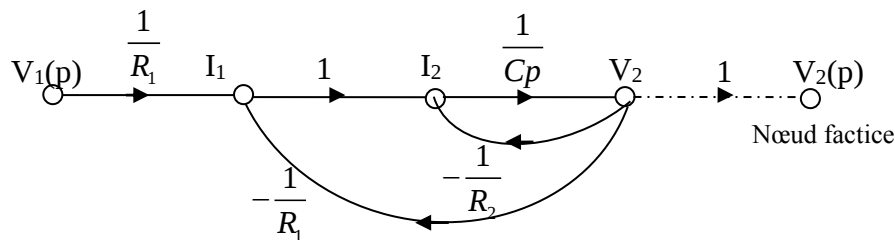
Solution :

1. Mise en équations :

Nous avons quatre variables : v_1 , v_2 , i_1 et i_2 alors selon les lois de Kirchhoff on obtient les

$$\text{équations suivantes : } \begin{cases} i_1(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_1} \Rightarrow I_1(p) = \frac{1}{R_1} [V_1(p) - V_2(p)] \\ v_2(t) = \frac{1}{C} \int i_2(t) dt = \frac{1}{Cp} I_2(p) \\ i_2(t) = i_1(t) - \frac{v_2(t)}{R_2} \Rightarrow I_2(p) = I_1(p) - \frac{V_2(p)}{R_2} \end{cases}$$

2. Graphe de fluence correspondant:



3. Calcul de la Fonction de transfert par la formule de Mason:

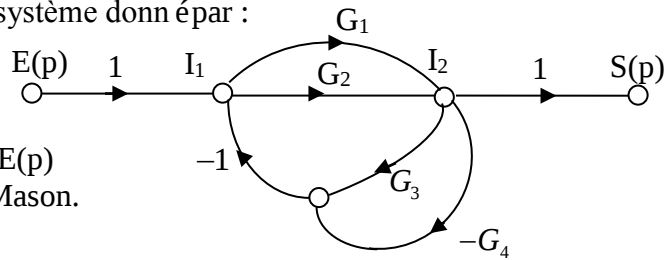
- Nombre de boucles est égale à 2 et dont les gains sont :

$$\ell_1 = -\frac{1}{R_1 C p} \quad \text{et} \quad \ell_2 = -\frac{1}{R_2 C p}$$

- $\Delta = 1 - \sum \ell_i = 1 - (\ell_1 + \ell_2) = 1 + \frac{1}{R_1 C p} + \frac{1}{R_2 C p}$
- Nombre de chemins directs : $N = 1 \Rightarrow P_1 = \frac{1}{R_1 C p}$; $\Delta_1 = 1 - 0 = 1$
- $F(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{\frac{1}{R_1 C p}}{1 + \frac{1}{R_1 C p} + \frac{1}{R_2 C p}} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + (R_1 + R_2)}$

Exemple 2.

Soit le graphe de fluence des signaux d'un système donné par :



- Déterminer la fonction de transfert $S(p)/E(p)$ du système ci-dessus par la formule de Mason.

Solution :

- Nombre de boucles est égale à 4 et leurs gains sont : boucle1 : $\ell_1 = -G_1 G_3$; boucle 2 : $\ell_3 = -G_2 G_3$; boucle3 : $\ell_2 = G_1 G_4$ et boucle4 : $\ell_4 = G_2 G_4$
- Calcul de Δ (Équation caractéristique du système) :

$$\Delta = 1 - \sum \ell_i = 1 - (\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4) = 1 - (-G_1 G_3 + G_1 G_4 - G_2 G_3 + G_2 G_4) + (0 + 0 + \dots)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + G_1 G_3 - G_1 G_4 + G_2 G_3 - G_2 G_4 = 1 + (G_1 + G_2)(G_3 - G_4)$$

- Nombre de chemins directs : $N = 2 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = G_1 \\ P_2 = G_2 \end{cases}$

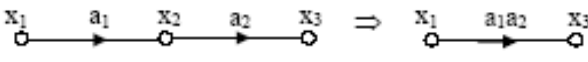
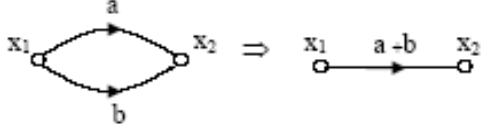
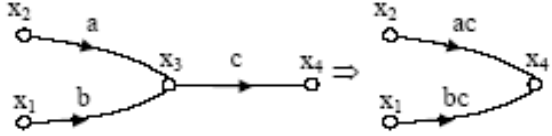
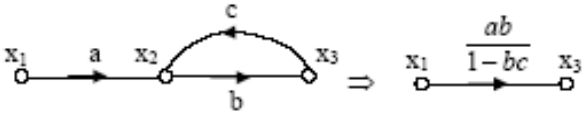
$$\text{Calcul des cofacteurs } \Delta_n : \Rightarrow \begin{cases} \text{pour le } P_1 \text{ on a } \Delta_1 = 1 - 0 = 1 \\ \text{pour le } P_2 \text{ on a } \Delta_2 = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

En effet, quand on élimine l'un des chemins direct 1 ou 2 on remarque qu'il ne reste aucune boucle complète $\Rightarrow \Delta_n = 1$ (pour $n=1$ et $n=2$)

- On obtient enfin selon la formule de Mason la fonction de transfert globale :

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G_1 + G_2}{1 + (G_1 + G_2)(G_3 - G_4)}$$

Tableau 2.3 Récapitulatif de Transformations élémentaires

	$\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 \\ x_3 = a_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = a_1 a_2 x_1$
	$x_2 = ax_1 + bx_1 = (a+b)x_1$
	$\begin{cases} x_3 = ax_2 + bx_1 \\ x_4 = cx_3 = acx_2 + bcx_1 \end{cases}$
	$\begin{aligned} &\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = bax_1 + bcx_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow x_3(1 - bc) = abx_1 \\ &\Rightarrow x_3 = \frac{ab}{(1 - bc)}x_1 \end{aligned}$

Chapitre .III. Réponses temporelles des systèmes linéaires

III.1. Introduction

L'étude de la réponse d'un système linéaire consiste à connaître son comportement dynamique avant de l'asservir. C'est-à-dire, savoir comment réagit tel système à telle excitation d'entrée ? Étant donné le modèle mathématique d'un système, l'évolution temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée donnée $e(t)$ est obtenue directement par résolution des équations différentielles (méthode classique) ou par inversion de la transformée de Laplace de sa sortie $S(p)$ comme le montre la figure 3.1 ci-dessous.

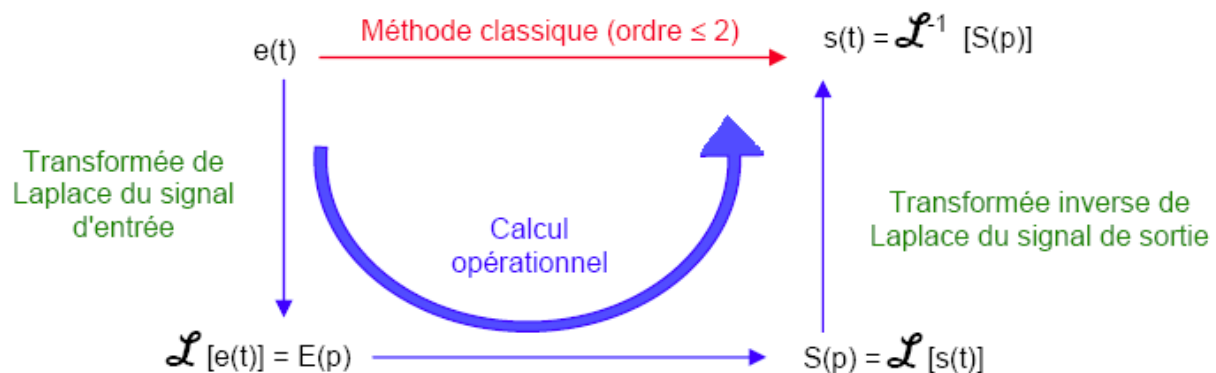


Figure 3.1 Détermination de la sortie du système par la méthode classique et par la transformée de Laplace (ou calcul opérationnel)

La réponse d'un système linéaire à une entrée quelconque peut être décomposée en somme de deux composantes :

- La réponse propre, qui est une fonction des conditions initiales, mais indépendante de l'entrée.
- La réponse forcée, qui est une fonction de l'entrée, mais indépendante des conditions initiales.

A travers l'étude et l'analyse temporelle, on cherche à déterminer :

- ✓ Le comportement du système en régime transitoire.
- ✓ Le comportement du système en régime permanent.
- ✓ Si le système est stable, instable ou juste oscillant.

Ce chapitre est consacré notamment à l'étude du comportement statique et dynamique des systèmes de premier et second ordre. Les caractéristiques de ces systèmes ainsi que leurs réponses seront étudiées en détail. On verra aussi comment approximer des systèmes d'ordre supérieur en systèmes de deuxième ordre.

III.2. Réponses temporelle des systèmes linéaires

Comme les signaux d'entrées sont illimités dans leur forme, on se limite à un certain nombre d'entrées typiques (impulsion, échelon, rampe ou parabole) qu'on appelle fonctions d'essais ou fonctions tests et dont on cherche la réponse. On peut utiliser aussi d'autres fonctions plus complexes.

III.2.1. Système du premier ordre

a) Définition : On appelle un système du premier ordre tout système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t) \quad (3.1)$$

Où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement le signal d'entrée et le signal de sortie.

Si on pose

$$\begin{cases} k = \frac{a_0}{b_0} : \text{Gain statique du système} \\ \tau = \frac{b_1}{b_0} : \text{est la constante du temps du système (positive).} \end{cases}$$

Alors on peut écrire l'équation (3.1) ci-dessus sous la forme suivante :

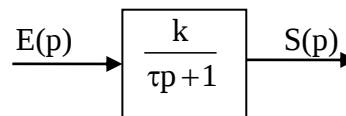
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k e(t) \quad (3.2)$$

b) Fonction de transfert : En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (3.2) précédente, où les conditions initiales du système sont supposées nulles, on obtient : $\tau p S(p) + S(p) = k E(p)$ d'où la fonction de transfert du système est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{\tau p + 1} \quad (3.3)$$

III.2.2. Réponses temporelles du système de 1er ordre :

Soit un système du premier ordre représenté par le schéma bloc suivant :



a) Réponse impulsionnelle

C'est la réponse temporelle d'un système quand l'entrée $e(t)$ est une impulsion de Dirac. Si toutes les conditions initiales sont considérées nulles, alors la transformée de Laplace du signal de sortie est justement égale à la fonction de transfert du système. Alors si on a $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = L[\delta(t)] = 1$ d'où $G(p) = S(p)$, cela indique que la fonction de transfert du système n'est que la transformée de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$\text{Comme } S(p) = G(p) = \frac{k}{\tau p + 1} \Rightarrow h(t) = s(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{\tau p + 1} \right]$$

$$\text{d'où } h(t) = s(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau} \cdot u(t) \quad (3.4)$$

avec $u(t)$ est un échelon unitaire.

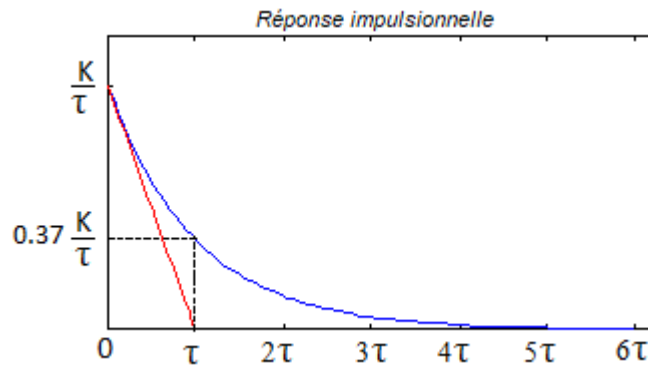


Figure 3.2 Réponse impulsionnelle d'un système de 1^{er} ordre

Exemple :

Soit à tracer la réponse impulsionnelle d'un système dont la fonction du transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{0.5p+1}$$

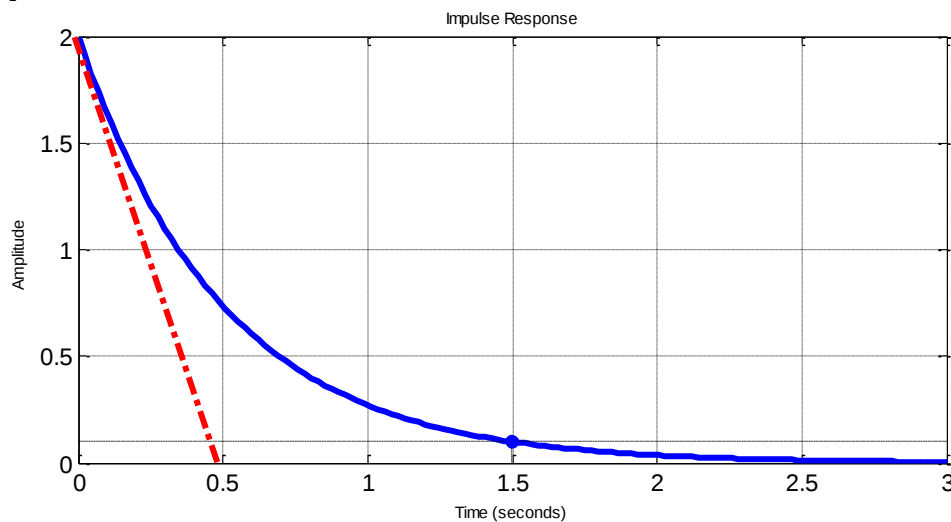


Figure 3.3 Réponse indicielle du système : $G(p) = 1/(0.5p+1)$

Remarque : Pour un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. On peut en déduire la réponse à une entrée $e(t)$ quelconque sous la forme d'une convolution :

$$s(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau).e(\tau)d\tau$$

b) Réponse indicielle

C'est la réponse temporelle d'un système quand l'entrée est un échelon unitaire.

$$\text{On a donc } e(t)=u(t) \Rightarrow S(p) = E(p).G(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{k}{\tau p+1} = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{\tau p+1}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} a_1 = p.S(p)|_{p=0} = k \\ a_2 = (\tau p+1).S(p)|_{p=-\frac{1}{\tau}} = -k\tau \end{cases} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{p} + \frac{-k\tau}{\tau p+1}$$

$$\text{D'où } s(t) = L^{-1}\left[\frac{k}{p}\right] + L^{-1}\left[\frac{-k\tau}{\tau p+1}\right] = (k - ke^{-\frac{t}{\tau}})u(t) \quad (3.5)$$

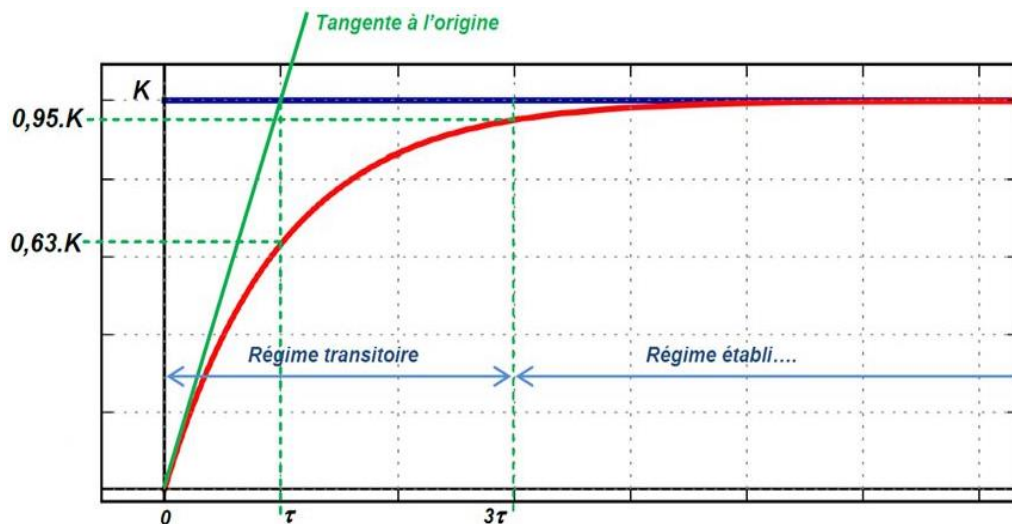


Figure 3.4 Réponse d'un système de 1^{er} ordre à une entrée échelon.

Exemple :

Soit à tracer la réponse indicielle d'un système dont la fonction de transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{0.5p + 1}$$

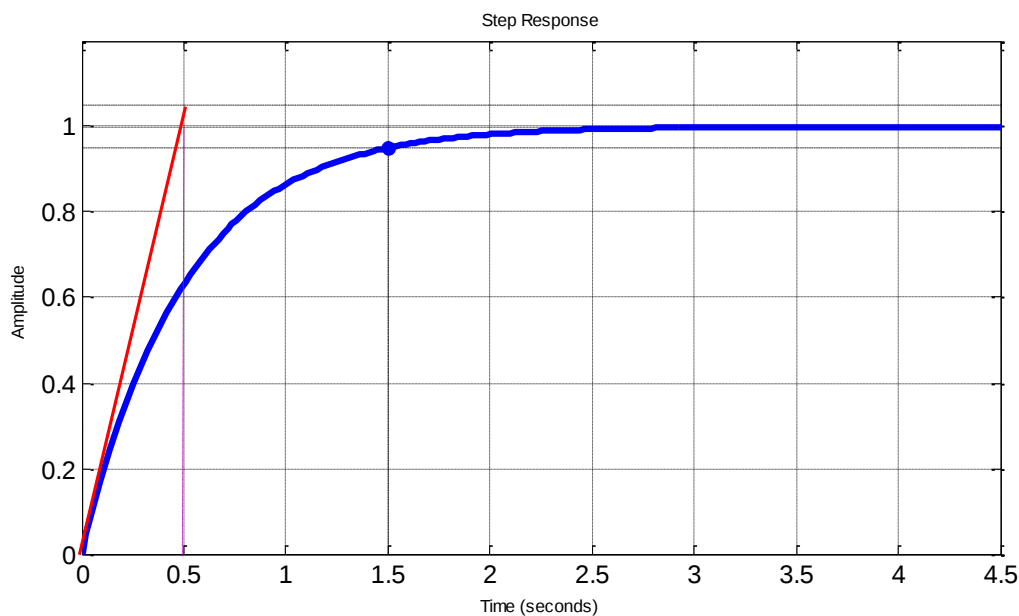


Figure 3.5 Réponse indicielle du système : $G(p) = 1/(0.5p + 1)$ (où $t_r = 1.5s$ et $\tau = 0.5s$)

c) Réponse à une rampe

Nous nous proposons ici d'étudier le comportement d'un système de premier ordre lorsque celui-ci est excité par une rampe (ou un échelon de vitesse) dont la transformée de Laplace est égale à $\frac{1}{p^2}$ nous obtenons alors la réponse : $S(p) = \frac{k}{p^2(\tau p + 1)}$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ donne : $S(p) = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau^2}{\tau p + 1}$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)] = k(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}), \text{ pour } t \geq 0 \quad (3.6)$$

Si $k=1$, l'erreur au régime permanent appelée erreur de trainage est déterminée comme suit : on a $\varepsilon(t) = \tau - \tau e^{-\frac{t}{\tau}}$, lorsque $t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$, on obtient donc $\varepsilon(\infty) = \tau$. Cela veut dire, que dans ce cas la sortie suit asymptotiquement la rampe avec un retard τ .

Le tracé du signal d'entrée (rampe) et celui de la réponse à une rampe du système en fonction de k est donné par la figure 3.6 suivante :

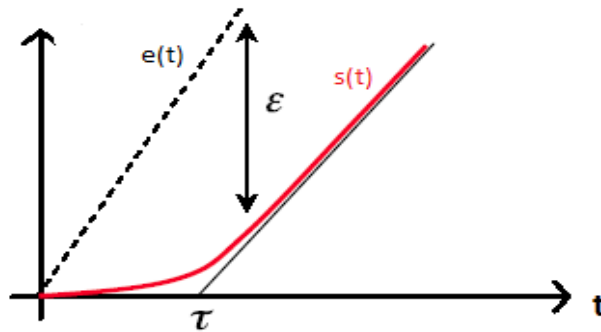
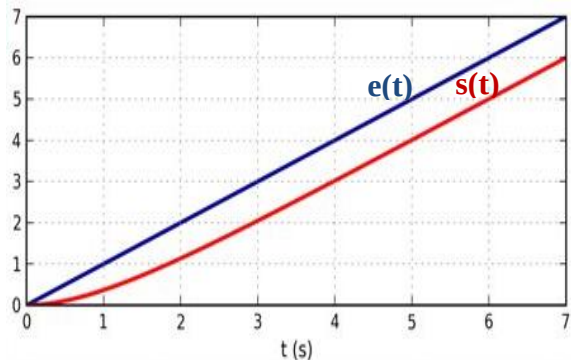
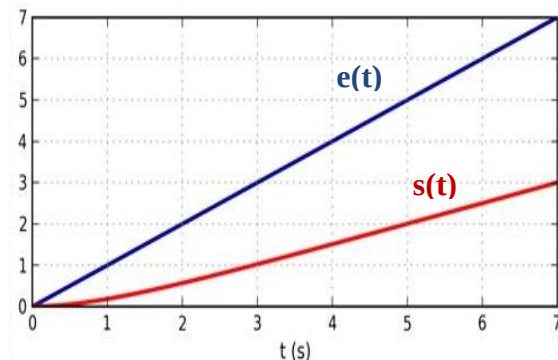


Figure 3.6 Réponse type à une rampe d'un système de 1^{er} ordre.

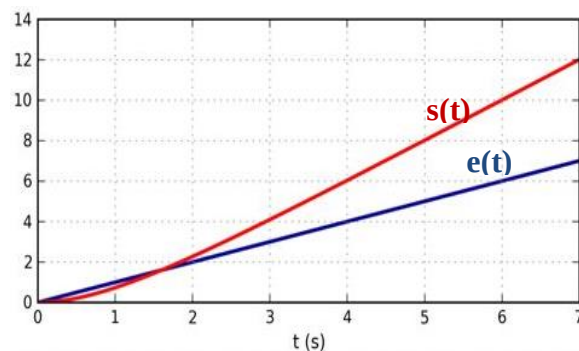
Remarque : L'écart en régime permanent $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ est appelé erreur de traînage



(a) Cas où $k=1$



(b) Cas où $k < 1$



(c) Cas où $k > 1$

Figure 3.7 Réponse à une rampe d'un système de 1^{er} ordre en fonction du gain k .

III.2.3. Système du second ordre

a) Définition : Un système physique est dit de second ordre s'il est régi par une équation différentielle linéaire de deuxième ordre à coefficients constants de la forme :

$$b_2 \frac{d^2s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t) \quad (3.7)$$

Où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement le signal d'entrée et le signal de sortie.
 b_2, b_1, b_0 et a_0 sont des constantes positives.

b) Fonction de transfert : On calcule la transformée de Laplace de l'équation (3.7) ci-dessus, où les conditions initiales du système sont supposées nulles, on obtient :
 $a_2 p^2 S(p) + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_0 E(p)$ d'où la fonction de transfert du système est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \quad (3.8)$$

Si on pose :

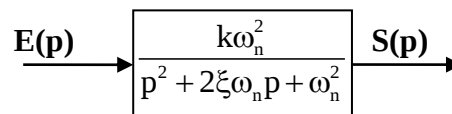
$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{a_0}{b_0} : \text{est le gain statique du système} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{b_0}{b_2}} : \text{pulsation propre non amortie [rad/s]} \\ z \text{ (ou } \xi) = b_1 / 2\sqrt{b_0 b_2} : \text{Coefficient d'amortissement} \end{array} \right.$$

Alors, on peut écrire la fonction de transfert d'un système de second ordre sous la forme canonique standard suivante :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} \quad (3.9)$$

III.2.4. Réponses temporelles du système de 2^{ème} ordre

Soit un système de second ordre représenté par le schéma bloc suivant :



a) Réponse impulsionnelle

On a $e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = L[\delta(t)] = 1$ d'où $G(p) = S(p)$, alors la fonction de transfert du système est égale à la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$\text{Comme } S(p) = G(p) = \frac{k \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \Rightarrow h(t) = s(t) = L^{-1} \left[\frac{k \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \right]$$

On constate que la réponse en question dépend des racines de l'équation caractéristique $p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2 = 0$ du système (i.e. pôles de $G(p)$) c'est-à-dire de $\Delta' = \omega_n^2 (\xi^2 - 1)$ et surtout de la valeur de ξ . Pour cela, on distingue 4 cas : ($\xi > 1$, $\xi = 1$, $0 < \xi < 1$, et $\xi = 0$).

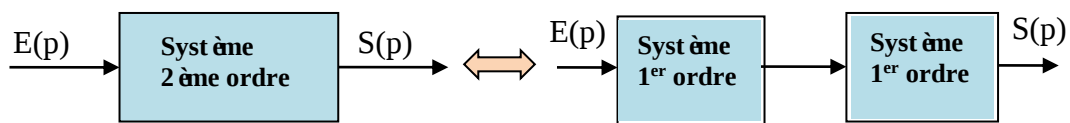
1) Cas où $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$

$$G(p) \text{ admet alors, deux pôles réels distincts : } \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

La fonction de transfert peut s'écrire :

$$G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{(p+\frac{1}{\tau_1})(p+\frac{1}{\tau_2})} = \frac{k\omega_n^2\tau_1\tau_2}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$\Rightarrow G(p) = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$



$$S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} \text{ o? } \begin{cases} a_1 = \frac{k\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \\ a_2 = -a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[\frac{a_1}{p-p_1}\right] + L^{-1}\left[\frac{a_2}{p-p_2}\right] = \frac{k\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}), \text{ pour } t \geq 0$$

Il s'agit donc d'une réponse aperiodique **hyper-amortie**.

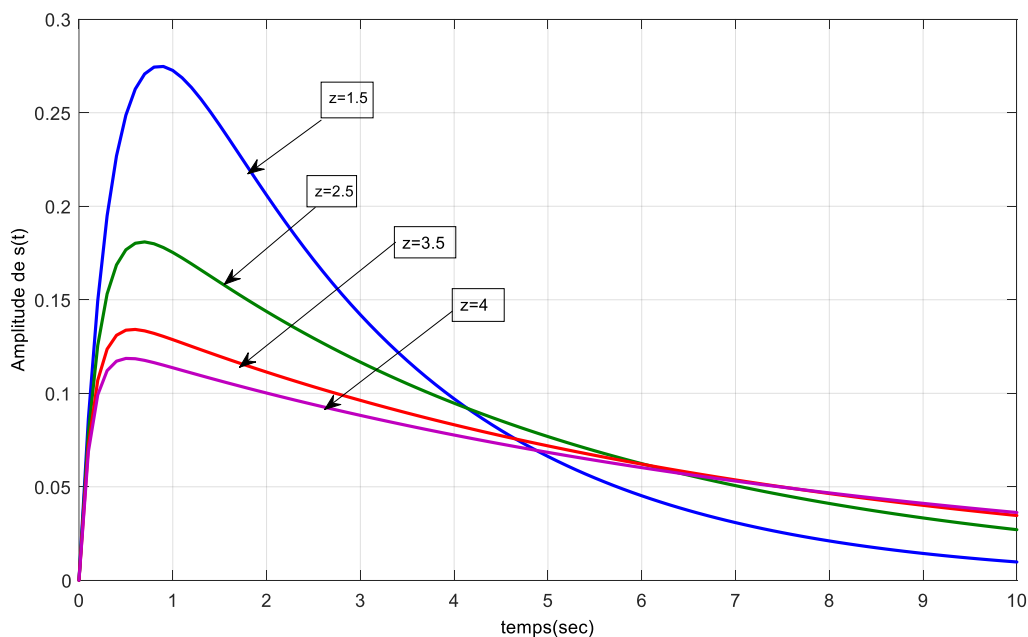


Figure 3.8 Réponse impulsionnelle du système de second ordre (ξ ou $z > 1$)

2) Cas où $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$

$G(p)$ admet alors, deux pôles réels identiques : $p_1 = p_2 = -\omega_n$

$$G(p) = \frac{k\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2} \Rightarrow s(t) = k\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}, \text{ pour } t \geq 0, \text{ réponse à amortissement critique.}$$

3) Cas où $0 < \xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$, $G(p)$ admet donc deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2} = \frac{k\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

avec $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$: pseudo-pulsation ou pulsation naturelle amortie [rad/seconds]

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t, \text{ pour } t \geq 0$$

La réponse est apériodique et **pseudo-amortie**.

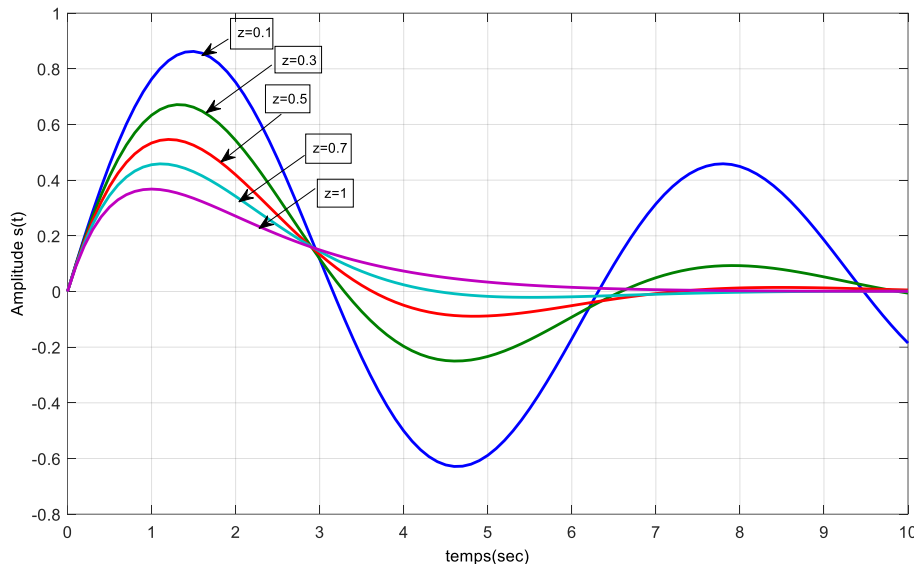


Figure 3.9 Réponse impulsionnelle du système de second ordre ($0 < \xi \leq 1$)

4) Cas où $\xi = 0 \Rightarrow$ pas d'amortissement

$$S(p) = G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + \omega_n^2} \Rightarrow s(t) = L^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{p^2 + \omega_n^2}\right] = k\omega_n \sin \omega_n t$$

L'allure de la réponse impulsionnelle obtenue sera une sinusoïde de pulsation ω_n .

Il s'agit d'une réponse apériodique, **oscillatoire non amortie**.

b) Réponse indicielle

On a $e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p}$ Alors $S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{p}$, d'où l'expression de la

réponse s'obtient par : $s(t) = L^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}\right]$. Selon la valeur de ξ et d'une

manière analogue au cas précédent, on distingue aussi 4 cas : ($\xi > 1$, $\xi = 1$, $0 < \xi < 1$, et $\xi = 0$).

1) **Cas où** $\xi > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$, le système admet donc deux pôles réels distincts :

$$p_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \quad \text{et} \quad p_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_2}$$

La fonction de transfert s'écrit : $G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k\omega_n^2}{p(p + \frac{1}{\tau_1})(p + \frac{1}{\tau_2})} = \frac{k\omega_n^2 \tau_1 \tau_2}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

La décomposition en éléments simples :

$$S(p) = \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \frac{a_0}{p} \quad \text{où} \quad \begin{cases} a_1 = (p-p_1)S(p)|_{p=p_1} = \frac{p_2}{p_1-p_2} = \frac{p_2}{2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \\ a_2 = (p-p_2)S(p)|_{p=p_2} = \frac{p_1}{p_2-p_1} = \frac{p_1}{-2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \\ a_0 = pS(p)|_{p=0} = k \end{cases}$$

Après un long calcul on aboutira au résultat suivant :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = k[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} (\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2})], \quad \text{pour } t \geq 0, \quad \text{On peut}$$

écrire

$$s(t) = k[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} (\tau_2 e^{-t/\tau_2} - \tau_1 e^{-t/\tau_1})], \quad \text{pour } t \geq 0, \quad \text{réponse **oscillatoire amortie**.}$$

2) **Cas où** $\xi = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$ on a : $p_1 = p_2 = p_0 = -\omega_n = -\frac{1}{\tau_0}$

La fonction de transfert s'écrit :

$$G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} \Rightarrow S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_0)^2} = \frac{k\omega_n^2}{p(p+\omega_n)^2} = \frac{k\omega_n^2}{p(p+\frac{1}{\tau_0})^2}$$

La décomposition en éléments simples de $S(p)$ permet d'écrire :

$$S(p) = \frac{b_2}{(p+\omega_n)^2} + \frac{b_1}{p+\omega_n} + \frac{a}{p} \quad \text{où} \quad \begin{cases} b_2 = (p+\omega_n)^2 \cdot S(p)|_{p=-\omega_n} = -k\omega_n \\ b_1 = \frac{d}{dp} [(p+\omega_n)^2 \cdot S(p)]|_{p=-\omega_n} = k \\ a = pS(p)|_{p=0} = k \end{cases}$$

d'où : $s(t) = L^{-1}[S(p)] = k(1 - te^{-\omega_n t} - e^{-\omega_n t}), \quad \text{pour } t \geq 0$, **amortissement critique**.

3) **Cas où** $0 < \xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$ $G(p)$ admet alors deux pôles complexes conjugués :

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ \bar{p}_1 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \quad \text{Si on pose : } \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{alors on écrit} \quad \begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_d \\ \bar{p}_1 = -\xi\omega_n - j\omega_d \end{cases}$$

Où ω_d [rad/sec] est la pseudo-pulsation (ou pulsation propre amortie)

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{k\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-\bar{p}_1)} = k \left[\frac{1}{p} - \frac{p+2\xi\omega_n}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \right] = k \left[\frac{1}{p} - \frac{p+2\xi\omega_n}{(p+\xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = k \left[1 - (e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)) \right], \text{ pour } t \geq 0$$

En utilisant les transformations trigonométriques usuelles, on peut réécrire $s(t)$ sous la forme la plus concise suivante:

$$s(t) = k \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \right] \text{ pour } t \geq 0, \text{ où } \varphi = \arccos(\xi) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right), s(t) \text{ est}$$

une réponse **pseudo-oscillatoire amortie** (où la pulsation d'oscillation : $\omega_{os} = \omega_d$).

4) Cas où $\xi = 0$, pas d'amortissement, $G(p)$ a deux pôles imaginaires purs : $\begin{cases} p_1 = +j\omega_n \\ \bar{p}_1 = -j\omega_n \end{cases}$

$$S(p) = \frac{k\omega_n^2}{p(p^2 + \omega_n^2)} = k \left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_n^2} \right] \Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)] = k(1 - \cos(\omega_n t)), \text{ pour } t \geq 0$$

L'allure de la réponse impulsionnelle obtenue est une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_n}$,

il s'agit donc d'une réponse **oscillatoire (non amortie)** à la fréquence ω_n .

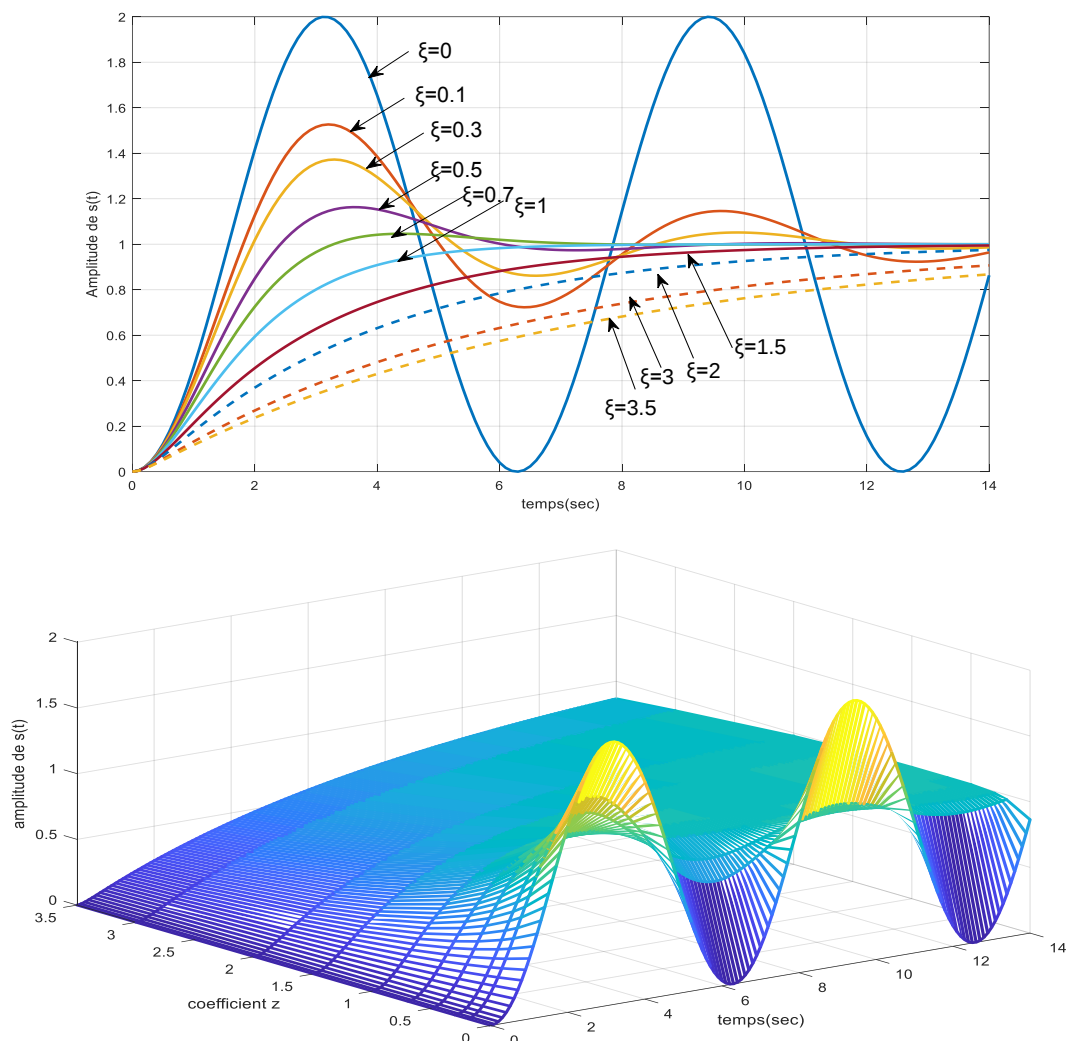


Figure 3.10 Réponse indicielle du système de second ordre en fonction de ξ (avec $k=1$)

Remarque :

- D'après la figure 3.10 ci-dessus, on constate que plus le coefficient ξ est petit et plus les amplitudes des oscillations de $s(t)$ sont grandes (cas où $0 < \xi < 1$).
- On notera que les oscillations sont visibles pour $\xi < 0.7$. Pratiquement ces oscillations sont invisibles pour $0.7 < \xi < 1$, et pour $\xi > 0.7$ la réponse est la somme de deux exponentielles (réponse aperiodique, ou hyper-amortie).

III.3. Caractéristiques de la réponse d'un système de second ordre**III.3.1. En régime transitoire**

A partir de la réponse temporelle (réponse indicielle) d'un système de second ordre on constate que le régime transitoire est évalué selon deux grandeurs qui caractérisent essentiellement la qualité du système à savoir : un bon amortissement et une bonne rapidité

a) La rapidité (ou la durée du régime transitoire)

Elle est évaluée par le temps de réponse (t_r à $\pm\delta$) et peut être aussi estimée par deux autres valeurs qui sont : le temps de montée (t_m) et le temps de pic (t_p).

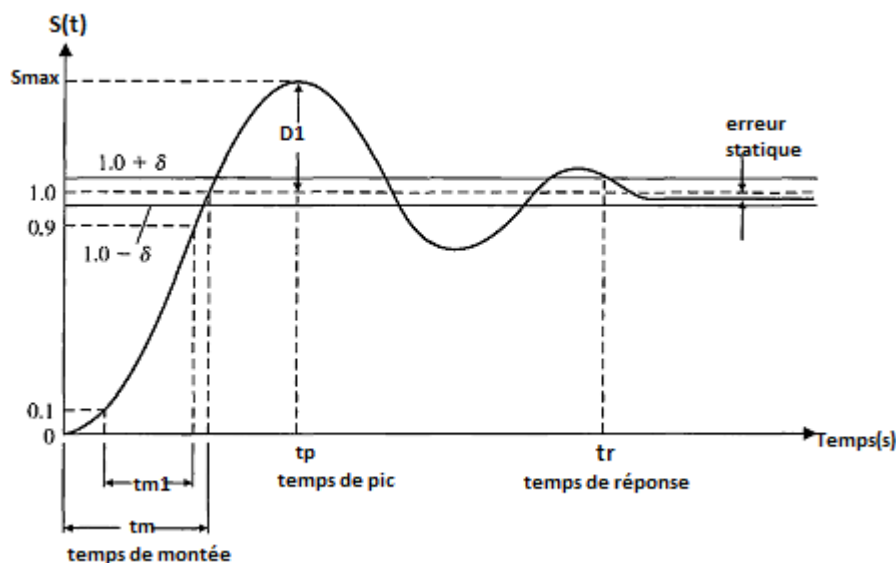


Figure 3.11. Réponse indicielle d'un système de second ordre (cas où $0 < \xi < 1$ et $k=1$)

1) Le temps de réponse (t_r)

- **Définition :** C'est le temps au bout duquel la réponse du système a atteint sa valeur définitive à $\delta = \pm 5\%$ (ou $\delta = \pm 2\%$) près.
- **Détermination du temps de réponse:** Pour une réponse oscillatoire amortie, l'expression de la réponse si $k=1$ est donnée par la relation suivante:

$$s(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad \text{où } \varphi = \arccos(\xi) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

Les courbes $1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}$ constituent les deux enveloppes qui enferment la réponse indicielle du système (i.e. $s(t)$ demeure toujours à l'intérieur de ces deux enveloppes).

Le temps de réponse pour lequel $s(t)$ reste à $\pm\delta\%$ près de sa valeur finale est déterminé

approximativement :

$$\begin{cases} ? \pm \% \text{ on a } 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} = 0.95 \Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_r} \cong 0.05 \Rightarrow t_r \cong \frac{3}{\xi\omega_n} \\ ? \pm \% \text{ on a } 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_r} = 0.98 \Rightarrow e^{-\xi\omega_n t_r} \cong 0.02 \Rightarrow t_r \cong \frac{4}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

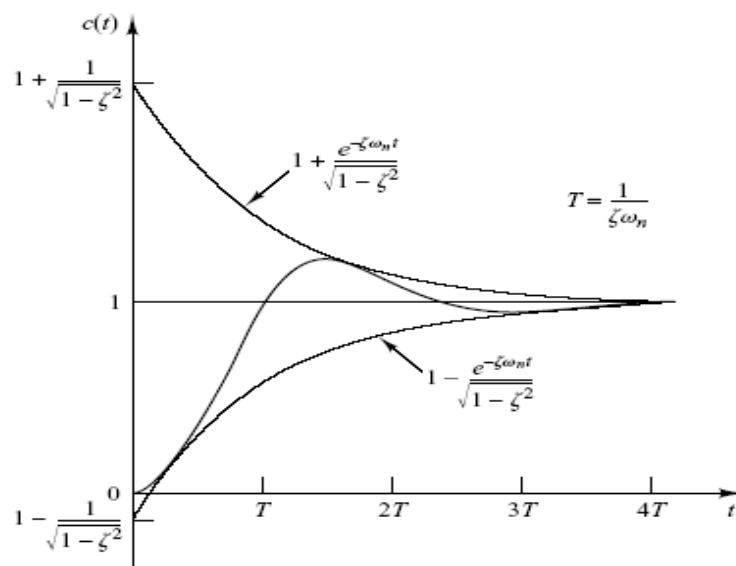


Figure 3.12 Paires des courbes qui enveloppent la réponse indicielle donnée par la figure 3.11 précédente.

2) Le temps de montée

- **Définition :** Il caractérise la durée du passage de la réponse de 10% à 90% de sa valeur définitive si la réponse est hyper amortie, et de 0% à 100% dans le cas de la réponse oscillatoire amortie.

- **Calcul du temps de montée (t_m)**

$$\text{A } t=t_m \text{ on a } s(t)|_{t=t_m} = 1 \Rightarrow 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) \Big|_{t=t_m} = 1 \Rightarrow$$

$$e^{-\xi\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) \right) = 0 \quad \text{comme } e^{-\xi\omega_n t} \neq 0 \Rightarrow \cos(\omega_d t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t) = 0$$

$$\text{Alors } \cos(\omega_d t_m) = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t_m) \quad \text{d'o?} \quad t_m = \frac{1}{\omega_d} \arctg \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

$$\text{On peut écrire : } t_m = \frac{1}{\omega_d} \arctg \frac{-\omega_d}{\omega_n \xi} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad \text{o? } \beta = \arctg \frac{\omega_d}{\omega_n \xi}$$

3) Le temps de pic (t_p)

- **Définition** : Caractérise la durée de passage de la réponse jusqu'au premier dépassement (maximal).

- **Calcul du temps de pic**:

On assume une réponse oscillatoire amortie, au temps de pic la réponse indicielle $s(t)$ atteint sa valeur maximale, cela veut dire que : $\left. \frac{ds(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p \right) \right] = 0 \Rightarrow e^{-\xi \omega_n t_p} \sin \omega_d t_p \left[\frac{\xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} + \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\xi \omega_n t_p} (\sin \omega_d t_p) \frac{\xi^2 \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} = 0 \Rightarrow \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\text{D'où au premier dépassement : } \omega_d t_p = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

b) L'amortissement :

- **Définition** : Il peut être apprécié selon les dépassements successifs de la réponse indicielle. L'estimation se porte généralement sur le premier dépassement (maximal)

qui peut être déterminée comme suit : $D_{\max} \% = \frac{s_{\max}(t) - s(\infty)}{s(\infty)} \cdot 100$

- **Calcul du dépassement maximal** :

$$D_{\max} = \frac{s_{\max}(t) - s(\infty)}{s(\infty)} = \frac{s(t_p) - 1}{1} = 1 - e^{-\xi \omega_n t_p} \left(\cos \omega_d t_p + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p \right) - 1 \quad \text{où } t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$\text{Alors } D_{\max} = -e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \left(\cos \pi + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \pi \right) = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad \text{d'où } D_{\max} \% = e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100$$

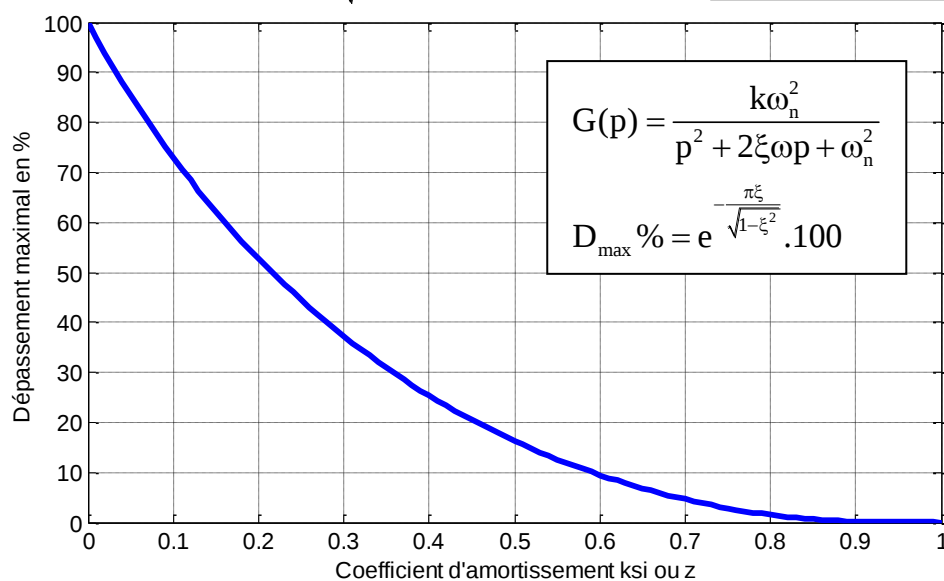


Figure 3.13 Le dépassement maximal (en %) en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

A l'exception de certaines applications où les oscillations ne peuvent être tolérées, il est désirable que le régime transitoire doive être suffisamment rapide et suffisamment amorti. Dans le cas d'un système du second ordre où la fonction de transfert est donnée par l'équation (3.9), pour avoir un régime transitoire acceptable, il faut que le coefficient d'amortissement ξ soit compris entre 0.4 et 0.7 (i.e. le dépassement maximal varie entre 25% et 4%). En effet, les valeurs de $\xi < 0.4$, provoquent un dépassement excessif dans le régime transitoire, et pour les valeurs de $\xi > 1$, le système devient très lent (i.e. réponse très lente).

Exemple : Étant donnée sur la figure (3.14) ci-dessous, la réponse indicielle d'un système du second ordre dont la fonction du transfert est donnée par : $G(p) = \frac{9}{p^2 + 2*0.25*3*p + 9}$

Calculer :

- Le temps de réponse à $\pm 5\%$ et le temps de montée;
- Le temps de pic ainsi que le dépassement maximal en %.

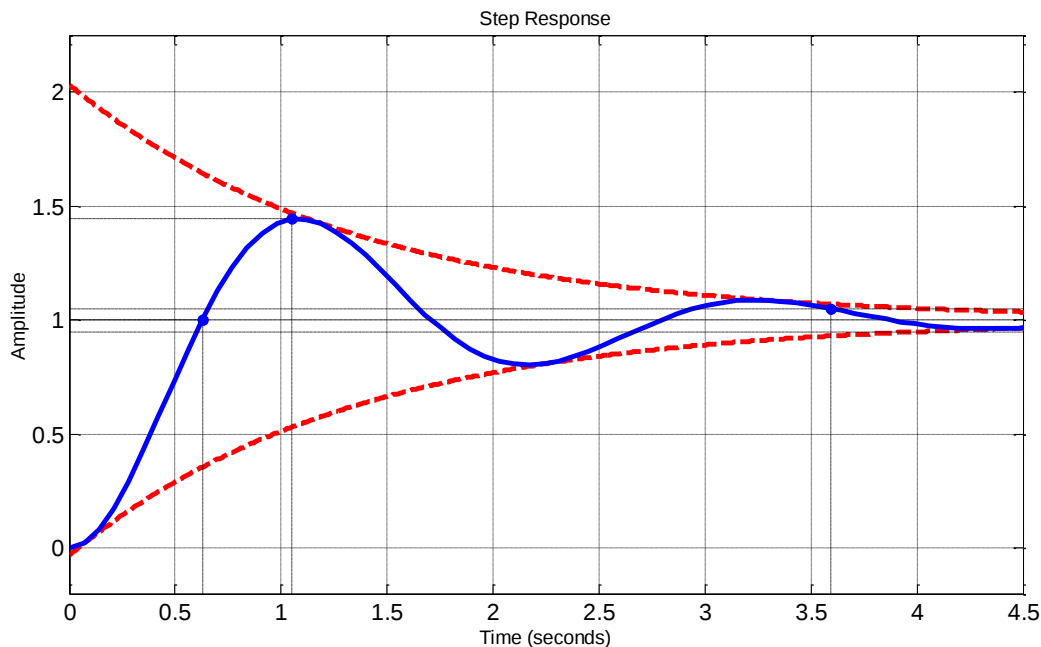


Figure 3.14 Réponse indicielle du système de l'exemple ci-dessus
($k=1$, $\xi=0.25$, $\omega_n=3\text{rad/s}$)

- **Calcul du temps de réponse à $\pm 5\%$ près :** $t_r \cong \frac{3}{\xi \omega_n} = \frac{3}{0.25*3} = 4\text{sec}$
- **Calcul du temps de montée :** On a : $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 3*\sqrt{1-0.25^2} = 2.9047\text{rad/sec}$
et $\beta = \arctg \frac{\omega_d}{\omega_n \xi} = 1.3181\text{rad} \Rightarrow t_m = \frac{1}{\omega_d} \arctg \frac{-\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{\pi-\beta}{\omega_d} = 0.6278\text{sec}$
- **Calcul du temps de pic :** $\omega_d t_p = \pi \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{1-0.25^2}} = 1.0816\text{sec}$
- **Calcul du dépassement maximal :** $D_{\max} \% = e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} . 100 = 44.4344 \%$

D'après la figure (3.) ci-dessous, on remarque que plus la pulsation ω_n augmente plus la réponse devient plus rapide. Alors que, le dépassement est indépendant de ω_n .

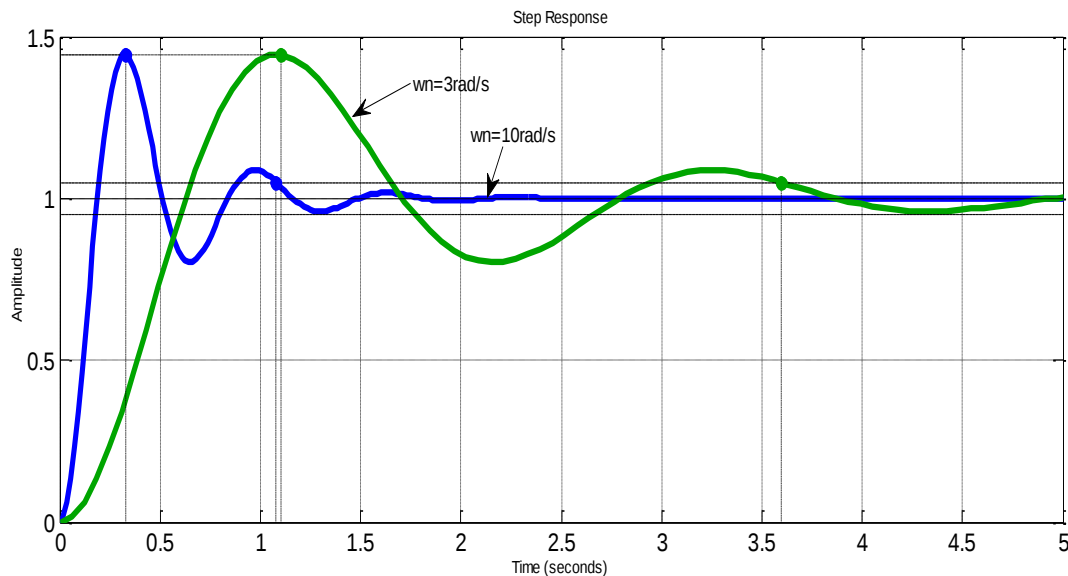


Figure 3.15 Réponse indicielle du système de l'exemple ci-dessus avec variation de la pulsation ω_n .

Les performances des systèmes de commande se jugent par la qualité de leur régime transitoire et de leur régime définitif (permanent). Le tableau 3.1 ci-dessus résume les conditions généralement imposées, qui apparaissent comme des critères de performances.

Tableau 3.1 Récapitulatif des performances imposées

Type d'entrée	Conditions généralement imposées à la réponse	
	Régime transitoire	Régime permanent
Échelon	<u>Amorti</u> : dépassement faible <u>Rapide</u> : Temps de réponse faible (fréquence propre élevée)	Erreur de position nulle
Échelon de vitesse		Erreur de trainage faible
Impulsion		

N.B/ Dans le cas d'un système à retour (i.e. en boucle fermée), il y'aura lieu d'ajouter à ces critères de performances une condition supplémentaire, relative à la **stabilité**. La stabilité et la précision vont être traitées en détail dans le dernier chapitre de ce polycopié.

III.4. Systèmes d'ordre supérieur

Nous avons vu précédemment que la forme de la réponse d'un système dépend de l'ordre du système, et plus particulièrement de la valeur et donc de la position de ses pôles dans le plan complexe (i.e. de la valeur de ω_n et ξ).

Un système d'ordre élevé comprend un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses peut se révéler fastidieux si on l'effectue de la même façon que précédemment. L'étude d'un tel système, tout en considérant un nombre restreint de paramètres, (système relativement simple) permettra de déterminer son comportement en fonction de ses réponses temporelles.

Dans cette section on présentera l'analyse de la réponse transitoire d'un système d'ordre supérieur d'une manière générale. Il est à noter que la réponse d'un tel système est égale à la somme des réponses des systèmes de premier et second ordre.

Exemple : Considérons le système d'ordre 3 dont la fonction du transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{1}{(p+1)\left(\frac{p}{6}+1\right)\left(\frac{p}{22}+1\right)}. \text{ Ce système possède 3 pôles réels : } -1, -6 \text{ et } -22.$$

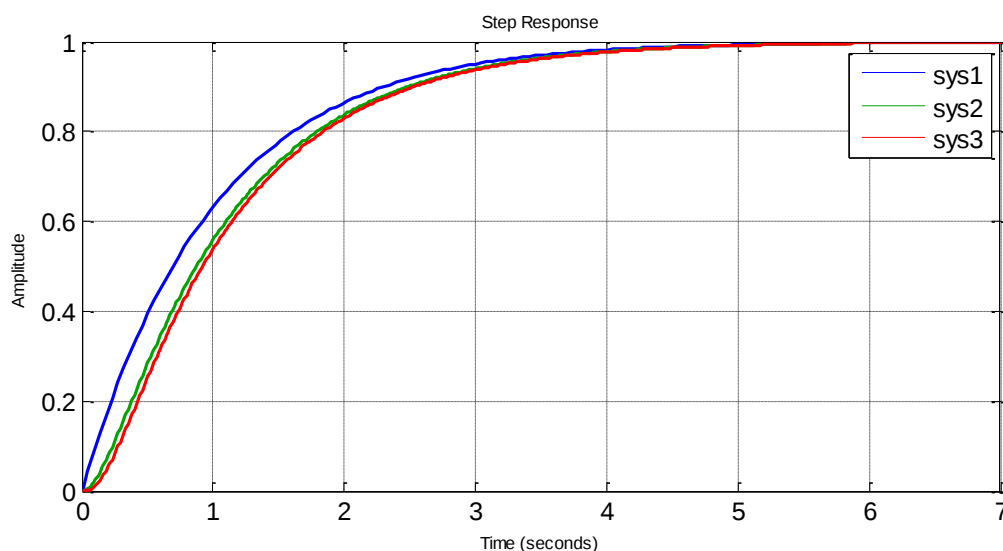


Figure 3.16 Réponses indicielles et pôles dominants

Sur la figure ci-dessus on a tracé les réponses indicielles respectivement, des systèmes d'ordre 1 (sys1: $\frac{1}{p+1}$), d'ordre 2 (sys2: $\frac{1}{(p+1)(\frac{p}{6}+1)}$) et d'ordre 3 (sys3: $G(p)$).

Les pôles les plus proches de l'origine du plan complexe appelés **pôles dominants** conservent plus longtemps leur influence sur l'allure de la réponse temporelle. Dans ce cas : -1 est le pôle lent et -6 et -22 sont les pôles rapides. En revanche, les pôles les plus éloignés n'influencent que sur la forme du début du régime transitoire comme le montre la figure (3.16). On remarque qu'il n'y a pas de différence en régime permanent. Ainsi, la forme de la réponse dépend essentiellement des pôles dominants comme le montre la figure (3.16).

Le résultat mis en évidence par cet exemple nous a permis de conclure ce qui suit :

- ✓ Un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte comme un système de 1^{er} ou du 2^{ème} ordre.
- ✓ On peut réduire la fonction de transfert d'un système d'ordre supérieur à un système de 1^{er} ou du 2^{ème} ordre si nous conservons que le (ou les) pôle(s) dominant(s).
- ✓ En pratique, un pôle peut être négligé dès qu'il est 3 à 4 fois supérieur au précédent.

III.5. Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système

Un système d'ordre élevé peut comporter un grand nombre de pôles et de zéros (réels ou complexes conjugués) et tous ces derniers n'ont pas la même influence sur la réponse temporelle du système. Selon la figure (3.17) ci-dessous, on constate que les pôles les plus proches de l'origine (pôles dominants) ont une influence prépondérante sur la réponse du système.

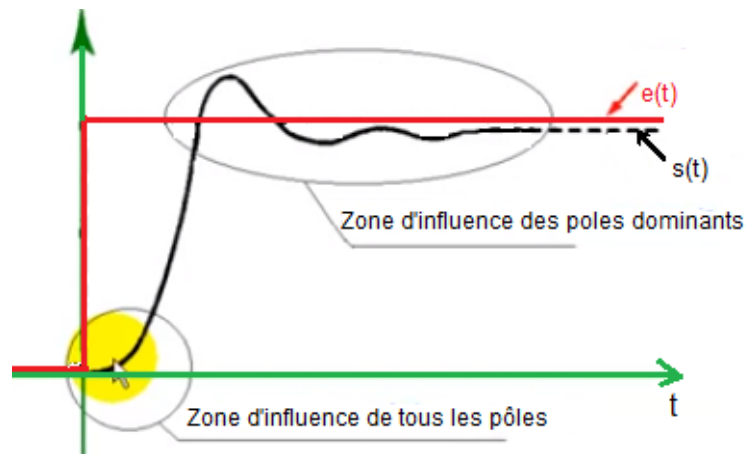


Figure 3.17 Influences des pôles sur la réponse d'un système

Reprenons une fonction de transfert possédant des pôles distincts stables et que l'on factorise

sous la forme : $G(p) = K \frac{\prod_{j=1}^m (p - z_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p - p_i}$, La réponse impulsionnelle du système s'écrit

alors : $h(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{p_i t}$ avec $a_i = K \frac{\prod_{j=1}^m (p_i - z_j)}{\prod_{j \neq i}^n (p_i - p_j)}$. Le coefficient a_i devant chaque mode dépend

donc de la contribution des autres pôles et des zéros. On en déduit, que la contribution d'un pôle p_i :

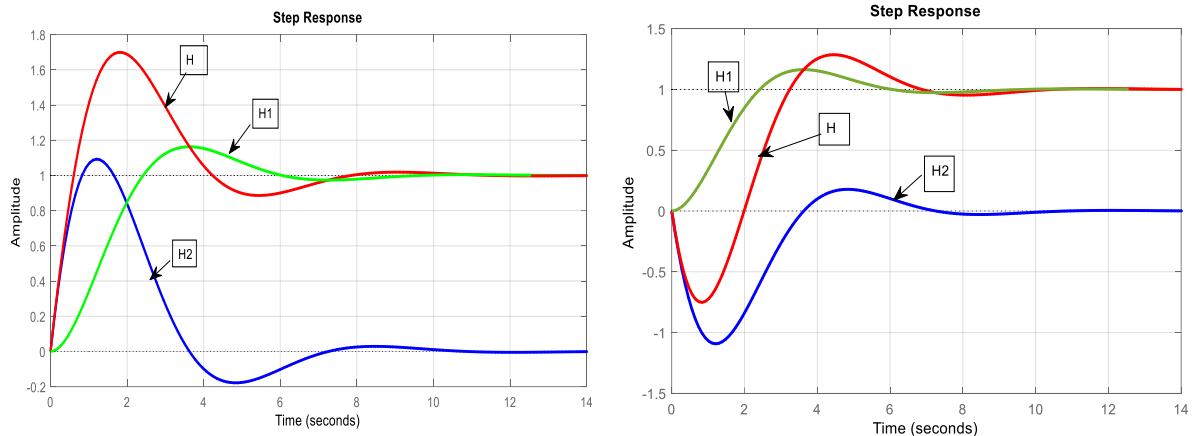
- est diminuée par la présence d'un zéro z_i voisin du pôle p_i
- est augmentée par la présence des pôles voisins.

Si l'on étudie la réponse indicielle, $h(t) = K + \sum_{i=1}^n b_i e^{p_i t}$ où $b_i = a_i/p_i$, on déduit que différents modes ont une contribution à la réponse indicielle d'autant plus faible qu'ils sont éloignés de l'origine.

Soit la fonction de transfert normalisée par le choix $\omega_n=1$:

$$G(p) = \frac{\frac{p}{\alpha\xi} + 1}{p^2 + 2\xi p + 1} = \underbrace{\frac{1}{p^2 + 2\xi p + 1}}_{H_1(p)} + \underbrace{\frac{1}{\alpha\xi} \frac{p}{p^2 + 2\xi p + 1}}_{H_2(p)}$$

On remarque que $h_2(t) = \frac{1}{\alpha\xi} \frac{dh_1(t)}{dt}$. Le fait d'ajouter un zéro à la fonction de transfert ajoute la dérivée de la réponse multipliée par un coefficient égal au zéro. Suivant que le zéro sera stable ou instable, le dépassement sera augmenté ou diminué (voir figure 3.18).



(a) Addition d'un zéro stable $\alpha=1$ et $\xi=0.5$

(b) Addition d'un zéro stable $\alpha=-1$ et $\xi=0.5$

Figure 3.18 Mise en évidence de l'Effet des zéros

On peut conclure alors ce qui suit :

- L'addition d'un pôle p_{add} à une paire de pôles dominants p_{dom} augmente le temps de montée si $|p_{add}| \leq 4|Re(p_{dom})|$.
- L'addition d'un zéro stable z à une paire de pôles dominants p_{dom} augmente le dépassement si $|z_{add}| \leq 4|Re(p_{dom})|$.
- L'addition d'un zéro instable z à une paire de pôles dominants p_{dom} diminue le dépassement mais provoque le phénomène de réponse inverse augmentant ainsi le temps de réponse.

Chapitre .IV. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires.

IV.1. Introduction

La technique de l'analyse de la réponse en fréquence d'un système asservi linéaire continu est une méthode graphique qui ne considère que les entrées sinusoïdales de fréquences différentes. C'est une technique facile, rapide et puissante pour l'obtention de l'état permanent du système à des séquences spécifiques. En outre, quand la fonction de transfert d'un système n'est pas connue, on peut la déterminer approximativement en utilisant une réponse en fréquence déterminée expérimentalement.

Ce chapitre est consacré à la présentation du principe des différentes méthodes, plus souvent utilisées, dans l'analyse fréquentielle des systèmes asservis linéaires continus, suivi de quelques exemples illustratifs.

IV.2. Vue d'ensemble des méthodes d'analyse fréquentielle

Un système linéaire étant défini par son équation différentielle, la transformation de Laplace ramène son étude à un problème algébrique (figure 4.1), puis les notions de réponse en fréquences et fonction de transfert permettent de se ramener à des constructions graphiques (lieu de transfert).

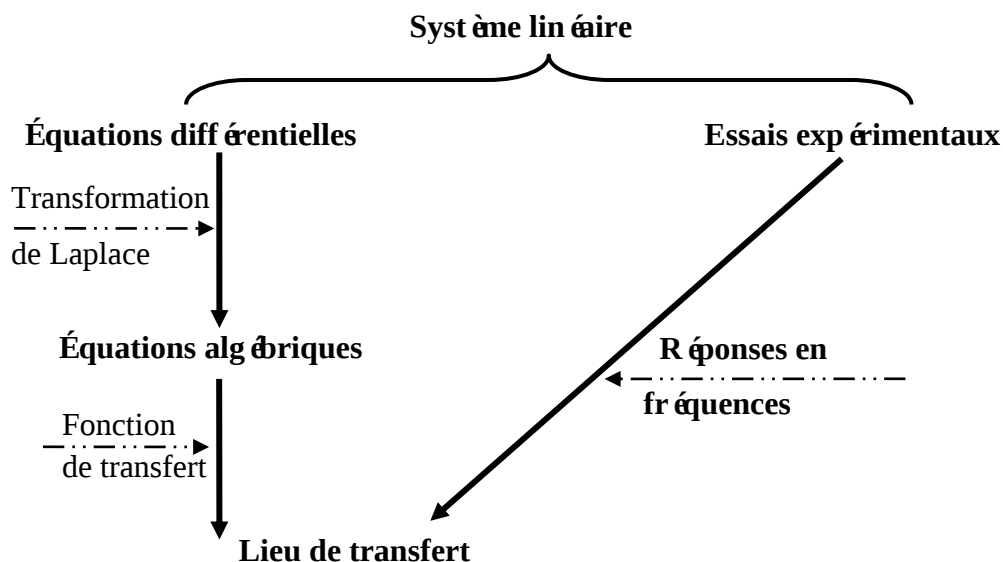


Figure 4.1 Vue d'ensemble des méthodes harmoniques (ou fréquentielles)

En fait, que l'on part d'équations ou d'expériences, le point d'aboutissement est le même. On peut donc tracer le lieu de transfert (réponse en fréquences) d'un système physique dont on ignore les équations aussi bien que d'un système non encore réalisé dont les équations sont connues.

IV.3. Notions de base sur les fonctions complexes

Le calcul de fonctions complexes peut être simplifié si on considère certaines propriétés des nombres complexes. Soit deux nombres complexes Z_1 et Z_2 , alors :

- l'amplitude de la multiplication est la multiplication des amplitudes

$$|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

- la phase de la multiplication est la somme des phases individuelles

$$\angle(Z_1 \cdot Z_2) = \angle Z_1 + \angle Z_2$$

La fonction de transfert dans le domaine fréquentiel (ou fonction de transfert isochrone) est obtenue en remplaçant p par $j\omega$ dans la fonction de transfert isomorphe $G(p)$, soit :

$$G(j\omega) = G(p)|_{p=j\omega}$$

Si on décompose cette fonction de transfert en plusieurs éléments de base, il est plus facile de déterminer la réponse globale du système.

$$\text{Soit } G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot G_3(j\omega) \dots$$

$$\text{Alors } \begin{cases} |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)| \dots \\ \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle G_3(j\omega) \dots \end{cases}$$

IV.4. Principe de l'analyse fréquentielle (ou harmonique)

Si on applique à l'entrée d'un système asservi linéaire, un signal sinusoïdal :

$$e(t) = E_m \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f \quad (\text{Où } f \text{ est la fréquence en Hz})$$

En maintenant suffisamment longtemps le signal jusqu'à la disparition du régime transitoire, on observe à la sortie un signal sinusoïdal de même pulsation mais d'amplitude et de phase modifiées (fig. 4.2).

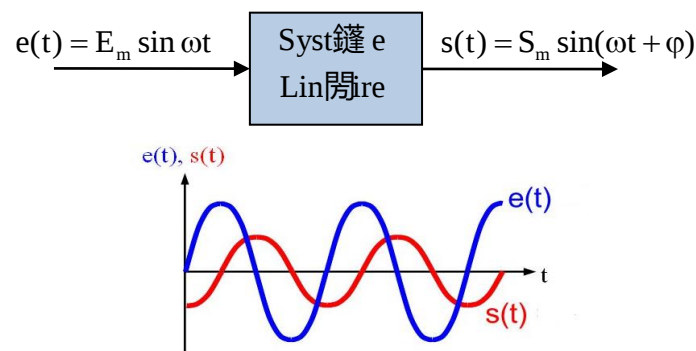


Figure 4.2 Exemple d'une réponse harmonique d'un système linéaire

On appelle réponse harmonique, la sortie $s(t)$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée périodique (sinusoïdale par exemple).

On peut écrire $e(t)$ et $s(t)$ sous la forme complexe telle que :

$$\begin{cases} e(t) = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow E(j\omega) = E_m e^{-j\omega t} & \text{et} \\ s(t) = S_m \sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow S(j\omega) = S_m e^{-j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$$

Où E_m est l'amplitude du signal d'entrée.
 S_m est l'amplitude du signal de sortie.
 φ est le déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

$$\text{D'où } G(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{S_m e^{-j(\omega t + \varphi)}}{E_m e^{-j\omega t}} = \frac{S_m}{E_m} e^{-j\varphi} = |G(j\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} & \text{est le module de la fonction de transfert (ou le rapport d'amplitude)} \\ \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) & \text{est la phase de la fonction de transfert (ou son argument)} \end{cases}$$

La fonction de transfert $G(p)$ exprimée sous forme de quotient entre deux polynômes en fonction de p : $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$ si on remplace p par $j\omega$ on

$$\text{obtient la fonction suivante : } G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}$$

Si on réarrange cette expression pour séparer la partie réelle de la partie imaginaire, pour mieux calculer l'amplitude et la phase de la fonction on aura :

$$G(j\omega) = R[G(j\omega)] + j \operatorname{Im}[G(j\omega)] = |G(j\omega)| \underline{\underline{G(j\omega)}}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} |G(j\omega)| = \sqrt{(R[G(j\omega)])^2 + (\operatorname{Im}[G(j\omega)])^2} \\ \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}[G(j\omega)]}{R[G(j\omega)]}\right) \end{cases}$$

La fonction $G(j\omega)$ est généralement définie par son module $|G(j\omega)|$ appelé aussi rapport d'amplitude et son argument $\angle G(j\omega)$ appelé aussi le déphasage $\varphi(\omega)$.

Exemple :

Si on applique une tension sinusoïdale d'amplitude $E_m = 5V$ à l'entrée d'un filtre de transmittance (ou Fonction de Transfert) :

$$G(j\omega) = \frac{5}{1 + j\frac{\omega}{40}}$$

Quelle sera la tension de sortie $s(t)$ à la pulsation $\omega = 40 \text{ rad/s}$?

Solution : A cette pulsation, la transmittance s'écrit :

$$G(j\omega) = \frac{5}{1 + j\frac{40}{40}} = \frac{5}{1 + j} \quad \text{et son module : } |G(j\omega)| = \left| \frac{5}{1 + j} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.53 \Rightarrow S_m = 3.53 * E_m = 17.7V$$

IV.5. Représentation de la réponse fréquentielle

L'étude des propriétés fréquentielles des systèmes linéaires (c'est-à-dire leur réponse à une action sinusoïdale permanente dont on fait varier la fréquence) permet d'en déduire les propriétés dynamiques temporelles (c'est-à-dire leur évolution dans le temps en fonction des actions subies) comme nous le verrons par la suite. C'est la raison pour laquelle on attache tant d'importance à cette étude.

En général les paramètres étudiés sont le gain et la phase (ou déphasage) :

$$\text{Gain} = |G(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m} \quad \text{et} \quad \text{phase} = \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

L'ensemble des variations du gain et de la phase de la fonction $G(j\omega)$ en fonction de la fréquence (ou pulsation ω), constitue la réponse fréquentielle du système. Ces dernières peuvent être tracées selon trois représentations graphiques distinctes :

- Diagramme de Bode ;
- Diagramme de Nyquist ;
- Diagramme de Black (ou Nichols).

Remarque : *Pratiquement, il est intéressant de faire l'étude et la synthèse d'un système asservi à partir de sa FTBO. En effet, la réponse du système en boucle fermée peut être déterminée à partir du tracé de la FTBO au moyen des abaques, telle que l'abaque de Black ou Nichols (voir annexes).*

IV.5.1. Courbes de Bode et diagrammes asymptotiques

La représentation d'une réponse en fréquence d'un système dans le plan de Bode consiste à tracer deux graphes séparément, le gain et la phase de la FTBO du système en fonction de la pulsation ω .

Par exemple, si la fonction de transfert est : $G(p)$, en régime sinusoïdal $p=j\omega$, alors pour une représentation de Bode, on tracera les courbes suivantes :

- a) **Courbe de gain (ou d'amplitude) :** Le gain est exprimé en décibels (dB), soit:

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Le gain $|G(j\omega)|_{\text{db}}$ est reporté sur l'axe des ordonnées suivant une échelle linéaire, et les valeurs de ω étant reportées sur une échelle logarithmique (décimale).

- b) **Courbe de phase (ou de déphasage) :** soit $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \arg(G(j\omega))$

Pour la courbe de phase, $\varphi(\omega)$ est reportée sur l'axe des ordonnées suivant une échelle linéaire en degré, et les valeurs de ω étant reportées sur une échelle logarithmique.

- c) **Diagramme asymptotique :** Dans la plupart des cas, il est inutile de tracer complètement les courbes de Bode (point par point). On peut se contenter des asymptotes.

On appelle diagramme asymptotique d'une fonction de transfert l'ensemble des asymptotes à la courbe quand $\omega \rightarrow 0$ et quand $\omega \rightarrow \infty$. Les points d'intersection de ces asymptotes sont appelés **points de cassure**.

Remarque :

- Étant donné l'utilisation de l'échelle logarithmique, la précision est suffisamment bonne pour que l'on puisse assimiler la courbe à ses asymptotes sauf au voisinage des points de cassure.
- Quand la fréquence varie de ω_1 à $10\omega_1$, on dit que la bande $[\omega_1, 10\omega_1]$ est une *décade*.
- Quand la fréquence varie de ω_1 à $2\omega_1$, on dit que la bande $[\omega_1, 2\omega_1]$ est une *octave*.

IV.5.1.a. Cas d'un système de premier ordre

Soit $G(p) = \frac{k}{\tau p + 1}$, on pose $p = j\omega$ on aura: $G(j\omega) = \frac{k}{j\tau\omega + 1} = \frac{k}{j\frac{\omega}{\omega_c} + 1}$ où $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

Gain et phase :
$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = 20 \log k - 10 \log(\tau^2 \omega^2 + 1) \\ \varphi(\omega) = \arg(k) - \arg(j\tau\omega + 1) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

a) Diagramme de Bode asymptotique :

- Pour $\omega \ll \omega_c$ (i.e $\omega \rightarrow 0$), donc $|G(j\omega)|_{dB}$ tend vers $20 \log k$ et $\varphi(\omega) \rightarrow 0^\circ$
- Pour $\omega \gg \omega_c$ (i.e $\omega \rightarrow \infty$), donc $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log \omega \tau$, similaire à une droite de pente -20 dB/déc. et $\varphi(\omega)$ tend vers -90° .

b) Diagramme de Bode réel :

- Pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ (pulsation de cassure) donc $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 3 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) = -\arctan 1 = -45^\circ$
- Pour $\omega = \frac{1}{2\tau}$ donc $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 0.98 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) = -\arctan 0.5 = -26.56^\circ$
- Pour $\omega = \frac{2}{\tau}$ donc $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 6.98 \text{ dB}$ et $\varphi(\omega) = -\arctan 2 = -63.43^\circ$

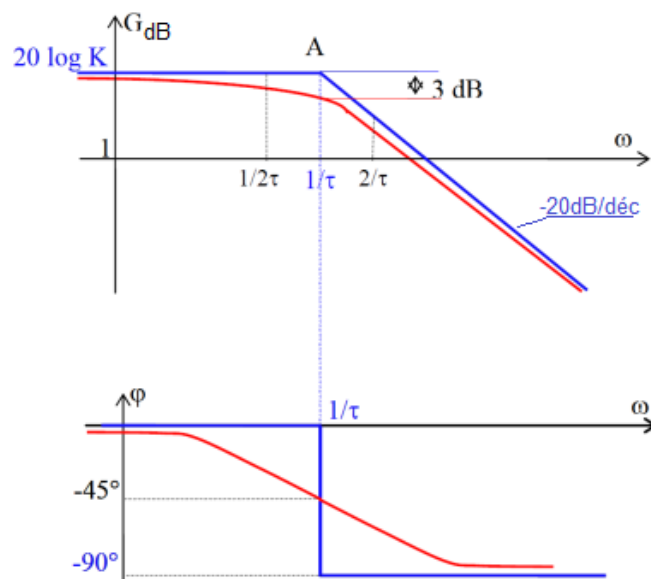


Figure 4.3. Diagrammes asymptotique (en rouge) et réel (en bleu) d'un système du premier ordre.

La pulsation de cassure ω_c est la pulsation pour laquelle le gain exprimé en dB est inférieur de 3 dB au gain statique. Les tracés du gain et de la phase sont donnés par la figure 4.4 en rouge, pour un axe des abscisses gradué en pulsation ω . Le tracé du diagramme de Bode est simplifié par une étude asymptotique préalable (en bleu sur la figure 4.4).

Pour $\omega \gg \omega_c$, la décroissance du gain est de -20 dB/décade, c'est-à-dire que le gain diminue de 20 dB chaque fois que la pulsation du signal d'entrée est multipliée par 10.

Exemple 1 : Tracer sur un papier semi logarithmique, le diagramme de Bode, d'un système asservi dont la fonction du transfert en boucle ouverte est donnée par : $G(p) = \frac{1}{p+1}$

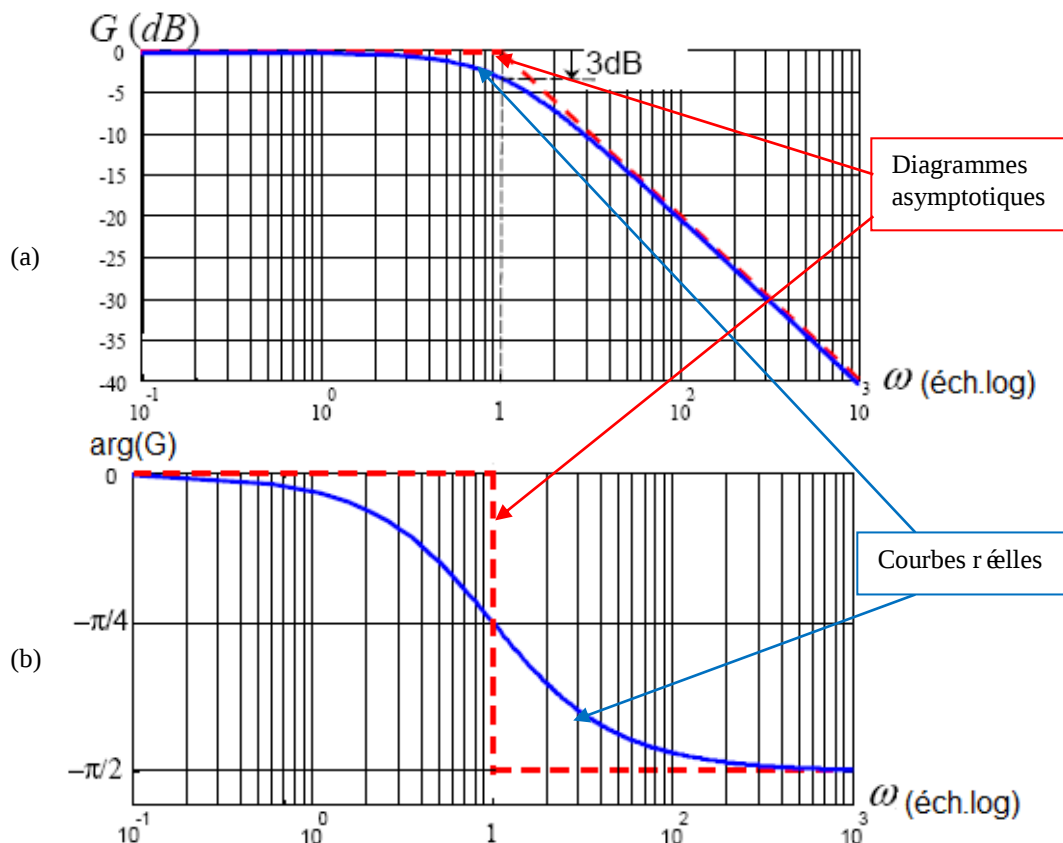


Figure 4.4 Diagramme de Bode de l'exemple 1 (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase

IV.5.1.b. Cas d'un système du second ordre

Soit $G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$, Pour $p=j\omega$ on a $G(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$ qu'on écrit

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{k}{(1 - u^2) + j2\xi u} \quad \text{Où } u = \frac{\omega}{\omega_n} \text{ appelée pulsation réduite}$$

$$\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} = 20 \log k - 10 \log((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2) \\ \varphi(\omega) = \arg(k) - \arg(1-u^2 + j2\xi u) = -\arctan \frac{2\xi u}{1-u^2} \end{cases}$$

a) Étude asymptotique

- Pour $u \rightarrow 0$ (ou $\omega \rightarrow 0$) $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k \\ \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = 0^\circ \end{cases}$
- Pour $u \rightarrow +\infty$ (ou $\omega \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 40 \log u = 20 \log k - 40 \log(\omega / \omega_n) \\ \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = -180^\circ \text{ (ou } -\pi) \end{cases}$
- Pour $u = 1$ (ou $\omega = \omega_n$) $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log 2\xi \\ \arg(G(j\omega)) = \varphi(\omega) = -90^\circ \text{ (ou } -\pi/2) \end{cases}$

La figure ci-dessous donne le tracé asymptotique de $|G(j\omega)|_{dB}$ pour $k=1$. La valeur de ξ n'a pas d'influence sur le tracé en question qu'au voisinage de ω_c

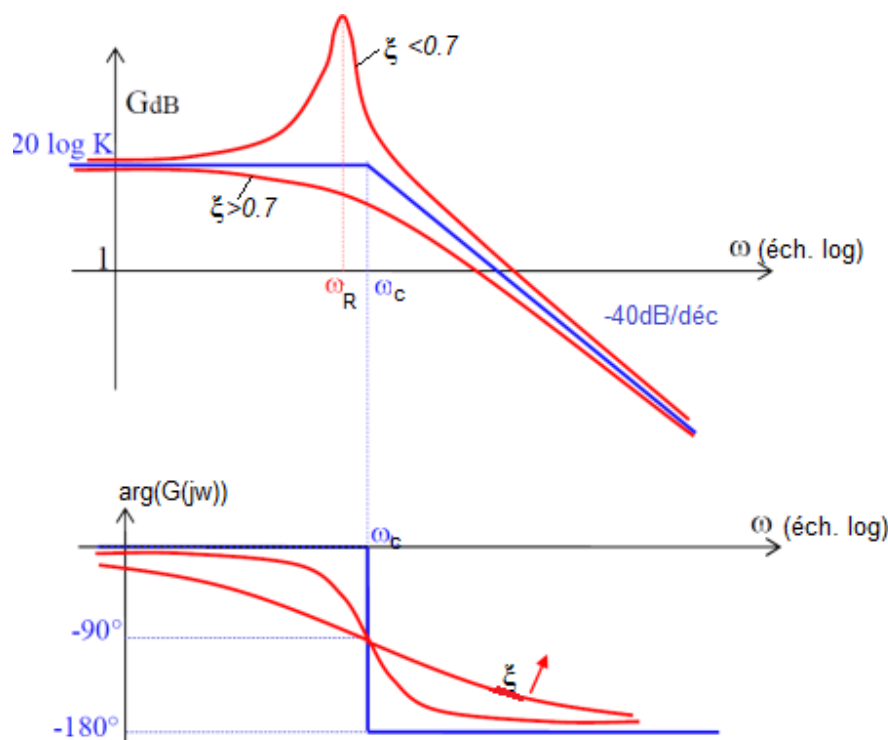


Figure 4.5 Diagramme de Bode (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase

Le gain $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$ passe par un maximum pour une pulsation ω_R

appelée **pulsation de résonance** telle que la dérivée du gain $|G(j\omega)|_{dB}$ vaut zéro :

$$\frac{d|G(j\omega)|_{dB}}{d\omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[20 \log \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} \right] = \frac{d}{d\omega} [-10 \log((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2)]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\xi^2 \text{ d'où } \omega = \omega_R = \omega_n (1 - 2\xi^2)^{1/2}$$

À condition que : $1 - 2\xi^2 > 0 \Rightarrow \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

Dans ces conditions, on dit qu'il y a résonance pour la pulsation $\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$

On obtient donc la valeur maximale du module: $|G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_R)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$

D'où le gain maximal : $|G(j\omega)|_{\max(dB)} = -20 \log(2\xi\sqrt{1 - \xi^2})$

On constate que plus ξ est faible, plus la résonance est importante. Ce phénomène peut être caractérisé par un facteur de surtension (ou de résonance) Q qui correspond au rapport du gain à la résonance sur le gain statique :

$$Q = \frac{|G(j\omega_R)|}{|G(j0)|}$$

Exemple 1. Tracer le diagramme de Bode en variant le coefficient d'amortissement ξ de la

fonction du transfert : $G(p) = \frac{k\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$, On prend $k=1$ et $\omega_n=1$.

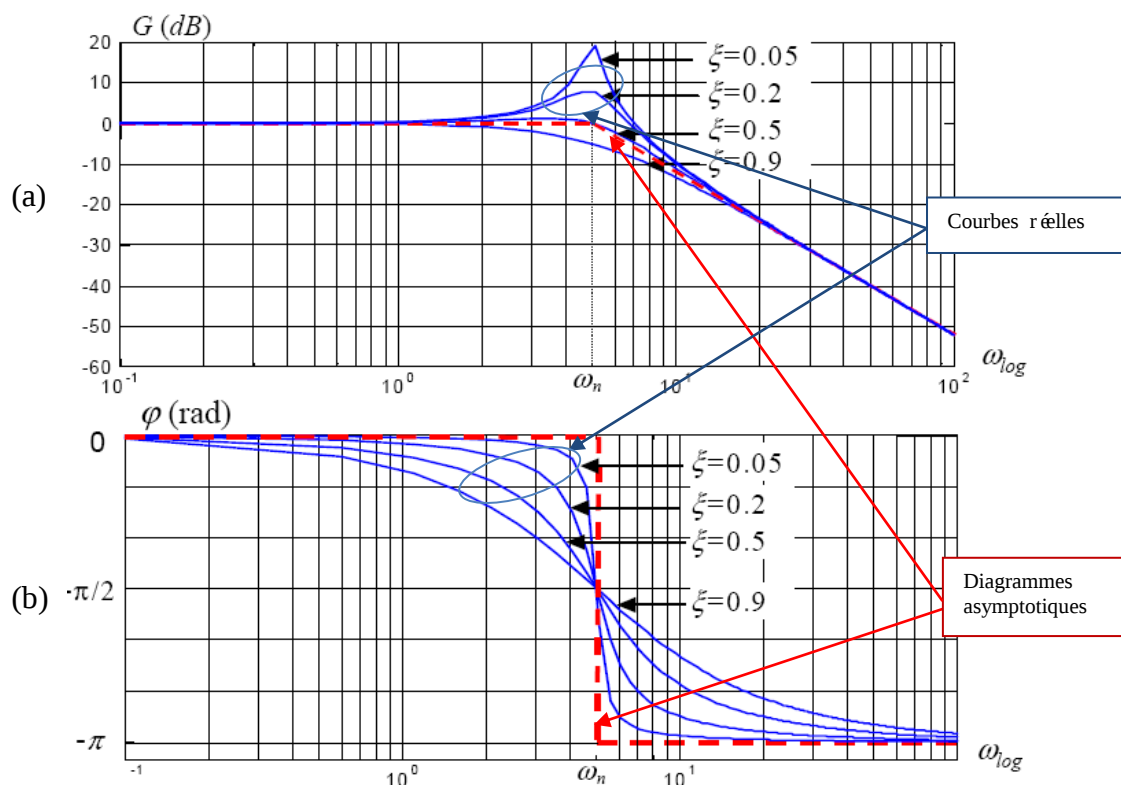


Figure 4.6 Diagramme de Bode de l'exemple 1 (a) diagramme de gain (b) diagramme de phase

IV.5.2. Diagramme de Nyquist

Définition : Le diagramme de Nyquist, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $|G(j\omega)|$ et $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.7). Le diagramme complet de Nyquist correspond à ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'obtient par symétrie à l'axe des réels du lieu de Nyquist.

IV.5.2.a. Prenons le cas d'un système de premier ordre où :

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega\tau + 1} = \frac{k(1 - j\omega\tau)}{(\omega\tau)^2 + 1} = \frac{k}{(\omega\tau)^2 + 1} - j \frac{k\omega\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} = \alpha + j\beta$$

$$\text{on a: } \alpha^2 + \beta^2 = k^2 \text{ donc } \left(\alpha - \frac{k}{2}\right)^2 + \beta^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

On conclure donc que le lieu de Nyquist dans ce cas est un demi-cercle ($-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$) de rayon $k/2$ centré en $(k/2, 0)$.

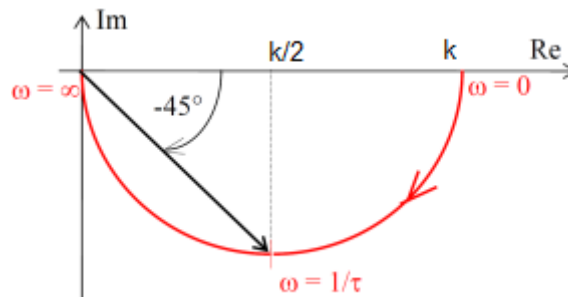


Figure 4.7 Diagramme de Nyquist d'un système du 1^{er} ordre.

A la pulsation de cassure $\omega = \omega_c = 1/\tau$ on a :

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1}} = \frac{k}{\sqrt{2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan(\tau\omega) = -45^\circ \end{cases}$$

IV.5.2.b. Prenons le cas d'un système de second ordre où :

Un système du second ordre a une fonction de transfert sinusoïdale paramétrée à l'aide de deux paramètres (ω_n, ξ), la pulsation propre non amortie et l'amortissement.

$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}) + j2\xi \frac{\omega}{\omega_n}} = \frac{k(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2} - j \frac{2k\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

$$\text{L'amplitude est définie par : } |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + (2\xi \frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

et sa phase par : $\varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$

si $\omega \rightarrow 0$ alors $G(j\omega) \rightarrow k$

si $\omega = \omega_n$ alors $G(j\omega) = -j \frac{k}{2\xi}$ et $\varphi(\omega) = -90^\circ$

si $\omega = \omega_R$ (avec $\xi < 0.7$) alors le $|G(j\omega)|$ est maximal

si $\omega \rightarrow \infty$ alors $|G(j\omega)| \rightarrow 0$ et $\varphi(\omega) = -180^\circ$

Pour ω variant de 0 à $+\infty$, la partie imaginaire est toujours négative alors que la partie réelle change de signe et devient négative pour $\omega = \omega_n$. Cette pulsation est la pulsation de cassure associée au second ordre. La courbe appartient donc au demi-plan inférieur défini par l'axe ox . Aux hautes fréquences, l'analyse asymptotique montre que la phase tend vers $-\pi$. Pour différentes valeurs de l'amortissement ξ et pour $\omega_n = 1$, les tracés dans le plan de Nyquist sont représentés à la figure 4.5. Il est à remarquer que MATLAB donne le diagramme de Nyquist complet avec le symétrique par rapport à l'axe ox pour les pulsations négatives.

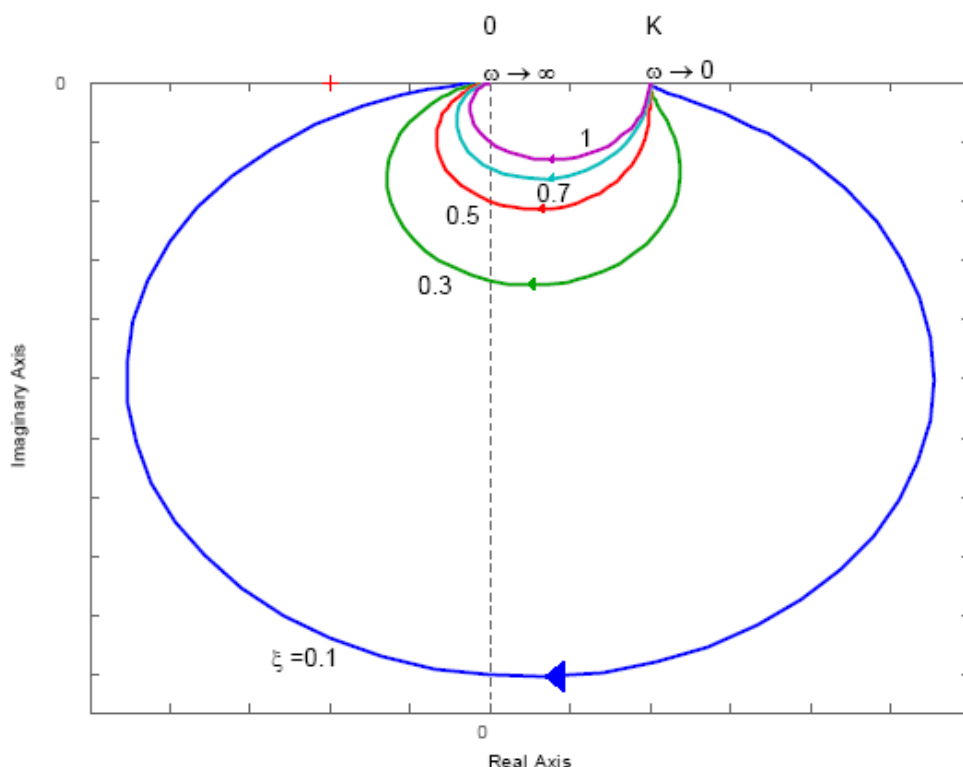


Figure 4.8 Réponse fréquentielle d'un système de second ordre dans le plan de Nyquist pour ξ variant avec $\omega_n=1$.

IV.5.2.c. Représentations fréquentielles usuelles :

Il est à noter que les formes compliquées de courbes dans le plan de Nyquist ont pour origine les dynamiques du numérateur. La figure 4.5 donne un certain nombre de tracés typiques.

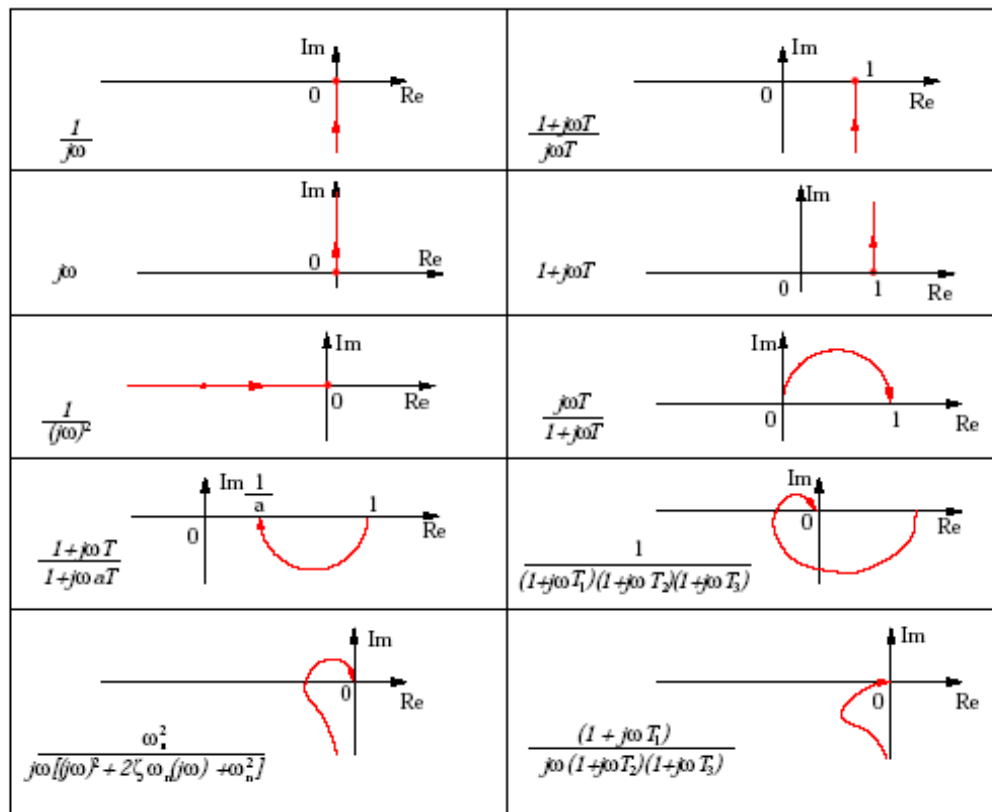


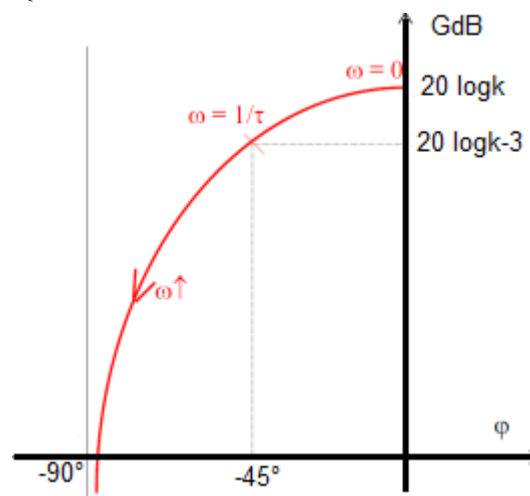
Figure 4.9 Représentations de Nyquist des systèmes usuels

IV.5.3. Diagramme de Black (ou de Nichols)

Le diagramme de Black de $G(j\omega)$ consiste à tracer le gain $|G(j\omega)|_{dB}$ en fonction de la phase $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$ en faisant varier la pulsation ω de 0 à $+\infty$. Ce diagramme permet d'avoir les deux grandeurs caractérisant un système (le gain et la phase) sur un même graphe.

IV.5.3.a. Cas d'un système de premier ordre

$$\text{On a : } G(j\omega) = \frac{k}{\tau p + 1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log [(\tau\omega)^2 + 1] \\ \phi(\omega) = -\arctan(\tau\omega) \end{cases}$$

Figure 4.10 Diagramme de Black d'un système du 1^{er} ordre.

IV.5.3.b. Cas d'un système de second ordre

De même pour un système de second ordre du type : $G(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2}$ nous retrouvons des caractéristiques identiques que pour le tracé dans le plan de Bode.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

$$\text{et } \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

La courbe d'un système d'ordre 2 dans le plan de Nichols-Black admet donc toujours une asymptote verticale en -180° aux hautes fréquences.

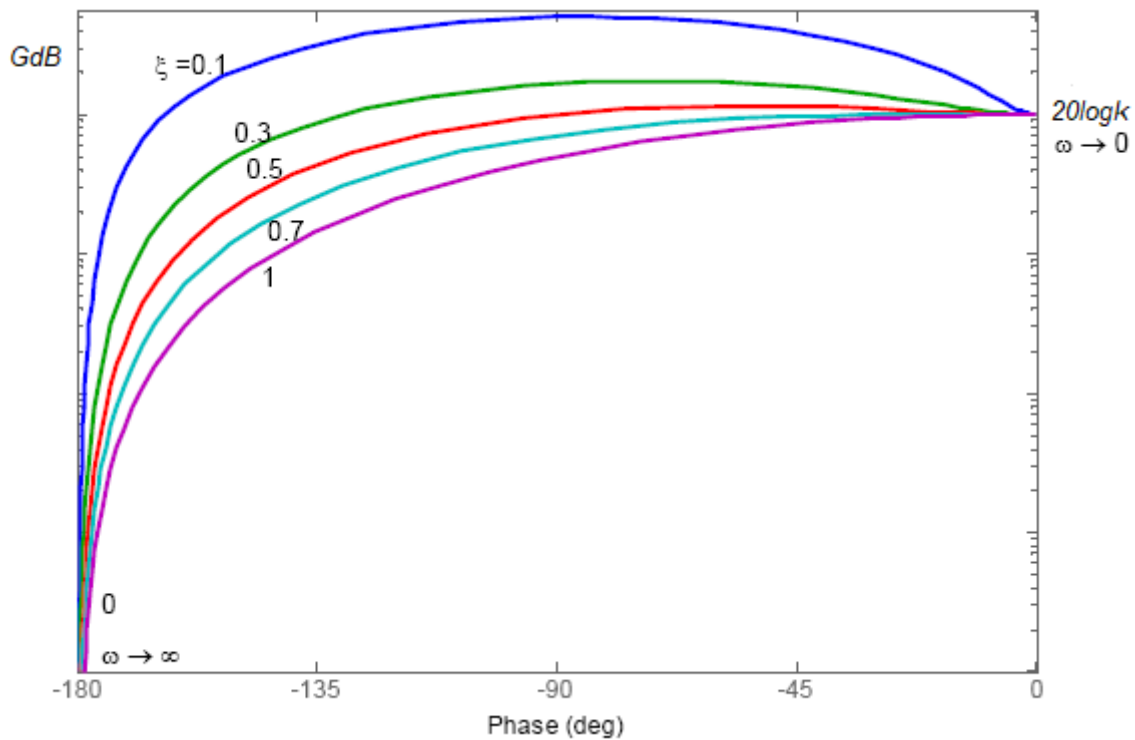


Figure 4.11 Réponse fréquentielle d'un système de second ordre dans le plan de Nichols-Black pour ξ variant et $\omega_n=1$.

Chapitre .V. Stabilité et précision des systèmes asservis linéaires continus.

V.1. Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents tout l'intérêt de la boucle de retour à savoir :

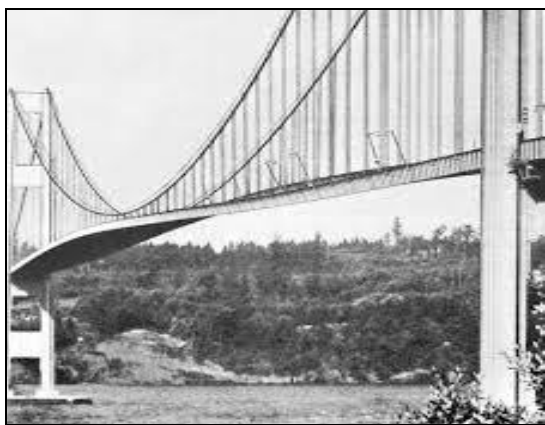
- ✓ Commande plus précise qu'en boucle ouverte ;
- ✓ Bande passante plus large, donc système plus rapide.

On verra plus loin, pourquoi, lorsqu'on augmente trop le gain en boucle ouverte, il apparaît des oscillations de la grandeur de sortie qui sont incontrôlable et qui peuvent mettre en péril le système (ou l'installation). Il est donc absolument nécessaire de bien connaître les conditions d'une bonne stabilité avant de refermer la boucle.

Ce chapitre sert à évoquer une étude plus ou moins détaillée des performances du système asservi linéaire continu, notamment la stabilité et la précision statique.

V.2. Concept de stabilité

La stabilité est le critère le plus important dans la réalisation des systèmes de contrôle. Si un système n'est pas stable, les autres paramètres n'ont aucune signification. On doit donc porter une attention particulière à la stabilité. Un système instable ne peut pas être conçu pour donner une réponse transitoire et erreur statique spécifique. Physiquement, un système instable dont la réponse naturelle croît sans limites peut causer des dommages au système lui-même, à des systèmes adjacents, ou causer des blessures à des personnes. Il faut toujours vérifier la stabilité d'un système. En effet, en l'absence de cette propriété qualitative, aucun système n'est utilisable en pratique.



a) Au début des oscillations



b) Au moment de la catastrophe

Figure 5.1 Pont du détroit de Tacoma (1940, à Puget Sound, Washington, USA)

[https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_detroit_de_Tacoma_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_detroit_de_Tacoma_(1940))

Le pont de Tacoma ci-dessus (un exemple d'un système instable). En novembre 1940, lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10.

V.3. Stabilité des systèmes

V.3.1. Définitions

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système :

Définition 1 : On dit qu'un système est stable lorsque, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir ; instable, lorsqu'il tend à s'en écarter davantage. Dans le cas intermédiaire d'un système qui ne revient pas à son équilibre mais ne s'en écarte pas, nous parlerons donc du système à la limite de la stabilité

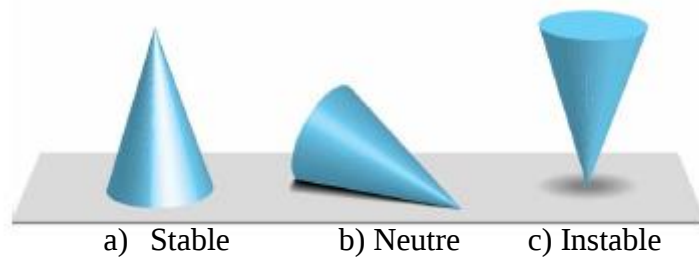


Figure 5.2 Exemple de stabilité d'un cône

Définition 2 : Un système au repos (conditions initiales nulles) est stable si et seulement si lorsqu'on lui applique une entrée bornée (limitée), sa sortie est bornée. Une variation d'un signal est dite bornée lorsqu'elle est constante en régime permanent.

Définition 3 : Un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps t tend vers l'infini.

V.3.2. Condition générale de la stabilité des systèmes

Un système linéaire continu ayant une fonction de transfert $G(p)$ est stable si et seulement si tous les pôles de $G(p)$ appartiennent au demi-plan complexe gauche (i.e. tous les pôles ont une partie réelle négative). Le demi-plan gauche est appelé la région de stabilité. En revanche, le demi-plan droit est une zone d'instabilité (figure 5.3).

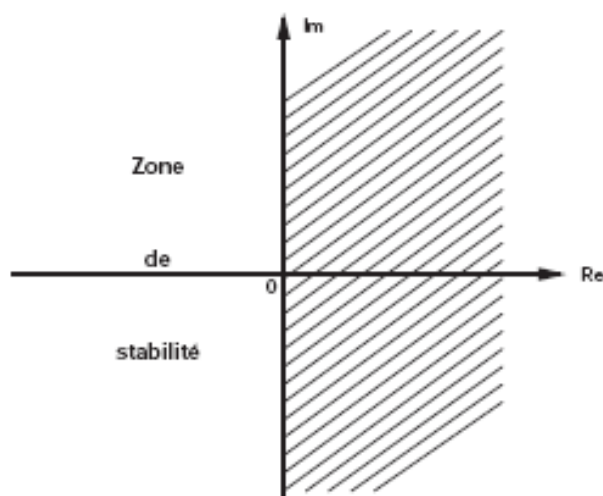


Figure 5.3 Position des pôles dans le plan complexe et stabilité

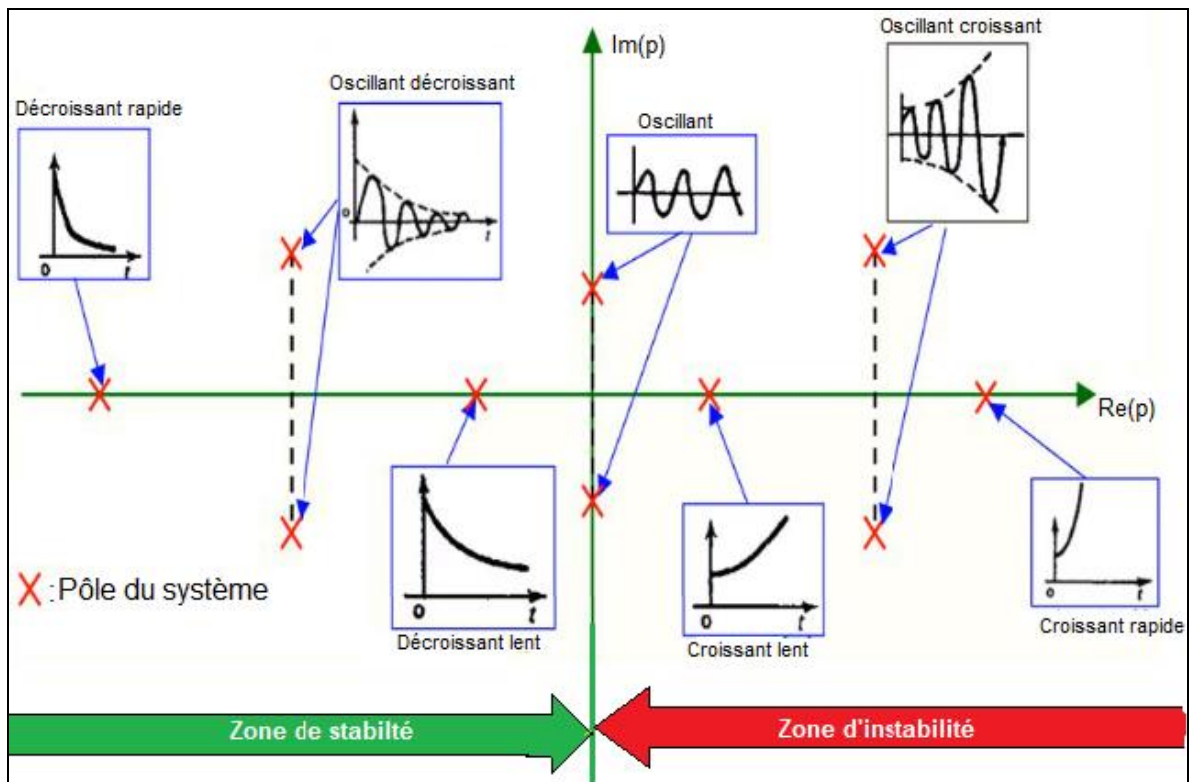
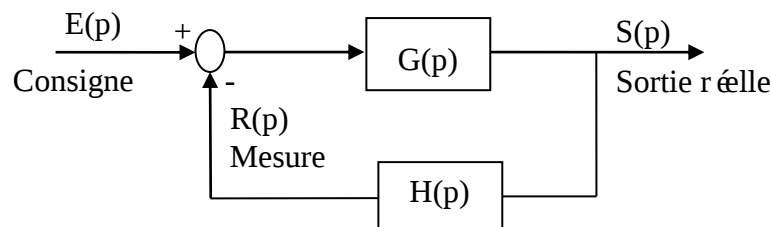


Figure 5.4 Influence de la position des pôles sur la stabilité du système.

V.3.3. Détermination de la stabilité d'un système asservi

Considérons un système asservi défini par le schéma fonctionnel suivant :



D'après la condition générale précédente, ce système est stable si seulement les pôles de sa FTBF sont à partie réelle strictement négative. Or ces pôles sont les racines de l'équation caractéristique :

$$1 + GH(p) = \sum_{i=0}^n b_i p^i = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0 \quad (5.1)$$

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la stabilité des systèmes asservis linéaires continus. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories :

● Méthodes algébriques

- Calcul des pôles de la fonction de transfert.
- Critère de Routh.
- Critère de Hurwitz
- Critère de Mikhaïlov.

● Méthodes graphiques

- Critère de Nyquist.
- Critère de Revers.
- Lieu d'Evans (ou lieu des racines).

V.4. Méthodes algébriques de Stabilité

Ce sont des règles permettant de savoir si les racines (ou pôles du système) d'une équation algébrique (équation ou polynôme caractéristique du système) : $b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$ ont leur partie réelle négative.

V.4.1. Calcul des pôles de la fonction de transfert

La condition fondamentale de stabilité d'un système est que tous les pôles de sa fonction de transfert aient leur partie réelle négative. Si au moins un pôle a sa partie réelle positive, le système deviendra instable. Si des pôles ont une partie réelle égale à zéro, le système est dit marginalement stable.

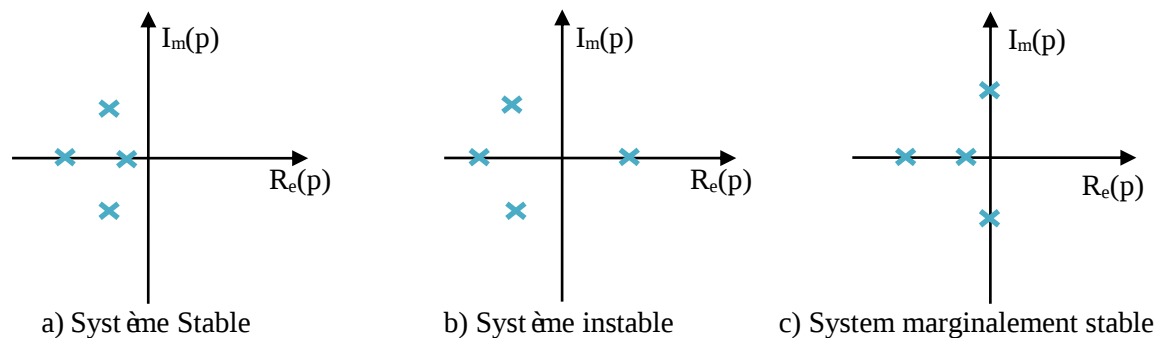


Figure 5.5 Stabilité d'un système selon les pôles.

Dans certains cas, il peut être difficile de calculer les racines sans l'aide d'un logiciel spécifique (exemple : Matlab).

Exemple

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3}$$

Son équation (ou polynôme) caractéristique est : $p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3 = 0$

Avec Matlab on écrit :

```
>> roots ([1 2 3 6 5 3])
```

ans =

0.3429 + 1.5083i

0.3429 - 1.5083i

-1.6681 + 0.0000i

-0.5088 + 0.7020i

-0.5088 - 0.7020i

On remarque que l'équation caractéristique du système a 3 racines stables et 2 instables. Cette méthode nécessite le calcul explicite des pôles de la fonction de transfert, ce qui est fastidieux pour des ordres élevés. On cherche donc des méthodes algébriques permettant de décider du signe des pôles sans nécessairement les calculer explicitement.

Grace aux deux commandes de Matlab:

```
>> G=tf ([1 1], [1 2 3 6 5 3]), pzmap (G)
```

On peut mettre en évidence la position des pôles et des zéros de la fonction de transfert $G(p)$ donné précédemment (voir figure 5.6).

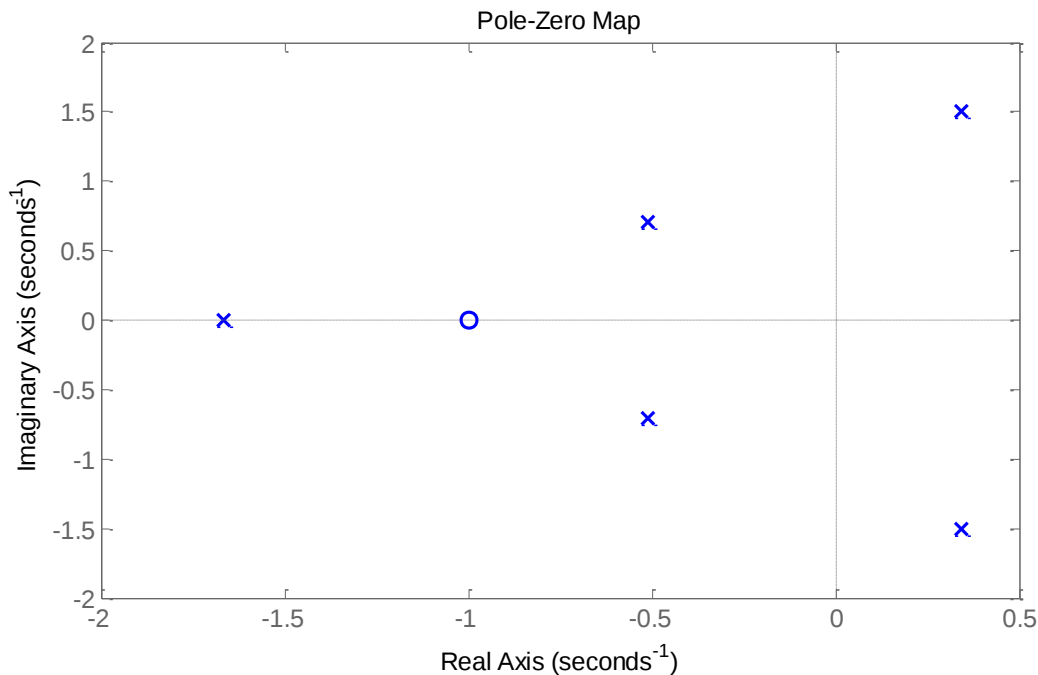


Figure 5.6 Carte des pôles et des zéros de la fonction de transfert $G(p)$

V.4.2. Critère de stabilité de Routh

Ce critère se compose de deux conditions :

- Une condition nécessaire pour qu'un système soit stable est que tous les coefficients b_i , du polynôme caractéristique, soient positifs. Cette condition n'est suffisante que dans le cas des systèmes du premier et du second ordre.

Note : Si un des coefficients est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une racine ou des racines imaginaires ou nulle ou à partie réelle positive.

- Si la condition précédente est vérifiée, une condition nécessaire et suffisante est traduite par l'analyse du tableau de Routh.

On construit le tableau de Routh (de $n+1$ lignes) comme suit:

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	...	0
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	b_{n-7}	...	0
p^{n-2}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	...	...	...
p^{n-3}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	...	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p^1	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	...	...	...
p^0	$C_{(n+1)1}$	$C_{(n+1)2}$	$C_{(n+1)3}$	...	...	...

$$C_{31} = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}; \quad C_{32} = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}; \quad C_{33} = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}};$$

Où

$$C_{41} = \frac{C_{31}b_{n-3} - b_{n-1}C_{32}}{C_{31}}; \quad C_{42} = \frac{C_{31}b_{n-5} - b_{n-1}C_{33}}{C_{31}}; \dots etc$$

Les éléments de toutes les lignes dans la table de Routh se calculent de la même manière. Le calcul des lignes est poursuivi jusqu'à ce que la première colonne soit remplie. On arrête la construction de ce tableau dès qu'un zéro apparaît dans la 1^{ère} colonne excepté le dernier élément.

Énoncé du critère de Routh :

Le nombre de racines du polynôme dont la partie réelle est positive est égale au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh. Le système est donc **stable** si et seulement si **tous les coefficients de la première colonne sont strictement positifs**.

En pratique, différents cas peuvent se produire suivant que la première colonne comporte ou non un terme nul.

Exemple 1:

Soit la fonction du transfert d'un système asservi : $F(p) = \frac{1}{p^4 + 7p^3 + 17p^2 + 17p + 6}$

La première condition est vérifiée, on construit alors la table Routh suivante:

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^4 & 1 & 17 & 6 \\
 p^3 & 7 & 17 & 0 \\
 p^2 & \frac{7 \times 17 - 1 \times 17}{7} & \frac{7 \times 6 - 1 \times 0}{7} & 0 \\
 & 102 & 6 & \\
 p^1 & \frac{\frac{102}{7} \times 17 - 7 \times 6}{\frac{102}{7}} & 0 & \\
 & 102 & & \\
 p^0 & 7 & & \\
 & 6 & &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{c|ccc}
 p^4 & 1 & 17 & 6 \\
 p^3 & 7 & 17 & 0 \\
 p^2 & 14.57 & 6 & 0 \\
 p^1 & 14.12 & 0 & \\
 p^0 & 6 & 6 &
 \end{array}$$

On remarque que tous les coefficients de la première colonne sont de même signe (positifs), le système en question est alors **stable**.

Exemple 2:

Soit $G(p) = \frac{1}{p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5}$

La première condition est vérifiée, on construit alors la table Routh comme suit:

$$\begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 3 & 5 \\
 2 & 4 & 0 \\
 \hline
 2 \times 3 - 1 \times 4 & 2 \times 5 - 1 \times 0 & 0 \\
 \hline
 2 & 2 & \\
 1 \times 4 - 2 \times 5 & 0 & \\
 \hline
 1 & & \\
 -6 \times 5 - 1 \times 0 & 0 & \\
 \hline
 -6 & &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{l}
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 3 & 5 \\
 2 & 4 & 0 \\
 1 & 5 & 0 \\
 -6 & 0 & \\
 5 & 0 &
 \end{array}$$

Nous constatons que tous les coefficients de la première colonne ne sont pas de même signe. En effet, il y a deux changements de signe (de +1 à -6 et de -6 à +5), cela veut dire que le système possède deux pôles à partie réelle positive (deux pôles instables), le donc système est **instable**.

Quelques cas particuliers :

- **1^{er} cas particulier** : Si un des coefficients de la première colonne est nul (excepté le dernier) et que les autres termes de la même ligne ne sont pas tous nuls.

Exemple :

Soit la FTBF suivante : $F(p) = \frac{1}{p^5 + 2p^4 + 2p^3 + 4p^2 + p + 1}$

$$\begin{array}{l}
 p^5 \\
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 2 & 1 \\
 2 & 4 & 1 \\
 0 & 0.5 & 0 \\
 c_{41} & c_{42} & 0 \\
 c_{51} & c_{52} & \\
 c_{61} & &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{l}
 p^5 \\
 p^4 \\
 p^3 \\
 p^2 \\
 p^1 \\
 p^0
 \end{array}
 \begin{array}{|ccc}
 \hline
 1 & 2 & 1 \\
 2 & 4 & 1 \\
 \varepsilon & 0.5 & 0 \\
 -1/\varepsilon & 1 & 0 \\
 c_{51} > 0 & 0 & \\
 c_{61} = 1 & &
 \end{array}$$

Pour remédier à ce problème, on remplace le terme nul par un ε très petit positif. Dès lors

on obtient : $c_{41} = \frac{4\varepsilon - 1}{\varepsilon} \square \frac{-1}{\varepsilon} < 0$ et $c_{42} = \frac{0,5c_{41} - \varepsilon}{c_{41}} \square 0,5 > 0$.

$$c_{51} = \frac{-1/\varepsilon \times 0.5 - \varepsilon \times 1}{-1/\varepsilon} = 0.5 + \varepsilon^2 > 0 ; c_{61} = \frac{c_{51} \times 1 - (-1/\varepsilon \times 0)}{c_{51}} = 1 > 0.$$

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe. De plus, il y a deux changements de signe, par conséquent le système possède deux pôles à partie réelle positive donc le système est **instable**.

- **2^{ème} cas particulier** : Tous les coefficients de toute une ligne sont nuls.

Exemple :

Soit l'équation caractéristique d'un système asservi donnée par :

$$p^4 + 2p^3 + 11p^2 + 18p + 18 = 0$$

On forme la table de Routh suivante :

p^4	1	11	18	0
p^3	$\frac{2}{2}$	$\frac{18}{2}$	0	0
p^2	1	9	0	
p^1	0	0	0	
p^0	c_{51}	0		

Remarque : Pour simplifier les calculs, on peut diviser ou multiplier tous les éléments d'une même ligne par le même nombre. Exemple on divise les éléments de la 2^{ème} ligne par 2.

Quand tous les termes d'une même ligne sont nuls, cela veut dire :

- soit on est en présence de deux pôles réels opposés : alors le système est **instable**.
- soit on est en présence de deux pôles imaginaires purs opposés : $\pm j\beta$, dans ce cas le système est **marginalelement stable**.

Pour analyser la stabilité du système précédent :

- ✓ on construit **l'équation auxiliaire** $q(p)$, c'est-à-dire l'équation formée à partir des coefficients de la ligne qui précède la ligne nulle :

$$q(p) = p^2 + 9 = (p + j3)(p - j3)$$

Les racines de l'équation auxiliaire sont également les racines de l'équation caractéristique du système. On aura $p_{1,2} = \pm j3$ alors, le système est marginalelement stable.

- ✓ On complète le tableau de Routh en remplaçant les coefficients de la ligne nulle par les coefficients obtenus en dérivant l'équation auxiliaire par rapport à p , puis on poursuit le calcul.

$$\frac{dq(p)}{dp} = 2p + 0$$

- ✓ Le tableau de Routh précédent devient alors :

p^4	1	11	18	0
p^3	$\frac{2}{2}$	$\frac{18}{2}$	0	0
p^2	1	9	0	
p^1	2	0	0	
p^0	9	0		

Comme il n'y a pas de changements de signe, et avec une ligne tout à fait nulle, cela implique que le système est **marginalelement stable** (ou **juste oscillant**).

Exemple : Fonction de transfert dépendante d'un paramètre

On veut analyser la stabilité d'un système dont la fonction du transfert est donnée par :

$$F(p) = \frac{K(p+10)}{p^3 + 4p^2 + (4+K)p + 10K}$$

On forme la table de Routh :

$$\begin{array}{c|ccc} p^3 & 1 & 4+k & 0 \\ p^2 & 4 & 10k & 0 \\ p^1 & 4-1.5k & 0 & \\ p^0 & 10k & 0 & \end{array} \quad \text{Le système est stable si } 4-1.5K > 0 \Rightarrow 0 < K < \frac{4}{1.5}.$$

Si $K = \frac{4}{1.5}$, la 3^{ème} ligne du tableau deviendra nulle, on construit l'équation auxiliaire :

$$4p^2 + \frac{40}{1.5} = 4(p + j\sqrt{\frac{10}{1.5}})(p - j\sqrt{\frac{10}{1.5}}), \text{ alors le système est marginalement stable.}$$

V.4.3. Critère de Hurwitz

Une autre forme du critère de Routh a été proposée par Hurwitz qui consiste à se servir des déterminants formés à partir des coefficients de l'équation caractéristique du système :

$$1 + GH(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0$$

Le déterminant Δ_n de Hurwitz est construit comme suit :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \overbrace{b_{n-1} \quad b_{n-3} \quad b_{n-5} \quad \dots}^{\Delta_1} & \begin{bmatrix} b_0 \text{ si } n \text{ impair} \\ b_1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{bmatrix} & 0 \\ \overbrace{b_n \quad b_{n-2} \quad b_{n-4} \quad \dots}^{\Delta_2} & \begin{bmatrix} b_1 \text{ si } n \text{ impair} \\ b_0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{bmatrix} & 0 \\ \overbrace{0 \quad b_{n-1} \quad b_{n-3} \quad \dots}^{\Delta_3} & \dots & 0 \\ 0 \quad b_n \quad b_{n-2} \quad b_{n-4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & b_0 \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

Le tableau de Hurwitz comprend «n» lignes, les déterminants Δ_i pour $i=1,2,\dots, n-1$ sont formés comme suit :

$$\Delta_1 = b_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ b_n & b_{n-2} \end{vmatrix} = b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ b_n & b_{n-2} & b_{n-4} \\ 0 & b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \dots \text{ etc}$$

On continuera d'une manière analogue le calcul des Δ_i restants (pour $i=4$ jusqu'à $i=n$).

Énoncé du théorème de Hurwitz :

Un système asservi est stable, seulement si tous les b_i sont positifs (condition nécessaire) et que tous les déterminants obtenus sont strictement positifs ($\Delta_i > 0$), cela veut dire que tous les pôles du système ont leur partie réelle négative.

Note :

- Si un des déterminants Δ_i est nul, implique que le système est à la limite de la stabilité
- Si un des déterminants Δ_i est nul cela implique que le système est instable.

Exemple : Soit un système asservi linéaire dont l'équation caractéristique est donnée par :

$$p^3 + 2p^2 + 4p + 6 = 0$$

Étudier la stabilité du système selon le critère de Hurwitz.

Solution :

- On remarque que tous les coefficients b_i sont positifs $\Rightarrow$ la condition nécessaire est vérifiée.
- On calcule les déterminants de Hurwitz :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta_1 = 2 > 0$$

Comme tous les Δ_i sont positifs, alors **le système est stable**.

V.4.4. Critère de Mikhaïlov

Ce critère s'applique aussi directement à l'équation caractéristique du système. On travaille en régime harmonique ($p=j\omega$) et on écrit cette équation sous la forme :

$$A(\omega) + jB(\omega)$$

Où $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont deux polynômes en fonction de ω .

Le critère de Mikhaïlov s'énonce ainsi :

Un système asservi (en boucle fermée) est stable seulement si les racines des deux polynômes $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont distinctes et régulièrement alternées sur l'axe des ω croissants.

Exemple :

Soit le système dont la FTBO est donnée par : $GH(p) = \frac{4}{p(p+1)(0.1p+1)}$

Étudier la stabilité du système selon le critère de Mikhaïlov.

Solution :

L'équation caractéristique du système en boucle fermée s'écrit :

$$1 + GH(p) = 0.1p^3 + 1.1p^2 + p + 4 = 0, \text{ on pose } p = j\omega \text{ on aura alors :}$$

$$0.1(j\omega)^3 + 1.1(j\omega)^2 + (j\omega) + 4 = 4 - 1.1\omega^2 + j\omega - j0.1\omega^3$$

$$\text{d'où } A(\omega) = 4 - 1.1\omega^2 \quad \text{et} \quad B(\omega) = \omega - 0.1\omega^3$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} A(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{4}{1.1}} = 1.9 \text{ [rd / s]} \\ B(\omega) = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0 \quad \text{et} \quad \omega_3 = \sqrt{10} \text{ [rd / s]} \end{cases}$$

Nous constatons que les trois racines trouvées sont bien alternées ($\omega_2 < \omega_1 < \omega_3$), alors le système est **stable** en boucle fermée.

Conclusion :

Les critères de stabilité algébriques évoqués précédemment sont limités, d'une part, par leur complexité et difficulté d'interprétation des calculs et leur mise en œuvre pour des systèmes d'ordre élevé et d'autre part, nécessitent de connaître explicitement la fonction de transfert du système, ce qui empêche d'étudier des systèmes caractérisés par des données expérimentales. En outre, ces critères ne donnent aucune information sur le régime transitoire (i.e. le degré de stabilité). Ainsi, toutes ces considérations expliquent l'intérêt des critères graphiques qui permettent de juger la stabilité d'un système asservi à partir de son lieu de transfert en boucle ouverte.

V.5. Méthodes graphiques de Stabilité

Nous allons voir comment la stabilité d'un système asservi linéaire peut être reliée aux diagrammes représentant sa réponse en fréquences en boucle ouverte (FTBO=GH(j ω)).

V.5.1. Critère de stabilité de Nyquist (1932)

Le critère de Nyquist est un critère graphique qui permet de conclure quant à la stabilité de la boucle fermée par la seule connaissance de la boucle ouverte. L'idée fondamentale du critère de Nyquist est basée sur l'application du théorème de Cauchy.

V.5.1.a. Théorème de Cauchy

Si un point d'affixe p (où $p = \sigma + j\omega$), décrit dans le sens des aiguilles d'une montre un contour fermé (C) à l'intérieur duquel se trouvent le nombre : P pôles et Z zéros d'une fonction complexe $F(p)$, alors que la courbe (Γ), image du contour (C) par la transformation $F(p)$, décrit autour de l'origine, un nombre N tours, tel que $N = Z - P$, comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre. (En d'autres termes, N est compté positivement si C et $F(C)$ sont orientés dans le même sens et négativement autrement).

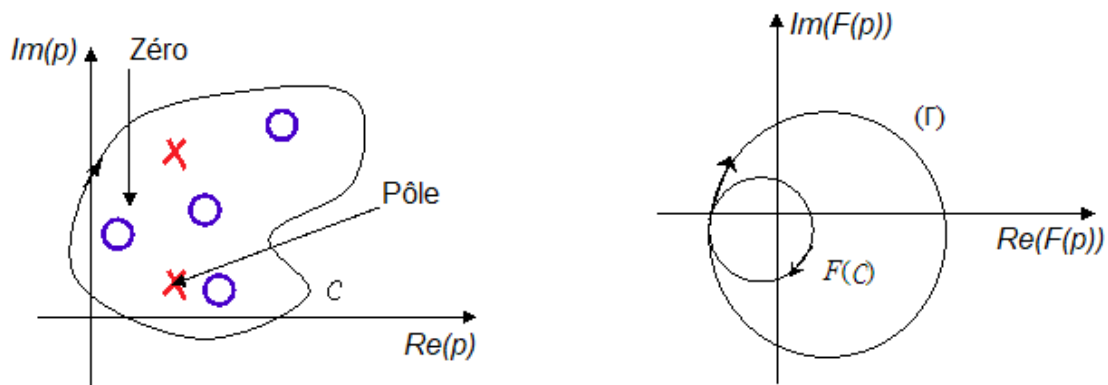


Figure 5.7 Principe du théorème de Cauchy

Chaque tour autour de l'origine correspond à une variation de l'argument du $G(p)$ égale à 2π , de sorte que le nombre :

$$N = \Delta\phi / 2\pi \quad (5.1)$$

Où $\Delta\phi$ est la variation totale de l'argument de $G(p)$ quand N décrit complètement la courbe (Γ) .

$$\text{Alors :} \quad \Delta\phi = 2\pi (Z - P) \quad (5.2)$$

V.5.1.b. Application du théorème de Cauchy au système asservi

Nous savons qu'un système en boucle fermée soit stable seulement si toutes les racines de son équation caractéristique soient à partie réelle négative, en d'autres termes, il faut qu'aucune racine ne soit située à droite de l'axe imaginaire (pas de racines à PRP $\Rightarrow Z=0$).

Étant donné un système asservi défini par sa fonction de transfert en boucle ouverte $GH(p)$, la relation $N=Z-P$ donne le nombre de tours que fait le lieu de transfert de l'équation caractéristique $1+GH(p)$ autour de l'origine.

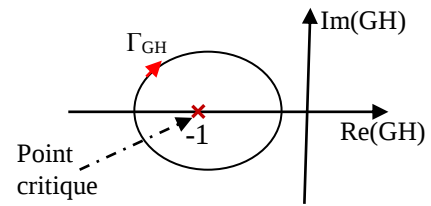
Si l'on appelle : Z = nombre des zéros de $1+GH(p)$ à parties réelle positive, qui sont également les pôles de la FTBF

P = nombre des pôles de $1+GH(p)$ à parties réelle positive, qui sont également les pôles de la FTBO.

- Si $P \neq 0$ (système instable en boucle ouverte), alors pour que le système soit stable en boucle fermée ($\Rightarrow Z=0$), on doit avoir $N=-P$, cela signifie que le lieu de transfert de $1+GH(p)$ doit effectuer P tours autour de l'origine dans le sens trigonométrique.
- Si $P=0$ (système stable en boucle ouverte), alors pour que le système en boucle fermée soit stable (i.e. Z doit être nul), seulement si le contour engendré par $1+GH(p)$ n'entoure pas l'origine $\Rightarrow N=0$ et par la suite $Z=0$.

Remarque : Si on pose $1+GH(p)=Q(p)$ donc on peut écrire $HG(p)=Q(p)-1$, alors au lieu d'examiner le nombre de tours de $Q(p)$ autour de l'origine on examine le nombre de rotations de $GH(p)$ autour du point $(-1,0)$, appelé point critique.

On peut donc énoncer le critère de Nyquist comme suit :



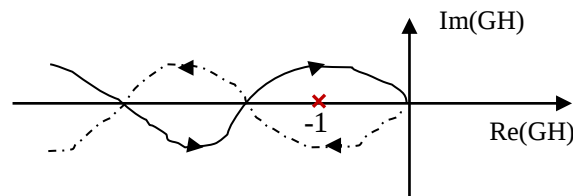
V.5.1.c. Énoncé du critère de Nyquist

- Si $P=0$, alors le système en boucle fermée est stable, seulement si le contour engendré par $GH(p)$ n'entoure pas le point $(-1,0)$ quand le système est stable en boucle ouverte c'est à dire $GH(p)$ n'a pas de pôles à partie réelle positive (i.e. $P=0$ et $N=0 \Rightarrow Z=0$).
- Si $P \neq 0$ (système instable en boucle ouverte), alors le système asservi (système en boucle fermée) est stable, seulement si le contour $GH(p)$ entoure le point $(-1,0)$ dans le sens antihoraire P fois or. $GH(p)$ possède P pôles à PRP (i.e. $P=0$ et $N=0 \Rightarrow Z=0$).

Note : Plus particulièrement, lorsque $P=0$, en parcourant la trajectoire de $GH(p)$ dans le sens des ω croissants (ω varie de $-\infty$ à $+\infty$), si le point $(-1,0)$ apparaît à droite, le système est instable, sinon il est stable (voir critère de Revers dans le plan de Nyquist 5.2.2.1).

Exemple 1.

- Soit $P=1$ (nombre de pôles à PRP de la FTBO) et étant donné le lieu de transfert de la FTBO suivant :

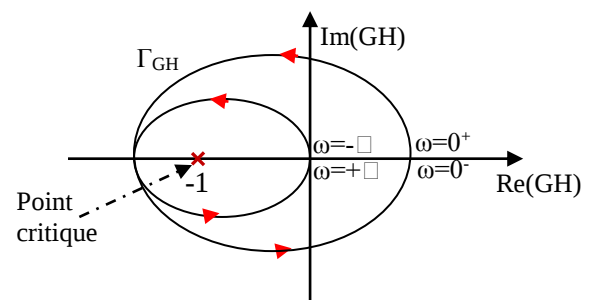


Le système est-il stable en boucle fermée ?

Comme le lieu de Nyquist de $GH(p)$ entoure le point critique $(-1,0)$ une seule fois dans le sens des aiguilles d'une montre (sens anti-trigonométrique) $\Rightarrow N=1$ alors $Z=P+N=2 \neq 0$, on conclure que le système est instable en boucle fermée (car la FTBO admet deux pôles à PRP).

Exemple 2.

- Soit $P=2$ (nombre de pôles à PRP de la FTBO) et étant donné le lieu de transfert de la FTBO ci-contre :



Le système est-il stable en boucle fermée ?

On remarque que le lieu de Nyquist de $GH(p)$ entoure le point critique $(-1,0)$ deux fois dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) $\Rightarrow N=-2$ alors $Z=P+N=0$, le système est donc stable en boucle fermée (car la FTBO n'a aucun pôle à PRP).

V.5.1.d. Choix du contour d'exclusion de Nyquist

Le contour d'exclusion de Nyquist appelé aussi contour de **Bromwith** est un contour fermé du plan complexe des p qui enferme complètement le demi plan droit du plan des p . On prend un demi-cercle de rayon infini. Pour éviter les pôles éventuels de $GH(p)$ situés sur l'axe imaginaire, on fait passer le contour à droite de ces pôles par des petits cercles.

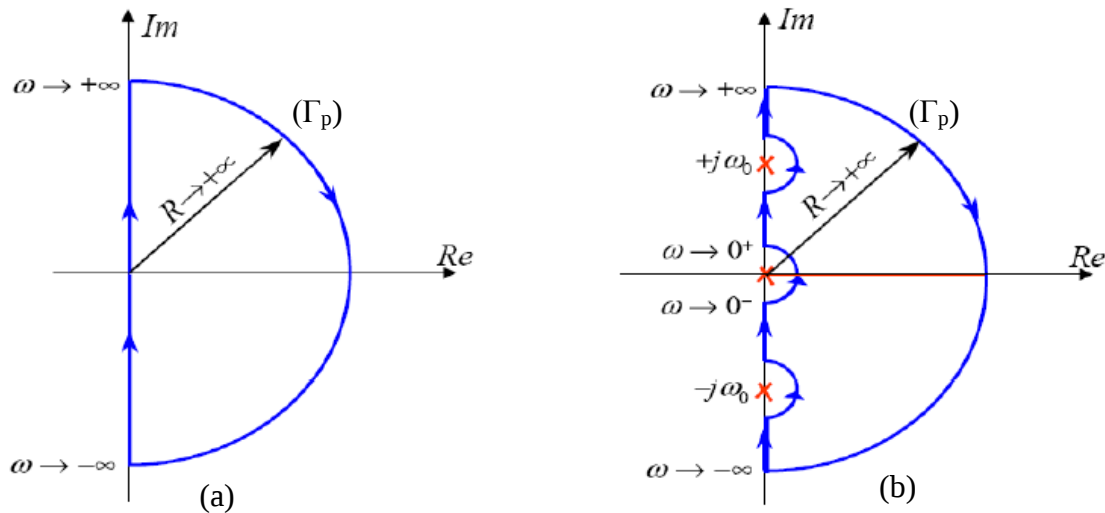


Figure 5.8 Contour d'exclusion de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est l'image par $GH(p)$ du contour fermé appelé contour d'exclusion de Nyquist. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de $GH(p)$ à partie réelle strictement positive. Si $GH(p)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon $\epsilon \rightarrow 0$.

Le lieu de Nyquist (figure 5.4 (b)) est constitué comme suit :

- 1) de $j0^-$? $j0^+$ le long d'un demi-cercle de rayon $\rho \rightarrow 0$
 $(p = \rho e^{j\theta} \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2})$
- 2) de $j0^+$? $+j\omega_0^-$ le long de l'axe imaginaire.
- 3) de $+j\omega_0^-$? $+j\omega_0^+$ le long d'un demi-cercle de rayon $\rho \rightarrow 0$
 $(\text{avec } p = \rho e^{j\theta} + j\omega_0 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2})$
- 4) de $+j\omega_0^+$? $+j\infty$ le long de l'axe imaginaire.
- 5) de $+j\infty$? $-j\infty$ le long d'un demi-cercle de rayon $R \rightarrow \infty$
 $(p = Re^{j\theta} \text{ avec } \theta \text{ varie de } +\frac{\pi}{2} \text{ ? } -\frac{\pi}{2})$
- 6) de $-j\infty$? $-j\omega_0^-$ le long de l'axe imaginaire.

Note importante : La méthode de Nyquist consiste donc à trouver l'image (Γ_{GH}) du chemin ou lieu fermé (Γ_p) par l'intermédiaire de la fonction $GH(p)$.

Exemple :

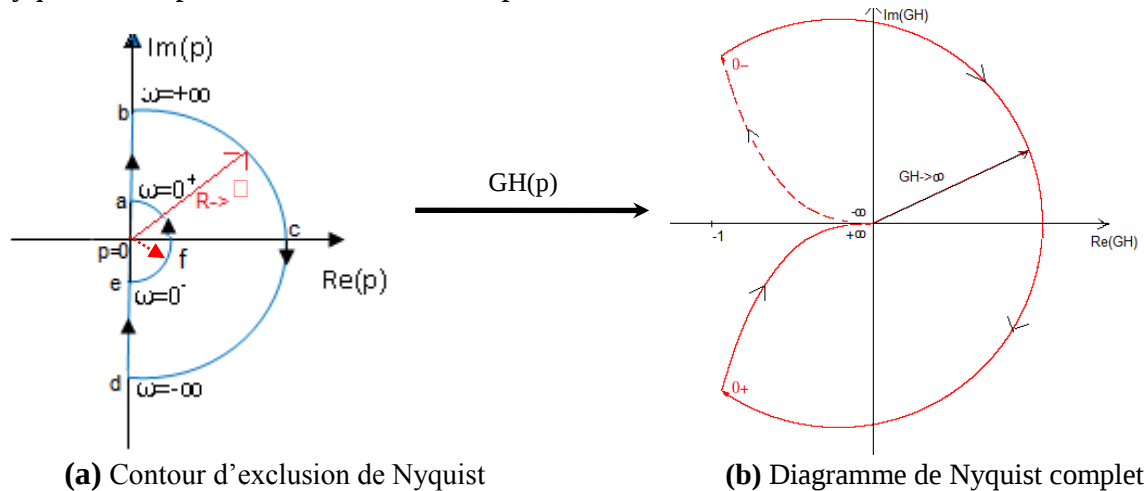
Soit l'asservissement à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$GH(p) = \frac{k}{p(1+\tau p)} \quad \text{avec } \tau > 0 \text{ et } k > 0$$

Étudier la stabilité du système asservi selon le critère de Nyquist.

Réponse :

1. La fonction de transfert en boucle ouverte comprend une intégration et le contour de Nyquist correspondant est donc donné par :



2. Le tracé du lieu de Nyquist complet implique les calculs suivants.

✓ Image de segment $\overline{ab}$: On a $p=j\omega$ avec ω varie de $0^+ \rightarrow +\infty$

Alors on obtient :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} GH(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega\tau)} = \infty \left| -\frac{\pi}{2} \right. \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} GH(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega\tau)} = 0 \left| -\pi \right. \end{cases}$$

✓ Image de demi-cercle $\widehat{bcd}$: On a $p = Re^{j\theta}$ où θ varie de $+\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et

$$\omega \text{ varie de } +\infty \rightarrow -\infty \quad \text{Alors } GH(Re^{j\theta}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{Re^{j\theta}(1+\tau Re^{j\theta})} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau R^2} e^{-j2\theta} = 0 \left| -2\theta \right.$$

$\arg(GH)$ varie donc de $-\pi$ à $+\pi$, alors l'image de $\widehat{bcd}$ est le point d'origine.

✓ Image de segment $\widehat{de}$: On a $p=j\omega$ avec ω varie de $-\infty \rightarrow 0^-$

C'est la symétrie par rapport à l'axe des réels du segment de droite $\overline{ab}$

✓ Image de $\widehat{efa}$: On a $p = \rho e^{j\theta}$ où θ varie de $-\frac{\pi}{2} \rightarrow +\frac{\pi}{2}$ et ω varie de $0^- \rightarrow 0^+$

$$\text{Alors } GH(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{k}{\rho e^{j\theta}(1+\tau \rho e^{j\theta})} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{k}{\tau \rho} e^{-j\theta} = \infty \left| -\theta \right., \quad \left| -\theta \right. \text{ varie de } +\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

On a alors $N=0$ (car le lieu de Nyquist obtenu n'entoure pas le point critique $(-1,0)$) et comme $P=0$ alors $Z=0$, on conclure donc que **le système est stable en boucle fermée.**

V.5.2. Critère du Revers (critère graphique)

Le critère du Revers est une simplification du critère de Nyquist, il est valable uniquement dans le cas de systèmes stables en boucle ouverte ($P^+=0$) à déphasage minimal (i.e. la FTBO n'a pas de pôles ni de zéros à partie réelle positive).

V.5.2.a. Critère du Revers dans le plan de Bode

Un système asservi est stable, si à la pulsation de coupure ω_{c0} pour laquelle le gain $GH_{dB}=0\text{dB}$, le déphasage de la réponse en fréquences est supérieur à -180° .

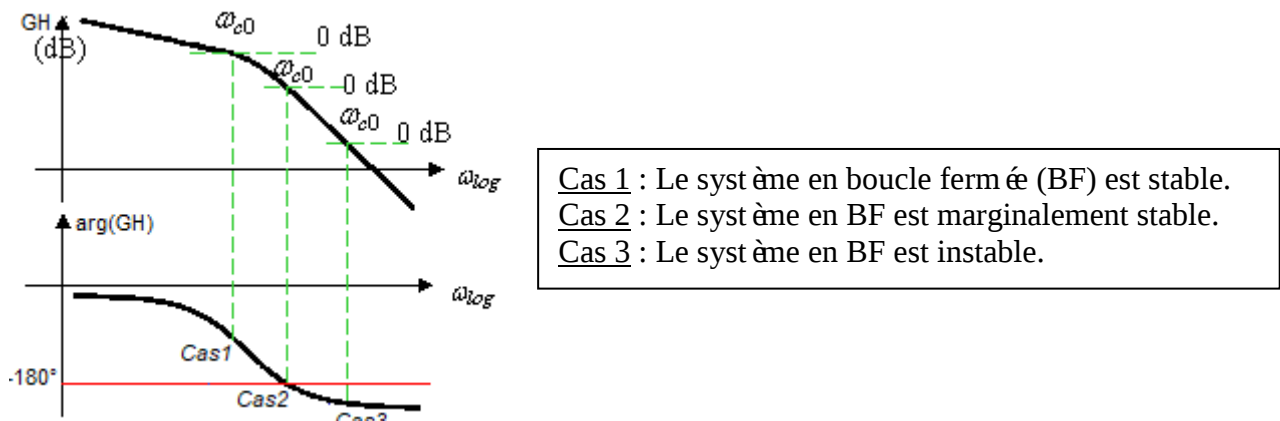


Figure 5.9 Illustration du critère du Revers dans le plan de Bode

V.5.2.b. Critère du Revers dans le plan de Nyquist

Un système à phase minimal est stable en boucle fermée si et seulement si le tracé de Nyquist de sa FTBO ($GH(j\omega)$) laisse le point critique $(-1,0)$ à sa gauche lorsqu'on le parcourt dans le sens des pulsations croissantes (ω varie de 0 à $+\infty$). Dans le cas contraire le système est instable. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant (voir fig.5.10).

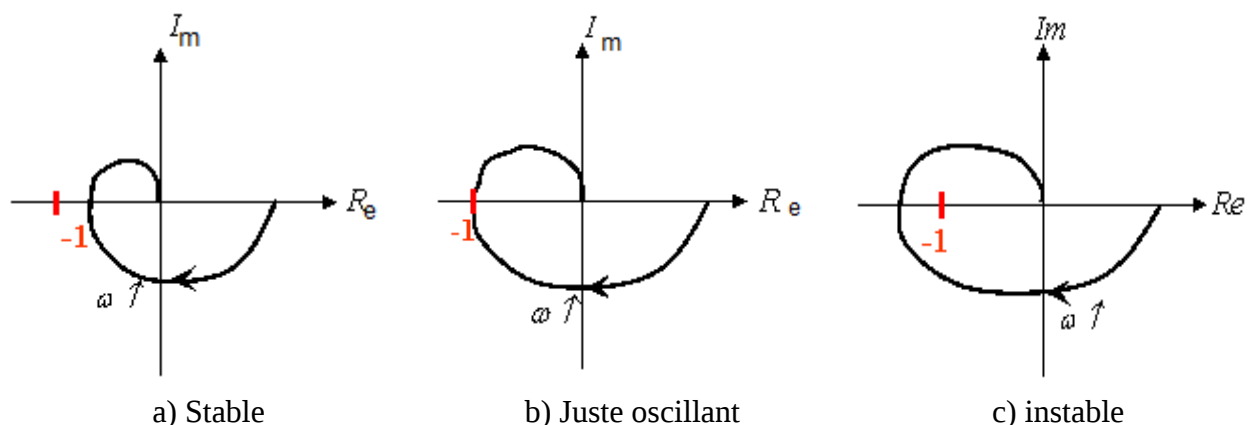


Figure 5.10 Illustration du critère du Revers dans le plan de Nyquist

V.5.2.c. Critère du Revers dans le plan de Black ou Nichols

Dans le plan de Black le point critique $(-1,0)$ est le point de coordonnées $(-180^\circ, 0\text{dB})$. Par analogie au plan de Bode, la double condition :

Doit être vérifiée pour que le système soit stable.

Énoncé du critère : Un système asservi est stable si en parcourant la courbe $GH(j\omega)$ dans le sens des ω croissants, le point $(-180^\circ, 0\text{dB})$ est laissé à sa droite. Dans le cas contraire le système est instable. Si le lieu passe par le point critique, le système est juste oscillant (voir fig.5.11).

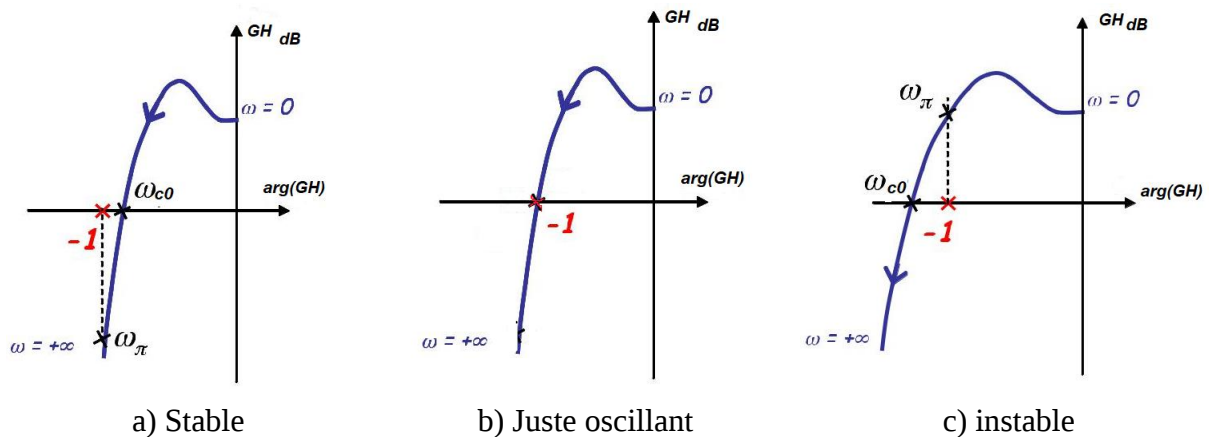


Figure 5.11 Illustration du critère du Revers dans le plan de Black

V.5.3. Marge de stabilité (stabilité relative)

La notion de marges de stabilité est introduit pour s'assurer qu'un système est **loin** du point critique ; en d'autres termes, elles permettent de quantifier la **distance** séparant le lieu de la FTBO du point critique (synonyme de degré de stabilité). On mesure le degré de stabilité par les marges de gain et phase.

V.5.3.a. Marge de gain (MG)

Définition : Gain supplémentaire, exprimée en décibels, nécessaire pour rendre le système marginalement stable (juste oscillant).

$$MG = -20 \log |GH(j\omega_\pi)| \quad (5.1)$$

Où ω_π est la valeur de ω pour laquelle la phase $\phi(j\omega) = \arg(GH(j\omega)) = -\pi$ (soit -180°).

V.5.3.b. Marge de phase (Mφ)

Définition : Gain supplémentaire, exprimée en degrés (ou en radians), nécessaire pour rendre le système marginalement stable (juste oscillant).

$$M\phi = \pi + \phi(\omega_{c0}) \quad (5.2)$$

Où ω_{c0} est la valeur de ω pour laquelle le gain $|GH(j\omega)|_{dB} = 0\text{dB}$.

Note : Selon des expériences, une réponse satisfaisante est évaluée par : une marge de gain MG de $10 \div 15\text{dB}$ et une marge de phase $M\phi$ de $45 \div 60^\circ$.

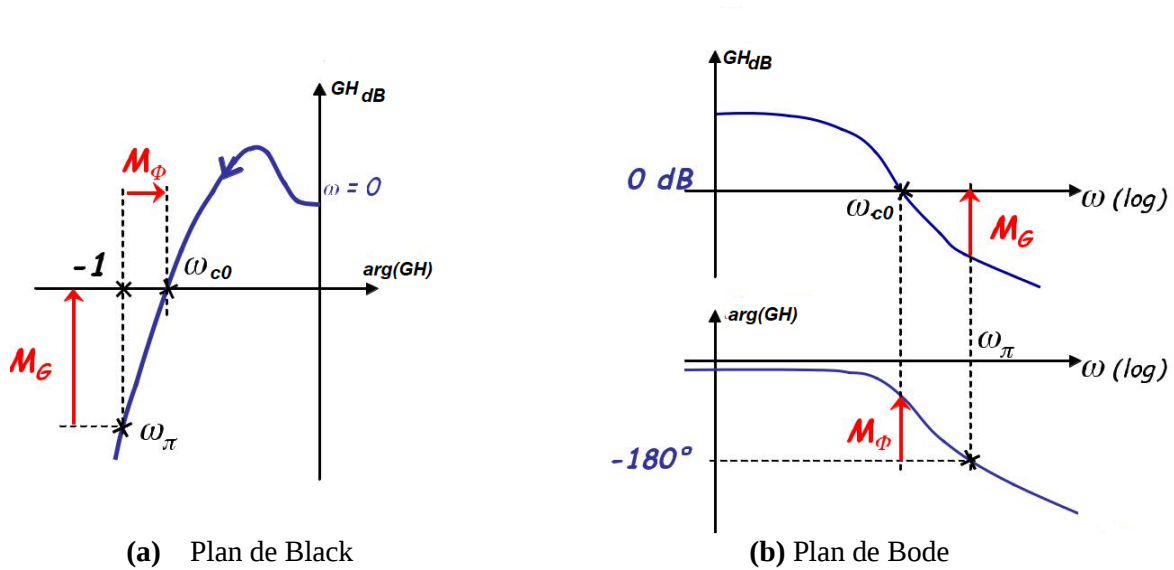


Figure 5.12 Marges de gain et de phase pour un système stable dans les plans de Black et de Bode.

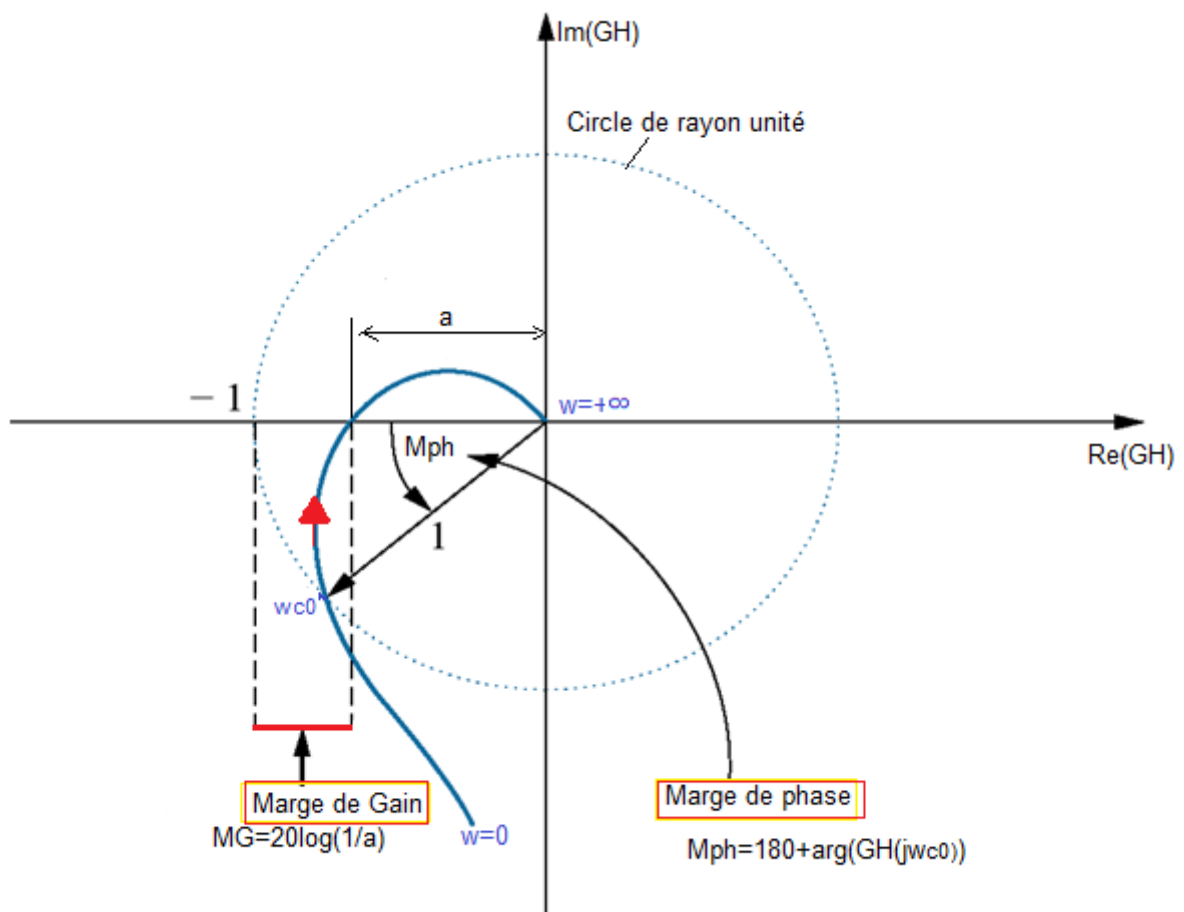


Figure 5.13 Illustration des Marges de gain et de phase pour un système stable dans le plan de Nyquist.

V.6. Précision des systèmes asservis

Nous avons vu dans ce qui précède que le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée par l'entrée $e(t)$. Un système peut être jugé par sa stabilité et aussi bien par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée. Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi les effets des perturbations.

L'étude de la précision d'un système à retour unitaire revient à étudier la valeur de la différence: $e(t) - s(t)$ notée $\varepsilon(t)$. En effet, au régime transitoire cette différence s'appelle **erreur dynamique** alors qu'en régime permanent s'appelle **erreur statique**.

Par conséquent, on distingue deux types de précisions :

- **Précision statique** : Elle est caractérisée par l'erreur au régime permanent lorsqu'on soumet le système à des entrées canoniques:

- ✚ Échelon, on parle alors d'erreur indicielle ou erreur de position;
- ✚ Rampe, on parle d'erreur de traînage ou erreur de poursuite ou de vitesse;
- ✚ Parabole, on parle d'erreur en accélération.

- **Précision dynamique (rapidité)** : Elle est caractérisée par l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

V.6.1. Précision statique

En général, le rôle des systèmes asservis est de faire suivre à la sortie $y(t)$ une loi fixée par une consigne $x(t)$, avec pour cas idéal $\varepsilon(t) = x(t) - y(t) = 0, \forall t$. En pratique on a :

- **L'entrée varie** : Le système fonctionne en suiveur et réalise la fonction asservissement;
- **L'entrée constante** : mais un signal de perturbation peut venir se superposer au signal utile en un point quelconque de la chaîne.

On a : $\varepsilon(p) = X(p) - R(p)$

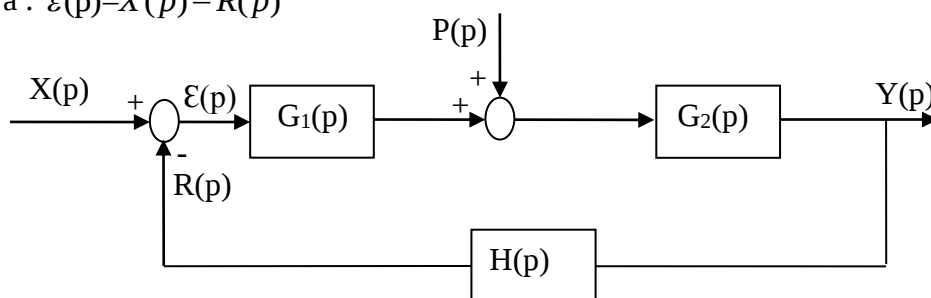


Figure 5.14 Système asservi (cas général)

$$\text{Où : } R(p) = \varepsilon(p) \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) + P(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p)$$

$$\text{et } R(p) = G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) = T(p) = F.T.B.O$$

$$\text{Donc : } \varepsilon(p) = X(p) - [\varepsilon(p)G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p) + P(p) \cdot G_2(p) \cdot H(p)]$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{1}{1+T(p)} \cdot X(p) - \frac{G_2(p) \cdot H(p)}{1+T(p)} \cdot P(p) = \varepsilon_e(p) + \varepsilon_{per}(p)$$

L'erreur $\varepsilon(p)$ à chaque instant est la somme de deux erreurs :

- Erreur due aux variations de l'entrée : $\varepsilon_e(p) = \frac{X(p)}{1+T(p)}$
- Erreur due à la perturbation : $\varepsilon_{per}(p) = \frac{G_2(p)H(p)}{1+T(p)} \cdot P(p)$

En vertu du théorème de superposition on a : $\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{per}(t)$.

En général, on distingue :

Précision statique (ou erreur en régime établi) : $\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$

Précision dynamique (erreur en régime transitoire) : $\varepsilon(t) = y_d(t) - y(t)$

Nous nous intéressons dans ce qui suit à l'**erreur permanente** appelée aussi **erreur statique**.

En appliquant le théorème de la valeur finale on aura : $\varepsilon_s(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p)$

Exemple :

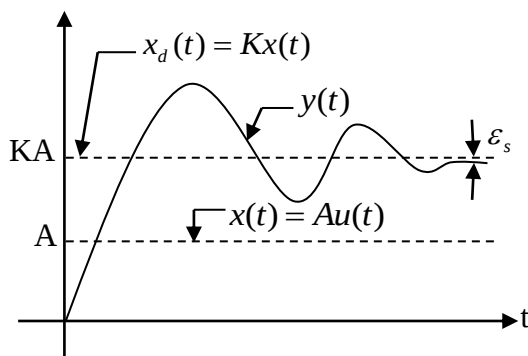


Figure 5.15 Erreur finie ($\varepsilon_s(\infty) = cst$)

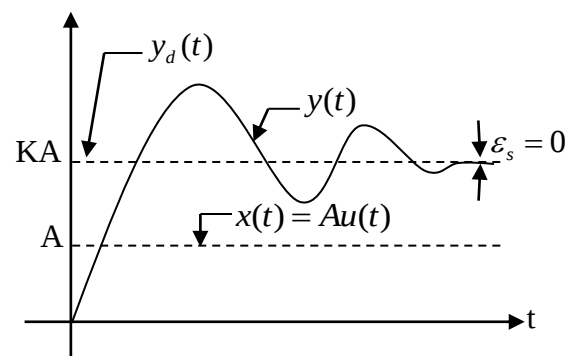


Figure 5.16 Erreur nulle ($\varepsilon_s(\infty) = 0$)

$$\varepsilon(t) = y_{d(t)} - y(t)$$

Où $y_{d(t)}$: Valeur désirée ;

$y(t)$: Valeur réelle.

V.6.1.a. Système sans perturbation et avec une entrée variable

On a : $P(p) = 0$ si on pose $H(p) = 1$ (retour unitaire) et $G_1(p) \cdot G_2(p) = G(p)$, il vient : $\varepsilon_e(p) = X(p) - Y(p) = X(p) - G(p) \cdot \varepsilon_e(p)$

$$\text{d'où : } \varepsilon_e(p) = \frac{X(p)}{1+G(p)} = \frac{X(p)}{1+F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1+T(p)} \text{ où } T(p) = G(p)$$

Donc l'erreur $\varepsilon_e(p)$ est liée d'une part à la forme du signal d'entrée $X(p)$ et d'autre part à la forme de la fonction du transfert en boucle ouverte (F.T.B.O).

a) Influence de l'entrée

- Si l'entrée est un échelon, l'erreur est appelée **erreur de position** et est notée ε_p .
- Si l'entrée est une rampe, l'erreur est appelée **erreur de vitesse ou de trainage**, notée ε_v .
- Si l'entrée est une parabole, l'erreur est appelée **erreur en accélération** et est notée ε_a .

b) Influence de la F.T.B.O

Pour calculer l'erreur ε , il est judicieux de mettre la F.T.B.O sous la forme suivante :

$$F.T.B.O = GH(p) = G(p) = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (1 - \frac{p}{z_i})}{\prod_{j=1}^n (1 - \frac{p}{p_j})} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \triangleleft \text{avec } H(p) = 1.$$

Où : $N(0) = D(0) = 1$

$$K = \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} : \text{Gain statique du système (B.O)}$$

α est appelé type du système (ou nombre d'intégrations)

 Système de type 0 (pas d'intégration) $\Rightarrow \alpha = 0$

$$\text{On a donc : } F.T.B.O = K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$\text{d'où } \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{KN(p)}{D(p)}} = \frac{D(p)}{D(p) + KN(p)} \cdot X(p)$$

a) Entrée en échelon

$$\text{Un échelon d'amplitude } A \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{(1 + K \frac{N(p)}{D(p)})} = \frac{A}{1 + K_p}$$

$$\text{Où } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} K \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K \text{ donc } \varepsilon_p(\infty) = \frac{A}{1 + K} = \text{cste}$$

K_p est appelée constante de position.

b) Entrée en rampe

$$X(t) = A \cdot t \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p^2} \text{ où } A = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{(1 + K \frac{N(p)}{D(p)})} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \frac{A}{K_v} \rightarrow \infty$$

$$\text{Où } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} K \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0.$$

K_v est appelée constante de vitesse.

c) Entrée en rampe

$$x(t) = \frac{1}{2} A \cdot t^2 \Rightarrow X(p) = \frac{A}{p^3} \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) \rightarrow \infty$$

$$\text{et } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} K p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0, \quad \varepsilon_a = \frac{A}{K_a} \text{ où } K_a : \text{est appelée constante d'accélération.}$$

Conclusion 1 :

Un système de type 0 ne suit ni une entrée en vitesse ni une entrée en accélération.

Système de type 1 (un intégrateur) $\alpha = 1$

La F.T.B.O s'écrit maintenant sous la forme :

$$F.T.B.O = K \frac{N(p)}{p \cdot D(p)} \text{ et donc } \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{K}{p} \frac{N(p)}{D(p)}}$$

a) Entrée échelon :

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0 \text{ avec } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = \infty$$

b) Entrée en rampe :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = \frac{A}{K} \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = \frac{A}{K_v} \text{ avec } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K$$

c) Entrée en parabole :

$$\varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) \rightarrow \infty \text{ avec } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = 0$$

Conclusion 2 :

Un intégrateur annule l'erreur de position et rend fini l'erreur de traînage.

Système de type 2 (deux intégrateurs) $\alpha = 2$

$$F.T.B.O = \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + F.T.B.O} = \frac{X(p)}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$$

a) Entrée échelon :

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0 \text{ et } K_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow \infty$$

a) Entrée en rampe :

$$\varepsilon_v(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_v(\infty) = 0 \text{ et } K_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot p \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow K$$

a) Entrée en parabole :

$$\varepsilon_a(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A}{p^3} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)})} = \frac{A}{K} \Rightarrow \varepsilon_a(\infty) = \frac{A}{K} \text{ et } K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^2} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} = K$$

Conclusion 3: Dans un système de type 2, les erreurs de position et de trainage sont nulles et l'erreur en accélération devient finie.

On peut constater que si $\alpha > 2 \Rightarrow K_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K}{p^\alpha} \cdot p^2 \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \rightarrow \infty$ d'où $\varepsilon_a(\infty) = 0$

On peut récapituler ce qui précède dans le tableau ci-dessous :

Tableau 5.1 L'erreur statique en fonction du type d'entrée et la classe du système

Précision statique	Système de type 0 $\alpha = 0$	Système de type 1 $\alpha = 1$	Système de type 2 $\alpha = 2$	Système de type 3 $\alpha = 3$
Erreur de position (ε_p)	$\frac{A}{1 + K_p}$	0	0	0
Erreur de trainage (ε_v)	$+\infty$	$\frac{A}{K_v}$	0	0
Erreur d'accélération (ε_a)	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{A}{K_a}$	0

Remarque importante : Il ne faut pas déduire rapidement du tableau qu'il suffit de rajouter une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de -90° , le système risque de devenir instable, d'où **dilemme précision-stabilité**

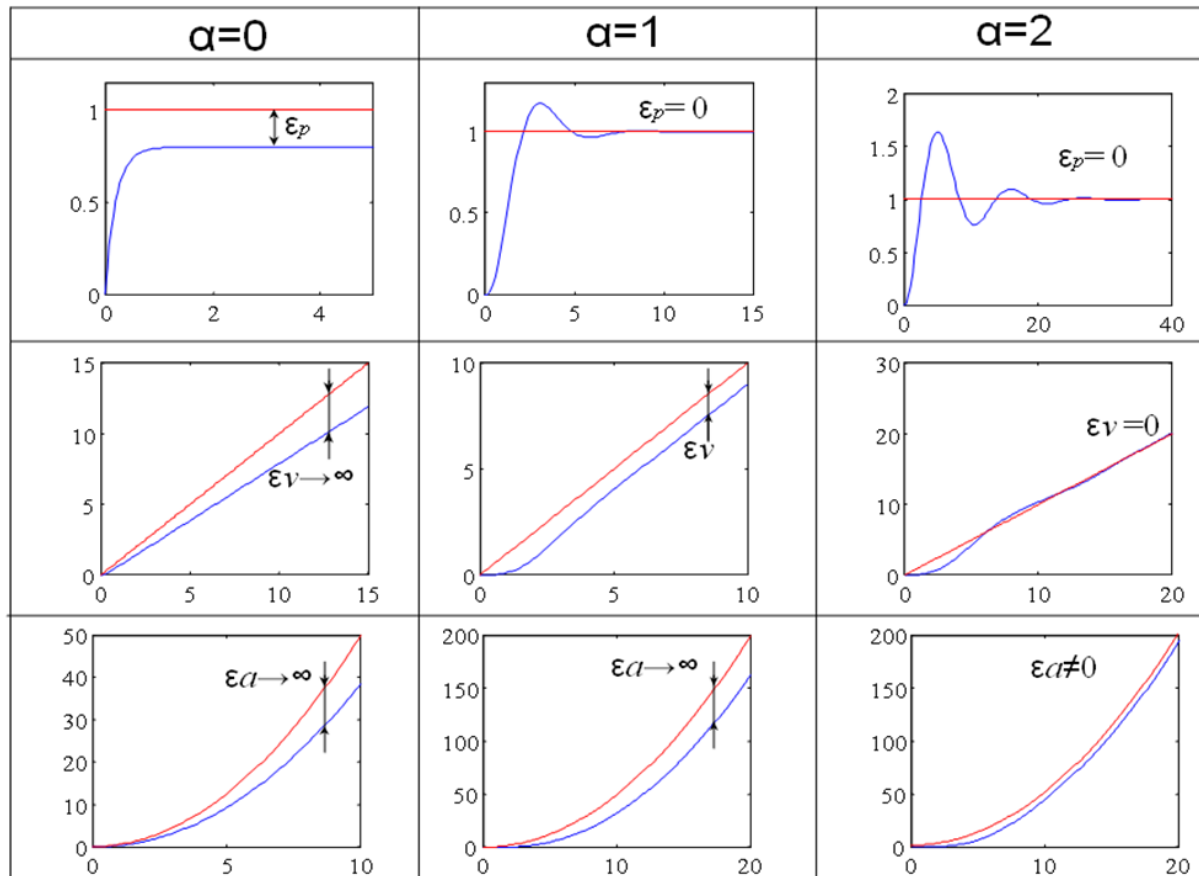


Figure 5.17 Illustration de l'erreur statique en fonction de l'entrée et du type du système.

Exemple de calcul d'erreurs

Considérons le système de la figure 5.1 soumis dans un premier temps à une entrée en échelon unitaire puis à une entrée en rampe unitaire. Déterminer ensuite les erreurs en régime permanent.

Solution :

a) Entrée en échelon unitaire :

On a $X(p) = \frac{1}{p}$ et FTBO vaut $kG(p) = \frac{k}{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}$. Donc, la transformée de Laplace

$$\text{de l'erreur est : } \varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)} \quad \text{Or } \varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \frac{1}{1+k}$$

si $k = 0.5$, on peut constater que $\varepsilon(\infty) = \frac{2}{3}$ soit 66%

b) Entrée en échelon unitaire :

On a $X(p) = \frac{1}{p^2}$ et FTBO vaut $kG(p) = \frac{k}{p(p^3 + 5p^2 + 2p + 1)}$

$$\varepsilon(p) = \frac{X(p)}{1 + kG(p)} = \frac{p^3 + 5p^2 + 2p + 1}{p^2(p^3 + 5p^2 + 2p + 1 + k)} \quad \text{Or } \varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \infty$$

V.6.1.b. Système avec perturbations seules

On travaille à entrée constante donc **en régulateur**. On s'intéresse aux variations, dues à une perturbation $p(t)$, de la grandeur de sortie.

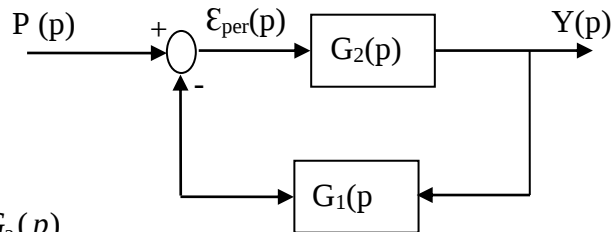
$$x(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(p) = 0 \\ \text{et} \\ H(p) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{Y(p)}{P(p)} = \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \Rightarrow Y(p) = \frac{G_2(p)P(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)}$$

On a donc : $\varepsilon_{per} = y_d(t) - y(t)$

En absence de $x(t)$: entrée principale

$Y_d(t)$ Doit être nulle $\Rightarrow \varepsilon_{per}(t) = -y(t)$

$$\text{D'où } \begin{cases} \varepsilon_{per}(p) = \frac{-G_2(p)}{1 + G_1(p)G_2(p)} \cdot P(p) = \frac{-G_2(p)}{1 + G(p)} \cdot P(p) \\ \text{avec } H(p) = 1 \end{cases}$$



● Système de type 0

$$\text{Posant : } G_1(p) = K_1 \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \quad \text{et} \quad G_2(p) = K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

Avec $N_1(0) = N_2(0) = D_1(0) = D_2(0) = 1$ Il vient donc:

$$Y(p) = P(p) \cdot \frac{K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1 + K_1 \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} K_2 \frac{N_2(p)}{D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{K_2 N_2(p) D_1(p)}{D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

• Perturbation permanente :

Le cas le plus courant de perturbation permanente est la perturbation en échelon (couple résistant sur un arbre moteur par exemple). On a donc : $P(p) = \frac{A_0}{p}$ alors la variation sur la

$$\text{sortie peut s'écrire : } \varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K_2}{1 + K_1 K_2} = \frac{A_0 K_2}{1 + K_1 K_2}$$

Remarque :

On constate que l'erreur due à une perturbation constante est proportionnelle à l'amplitude A_0 et inversement proportionnelle au gain de la chaîne directe $K_1 K_2$, et comme K_2 est au numérateur, on a intérêt à prendre K_1 le plus grand possible au risque de déstabiliser le système.

● Système de type 1

a) Intégrateur en aval de la perturbation

On a donc : $G_2(p) = \frac{K_2}{p} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$

$$\varepsilon_{per}(p) = Y(p) = P(p) \cdot \frac{\frac{K_2}{p} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1 + K_1 \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \frac{K_2}{p} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{K_2 N_2(p) D_1(p)}{p D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

- Pour une perturbation en échelon : $\varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{x \rightarrow 0} P \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{K_2}{K_1 K_2} = \frac{A_0}{p}$

Conclusion 1:

L'écart statique $\varepsilon_{per}(\infty)$ dépend de A_0 et K_1 , mais ne l'est plus de K_2 . On a intérêt donc à prendre K_1 le plus grand possible et le placer en amont de la perturbation, mais cela se fera au détriment de la stabilité du système.

b) Intégrateur en amont de la perturbation

On aura donc : $G_1(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$

$$\Rightarrow \varepsilon_{per}(p) = Y(p) = P(p) \cdot \frac{\frac{K_2}{p} \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1 + \frac{K_1}{p} \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \frac{K_2 N_2(p)}{D_2(p)}} = P(p) \cdot \frac{p K_2 N_2(p) D_1(p)}{p D_1(p) D_2(p) + K_1 K_2 N_1(p) N_2(p)}$$

- Pour une perturbation en échelon : $\varepsilon_{per}(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pY(p) = \lim_{p \rightarrow 0} P \cdot \frac{A_0}{p} \cdot \frac{p K_2}{K_1 K_2} = 0$

Conclusion 2:

On constate qu'un **intégrateur placé en amont** d'une perturbation **annule ses effets**.

Exemple : Perturbation en échelon

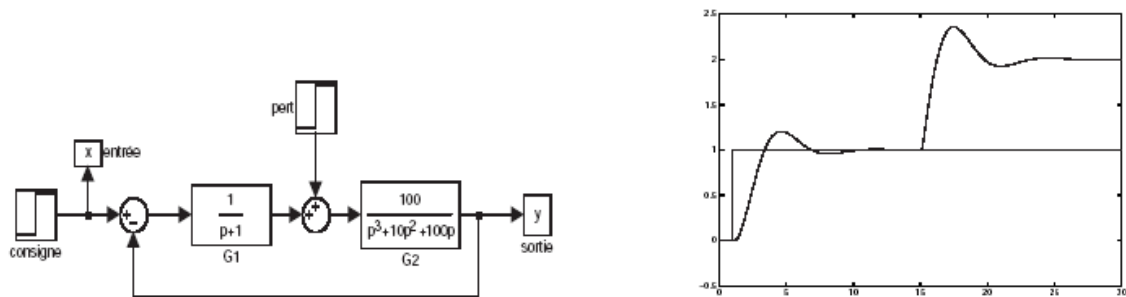


Figure 5.18 $G_1(p)$ de classe 0 et $G_2(p)$ de classe 1 avec perturbation de classe 1 (échelon)

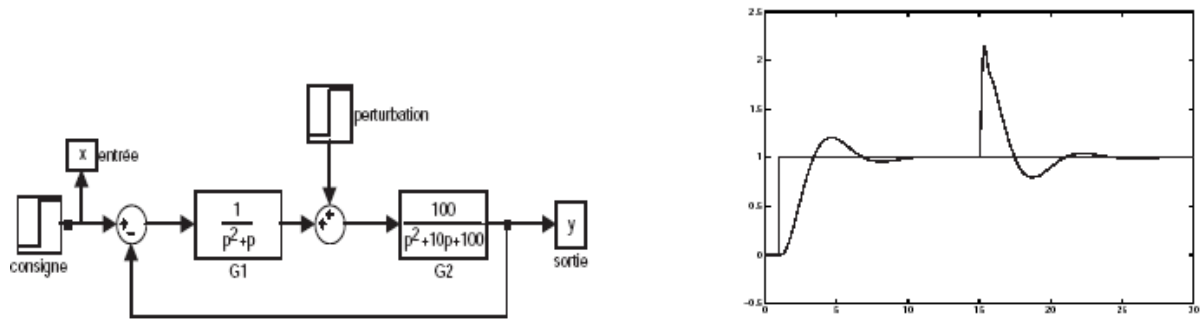


Figure 5.19 $G_1(p)$ de classe 1 et $G_2(p)$ de classe 0 avec perturbation de classe 1 (échelon)

V.6.1.c. Cas d'un système quelconque

Le système est cette fois sollicité par des variations d'entrées et des perturbations. Le théorème de superposition s'applique et on constate que, pour obtenir une meilleure précision, il est impératif d'augmenter le gain. Comme il n'est pas possible de trop augmenter cette grandeur (i.e. gain) à cause de la stabilité, une solution consiste à placer un intégrateur en amont de la perturbation, donc juste derrière le comparateur : c'est la place de **correcteur** (ou **régulateur**). Ce dernier fera l'objet d'un prochain support de cours.

On peut conclure qu'un correcteur intégrateur permet :

- d'annuler l'effet des perturbations ;
- de rendre l'erreur de position nulle et l'erreur de trainage finie. C'est l'outil de la précision statique.

V.6.2. Précision dynamique

Une bonne précision dynamique donne un amortissement moyen pour un temps de réponse faible. Un amortissement moyen correspond à une réponse transitoire à faible dépassement. La précision dynamique est appelée aussi qualité du système asservi. Elle chiffre l'erreur transitoire apparaissant dans la réponse à un échelon. Si on veut un amortissement élevé pour un temps de réponse faible, on a intérêt à minimiser l'erreur dynamique, c'est-à-dire minimiser l'aire hachurée sur la figure (5.20) ci-dessous.

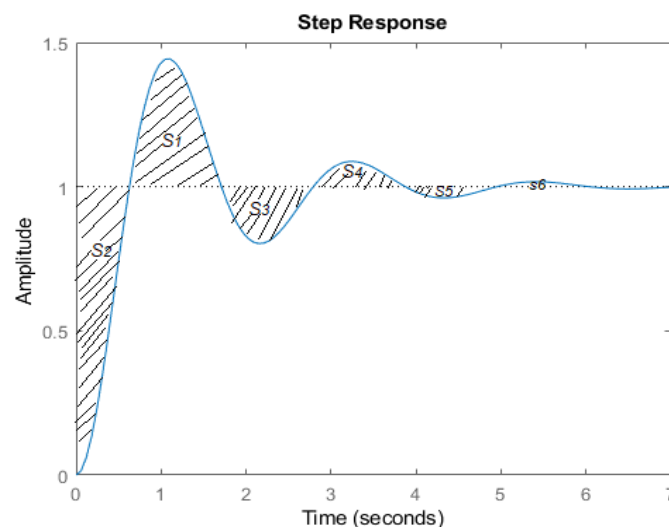


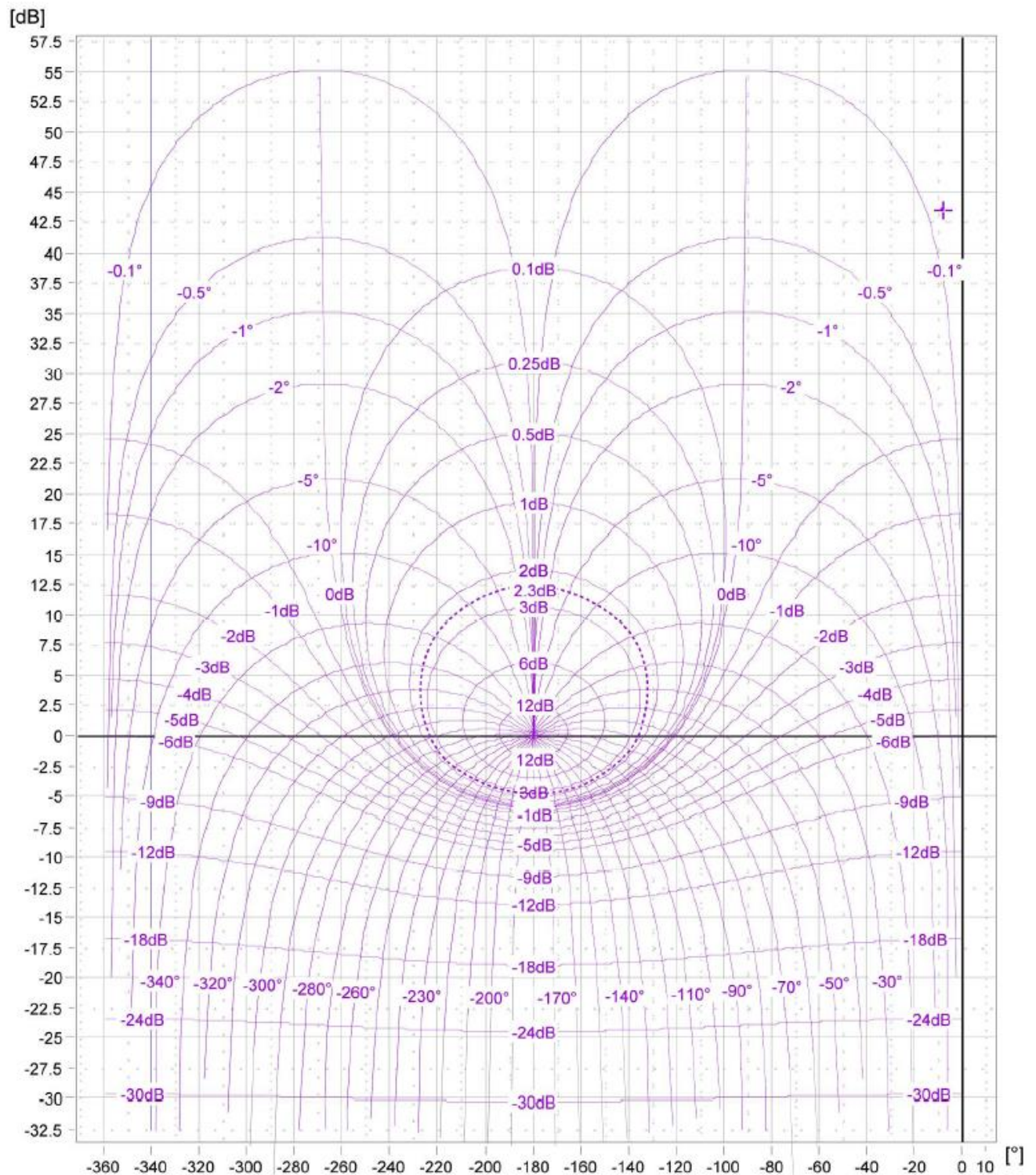
Figure 5.20 Mise en évidence de l'erreur dynamique.

Annexe A

QUELQUES TRANSFORMEES DE LAPLACE UTILES A L'ANALYSE DES SYSTEMES DE COMMANDE

F(P)	f(t) d éfinie pour t>0
1	$\delta(t)$ impulsion unit é
$e^{-\tau p}$	$\delta(t-\tau)$ impulsion retard é
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ or 1 échelon unit é
$\frac{1}{p} e^{-\tau p}$	$u(t-\tau)$ échelon retard é
$\frac{1}{p}(1 - e^{-\tau p})$	$u(t) - u(t-\tau)$
$\frac{1}{p^2}$	t (rampe unit é)
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n=1, 2, 3, ...)
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(e^{-at} - e^{-bt})$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{(b-a)}(be^{-bt} - ae^{-at})$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
$\frac{p \sin \phi + \omega \cos \phi}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t + \phi)$
$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$\text{sh} \omega t$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\text{ch} \omega t$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 - \omega^2}$	$e^{-at} \text{sh} \omega t$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 - \omega^2}$	$e^{-at} \text{ch} \omega t$

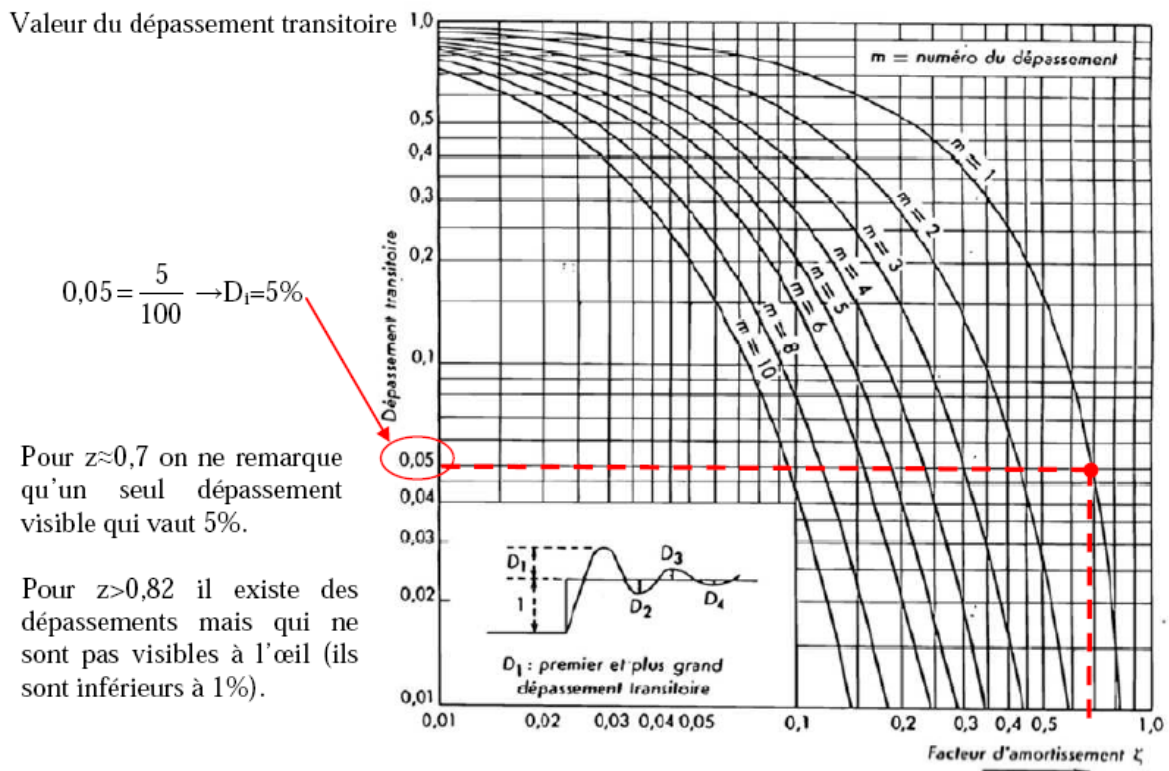
Annexe B



Abaque de Black-Nichols

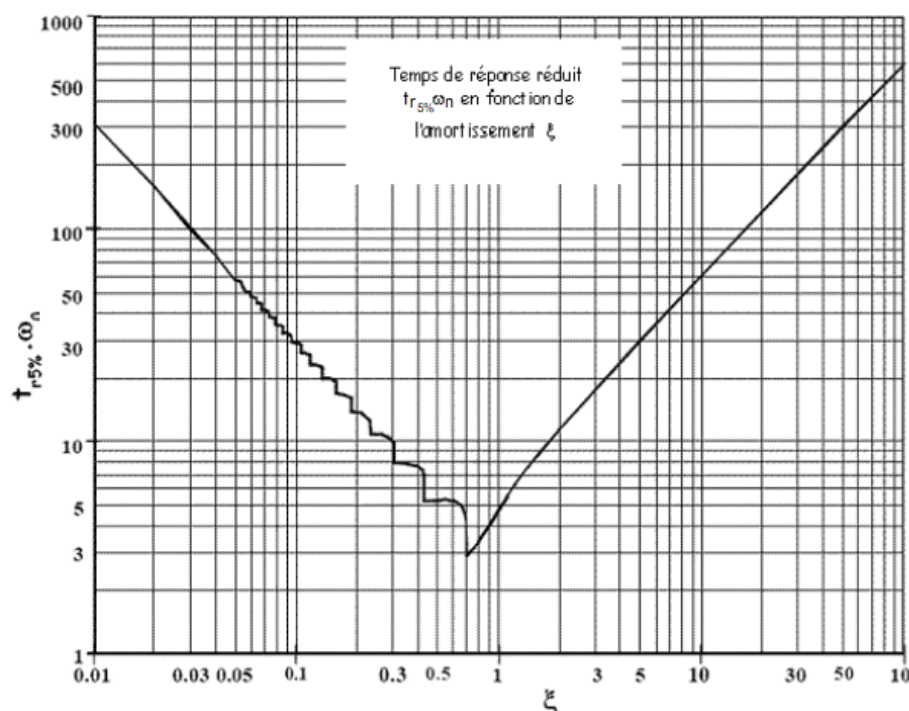
1. L'abaque de Black—Nichols permet à partir de la connaissance du lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de Transfert en Boucle ouverte (FTBO) d'un système à retour unitaire d'obtenir le lieu de transfert dans le plan de Black de la Fonction de transfert en Boucle fermée (FTBF).

2. Évolution des dépassements en fonction de l'amortissement



3. Temps de réponse d'un système de second ordre

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement ζ et de la pulsation propre non amortie ω_n du système. On utilise alors un abaque donnant la valeur du temps de réponse réduit $tr_{5\%} \cdot \omega_n$ en fonction du coefficient d'amortissement ζ .



Abaque du temps de réponse réduit pour un système du second ordre

Travaux Dirigés

Série d'exercices N°1 (Transformation de Laplace)

Exercice 1

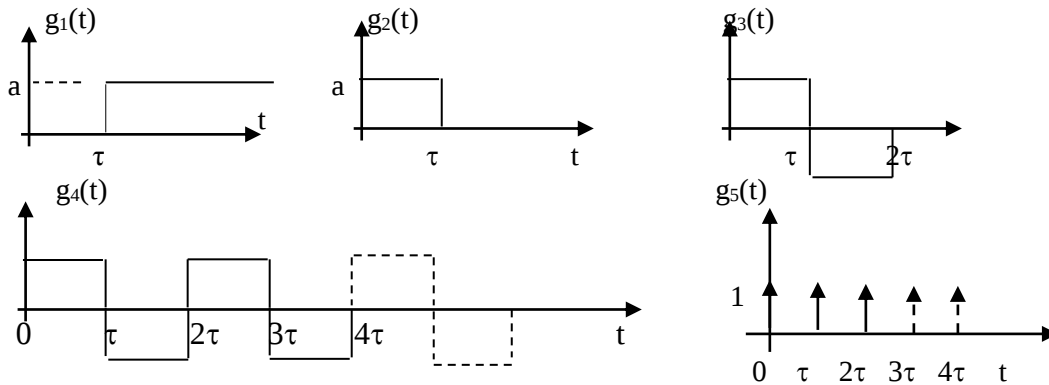
Déterminer la transformée de Laplace pour chacune des fonctions causales suivantes:
(Utiliser les propriétés adéquates)

- | | |
|---|--|
| a) $f_1(t) = a$ ($a = c^{te}$) signal échelon | b) $f_2(t) = a.t$ (rampe) |
| c) $f_3(t) = a.t^2$ ($a = c^{te}$) | d) $f_4(t) = \delta(t)$ (impulsion de Dirac) |
| e) $f_5(t) = a.t^n$ ($a = c^{te}$) | f) $f_6(t) = 3e^{-t} + e^{-3t}$ |
| g) $f_7(t) = \sin \omega t + \cos \omega t$ | h) $f_9(t) = e^{-at} \cdot \sin \omega t$ (Sinus amorti) |
| i) $f_{10}(t) = t^2 \cdot e^{-at}$ | j) $f_{12}(t) = e^{-3t} \cdot \sin(5t + \pi/3)$ |

Exercice 2

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions représentées par les graphes suivants :

- | | |
|--|---|
| a) $g_1(t) = f_1(t - \tau)$ (échelon décalé) | b) $g_2(t)$ est un signal rectangulaire |
| c) $g_3(t)$ est une onde rectangulaire | d) $g_4(t)$ est un signal périodique |
| d) $g_5(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau)$ (train d'impulsions unitaires) | |



Exercice 3

Déterminer les fonctions originales des transformées de Laplace suivantes:

$$F_1(p) = \frac{1}{(p+3)(p+4)} ; \quad F_2(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2(p+3)} ; \quad F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+4p+16}$$

$$F_4(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p^2+9)} ; \quad F_5(p) = \frac{4p^3 + p^2 - 22p + 16}{p(p+2)(p-2)^2}$$

Exercice 4

En utilisant la transformée de Laplace trouver la solution des équations différentielles ci-dessous pour les conditions initiales suivantes:

- | | |
|---|---|
| 1) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ | avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 2$ |
| 2) $\ddot{x}(t) - \ddot{x}(t) = 0$ | avec $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$ et $\ddot{x}(0) = 1$ |
| 3) $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 1$ | avec $x(0) = -1$ et $\dot{x}(0) = 2$ |
| 4) $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{5t}$ | avec $x(0) = 1$ et $\dot{x}(0) = 2$ |
| 5) $\ddot{x}(t) + x(t) = 1$ | avec $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$ |

Série d'exercices N°2

(Modélisation des Systèmes linéaires continus)

Exercice 1

On considère un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3 s(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 3 \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 2 \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

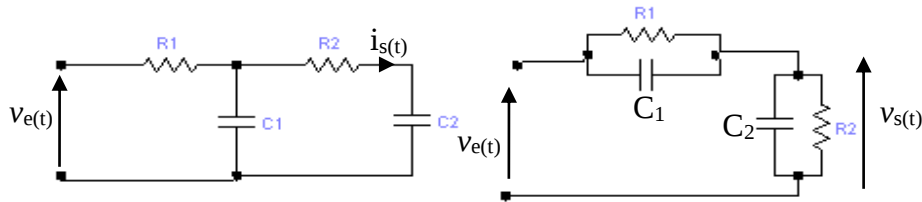
Où $e(t)$ et $s(t)$ sont respectivement, le signal d'entrée et le signal de sortie.

- Donner la fonction de transfert de ce système.
- Déterminer ses pôles et ses zéros.

Exercice 2

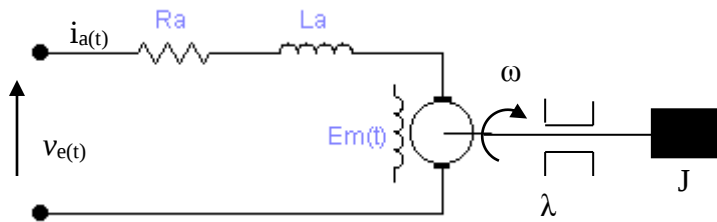
Trouver les fonctions de transfert des circuits électriques suivants:

(Indication : Utiliser la notion d'impédances complexes).



Exercice 3

Soit le système ci-dessous représenté par un moteur à courant continu à excitation séparée à flux constant entraînant une charge d'un moment d'inertie J .



Où E_m : Force contre électromotrice $E_m(t) = K_v \omega(t)$.

ω : Vitesse angulaire [rad/s] ; T : Couple moteur $T = K_t i_a$.

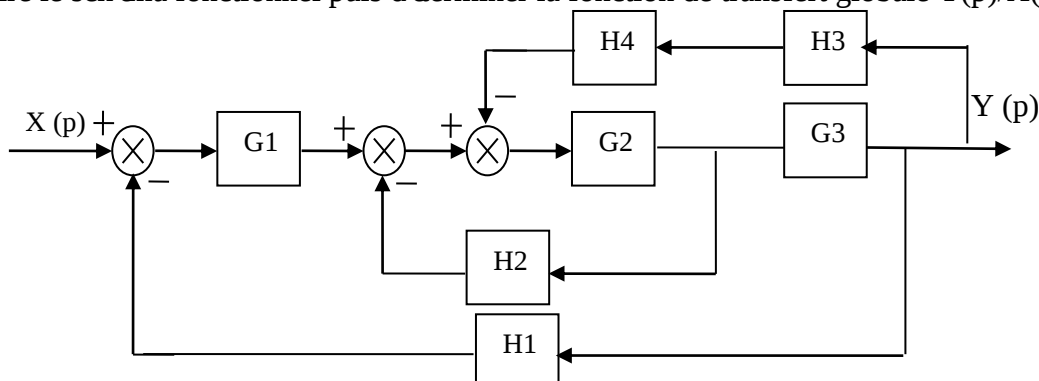
J : Moment d'inertie ; i_a : Courant induit.

λ : représente le coefficient des frottements

- Écrire le système d'équations différentielles électromécaniques du système.
- Établir le schéma fonctionnel du système.
- Déterminer la fonction de transfert reliant la vitesse angulaire Ω et la tension d'induit V_e
- En déduire la fonction de transfert reliant la position angulaire Θ et la tension d'induit V_e

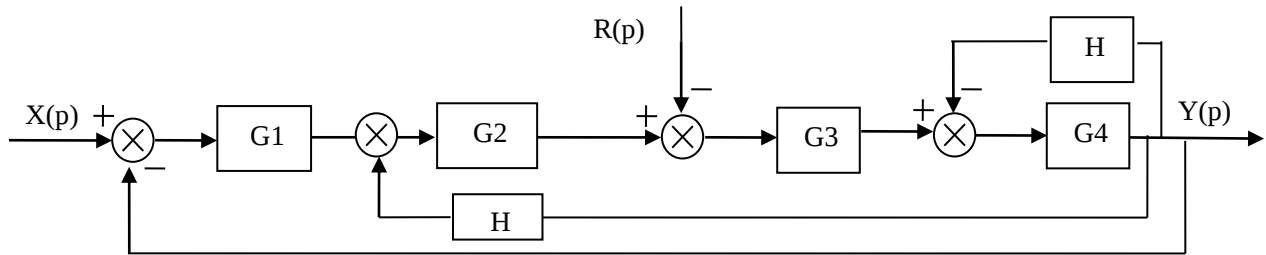
Exercice 4

Réduire le schéma fonctionnel puis déterminer la fonction de transfert globale $Y(p)/X(p)$.



Exercice 5

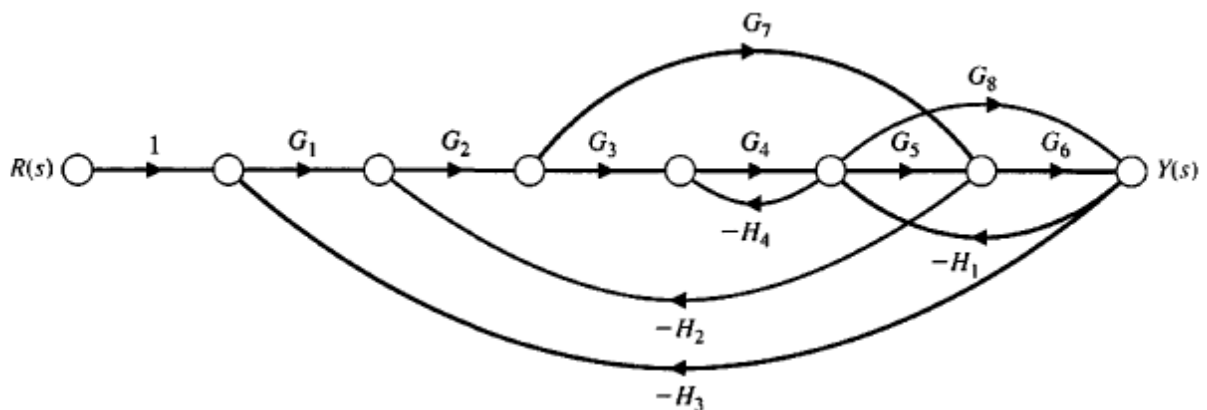
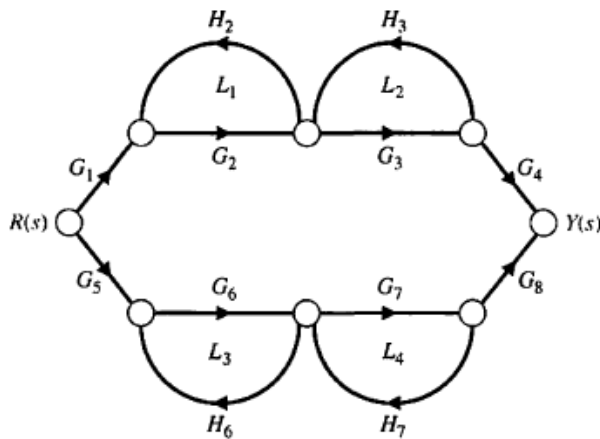
Soit le schéma fonctionnel suivant :



- Déterminer la fonction de transfert entre $X(p)$ et $Y(p)$
- Déterminer la fonction de transfert entre $R(p)$ et $Y(p)$
- Exprimer $Y(p)$ en fonction $X(p)$ et de $Y(p)$.

Exercice 6

Soit les deux graphes de fluence des signaux suivants :



En utilisant la formule de Mason, déterminer pour chaque graphe la fonction de transfert correspondante $Y(p)/R(p)$.

Série d'exercices N°3
(Réponses temporelles des S.A.L.C)

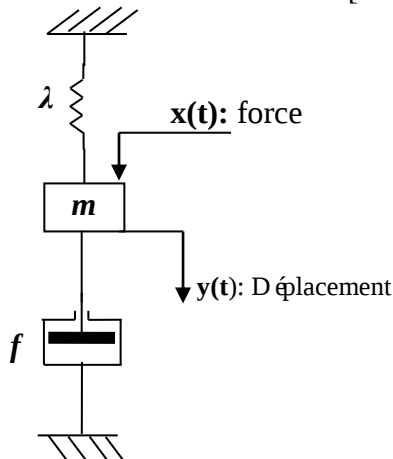
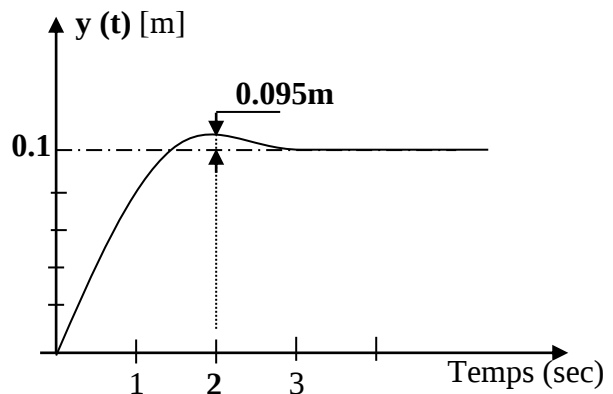
Exercice 1

Considérons le système mécanique représenté par la Figure (1a) ci-dessous. Quand une force $x(t)=2\text{Newton}$ est appliquée au système, la masse (m) oscille comme le montre la Figure (1b). Sachant que le dépassement $D_1=0.095m$ (soit 9.5%).

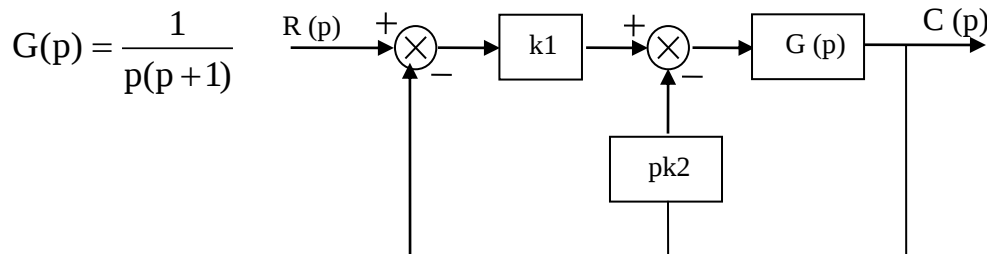
On donne: Le temps de pic : $t_p = \pi/\omega_d$ [sec] où ω_d est la pulsation d'oscillations en [rad/sec].

- 1) Déterminer la fonction de transfert $Y(p)/X(p)$ puis la mettre sous sa forme standard.
- 2) Donner en fonction de λ , m et f les expressions :
 - a) du coefficient d'amortissement (ξ) ;
 - b) du gain statique du système (k) ;
 - c) de la pulsation propre non amortie (ω_n) ;
- 3) En déduire les valeurs des paramètres du système: m , f et λ .

Où m : masse en [kg],
 f : coefficient de frottements visqueux [N/m/s]
 λ : la raideur du ressort [N/m].

**Fig.1a:** Système mécanique**Fig.1b:** Réponse indicielle du système**Exercice 2**

Soit un processus représenté par un schéma bloc ci-dessous et dont la fonction de transfert :



- 1) Quelles sont les valeurs de k_1 et k_2 qui permettent de modéliser le système en boucle fermée par une transmittance du second ordre avec un coefficient d'amortissement de 0.6 et une pulsation propre non amortie de 10 rad/s.
- 2) Quel est le pourcentage du dépassement dans la réponse indicielle du système.
- 3) Calculer l'erreur permanente du système pour une entrée en échelon.

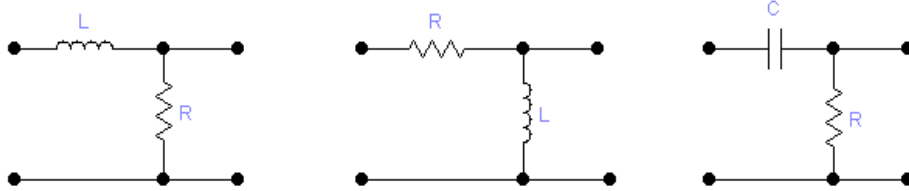
Série d'exercices N°4

(Réponses fréquentielles des S.A.L.C)

Exercice 1

Pour chacun des circuits électriques ci-dessous:

- 1° Donner la fonction de transfert isochrone $G(j\omega)$
- 2° Tracer le diagramme de Bode.
- 3° Déduire la nature de chaque circuit.

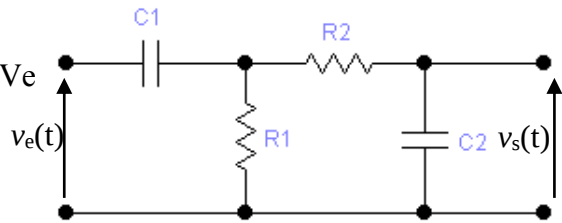


Exercice 2

Le circuit ci-contre est constitué de deux cellules C_1R_1 et R_2C_2 montées en cascade.

Avec $R_1=1K\Omega$, $R_2=20K\Omega$, $C_1=1\mu F$ et $C_2=0.5nF$.

- 1° Déterminer la fonction de transfert $G(j\omega)=V_s/V_e$
- 2° Tracer le diagramme de Bode.
- 3° Quelle est la nature de ce circuit?



Exercice 3

Soit le système représenté par les fonctions de transfert suivantes (FTBO):

$$a) G_1(p) = \frac{100}{1 + 0.5p} \quad b) G_2(p) = \frac{100}{(1 + 0.1p)^2} \quad c) G_3(p) = \frac{5}{p(1 + 0.2p)(1 + 0.3p)}$$

Tracer la réponse fréquentielle de chaque système, et ce dans:

- 1- Le plan de Nyquist.
- 2- Le plan de Black.

Exercice 4.

Soit le système asservi dont la F.T.B.O est donnée par: $G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1 + j\omega T}$ où $L=0.5$ et $T = 1$.

- 1- Tracer le diagramme de Nyquist des deux termes suivants:

$$a) e^{-j\omega L} \quad b) (1 + j\omega T)^{-1}$$

- 2- En déduire le diagramme de Nyquist de la fonction $G(j\omega)$.

Série d'exercices N°5
(Stabilité et précision des S.A.L.C.)

Exercice 1

On considère un système asservi à retour unitaire de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{k}{(p+1)(p+8)^2} \quad \text{Avec } k > 0$$

1. Déterminer à l'aide de critère de Routh les valeurs de k pour lesquelles le système est stable en boucle fermée.
2. Pour annuler l'erreur statique, on introduit un intégrateur dans la chaîne directe. Déterminer les nouvelles conditions de stabilité ; Que peut-on conclure ?

Exercice 2.

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{k}{(p+1)^3} \quad \text{avec } k > 0$$

1. Déterminer à l'aide de critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle de régulation à retour unitaire.
2. Calculer la valeur de k qui assure au système une marge de phase égale à 45° .

Exercice 3

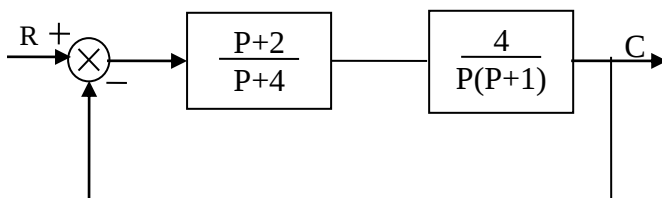
Soit un système asservi dont la fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par :

$$GH(p) = \frac{k}{p(1+0.1p)(1+0.2p)} \quad \text{Avec } k > 0$$

1. Tracer le lieu de transfert complet de Nyquist du système.
2. Pour quelle valeur de la pulsation (ω) le lieu de Nyquist coupe l'axe des réels ;
3. A cette pulsation (ω) quelle est la valeur du module de $GH(p)$.
4. En appliquant le Critère de Nyquist déterminer les valeurs de k pour lesquelles le système est stable en boucle fermée.
5. Vérifier le résultat de la question (4) en utilisant le critère de Routh.

Exercice 4

Pour le système suivant:



- 1) Trouver les constantes d'erreur de position de vitesse et d'accélération
- 2) En déduire les erreurs en régime permanent pour les entrées canoniques (échelon, rampe et parabole).

R é f é r e n c e s B i b l i o g r a p h i q u e s

- [1] R.C. Dorf and R.H. Bishop. «Modern control systems», 7^{ème} édition, Pentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1995.
- [2] K. Ogata. «Modern control engineering », 5^{ème} Edition, Pentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 2010.
- [3] D. Arzelier, «Représentation et analyse des systèmes linéaires », Notes de cours, LAAS-CNRS, France, 2003.
- [4] Gille J. CH., Decaulne P., et P. Pédgrin. «Théorie et calcul des asservissements linéaires » Huitième Édition, Éditions Dunod, 1987.
- [5] F. de Carfort, C.Foulard, J.Calvet «Asservissements linéaires continus avec exercices et problèmes résolus », 3^{ème} Édition, Dunod Université Paris, 1976.
- [6] Yves Granjon, «Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Dunod, Paris 2003.
- [7] Eric Magarotto, Cours de régulation, Université de Caen, Département Génie chimique et Procédés, version septembre 2004.
- [8] Mohammed-Karim FELLAH « Cours d'Asservissements Linéaires Continus » Université Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès, Département d'Électrotechnique, Septembre 2007.
- [9] Josef J. Distefano, Allen R. Stubberud et Ivan J. Williams, «Systèmes asservis : Cours et problèmes, Série Schaum, McGraw-Hill, 2^{ème} édition, Paris, 1990.
- [10] Michel Villain, automatique 2, «Systèmes asservis linéaires », Éditions ellipses, Paris, 1996.