

CHAP. 4. CUMUL DES DOMMAGES EN FATIGUE

1. Introduction :

Les théories de cumul d'endommagement ont pour objet de décrire l'évolution du phénomène entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures à l'échelle macroscopique) et l'état d'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément de volume, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (environ 0.1mm).

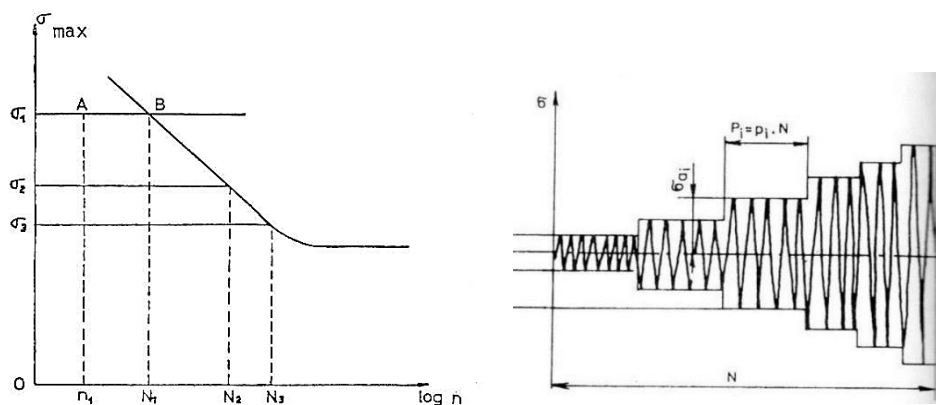
Les lois modélisant le cumul de l'endommagement permettant la prévision du nombre de cycles à la rupture (durée de vie) en évaluant l'endommagement du matériau pour tous les cycles de contraintes rencontrés et de cumuler leurs effets sur le comportement du matériau. Les lois d'endommagement permettent, de déterminée la durée de vie du matériau relative à chaque cycle extrait, de calculer le dommage correspondant et d'en faire le cumul. Lorsque la séquence de chargement est traitée, le dommage cumulé conduit à l'estimation de la durée de vie du matériau en termes de nombre de répétitions de la séquence à l'amorçage d'une fissure macroscopique.

Soit un chargement d'amplitude σ_1 pendant n_1 cycles, et N_1 le nombre de cycles conduisant à la rupture pour ce chargement voir figure

On estime le dommage pour ce cycle à $D_1 = \frac{n_1}{N_1}$

Supposons que la pièce est sollicitée au niveau σ_1 pendant n_1 cycles, puis σ_2 pendant n_2 cycles, etc. Le critère de cumul du dommage de suppose que les dommages se cumulent de façon additive.

$$D = \sum_{i=1}^K D_i = \sum_{i=1}^K \frac{n_i}{N_i}$$



2. La loi linéaire de Palmgren-Miner:

La théorie initialement proposée par Palmgren en 1924 a été ensuite développée par Miner en 1945. Cette loi simple traite le cas des séquences de charge d'amplitude variable et repose sur 4 hypothèses, qui sont les suivantes :

- Le chargement est une fonction sinusoïdale du temps,
- Rupture par fatigue est engendrée dans la totalité du travail absorbé par le matériau,

- Le comportement expérimental des matériaux est représenté par le diagramme de Goodman modifié qui est la modélisation du diagramme de Haigh.
- l'indicateur de la ruine du matériau est l'amorçage d'une fissure macroscopique
- la ruine du matériau se produit quand dommage cumulé $D = 1$

Nota : restrictions à l'utilisation la loi de Miner :

- Seuls les alliages d'aluminium ont été utilisés pour valider la loi de Miner.
- Seuls les cycles dont la contrainte maximale est supérieure à celle qui provoque la ruine par fatigue (amorçage de fissure) à 10^7 cycles sont à prendre en compte.

En se basant sur la 2^{ème} hypothèse, le dommage D_i du matériau après application de n_i cycles identiques (figure 2), la fraction du travail total absorbé par le matériau s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{U_i}{W} = 1 \text{ Soit } \sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{Nr_i} = 1$$

u_i : L'énergie absorbée par le matériau (transmise par n_i cycles),

W : Le travail total absorbé par le matériau à la ruine par fatigue,

Nr_i : Le nombre de cycles considérés à la ruine.

La sommation linéaire des fractions de vie propres ($r_i = n_i/Nr_i$) à chaque type de cycles appliqués :

$$D = \sum_{i=1}^p \frac{n_i}{Nr_i} = \sum_{i=1}^p r_i$$

La ruine du matériau se produit quand $D = 1$.

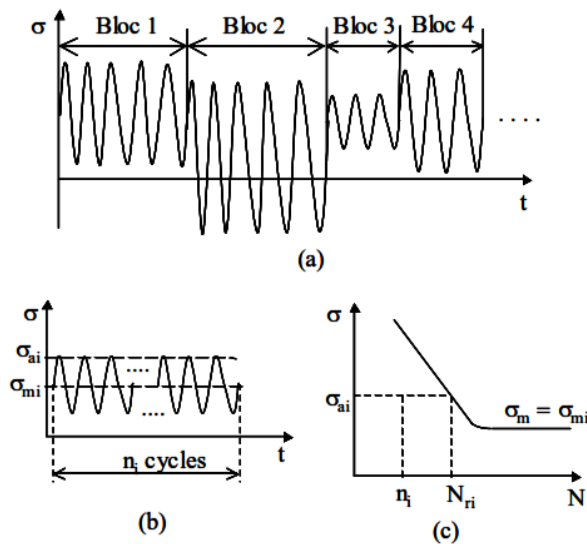


Figure 2 : Description d'un type de chargement dans le modèle de Miner. (a) blocs de sollicitations, (b) nombre de cycles n_i du $i^{\text{ème}}$ bloc, (c) courbe S-N.

Donc pour un matériau donné, il existe un travail maximum W que le matériau peut absorber quel que soient les niveaux de sollicitation et l'historique de chargement qu'il a subi.

3. Loi de Marco et Starkey (1954)

Marco et Starkey se sont basés sur les modèles linéaires d'endommagement, pour présenter une théorie non linéaire. Ils ont effectué des essais en flexion rotative sur des éprouvettes en alliage d'aluminium (76S-T61) et en acier (SAE4340) sollicitées par des séquences de chargement d'amplitude variable par blocs. Cette loi reprend la loi de Miner en la modifiant par un exposant dépendant des contraintes appliquées et repose sur les hypothèses suivantes :

- les sollicitations sont alternées symétriques.
- Les courbes d'endommagement pour chaque niveau de contraintes sont définies par l'équation :

$$D_i = \left(\frac{n_i}{N r_i} \right)^{m_i} \text{ Avec } m_i > 1$$

m_i : est un exposant qui dépend du niveau de sollicitation σ_i ; m_i est une fonction décroissante de la contrainte.

Pour p niveaux de contraintes ($p > 0$), la rupture intervient quand $\sum_{i=1}^{i=p} D_i = 1$.

Pour des chargements à plusieurs blocs cette loi utilise la méthode des nombres de cycles équivalents

4. Méthode de nombres de cycles équivalents :

La méthode consiste à calculer le nombre de cycles n_{eq2} qu'il aurait fallu appliquer au niveau2 pour produire le même dommage D_1 que les n_1 cycles appliqués au niveau1. Par suite, le nombre de cycles n_{2t} au niveau 2 à la fin du second bloc (n_1 cycles au niveau 1 et n_2 cycles au niveau 2) comme c'est illustré dans la figue. 3.

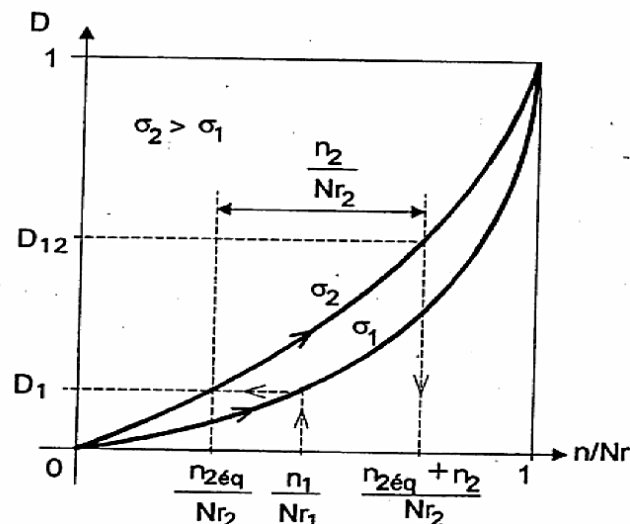


Figure. 3 : Présentation de la méthode des nombres de cycles équivalents

L'endommagement créé au cours du premier bloc est : $D_1 = \left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1}$

D'où : $n_{2eq} = N_2 \cdot D_1^{1/m_2}$ et $n_{2t} = n_{2eq} + n_2$

L'endommagement total à la fin du second bloc est :

$$D_{12} = \left(\frac{n_{2t}}{N_2} \right)^{m_2} = \left(\frac{n_{2eq} + n_2}{N_2} \right)^{m_2} = \left[\left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1/m_2} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{m_2}$$

On peut obtenir la durée de vie sous un chargement à deux niveaux

Dans le cas de p niveaux successifs, l'endommagement aura lieu si :

$$\left\{ \left\{ \left[\left(\frac{n_1}{N_1} \right)^{m_1/m_2} + \frac{n_2}{N_2} \right]^{m_2/m_3} + \dots + \frac{n_1}{N_1} \right\}^{m_1/m_{i+1}} + \dots + \frac{n_{p-1}}{N_{p-1}} \right\}^{m_{p-1}/m_p} + \frac{n_p}{N_p} \right\}^{m_p} = 1$$

5. La loi de Henry :

La loi de Henry lie l'évolution du dommage du matériau à la variation de sa limite d'endurance qui est une caractéristique de fatigue du matériau. Les principales hypothèses sont les suivantes :

- la courbe de Wöhler d'un matériau pour un type sollicitation peut être représentée, dans le domaine des contraintes d'amplitude σ supérieure à la limite d'endurance σ_D , par une équation empirique : $N_r = \frac{K}{\sigma - \sigma_D}$ si $\sigma > \sigma_D$

Pour un matériau est vierge exempt de défauts : $N_r = \frac{K_0}{\sigma - \sigma_{D0}}$

Avec la condition de Weibull: $\sigma_{D0} < \sigma < 1,5\sigma_{D0}$

σ_D : est la limite d'endurance du matériau après n cycles de sollicitation,

σ_{D0} : est la limite d'endurance du matériau vierge,

K et K_0 : sont des coefficients empiriques dépendant du matériau mais aussi de l'état de surface et de la géométrie de l'éprouvette.

- la limite d'endurance σ_D est proportionnelle à la constante K . De plus, elles évoluent avec l'état d'endommagement du matériau à tous les niveaux de contrainte situés au-dessus de la limite de fatigue.
- Le point critique de la pièce où se produit l'endommagement est considéré comme une entaille de coefficient de concentration de contrainte K_t ;

L'équation empirique de Henry s'écrit alors : $N_r = \frac{K_0}{K_t(\sigma - \sigma_{D0})} = \frac{K}{\sigma - \sigma_D}$

Le coefficient de concentration de contrainte K_t est défini par : $K_t = \frac{K_0}{K} = \frac{\sigma_{D0}}{\sigma_D}$

La variation de la limite d'endurance du matériau exprime la fonction du dommage comme :

$$D = \frac{\sigma_{D0} - \sigma_D}{\sigma_{D0}}$$

La limite d'endurance instantanée, de Henry, est : $\sigma_D = \frac{\sigma(1-r)}{\left(\frac{\sigma - \sigma_{D0}}{\sigma_{D0}} \right) + (1-r)} = \frac{\sigma(1-r)}{\gamma - r}$

$r = n / N_r$: est la fraction de vie sous le niveau de contrainte σ ,

$\gamma = \sigma / \sigma_{D0}$: est le facteur de surcharge sous le niveau σ .

Le dommage provoqué par n_i cycles de niveau σ_i s'écrit par insertion de l'équation de σD dans l'équation de D par :

$$D_i = \frac{r_i (\gamma_i - 1)}{\gamma_i - r_i}$$

A la rupture de l'éprouvette survient quand le dommage $D = 1$.

6. La loi de Gatts (1961) :

Gatts considère que la fonction de dommage en fatigue est basée sur la variation de la limite de fatigue d'un matériau soumis à des chargements d'amplitude constante (en traction monotone). Il définit le dommage en fonction de la limite instantanée de résistance ou résistance maximale du matériau. Il estime que les chargements répétés causent des dommages au matériau qui se traduisent par la diminution de sa résistance. Cela permet donc d'établir le fait que le dommage s'accumule de façon plus ou moins continue par application de charge. Gatts a proposée des hypothèses pour la fonction d'endommagement, le premier cycle de la contrainte de rupture, et le rapport de la résistance d'endurance à la résistance de rupture brutale. Ces hypothèses sont :

- La contrainte qui va entraîner la rupture sur le premier cycle dans un chargement cyclique est supposée la résistance ultime, R_u , par approximation.
- L'endommagement d'un matériau entraîne la diminution de sa résistance en traction monotone ainsi que de sa limite d'endurance.
- Le rapport de la limite d'endurance σD à la résistance maximale de rupture R_m (résistance à la traction) est supposée constant par approximation,
- L'endommagement est lié à a variation de la résistance maximale en traction monotone R_m par la relation : $\frac{dR_{mn}}{dn} = -kD(R)$

R : est une variable homogène à une contrainte,

k : est une constante de proportionnalité dépendant du matériau,

R_{mn} : est la valeur instantanée de la résistance qui décroît et passe de R_{m0} à R_{mNr} .

- Pour respecter l'existence d'une limite de fatigue et tenir compte des contraintes de niveau inférieur à la limite d'endurance (la contrainte au-dessous de laquelle le matériau peut supporter un nombre infini de cycles de sollicitations), le dommage s'écrit par:

$$D(R) = \langle R - \sigma_D \rangle^p$$

p : exposant, qui est une constante du materiau ; elle est égale à 1

si $R - \sigma_D \leq 0$ donc $R < \sigma_D$

si $R - \sigma_D > 0$ donc $R = \sigma_D$

- Quel que soit le nombre n de cycles appliqués, la limite d'endurance instantanée σ_D est proportionnelle à la résistance R_{mn} : $\sigma_D = CR_{mn}$

C : est une constante empirique.

Les conditions aux limites sont : $\begin{cases} \text{si } n = 0 \Rightarrow R_{mn} = R_{m0} = R_u \\ \text{si } n = N_r \Rightarrow R_{mn} = R_{mNr} = \sigma \end{cases}$

R_u : est la résistance maximale à la traction monotone,

σ : est l'amplitude de la contrainte appliquée (limite de fatigue).

- En traction alternée symétrique, la déformation plastique se produit dès le 1^{er} cycle appliqué, et elle peut atteindre une valeur supposée critique pour créer un dommage. La partie OA de la courbe (figure 4) représente une déformation élastique par analogie avec la déformation élastique monotone.

La partie AB, également élastique mais avec un module différent de celui de OA, correspond aux sollicitations d'amplitude supérieure à la limite d'endurance est supposée être une mesure possible du dommage en fatigue.

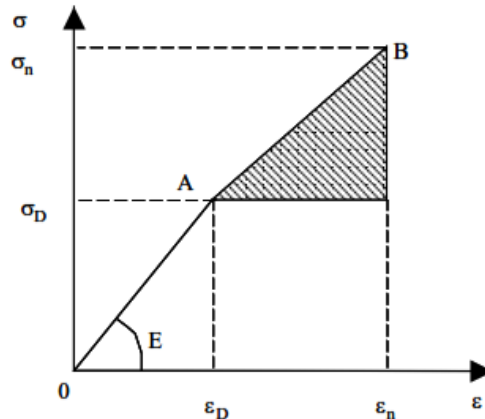


Figure 4 : Courbe contrainte-déformation ; l'aire de la zone hachurée

- Dans la zone située sous le segment AB, il existe de petites déformations plastiques, assez critiques pour engendrer la ruine du matériau. Ce dommage est supposé proportionnel à l'énergie correspondant à l'aire hachurée : $\frac{dR_{mn}}{dn} = -k \int_{\epsilon_D}^{\epsilon} (R - \sigma_D) d\epsilon = -K \int_{\sigma_D}^{\sigma} (R - \sigma_D) dR$

K : un nouveau coefficient de proportionnalité.

- la limite d'endurance σ_D et le coefficient **K** restent constants durant le n^{ième} cycle, l'intégration de l'équation : $\frac{dR_{mn}}{dn} = -K' \cdot (\sigma - \sigma_D)^2$ ou $\frac{dR_m}{dn} = -k (\sigma - \sigma_D)^2$

En utilisant la relation $\sigma_D = C R_{mn}$, il vient que ; $\frac{dR_m}{dn} = -k (\sigma - C R_{m,n})^2$

Ou $\frac{d\sigma_{D,n}}{dn} = -k \cdot C \cdot (\sigma - \sigma_{D,n})^2$

N.B : $\sigma - \sigma_{D,n} = 0$ quand $\sigma < \sigma_{D,n}$

- Si **$C = 0$** (pas de limite d'endurance), l'équation $\sigma_{D,n} = C \cdot R_{m,n}$ s'applique avec les conditions aux limites suivantes : $R_{m,n} = R_u$ quand $n = 0$

$$R_{m,n} = \sigma \text{ quand } n = N_r$$

- Si **$C > 0$** , l'équation est applicable avec les conditions: $\sigma = \sigma_D$ quand $n = 0$

N_r : est le nombre de cycles à rupture.

$$\sigma_D = C \sigma / R_u \text{ si } n = N_r$$

Dans le cas où l'amplitude des contraintes est constante, la solution de l'équation $\frac{d\sigma_{D,n}}{dn} = -k \cdot C \cdot (\sigma - \sigma_{D,n})^2$

Devient comme suit : $k.n = \frac{1}{\sigma - \sigma_{D0}} - \frac{1}{\sigma - \sigma_{D,n}}$

Dans cette équation, la limite d'endurance est exprimée comme une fonction de l'amplitude des contraintes et du nombre de cycles appliqués. On obtient une l'équation de la courbe de Wöhler avec les conditions suivantes : $\sigma_D = C \cdot \sigma$

Pour $n = Nr$: $k.Nr = \frac{1}{\sigma - \sigma_{D0}} - \frac{1}{\sigma(1-C)}$

La limite de fatigue instantanée peut être calculée à travers l'expression suivante :

$$\gamma_{D,n} = \gamma \left[1 - \frac{1}{\frac{\beta}{1-C} + \frac{\gamma}{\gamma-1}(1-\beta)} \right]$$

$$\gamma_{D,n} = \frac{\sigma_{D,n}}{\sigma_{D0}} : \text{est le rapport d'amplitude de contrainte}$$

$$\beta = \frac{n}{Nr} : \text{est la fraction de vie et } \gamma = \frac{\sigma}{\sigma_{D0}} ; C = \frac{\sigma_{D0}}{Ru}$$

Au moment de la rupture on suppose la limite d'endurance $\sigma_{D,Nr}$ nulle au lieu de $\sigma_{D,Nr} = C \cdot \sigma$

la relation $\gamma_{D,n}$ devient : $\gamma_D = \frac{\gamma(1-\beta)}{\gamma-\beta}$

7. La loi de bilinéaire de Manson et Freche et Ensign (1967).

La loi d'endommagement de Manson et al, est basé sur les deux phases du le processus d'endommagement. La phase d'amorçage de fissure (phase I), et la phase de propagation de fissure (phase II). Comme chacune des deux phases comprend sa propre fonction de dommage linéaire, le principe est d'appliquer une règle linéaire de cumul du dommage à chacune des deux phases : c'est la règle de double linéarité du dommage. L'objectif principal de la loi proposé est de corriger l'insuffisance de la loi de Miner vis à vis de l'effet de l'ordre d'apparition des cycles (effet de séquence). Les hypothèses sont les suivantes :

- L'expression analytique proposée s'exprime en termes de durée de vie totale Nr_i pour chaque niveau de contrainte σ_i .

$(\Delta Nr)_i$ est le nombre de cycles pour propager une fissure depuis l'amorçage jusqu'à la rupture à un niveau de contrainte σ_i .

Nr_i la durée de vie totale (nombre total de cycles, pour la phase d'amorçage et de propagation, sous le niveau σ_i de contrainte ou ϵ_i de déformation) s'exprime selon :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{si } N_{ri} > 730 \text{ cycles} & (\Delta N)_{ri} = p N_{ri}^b \\ \text{si } N_{ri} < 730 \text{ cycles} & (\Delta N)_{ri} = N_{ri} \end{array} \right\}$$

b et p , ainsi que le seuil de **730cycles**, sont des constantes de la loi propres au matériau.

Les valeurs expérimentales de ces constantes, pour les d'acier utilisées par **Manson**, sont : $b = 0,6$ et $p = 14$. Ainsi ;

Période de propagation de fissure : $(\Delta N_r)_i = P.N_{ri}^{0,6}$

Période d'amorçage de fissure : $N_{0i} = N_{ri} - (\Delta N)_{ri}$ donc : $N_{0i} = N_{ri} - P \cdot N_{ri}^{0,6}$

P : est un coefficient empirique, défini expérimentalement (valeur retenue : $P = 14$),

N_{0i} : est le nombre de cycles requis pour créer une fissure effective à un niveau de contrainte donné (σ_i),

Dans le cas d'une durée de vie totale très courte et (< 730 cycles), la phase d'amorçage est négligée. L'apparition d'une fissure est supposée immédiate dès le premier cycle : $N_{0i} \approx 0$. En particulier pour une séquence d'amplitude variable, la fissure est considérée comme amorcée dès lors qu'un cycle pour lequel la durée de vie du matériau est < 730 cycles est rencontrée.

- **Cumul de dommage** : la loi bilinéaire de Manson distingue les phases d'amorçage et de propagation :

la phase I (amorçage) : $\sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{N_{0i}} = 1$ d'où $D_I = \sum (n_i / N_{0i}) = 1$

si $N_{ri} > 730$ cycles, alors ; $N_{0i} = N_{ri} - 14N_{ri}^{0,6}$

si $N_{ri} < 730$ cycles, alors ; $N_{0i} \approx 0$

la phase II (propagation) : $\sum_{i=1}^{i=p} \frac{n_i}{(\Delta N)_{ri}} = 1$ d'où $D_{II} = \sum (n_i / (\Delta N)_{ri}) = 1$

si $N_{ri} > 730$ cycles, alors ; $(\Delta N)_{ri} = N_{ri} - 14N_{ri}^{0,6}$

si $N_{ri} < 730$ cycles, alors ; $(\Delta N)_{ri} = N_{ri}$

n : est le nombre de cycles appliqués à chaque niveau de contrainte

Application de la loi de Manson à un chargement à deux niveaux de contraintes :

Nous disposons de deux niveaux de contrainte, σ_1 de nombre de cycles à rupture N_{r1} et σ_2 , de nombre de cycles à rupture N_r . Il s'agit de calculer le nombre de cycle n_2 qui peut être appliqué au second niveau après l'application de n_1 cycles au niveau σ_1 , soit une fraction de vie n_1 / N_{r1} en préalable. On calcule les valeurs de $(\Delta N_r)_1$ et $(\Delta N_r)_2$ à l'aide de l'équation $(\Delta N_r)_i = P \cdot N_{ri}^{0,6}$ et celles de N_{01} et N_{02} avec l'équation $N_{0i} = N_{ri} - P \cdot N_{ri}^{0,6}$. La figure. 5. illustre l'évolution des fractions de vie r_1 et r_2 à la rupture enregistrée pour un chargement à deux niveaux de contraintes, Le premier étant d'amplitude plus élevée que le second (chargement " Haut-Bas ").

Pour $N_r > 730$ cycles :

- si $n_1 \geq N_{01}$, la durée de vie résiduelle en cycles de niveau 2 est : $n_2 = \left[1 - \frac{n_1 - N_{01}}{(\Delta N_r)_1} \right] (\Delta N_r)_2$

- si $n_1 < N_{01}$, la phase d'amorçage de fissure n'est pas complète. Le nombre de cycles de niveau 2 est donc :

$$n_2 = \left[1 - \frac{n_1}{N_{01}} \right] N_{02} + (\Delta N_r)_2$$

Pour $N_r < 730$ cycles :

il n'y a pas de période d'amorçage de fissure. (d'après les hypothèses)

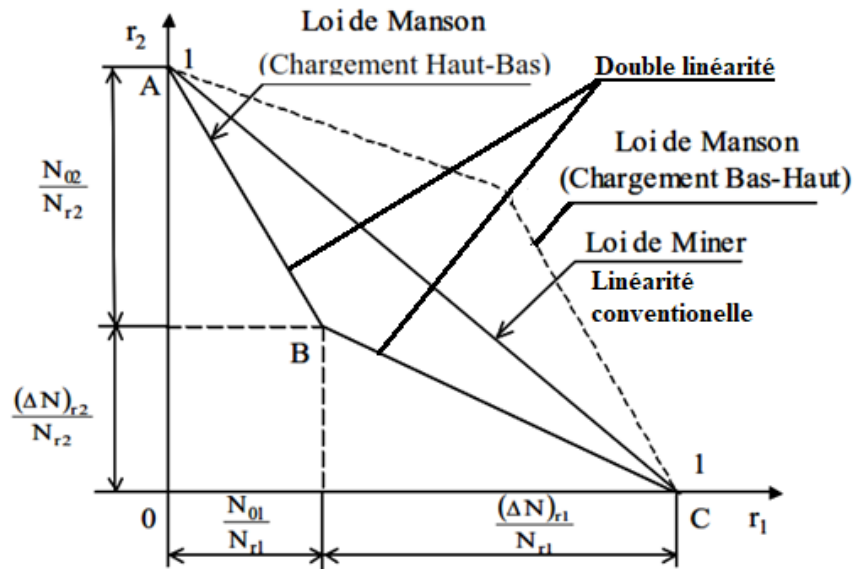


Figure 5 : Cumul du dommage selon la loi de Manson

Le segment de droite AB correspond à un nombre de cycles au premier niveau inférieur à celui correspondant à l'amorçage d'une fissure à ce niveau ($n_1 < N_{0i}$). Le bloc de cycles du second niveau comprend alors une partie qui permet d'atteindre l'amorçage puis d'effectuer la propagation de la fissure jusqu'à rupture. Le segment de droite BC correspond au cas où le nombre de cycles n_1 du premier niveau est supérieur au nombre de cycles à l'amorçage de ce niveau ($n_1 > N_{0i}$). La fraction de vie du second niveau correspond donc uniquement à une phase de propagation. Le point B intersection des deux parties linéaires du diagramme, est le point particulier pour lequel le bloc de cycles du premier niveau a permis de réaliser l'amorçage de la fissure uniquement et le second bloc (second niveau) celle de la propagation.

Sur la figure. 5. est également décrite l'évolution bilinéaire du cumul de dommage dans le cas d'un chargement Bas-Haut (traits pointillés). Il se situe au-dessus de la droite de Miner.

Généralement les expressions analytiques de la fraction de vie r_2 s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & * \text{ pour } N_{r1} > 730 \text{ cycles : } \begin{aligned} & \text{si } n_1 < N_{01} & n_2 &= \left(1 - \frac{n_1}{N_{01}}\right) N_{02} + (\Delta N)_{r2} \\ & \text{si } n_1 = N_{01} & n_2 &= (\Delta N)_{r2} \\ & \text{si } n_1 > N_{01} & n_2 &= \left(1 - \frac{n_1 - N_{01}}{(\Delta N)_{r1}}\right) (\Delta N)_{r2} \end{aligned} \\
 & * \text{ pour } N_{r1} < 730 \text{ cycles : } n_2 = \left(1 - \frac{n_1}{N_{r1}}\right) (\Delta N)_{r2}
 \end{aligned}$$

8. La loi de Bui Quoc, Bazergui et Biron (1971) :

A la base des différentes théories d'endommagement de fatigue disponibles à l'époque, ils ont voulu suggérer une nouvelle approche de calcul. C'est la théorie unifiée, applicable aux expérimentations effectuées dans des conditions de contrôle de contrainte ou de déformation

(i.e à contrainte ou à déformation imposée). La loi d'endommagement de Bui Quoc et al supporte les hypothèses suivantes:

- L'endommagement d'un matériau conduit à un abaissement de sa limite d'endurance σ_D et de sa résistance ultime R_u en traction.
- L'évolution du dommage est intimement liée au niveau de contrainte appliquée.
- L'endommagement évolue continûment dans le même sens que celui de la croissance des fissures de fatigue macroscopiques.
- Il existe une relation entre la valeur instantanée de la limite d'endurance et celle de la résistance en traction comme suggéré par Gatts selon laquelle, pour des contraintes au-dessus de la limite d'endurance l'endommagement par fatigue est une fonction puissance de la forme :

$$\gamma_D = (\gamma_I / \gamma_u)^m$$

Avec $\gamma_D = \sigma_D / \sigma_{D0}$, $\gamma_u = R_u / \sigma_{D0}$ et $\gamma_I = \sigma_I / \sigma_{D0}$

σ_{D0} : est la limite d'endurance du matériau vierge,

σ_D : est la limite d'endurance instantanée du matériau (après n cycles),

σ_I : est la valeur instantanée de la résistance en traction monotone du matériau,

R_u : est la résistance maximale du matériau en traction monotone,

M : est une constante empirique supérieure à l'unité.

- Ils relient la variation d'endommagement et la limite d'endurance réduite (comme la loi de Henry) $\Delta D = -\mu \cdot \gamma_{D,n}$

$D_{n,\gamma}$ Varie de la valeur 1, pour le matériau vierge, jusqu'à la valeur critique, $\gamma_{D,c}$ pour l'état ultime à la rupture,

μ : Coefficient qui permet d'obtenir la valeur unité pour le dommage à la rupture, dépend uniquement de la contrainte appliquée.

Le processus d'endommagement peut être supposé continu. Sa vitesse de croissance est représentée par la forme différentielle suivante :

$$\frac{dD}{dn} = -\mu \cdot \left(\frac{d\gamma_{D,n}}{dn} \right)$$

Elle est valide pour des niveaux de contrainte correspondant à un nombre de cycles à rupture pas trop faible, de l'ordre de $N_r = 50$.

- Pour des contraintes maximales supérieures à la limite d'endurance $\gamma_{max} > \gamma_D$, le taux de variation de la limite d'endurance peut être lié aux paramètres de chargement par la relation :

$$\frac{d\gamma_D}{dn} = -\frac{1}{K} \gamma_{max}^b \left(\frac{\gamma_{max} - \gamma_{min}}{\gamma_{max}} \right) (\gamma_{max} - \gamma_D)^2$$

Avec $\gamma_{max} = \sigma_{max} / \sigma_{D0}$ et $\gamma_{min} = \sigma_{min} / \sigma_{D0}$

σ_{max} : est la contrainte maximale et σ_{min} la contrainte minimale.

K et b : sont des constantes du matériau, et n le nombre de cycles appliqués.

γ_D : est la limite d'endurance adimensionnelle du matériau après n cycles de sollicitation,

γ_{D0} : est la limite d'endurance adimensionnelle du matériau du matériau vierge

$\gamma_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{D0}}$, $\gamma_{\min} = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{D0}}$:sont les contraintes cycliques adimensionnelles maximale et minimale respectivement sur un cycle de sollicitation.

$$\text{Les conditions aux limites sont : } \begin{cases} \text{si } n = 0 \Rightarrow \gamma_D = \gamma_{D0} = 1 \\ \text{si } n = N_r \Rightarrow \gamma_{DC} = (\gamma_{\max}/\gamma_u)^m \\ \text{avec } \gamma_u = R_u/\sigma_{D0} \end{cases}$$

N_r : est le nombre de cycles à rupture,

m : constante dépendant du matériau. ($m > 6$ pour les aciers).

Pour la seconde condition aux limites **$n = N_r$** , la limite d'endurance critique n'est donc pas nulle. Les auteurs observent que cette valeur est proche de zéro pour les bas niveaux de contrainte, pourvu que la constante m soit suffisamment grande ($m \geq 6$). Il est raisonnable dans ces conditions de supposer que l'équation $\frac{d\gamma_{D,n}}{dn}$ est valable jusqu'à rupture.

En fatigue sous contrainte contrôlée (grand nombre de cycles) ils adoptent la solution suivante à l'équation :

$$n = \frac{K}{1-R} \frac{1}{\gamma_{\max} - 1} \left[\frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - \gamma_{D0}} \right]$$

R : Rapport des contraintes (**$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$**)

K : constante prend la valeur de **$K\sigma$** pour les sollicitations à contraintes imposées.

La courbe de fatigue : En intégrant les conditions aux limites dans l'équation **n** l'équation de la courbe de fatigue sous contrainte cyclique maximale devient :

$$N_r = \frac{K}{1-R} \frac{1}{\gamma_{\max}^b} \left[\frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - (\gamma_{\max}/\gamma_u)^m} \right]$$

La courbe de référence est celle dans le cas de sollicitations alternées symétriques (**$R = -1$**), elle donne :

$$N_r = \frac{K}{2} \frac{1}{\gamma_{\max}^{b^*}} \left[\frac{1}{\gamma_{\max} - 1} - \frac{1}{\gamma_{\max} - (\gamma_{\max}/\gamma_u^*)^m} \right] \text{ avec } \gamma_u^* = \frac{\sigma_u}{\sigma_e}$$

σ_e : limite d'élasticité du matériau,

b^* : coefficient du matériau pour une sollicitation alternée symétrique.

Les coefficients b et b^* sont liés par la relation :

$$\frac{b}{b^*} = \frac{\gamma_u^* - 1}{\gamma_u - 1} \left(\frac{\gamma_u}{\gamma_u^*} \right)^{1/2}$$

La loi de Bui Quoc lie la limite d'endurance γ_D à la fraction de vie **$r = n / N_r$** , pour un niveau de contrainte $\gamma_{\max}$:

$$\gamma_D = \gamma_{\max} - \frac{1}{(1-r)/(\gamma_{\max} - 1) + r/\left[\gamma_{\max} - (\gamma_{\max}/\gamma_u)^m\right]}$$

$m=8$ a été retenue pour les aciers doux et les alliages d'aluminium comme valeur adéquate à partir de résultats expérimentaux.

Résistance résiduelle σ_r en traction : C'est la résistance en traction d'une éprouvette après interruption d'un essai de fatigue sur la dite éprouvette. σ_r est la valeur de σ_t (valeur instantanée de la résistance en traction monotone du matériau) à l'instant où l'essai est stoppé. En combinant les relations $\gamma_{D,n} = \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_u}\right)^m \gamma_D$, et en utilisant $\gamma_t = \frac{\sigma_r}{\sigma_{D0}}$

La relation de la résistance résiduelle en fonction de la fraction de vie s'écrit :

$$\frac{\sigma_r}{R_u} = \left[\gamma_{\max} - \frac{1}{\frac{1-r}{\gamma_{\max}-1} + \frac{r}{\gamma_{\max} - \left(\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u}\right)^m}} \right]^{1/m}$$

La variable d'endommagement : s'écrit $D = \frac{1-\gamma_{D,n}}{1-\gamma_{Dc}}$

En introduisant les équations $\gamma_{Dc} = \left(\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u}\right)^m$ et $\gamma_D = \gamma_{\max} - \frac{1}{(1-r)/(\gamma_{\max}-1) + r/[\gamma_{\max} - (\gamma_{\max}/\gamma_u)^m]}$

$$D = \frac{r}{r + (1-r) \cdot \frac{\gamma_{\max} - \left(\frac{\gamma_{\max}}{\gamma_u}\right)^m}{\gamma_{\max} - 1}}$$

La loi d'endommagement continu de Lemaitre et Chaboche (1974) :

Rabotnov et Kachanov ont élaborées les théories de l'endommagement continu pour expliquer le processus de dégradation continue du matériau en fluage, cette théorie a été étendue après à l'endommagement par fatigue. Chaboche en 1974 proposa son modèle dans le but de permettre la prévision des effets de cumul non linéaire de l'endommagement utilisable dans des cas complexes. Le paramètre d'endommagement est introduit par référence à un essai de fatigue en traction compression et son évolution est mesurée expérimentalement.

Pour des essais de fatigue à amplitude constante et dans le domaine des faibles nombres de cycle à rupture (inférieurs 10^4 cycles), les auteurs supposent les hypothèses suivantes:

- Les sollicitations sont supposées périodiques.
- Pour des essais de fatigue à amplitude de contrainte constante dans le domaine des faibles nombres de cycles à rupture ($<10^4$ cycles), il existe une loi cyclique $\Delta \varepsilon_p = f(\Delta \sigma)$ liant les paramètres mécaniques au cycle stabilisé, applicable quand la fréquence de la sollicitation est suffisamment élevée pour éliminer les effets de viscosité.

$\Delta \varepsilon_p$: est l'amplitude de déformation plastique au cycle stabilisé

σ_a : est l'amplitude des contraintes,

- La loi cyclique reste valable durant tout l'essai, à condition de remplacer l'amplitude de $\Delta\sigma$ la contrainte nominale par une amplitude effective : $\Delta\sigma_{\text{eff}} = \frac{\Delta\sigma}{1-D}$

Dans la pratique, la loi cyclique est modélisée par une fonction puissance telle que :

$$\Delta\varepsilon_p = \left[\frac{\sigma_a}{k_c (1-D)^{m_c}} \right]$$

m_c et k_c : sont des coefficients qui dépendent du matériau.

- La courbe de dommage dépend de l'amplitude de la sollicitation. Un endommagement important est décelable plus tôt en termes de fraction de durée de vie dans les essais à haut niveau de contrainte que dans les essais à faible niveau. La courbe d'endommagement n'étant pas unique, le cumul de l'endommagement ne peut être linéaire comme l'illustre la figure 6. En appliquant les hypothèses précédentes, lorsque le dommage D est non-nul, une expression permet de le calculer en fonction du nombre de cycles appliqués, à partir de la mesure de $\Delta\varepsilon_p$:

$$D = 1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon_p^*}{\Delta\varepsilon_p} \right)^{\frac{1}{m_c}}$$

$\Delta\varepsilon_p^*$: est l'amplitude de déformation plastique au cycle stabilisé pour lequel on suppose $D = 0$.

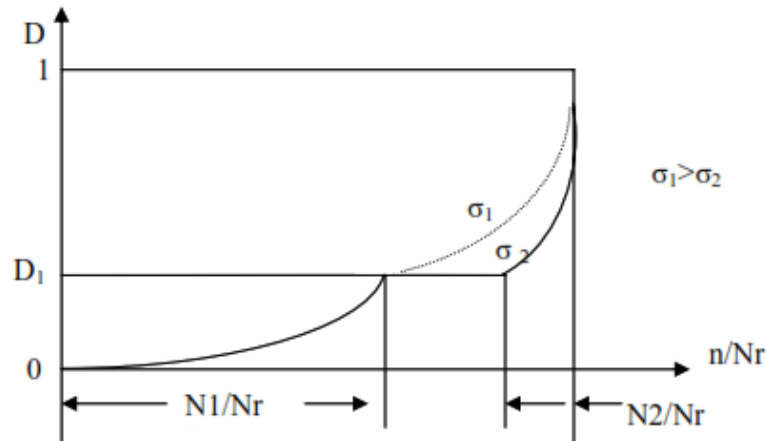


Figure 6. Cumul de dommage pour des essais à deux niveaux de contrainte.

Modèle de Chaboche : établit une loi d'endommagement sous sa forme différentielle, qui permet de rendre compte d'un certain nombre de phénomènes, en particulier des effets de cumul non linéaire du dommage:

$$\frac{dD}{dn} = f(\sigma_a, \sigma_m, h, F_r, T, D)$$

σ_a : amplitude du cycle de contraintes,

σ_m : contrainte moyenne du cycle,

h : paramètre d'histoire qui peut rendre en compte des modifications des propriétés du matériau par une sollicitation mécanique préalable,

F_r : fréquence de la sollicitation,

T : température.

h , F_r et T sont supposés constants et connus. Ils définissent les conditions initiales et les conditions de l'essai de fatigue.

Les paramètres du chargement sont la contrainte maximale et la contrainte moyenne de chaque cycle. La loi de dommage s'exprime ainsi : $dD = f(\sigma_{\max}, \sigma_m, D)dn$

La fonction f a des variables inséparables $\sigma_{\max}$ et D dans le but de décrire le cumul de dommage non linéaire.

- L'état d'endommagement du matériau dépend de la contrainte maximale $\sigma_{\max}$ et la contrainte moyenne σ_m de chaque cycle, l'histoire du chargement (Les paramètres tels que la fréquence de la sollicitation, la température et un paramètre) sont supposés constants et connus. Ces derniers définissent les conditions initiales et finales du problème.

L'analyse des résultats expérimentaux suggère qu'une loi de dommage telle que la vitesse d'endommagement soit nulle à l'origine, infinie à la rupture et serait proche de la réalité.

- l'amorçage et la propagation des microfissures se manifestent par une évolution continue du dommage, traduite par l'équation différentielle de la variable de dommage $D=0$ à l'état initial (matériau vierge) et $D=1$ à la rupture (quand une fissure macroscopique est amorcée):

$$\frac{dD}{dn} = \left[1 - (1-D)^{\alpha(\sigma_a)} \right] \left[\frac{\sigma_a}{M(1-D)} \right]^\beta$$

β : est un exposant positif,

$\alpha(\sigma_a)$: est une fonction de l'amplitude de la contrainte nominale, à valeurs comprises entre 0 et 1,

M : un coefficient dépendant de la contrainte moyenne : $M = M_0(1-b\sigma_m)$

Avec $M_0 = B[a(\beta+1)]^{1/\beta}$

a , et B : sont des constantes du matériau dépendant de la température,

σ_D : la limite d'endurance courante du matériau

b : un coefficient matériau qu'on peut déterminer à partir de la pente du diagramme de Haigh en traction, modélisé par : $\sigma_D = \sigma_m + \sigma_{D0}(1-b\sigma_m)$ (ou $b = 1/R_u$ d'après),

α : une fonction définie par : $\alpha = 1 - a \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_D(\sigma_m)}{R_u - \sigma_{\max}} \right)$ ou s'écrit $\alpha = 1 - a \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_1}{R_u - \sigma_{\max}} \right)$

La notation $\langle X \rangle$ signifie : $X = 0$ si $X \leq 0$ et $X = X$ si $X > 0$ (finalement $0 \leq \alpha \leq 1$)

L'intégration de l'équation dD , pour $\sigma_{\max}$ et σ_m constantes, donne l'expression suivante de la durée de vie en fatigue :

$$N_r = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_m}{M(\sigma_m)} \right)^\beta$$

Dans le cas d'une sollicitation à deux niveaux de contrainte, la fraction de vie au second

niveau est donnée par : $\frac{n_2}{N_{r2}} = 1 - \left(\frac{n_1}{N_{r1}} \right)^p$ avec $p = \frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} = \frac{1-\alpha(\sigma_{\max 2}, \sigma_{m2})}{1-\alpha(\sigma_{\max 1}, \sigma_{m1})}$

En prenant en compte les interactions des différents types d'endommagement, on remplace la variable D par la fonction $1 - (1-D)^{\beta+1}$ dans l'équation dD , on obtient :

$$dD = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1} \right]^{\alpha(\sigma_{\max}, \sigma_m)} \left[\frac{\sigma_{\max} - \sigma_m}{M(\sigma_m)(1 - D)} \right] dn$$

$$\text{La durée de vie en fatigue à la rupture : } N_r = \frac{1}{(\beta+1)(1 - \alpha(\sigma_{\max}, \sigma_m))} \left(\frac{\sigma_{\max} - \sigma_m}{M(\sigma_m)} \right)^{-\beta}$$

$$\text{L'évaluation du dommage est : } D = 1 - \left[1 - \left(\frac{n}{N_r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right]^{\beta+1}$$

Pour des essais à deux niveaux de contraintes, la fraction de vie r_2 restant au second niveau peut être calculée en tenant compte des contraintes.

Calcul des restes du second ordre :

$$\text{1er cas : } \sigma_2 > \sigma_D \quad (\alpha < 1) : \frac{n_2}{N_{r2}} = 1 - \left(\frac{n_1}{N_{r1}} \right)^\eta$$

$$\text{Avec } \eta = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1} = \left(\frac{\sigma_{2\max} - \sigma_D(\sigma_{m2})}{\sigma_{1\max} - \sigma_D(\sigma_{m1})} \right) \left(\frac{R_u - \sigma_{1\max}}{R_u - \sigma_{2\max}} \right) = \frac{N_{r1}}{N_{r2}} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^\beta$$

σ_1 et σ_2 : les amplitudes des cycles de contrainte aux niveaux correspondants

2^{eme} cas : $\sigma_2 \leq \sigma_D \quad (\alpha = 1)$: Cas de situation incluant les sollicitations de niveau inférieur à la limite de fatigue. L'équation dD , en termes de contrainte sous le second niveau, s'écrit :

$$\frac{(1 - D)^\beta}{1 - (1 - D)^{\beta+1}} dD = \left(\frac{\sigma_{\max 2} - \sigma_{m2}}{M(\sigma_{m2})} \right)^\beta dn$$

n_2 : Le nombre de cycles résiduels est issu de l'intégration de l'équation précédente :

$$n_2 = -N_{r2} \left(\frac{\sigma_{\max 1} - \sigma_{m1}}{\sigma_{\max 2} - \sigma_{m2}} \right)^\beta \ln \left(\frac{n_1}{N_{r1}} \right)$$

Généralisation à plusieurs niveaux de contrainte :

Pour une succession de blocs de sollicitations de niveau σ_i , de durée n_i et de nombre de cycles à rupture N_{ri} , on distingue 2 cas :

1^{er} cas : pour les cycles d'amplitude supérieure à la limite d'endurance, la relation est :

$$\left[1 - (1 - D_i)^{\beta+1} \right]^{1-\alpha_i} = \left[1 - (1 - D_{i-1})^{\beta+1} \right]^{1-\alpha_{i-1}} + \frac{n_i}{N_{ri}}$$

Avec n_i cycles le second membre de cette relation est supérieur à 1, la rupture a lieu au cours du bloc i . Le nombre de cycles à rupture est alors :

$$N_r = n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} + N_{ri} \left[1 - \left[1 - (1 - D_{i-1})^{\beta+1} \right]^{1-\alpha_i} \right]$$

2^{eme} cas : pour les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance, on obtient :

$$1 - (1 - D_i)^{\beta+1} = \left[1 - (1 - D_{i-1})^{\beta+1} \right] \exp^{(\beta+1) \left(\frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{mi}}{M(\sigma_{mi})} \right)^\beta}$$

Extension aux cas de sollicitations multiaxiales :

La généralisation de la loi de Lemaitre et Chaboche consiste à utiliser simultanément :

$$dD = \left[1 - (1 - D)^{\beta+1} \right]^{\alpha(A_{II}, \sigma_{mH}, \sigma_{eq \max})} \left[\frac{\tilde{A}_{II}}{M(\sigma_{mH})} \right]^\beta dn$$

- L'anisotropie de la loi d'endommagement peut être exprimée à l'aide d'un critère de fatigue, par exemple le critère de Sines : $A_{II} = \frac{1}{2} \text{Max}_{t_0} \text{Max}_t J_2(\bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t_0))$

$$A_{II} \leq A_{II}^*(\sigma_{mH}) = \sigma_l(1 - 3b\sigma_{mH})$$

- Le critère tridimensionnel de limite d'élasticité, par exemple celui de Von Mises dans le domaine d'endurance illimitée :

$$\sigma_{eq} = J_2(\bar{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2}$$

- La loi unidimensionnelle qui permet de décrire l'évolution de l'endommagement en traction et les effets de cumul non linéaire par l'intermédiaire de la fonction α :

$$\alpha(A_{II}, \sigma_{mH}, \sigma_{eq \max}) = 1 - a \left\langle \frac{A_{II} - A_{II}^*(\sigma_{mH})}{R_u - \sigma_{eq \max}} \right\rangle \text{ et } M(\sigma_{mH}) = \sigma_{l0}(1 - 3b\sigma_{mH})$$

- L'amplitude de la contrainte effective tridimensionnelle : $\tilde{A}_{II} = \frac{1}{2} \text{Max}_{t_0} \text{Max}_t J_2(\bar{\sigma}(t) - \bar{\sigma}(t_0))$

Détermination des constantes β et $aM_0^{-\beta}$

L'équation de la courbe S-N du matériau, dans le cas d'une traction alternée symétrique ($\sigma_D = \sigma_{-l}$),:

$$N_{ri} = \left(\frac{1}{\beta + 1} \right) \left(\frac{1}{aM_0^{-\beta}} \right) \left(\frac{R_u - \sigma_{\max i}}{\sigma_{\max i} - \sigma_{-l}} \right) \frac{1}{\sigma_{\max i}^\beta}$$

On en déduit une expression logarithmique suivante :

$$\ln \left(N_{ri} \frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{-l}}{R_u - \sigma_{\max i}} \right) = -\beta \ln \sigma_{\max i} + \ln \left(\frac{1}{(\beta + 1)aM_0^{-\beta}} \right)$$

Dans le repère $\left(\ln \left(N_{ri} \frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{-l}}{R_u - \sigma_{\max i}} \right), \ln \sigma_{\max i} \right)$ cette équation peut être mise sous la

forme : $Ax_i + C = y_i$.

Remarque :

Chaque loi d'endommagement ne peut être utilisée en fait que dans les configurations pour lesquelles elle a été élaborée.

Seules les lois de Miner, de Manson et de Lemaitre et Chaboche sont applicables aux sollicitations quelconques d'amplitude variable par blocs, quel que soit le niveau des amplitudes des cycles de contraintes.

Les lois qui utilisent la variation de la limite d'endurance (loi de Gatts, loi de Henry et loi de Bui Quoc) et les courbes d'endommagement (loi de Freudenthal et loi de Subramanyan) ne sont pas applicables aux chargements comportant certains blocs de sollicitations d'amplitude inférieure ou égale à la limite d'endurance.

9. Loi d'Ellyin et al. 1984

Ellyin pense que la méthode basée sur les courbes S-N ne permet pas de décrire convenablement le processus d'endommagement des matériaux. Car pour des zones fortement déformées, l'amplitude de contrainte utilisée comme donnée d'entrée dans les calculs est une contrainte élastique fictive du fait des déformations plastiques rencontrées localement. Ils ont développé une loi ayant pour objectif de relier l'endommagement à l'énergie de déformation plastique durant le chargement cyclique, de considérer le cas où l'amplitude de déformation à une composante plastique tendant vers zéro afin de cerner les cycles de bas niveaux, de pouvoir distinguer également la phase d'amorçage de celle de propagation de fissure.

Ainsi la courbe S-N est transformée en une relation qui lie l'énergie de déformation totale au nombre de cycles à rupture N_r (courbe de vie) :

$$\Delta W_t = k N_r^\alpha \quad \text{pour } N_r < N_D \text{ (zone d'endurance limitée)}$$

$$\Delta W_t = \Delta W_D \quad \text{pour } N_r > N_D \text{ (zone d'endurance illimitée)}$$

k , α , ΔW_D et N_D : sont des constantes du matériau.

ΔW_D : est l'énergie de déformation en traction du matériau correspondant à une sollicitation qui n'occasionne pas de dommage perceptible et qui correspond en fait à la limite de fatigue du matériau. La courbe de vie est présentée à la figure 7 :

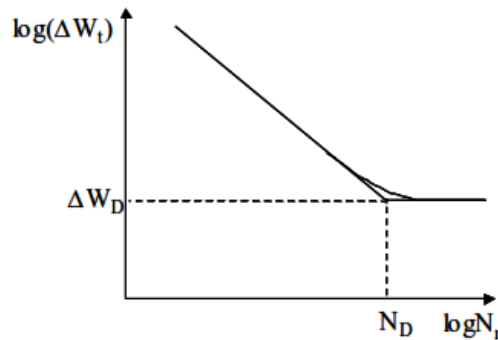


Figure. 7 : Définition de la courbe de vie du matériau

Les hypothèses d'Ellyin et al. Sont les suivantes :

- l'endommagement provenant d'une sollicitation cyclique est une fonction de l'énergie mécanique totale transmise au matériau s'écrit: $\Delta W_t = \Delta W_e + \Delta W_p$
 ΔW_t : La densité volumique de cette énergie de déformation par cycle de sollicitation
 ΔW_p : La densité volumique d'énergie de déformation plastique par cycle
 ΔW_e : La densité volumique d'énergie de déformation élastique;
- Si le matériau a un comportement de type Masing (Masing : l'étendue du domaine d'élasticité demeure constante quand l'étendue de déformation plastique imposée augmente), sa limite de fatigue est définie par la densité de l'énergie de déformation plastique suivante : $\Delta W_p = \frac{1-n'}{1+n'} \Delta \sigma \Delta \epsilon_p$
 $\Delta \sigma$: l'étendue de contrainte sur un cycle de sollicitation,
 n' : coefficient de durcissement en déformation cyclique du matériau,
 $\Delta \epsilon_p$: l'étendue de la déformation plastique par cycle : $\Delta \epsilon_p = 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2k'} \right)^{\frac{1}{n'}}$

k' : un coefficient de résistance du matériau.

La réponse cyclique s'écrit alors comme : $\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p$, donc $\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2k'} \right)^{1/n'}$

E : est le module d'élasticité longitudinale du matériau.

- à l'inverse, lorsque le comportement n'est pas de type Masing, le domaine d'élasticité varie avec l'étendue de la déformation plastique. Sa réponse cyclique s'écrit alors :

$$\Delta \varepsilon^* = \frac{\Delta \sigma^*}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma^*}{2k^*} \right)^{\frac{1}{n^*}}$$

- Si le matériau à un comportement qui n'est pas de type Masing, sa limite de fatigue est définie par la densité d'énergie de déformation plastique comme :

$$\Delta W_p = \frac{1-n^*}{1+n^*} (\Delta \sigma - \delta \sigma_0) \Delta \varepsilon_p + \delta \sigma_0 \Delta \varepsilon_p$$

$\delta \sigma_0$: est la variation du domaine élastique du matériau,

k^* et n^* : sont des coefficients d'écrouissage du matériau.

L'énergie de déformation totale absorbée par le matériau dont le comportement n'est pas de type Masing est, pour un cycle d'étendue de contrainte $\Delta \sigma$ et de valeur moyenne σ_m :

$$\Delta W_t = \frac{1}{2E} \left(\frac{\Delta \sigma}{2} + \sigma_m \right)^2 + \frac{1-n^*}{1+n^*} (\Delta \sigma - \delta \sigma_0) \Delta \varepsilon_p + \delta \sigma_0 \Delta \varepsilon_p$$

Lorsque le matériau a un comportement de type Masing, l'expression précédente se simplifie du fait de $n^* = n'$ et $\delta \sigma_0 = 0$

La loi de dommage et celle de son cumul, précisent que le processus d'endommagement du matériau en distinguant la phase d'amorçage de fissure de la phase de propagation. Les hypothèses retenues sont les suivantes :

- la limite d'endurance du matériau est définie par le couple $(N_D, \Delta W_D)$ de la courbe de vie, qui représente les coordonnées du point d'intersection de ses deux asymptotes oblique (endurance limitée) et horizontale (endurance illimitée) décrites par la figure 4.
- Le cumul de dommage est réalisé à l'aide d'une courbe d'isodommage inspirée du diagramme de French. Cette courbe d'isodommage est une droite passant par un point de la limite d'endurance réduite, de coordonnées $(N_D^*, \Delta W_D^*)$ et situé sur l'asymptote oblique de la courbe de vie (figure 8).

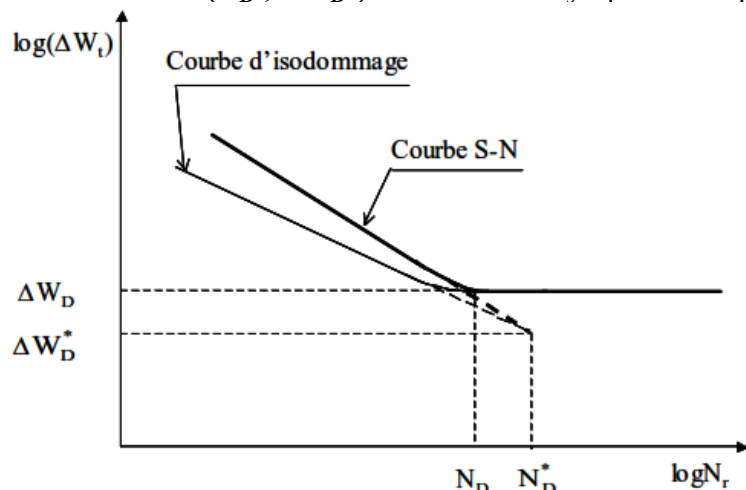


Figure 8 : Définition des courbes de vie et d'isodommage du matériau.