

IV. 1. COMPORTEMENT ÉLASTIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL

IV. 1. 1. MODULES EFFECTIFS

IV. 1. 1. 1. Concept d'homogénéisation

À une échelle suffisamment fine, tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes. Pour s'en convaincre, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules. Si les matériaux usuels de l'ingénieur devaient être caractérisés à cette échelle d'observation, la tâche serait insurmontable. Pour contourner cette difficulté, l'ingénieur introduit l'hypothèse de continuité de la matière. Cette hypothèse implique un concept de moyenne statistique, dans lequel la constitution réelle du matériau est idéalisée en considérant le matériau comme étant continu. Une fois le modèle de continuité admis, le concept d'homogénéité s'en déduit. Un milieu homogène est alors caractérisé par des propriétés identiques en chaque point.

Au niveau de l'ingénieur, le caractère d'hétérogénéité intervient chaque fois que les propriétés physiques ou mécaniques du matériau sont des fonctions du point. Les variations des propriétés peuvent être de deux types : soit continues, soit discontinues comme dans le cas des matériaux composites. Dans ce cas, les propriétés ponctuelles du matériau varient d'une manière discontinue aux interfaces de passage entre les diverses phases. Chaque phase est supposée être homogène et isotrope.

Dans le cas d'une phase 1 dispersée dans une phase 2 (figure IV.1), il existe généralement une dimension caractéristique de l'hétérogénéité. Par exemple, dans le cas d'un matériau composite à fibres, cette dimension sera la distance moyenne entre les fibres. Cette dimension est en fait une description idéalisée d'une répartition statistique au sein du matériau hétérogène réel. D'autre part, il existe généralement une échelle de dimension δ à laquelle les propriétés du matériau peuvent être moyennées avec une bonne approximation. Ceci signifie que, dans ce cas, les propriétés mesurées sur un échantillon de dimension δ sont indépendantes de l'endroit (du point) du matériau où a été prélevé l'échantillon. Dans le cadre d'un tel concept, le matériau peut alors être considéré comme étant effectivement homogène, et les problèmes de calculs des structures peuvent être résolus en considérant les propriétés moyennes mesurées à l'échelle δ . Dans le cas où il existe une telle échelle (intermédiaire entre l'échelle microscopique, celle des constituants, et l'échelle de la structure), on dit que l'on peut *homogénéiser* le matériau.

On parle alors d'*homogénéité macroscopique* (par opposition à l'échelle des constituants dite microscopique), ou d'*homogénéité statistique*. Le concept de rendre "homogène" un matériau "hétérogène" est appelé le concept d'*homogénéisation*.

Notons que l'alternative à ce concept serait de tenir compte de chaque région d'homogénéité, en analysant la continuité des contraintes et déplacements au passage de chaque interface. Si une telle approche est concevable dans son principe, elle est encore inaccessible aujourd'hui dans la pratique, compte tenu du nombre élevé d'interfaces à considérer (plusieurs milliers à plusieurs millions).

Toutefois, la diminution des temps de calculs et l'augmentation des capacités mémoires des ordinateurs en permettent une approche à une échelle de plus en plus fine.

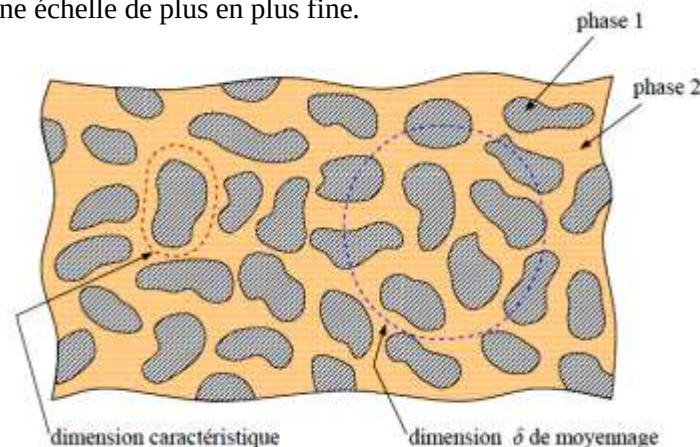


Fig. IV. 1 : Homogénéisation d'un matériau hétérogène.

IV. 1. 1. 2 Modules homogénéisés

Le concept d'homogénéisation étant introduit, il est maintenant possible d'exprimer les propriétés mécaniques homogénéisées du matériau hétérogène. Ces propriétés sont déterminées sur un élément de volume V de dimension δ . Cet élément de volume est appelé *élément de volume représentatif* du matériau. Des conditions de

contraintes et déformations étant imposées à la frontière de cet élément de volume, la contrainte moyenne (matrice des contraintes) sur le volume représentatif est définie par :

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{V} \int_V \sigma_i(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (\text{IV. 1})$$

et la déformation moyenne par :

$$\bar{\varepsilon}_j = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_j(x_k) dV, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (\text{IV. 2})$$

où σ_i et ε_j sont les éléments des matrices des contraintes et déformations au point x_k , et dV l'élément sont les éléments des matrices des contraintes et déformations au point x_k , et dV l'élément entourant le point x_k . Ces relations sont tout à fait générales et permettent d'explicitier les constantes de rigidité C_{ij} et de souplesse S_{ij} par les expressions :

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\varepsilon}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \quad (\text{IV. 3})$$

et

$$\bar{\varepsilon}_i = S_{ij} \bar{\sigma}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (\text{IV. 4})$$

C'est dans ce concept d'homogénéisation que seront par la suite considérées les constantes de rigidité et de souplesse.

Ainsi, pour déterminer les propriétés homogénéisées d'un matériau hétérogène, il est nécessaire de calculer la contrainte et la déformation moyennes sur le volume représentatif à l'aide de (IV. 1) et (IV. 2), puis d'en déduire les constantes de rigidité ou de souplesse à l'aide de (IV. 3) et (IV. 4). Si ce problème apparaît simple à résoudre dans son principe, il est en fait particulièrement complexe dans la pratique. En effet, pour appliquer les expressions (IV. 1) et (IV. 2), il est nécessaire de trouver au préalable les solutions exactes des champs des contraintes et des déformations, $\sigma_i(x_k)$ et $\varepsilon_j(x_k)$, en chaque point du matériau hétérogène. Ces solutions exactes ne peuvent être obtenues que dans le cas de modèles géométriques simples et idéalisés, et plus ou moins éloignés de la réalité.

IV. 1. 2. LOI DE HOOKE POUR UN COMPOSITE UNIDIRECTIONNEL

IV. 1. 2. 1 Constitution d'un matériau composite unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est constitué de fibres parallèles disposées dans une matrice (figure IV. 2a). Ce type de matériau constitue la configuration de base des matériaux composites à fibres, d'où l'importance de son étude. La cellule élémentaire d'un tel matériau peut être considérée, en première approximation, comme constituée (figure IV. 2b) d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice, à base circulaire ou mieux hexagonale. Nous reviendrons sur cet aspect aux paragraphes suivants. Cette cellule possède un axe de révolution, que nous noterons l'axe 1. Cette direction parallèle aux fibres est appelée direction longitudinale, et pour cette raison l'axe 1 est également noté l'axe L. Toute direction normale aux fibres est appelée direction transversale, et le composite est considéré comme étant isotrope transverse : il est isotrope dans le plan normal à la direction 1. Le plan transverse sera repéré par les directions 2 et 3, notées également T et T', ces directions étant équivalentes.

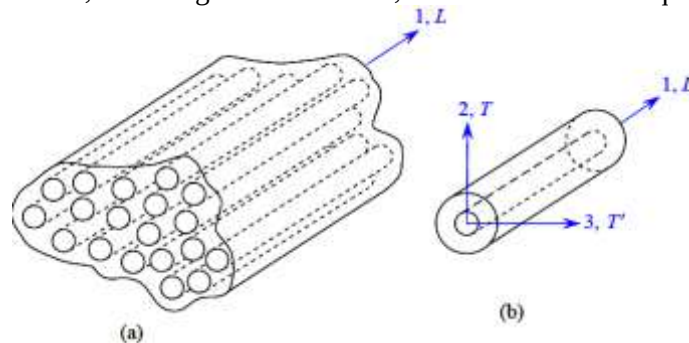


Fig. IV. 1: Composite unidirectionnel.

IV. 1. 2. 2 Matrices de rigidité et de souplesse

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel peut être décrit en introduisant soit les constantes de rigidité C_{ij} , soit les constantes de souplesse S_{ij} . Compte tenu des résultats établis auparavant, la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des deux formes matricielles, la forme directe :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 5})$$

ou la forme inverse :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (\text{IV. 6})$$

Les matrices de rigidité et de souplesse sont inverses l'une de l'autre, et le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel est donc caractérisé par 5 coefficients indépendants :

$$C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{23}, C_{66},$$

ou

$$S_{11}, S_{12}, S_{22}, S_{23}, S_{66}.$$

IV. 1. 3. MODULES DE L'INGÉNIEUR

Les modules de l'ingénieur sont les modules d'Young, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. Ces modules sont mesurés dans des essais simples tels que des essais de traction uniaxiale ou de cisaillement. Ces modules correspondent donc à une utilisation usuelle plus pratique que les constantes de rigidité ou de souplesse. Généralement, ces essais sont réalisés en imposant un champ connu de contraintes, puis en mesurant le champ des déformations. Il en résulte que les constantes de souplesse sont liées aux modules de l'ingénieur par des relations plus simples que celles exprimant les constantes de rigidité. Nous établissons ci-après ces diverses relations en considérant divers essais fondamentaux.

1. Traction longitudinale

Dans un essai de traction longitudinale, toutes les contraintes sont nulles, excepté la contrainte σ_1 :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, 6. \end{aligned}$$

En fonction des constantes de rigidité, les équations d'élasticité (IV. 5) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

De ces relations, nous tirons :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}} \varepsilon_1,$$

et

$$\sigma_1 = \left(C_{11} - 2 \frac{C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}} \right) \varepsilon_1.$$

(IV. 7)

Nous en déduisons le module d'Young longitudinal E_L et le coefficient de Poisson ν_{LT} dans une traction longitudinale :

$$E_L = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{LT} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}. \quad (\text{IV. 8})$$

En fonction des constantes de souplesse, les équations d'élasticité (IV. 6) s'écrivent dans un essai de traction longitudinale :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = S_{12}\sigma_1, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$E_L = \frac{1}{S_{11}}, \quad \nu_{LT} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}. \quad (\text{IV. 9})$$

2. Traction transverse

Dans un essai de traction transverse, par exemple selon la direction 2, le champ des contraintes imposé est :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &\neq 0, \\ \sigma_i &= 0, \quad i \neq 2. \end{aligned}$$

Les équations d'élasticité, en fonction des constantes de rigidité, s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \varepsilon_2, \\ \varepsilon_3 &= -\frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \varepsilon_2, \\ \sigma_2 &= \left[C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}} \right] \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (\text{IV. 10})$$

Nous en déduisons les expressions du module d'Young transverse E_T et des coefficients de Poisson ν_{21} et ν_{23} , notés respectivement ν_{TL} et $\nu_{TT'}$:

$$\begin{aligned} E_L &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\ \nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\ \nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}. \end{aligned} \quad (\text{IV. 11})$$

En introduisant les coefficients de souplesse, les équations d'élasticité en traction transverse s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2, \\ \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2, \\ \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0. \end{aligned}$$

Soit :

$$\varepsilon_1 = \frac{S_{12}}{S_{22}} \varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{S_{23}}{S_{22}} \varepsilon_2, \quad \sigma_2 = \frac{1}{S_{22}} \varepsilon_2, \quad (\text{IV. 12})$$

et

$$E_T = \frac{1}{S_{22}}, \quad \nu_{TL} = -\frac{S_{12}}{S_{22}}, \quad \nu_{TT'} = -\frac{S_{23}}{S_{22}}. \quad (\text{IV. 13})$$

Ces relations, comparées aux expressions (IV. 9), montrent que les coefficients E_L , E_T , ν_{TL} et ν_{LT} sont liés par la relation :

$$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}. \quad (\text{IV. 14})$$

3. Cisaillement longitudinal

Un essai de cisaillement longitudinal correspond à l'un des états de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_5 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \end{cases} \text{ si } i \neq 5, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \sigma_6 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \end{cases} \text{ si } i \neq 6.$$

Dans le deuxième cas, les équations d'élasticité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0, \\ \sigma_6 = C_{66}\varepsilon_6. \end{aligned} \quad (\text{IV. 15})$$

Nous en déduisons le module de cisaillement longitudinal G_{LT} :

$$G_{LT} = C_{66} \quad \text{ou} \quad G_{LT} = \frac{1}{S_{66}} \quad (\text{IV. 16})$$

Les directions T et T' étant équivalentes, nous avons :

$$G_{LT'} = G_{LT} = C_{66} \quad (\text{IV. 17})$$

4. Cisaillement transverse

Dans un essai de cisaillement transverse, le champ des contraintes s'exprime par :

$$\begin{aligned} \sigma_4 \neq 0, \\ \sigma_i = 0 \quad \text{si } i \neq 4. \end{aligned}$$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = 0 \quad \text{si } i \neq 4, \\ \sigma_4 = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})\varepsilon_4. \end{aligned}$$

Le module de cisaillement transverse $G_{TT'}$ s'écrit donc :

$$G_{TT'} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \quad \text{ou} \quad G_{TT'} = \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}. \quad (\text{IV. 18})$$

Le module de cisaillement transverse $G_{TT'}$ est lié au module d'Young transverse E_T et au coefficient de Poisson $\nu_{TT'}$, par l'expression :

$$G_{TT'} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT'})}. \quad (\text{IV. 19})$$

5. Compression hydrostatique latérale

L'essai de compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale permet également une caractérisation simple des matériaux. Dans un tel essai, les champs imposés des contraintes et déformations sont tels que :

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_3 = -p, \\ \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0, \\ \varepsilon_1 = 0, \\ \sigma_1 \neq 0, \end{aligned}$$

où p est la pression hydrostatique imposée. Les équations d'élasticité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= C_{12}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3, \\ -p &= C_{23}\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_3, \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0.\end{aligned}$$

De ces équations, nous tirons :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon_3, \\ -p &= (C_{22} + C_{23})\varepsilon_2, \\ \sigma_1 &= 2C_{12}\varepsilon_2.\end{aligned}$$

La dilatation surfacique es s'écrit :

$$e_s = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{2}{C_{22} + C_{23}} p.$$

D'où :

$$p = -\frac{1}{2}(C_{22} + C_{23})e_s$$

Nous en déduisons le module de compression latérale K_L sans déformation longitudinale:

$$K_L = \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}).$$

De même en fonction des constantes de souplesse, nous obtenons :

$$K_L = \frac{1}{2\left(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}}\right)}.$$

Le module K_L est relié au module d'Young longitudinal E_L et au coefficient de Poisson ν_{LT} par l'expression :

$$K_L = \frac{C_{11} - E_L}{4\nu_{LT}^2}.$$

6. Modules en fonction des constantes de rigidité et de souplesse

Nous reprenons ici la synthèse des résultats obtenus dans les paragraphes précédents. Dans ces paragraphes, nous avons introduit les modules de l'ingénieur, mesurés dans des états simples de contraintes et déformations :

- E_L et ν_{LT} , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction longitudinale ;
- E_T , ν_{TL} , ν_{TT} , le module d'Young et le coefficient de Poisson, mesurés dans un essai de traction transverse ;
- G_{LT} et G_{TT} , les modules de cisaillement mesurés respectivement dans des essais de cisaillement longitudinal et transverse ;
- K_L , le module de compression hydrostatique mesuré dans une compression hydrostatique latérale sans déformation longitudinale.

Nous avons vu que le comportement mécanique d'un matériau unidirectionnel est caractérisé par 5 grandeurs indépendantes. Parmi les modules de l'ingénieur, seuls 5 modules sont donc indépendants. Par exemple, nous avons les relations :

$$E_T = \frac{2}{\frac{1}{2K_L} + \frac{1}{2G_{TT}} + 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}},$$

$$G_{TT} = \frac{1}{2\left(\frac{2}{E_T} - \frac{1}{2K_L} - 2\frac{\nu_{LT}^2}{E_L}\right)},$$

$$\nu_{TT} = \frac{E_T}{2G_{TT}} - 1,$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}.$$

Les modules généralement utilisés dans la pratique sont : E_L , E_T , ν_{LT} , G_{LT} et $G_{TT'}$. Par contre, nous verrons que le module K_L peut être estimé par des relations analytiques en fonction des caractéristiques des constituants du composite, d'où l'intérêt de K_L .

Les expressions des modules en fonction des constantes de rigidité sont :

$$\begin{aligned} E_L &= C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, & \nu_{LT} &= \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \\ E_T &= C_{22} + \frac{C_{12}^2(C_{22} - 2C_{23}) + C_{11}C_{23}^2}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\ \nu_{TL} &= \frac{C_{12}(C_{23} - C_{22})}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, & \nu_{TT'} &= \frac{C_{12}^2 - C_{11}C_{23}}{C_{12}^2 - C_{11}C_{22}}, \\ G_{LT} &= C_{66}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}), & K_L &= \frac{1}{2}(C_{22} + C_{23}). \end{aligned}$$

Les expressions des modules en fonction des constantes de souplesse sont :

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{1}{S_{11}}, & \nu_{LT} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \\ E_T &= \frac{1}{S_{22}}, & \nu_{TL} &= -\frac{S_{12}}{S_{22}}, & \nu_{TT'} &= -\frac{S_{23}}{S_{22}}, \\ G_{LT} &= \frac{1}{S_{66}}, & G_{TT'} &= \frac{1}{2(S_{22} - S_{23})}, \\ K_L &= \frac{1}{2\left(S_{22} + S_{23} - 2\frac{S_{12}^2}{S_{11}}\right)}. \end{aligned}$$

7. Constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules

Les relations inverses, permettant de déterminer les constantes de rigidité et de souplesse en fonction des modules, s'obtiennent sans difficulté. Elles s'écrivent pour les constantes de rigidités :

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_L + 4\nu_{LT}^2 K_L, \\ C_{12} &= 2K_L \nu_{LT}, \\ C_{22} &= G_{TT'} + K_L, \\ C_{23} &= -G_{TT'} + K_L, \\ C_{66} &= G_{LT}. \end{aligned}$$

Pour les constantes de souplesse, les relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_L}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{LT}}{E_T}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_T}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{TT'}}{E_T}, \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{LT}}. \end{aligned}$$

8. Restrictions sur les modules

Les modules d'élasticité ont des valeurs qui doivent être en accord avec les principes physiques de base. Par exemple, une traction sur un solide ne peut entraîner qu'une déformation dans le sens de la traction, ou une compression hydrostatique ne peut produire une dilatation du matériau. De telles considérations imposent les conditions suivantes sur les valeurs des modules :

- les modules E_L , E_T , G_{LT} , $G_{TT'}$ et K_L sont positifs :

$$E_L, E_T, G_{LT}, G_{TT'}, K_L > 0,$$

- de l'expression (IV. 24), on déduit :

$$\nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L} < 1, \quad \text{soit} \quad |\nu_{LT}| < \sqrt{\frac{E_L}{E_T}},$$

- l'expression (IV. 33) combinée à (IV. 27) conduit à :

$$|\nu_{TL}| < \sqrt{\frac{E_T}{E_L}},$$

- l'expression (IV. 19) de $G_{TT'}$ conduit de même à :

$$-1 \leq \nu_{TT'} \leq 1.$$

IV. 1. 4. APPROCHES THÉORIQUES DE LA DÉTERMINATION DES MODULES D'ÉLASTICITÉ

IV. 1. 4. 1 Problème – Diverses approches

Le problème de la détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants : modules d'élasticité de la matrice et des fibres, fraction volumique de fibres, longueur des fibres, etc. Nous nous limiterons dans ce paragraphe à l'étude des composites à fibres continues. Les propriétés mécaniques des fibres et de la matrice seront caractérisées par leurs modules d'élasticité (modules d'Young et coefficient de Poisson), notés respectivement E_f , ν_f , E_m , ν_m . La résolution du problème posé n'est pas simple, et d'autre part la solution n'est pas unique.

La complexité du problème peut être illustrée simplement en considérant le problème de la détermination de l'arrangement des fibres dans le composite unidirectionnel. En effet, ce matériau est constitué de fibres continues parallèles dont la proportion est imposée et caractérisée par la fraction volumique V_f de fibres. Dans la pratique, il n'existe pas qu'une seule possibilité d'arrangement des fibres, mais une infinité de possibilités. Par exemple, si les fibres sont réparties régulièrement, elles pourront être réparties suivant une maille hexagonale (figure IV. 3), une maille carrée (figure IV. 4), une maille carrée décalée (figure IV. 5), etc. Les cellules élémentaires correspondantes sont reportées sur ces mêmes figures. La répartition des fibres suivant une maille carrée et celle suivant une maille carrée décalée ont la même cellule élémentaire. Ces deux répartitions diffèrent simplement par une rotation de 45° des directions principales des contraintes appliquées.

Dans la pratique, lors de la fabrication d'un matériau composite unidirectionnel, les fibres sont le plus souvent réparties d'une manière aléatoire, plutôt que suivant un arrangement régulier. La répartition observée peut alors être schématisée par la représentation de la figure IV. 6 : certaines fibres sont entièrement entourées de matrice, alors que d'autres peuvent se toucher. L'analyse théorique devra alors en tenir compte. D'un point de vue analytique, la solution réelle sera intermédiaire entre la solution trouvée dans le cas où toutes les fibres sont isolées les unes des autres, et la solution qui serait obtenue dans le cas où toutes les fibres seraient en contact.

L'ensemble des considérations précédentes montre donc les difficultés qui interviennent lors de l'approche théorique relative à la détermination des modules.

Les méthodes utilisées peuvent être classées suivant trois types : recherche de bornes (expressions limites) en utilisant les théorèmes variationnels de l'énergie, recherche de solutions exactes, approches semi-empiriques.

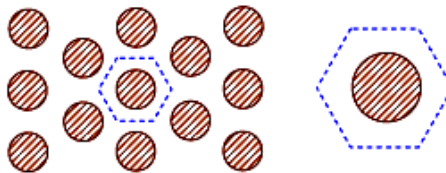


Fig. IV. 3. Arrangement hexagonal et cellule élémentaire.

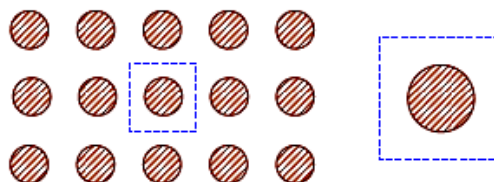


Fig. IV. 4. Arrangement carré et cellule élémentaire.

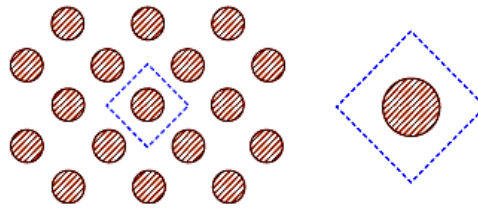


Fig. IV. 5. Arrangement carré décalé et cellule élémentaire.

Dans la recherche d'expressions limites, les théorèmes variationnels de l'énergie sont utilisés pour déterminer des bornes supérieures et inférieures des modules d'élasticité. Toutefois, ces approches conduisent dans bien des cas à des bornes trop éloignées pour être utilisées dans la pratique.

La recherche de solutions exactes est généralement complexe, et ne peut être abordée que dans le cas de schémas simplifiés (géométrie simplifiée de la cellule élémentaire, conditions simples imposées sur les frontières de la cellule, etc.). La résolution peut être abordée soit par une méthode analytique, soit par une méthode numérique de type éléments finis.

Enfin, les méthodes semi-empiriques permettent d'aboutir à des relations facilement adaptables à la pratique, mais ne permettent pas une réelle prédiction des propriétés. Elles restent donc descriptives.

Dans les paragraphes suivants, nous abordons certains éléments de ces diverses approches.

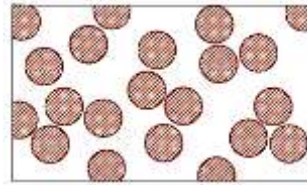


Fig. IV. 6. Représentation schématique de l'arrangement réel des fibres.

IV. 1. 4. 2 Bornes sur les modules d'élasticité

La détermination de bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie. Dans une approche déplacements, le théorème de l'énergie potentielle totale permet de trouver les bornes supérieures, alors que le théorème de l'énergie potentielle complémentaire permet, dans le cadre d'une approche contraintes, d'accéder aux bornes inférieures.

Parmi les divers travaux effectués dans ce cadre, nous citerons d'une part les travaux de Z. Hashin et R. Hill, effectués dans le cas de fibres de différents diamètres réparties au hasard (figure IV. 7) mais avec une proportion donnée en volume. D'autre part, Z. Hashin et B.W. Rosen ont effectué des travaux analogues dans le cas de fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal (figure IV. 8). L'écriture des expressions trouvées est facilitée en introduisant les modules de compression latérale (sans déformation longitudinale) K_m et K_f , respectivement de la matrice et des fibres. Ces modules sont liés aux modules de compressibilité (k_m , k_f) et aux modules de cisaillement (G_m , G_f) par les expressions :

$$K_i = k_i + \frac{G_i}{3}, \quad i = m, f.$$

Les modules (k_m , k_f) et (G_m , G_f) s'expriment eux-mêmes à l'aide des modules d'Young (E_m , E_f) et coefficients de Poisson (ν_m , ν_f) de la matrice et des fibres selon :

$$k_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)}, \quad i = m, f,$$

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad i = m, f.$$

Soit, finalement :

$$K_i = \frac{E_i}{2(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}, \quad i = m, f.$$

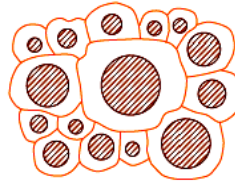


Fig. IV. 7. Arrangement aléatoire de fibres.



Fig. IV. 8. Arrangement hexagonal de fibres de mêmes diamètres.

En reprenant les notations introduites auparavant, les limites sur les cinq modules indépendants, obtenues par Z. Hashin et R. Hill sont données par les expressions :

$$\begin{aligned}
 K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{K_f - K_m} + \frac{1 - V_f}{K_m + G_m}} &\leq K_L \leq K_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{K_m - K_f} + \frac{V_f}{K_f + G_f}}, \\
 G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + (1 - V_f) \frac{K_m + 2G_m}{2G_m(K_m + G_m)}} &\leq G_{TT} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + V_f \frac{K_f + 2G_f}{2G_f(K_f + G_f)}}, \\
 G_m + \frac{V_f}{\frac{1}{G_f - G_m} + \frac{1 - V_f}{2G_m}} &\leq G_{LT} \leq G_f + \frac{1 - V_f}{\frac{1}{G_m - G_f} + \frac{V_f}{2G_f}}, \\
 \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} &\leq \frac{E_L - E_f V_f - E_m(1 - V_f)}{4(v_f - v_m)^2} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}, \\
 \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}} &\leq \frac{v_{LT} - v_f V_f - v_m(1 - V_f)}{(v_f - v_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right)} \leq \frac{V_f(1 - V_f)}{\frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_f}}.
 \end{aligned}$$

IV. 1. 4. 2 Solutions exactes

La recherche de solutions exactes s'effectue, dans le cas d'arrangements particuliers de fibres, par l'une des approches classiques de la mécanique des solides déformables. Nous présentons dans ce paragraphe une approche analytique (de type déplacements) du problème d'une cellule élémentaire cylindrique soumise à une traction. Le modèle géométrique retenu pour la cellule élémentaire (figure IV.9) est une fibre cylindrique de rayon r_f , entourée d'un cylindre de matrice r_m . Ces rayons sont reliés à la fraction volumique V_f de fibres par la relation :

$$V_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}$$

1. Problème préalable : cylindre soumis à une traction uniforme

Nous avons à résoudre au préalable le problème d'un cylindre de matériau homogène isotrope soumis à une traction uniforme (figure IV.10) dans la direction de l'axe du cylindre. La symétrie de révolution du problème impose l'utilisation des coordonnées cylindriques. Le champ des déplacements est le suivant :

$$\begin{aligned}u_r &= Ar + \frac{B}{r}, \\u_\theta &= 0, \\w &= Cz.\end{aligned}$$

défini en tout point M du cylindre, sauf au voisinage de l'axe ($r = 0$). Il est aisé de montrer que ce champ est solution du problème d'élasticité considéré si $r \neq 0$. En effet, le champ des déformations au point M s'écrit :

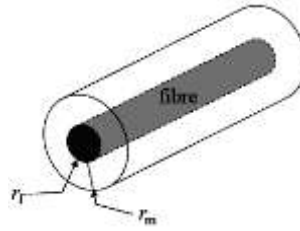


Fig. IV. 9 : Cellule élémentaire cylindrique d'un composite unidirectionnel.

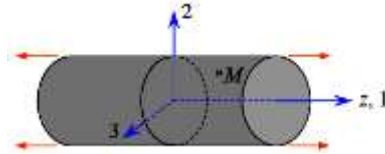


Fig. IV. 10 : Cylindre soumis à une traction uniforme.

$$\varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = A - \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} u_r = A + \frac{B}{r^2}, \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = C.\end{aligned}$$

On trouve sans difficulté, à partir de ces relations, que les conditions de compatibilité (6.18) sont vérifiées. Le champ des contraintes est ensuite déterminé à partir des relations d'élasticité. Soit :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 2K \left[A + \nu C - (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2K \left[A + \nu C + (1 - 2\nu) \frac{B}{r^2} \right] \\ \sigma_{zz} &= 2K [2\nu A + (1 - \nu) C].\end{aligned}$$

En introduisant le module de compression latérale défini en (IV.39). Ces expressions vérifient les équations d'équilibre. Il en résulte que le champ des déplacements introduit (IV.46) est bien la solution du problème d'élasticité considéré. Les constantes A, B et C sont à déterminer en fonction des conditions imposées sur les frontières.

2. Fibre entourée d'un cylindre de matrice dans le cas d'une traction

Nous étudions maintenant le problème de la cellule cylindrique (figure IV.9) soumise à une traction uniforme. Deux types de conditions peuvent être imposés :

- soit les déformations en traction sont imposées : $\varepsilon_{zz} = \varepsilon$ (IV.51)
- soit les contraintes en traction sont imposées : $\sigma_{zz} = \sigma$ (IV.52)

Nous étudions le cas où les déformations sont imposées. Le cas de contraintes imposées conduirait à des résultats similaires. Comme champs des déplacements dans la matrice et dans la fibre, nous adoptons des champs du type (IV.46).

Toutefois, le déplacement dans la fibre étant fini lorsque r tend vers zéro impose que le coefficient B soit nul dans la fibre. Nous retenons donc comme champ des déplacements :

- dans la fibre :

$$\begin{aligned}u_{rf} &= A_f r \\ u_{\theta f} &= 0, \\ w_f &= C_f z \theta\end{aligned}$$

- dans la matrice :

$$\begin{aligned}u_{rm} &= A_m r + \frac{B_m}{r}, \\ u_{\theta m} &= 0, \\ w_m &= C_m z.\end{aligned}$$

Les déformations dans la matrice et dans la fibre sont respectivement :

$$\varepsilon_{zzm} = C_m \text{ et } \varepsilon_{zzf} = C_f.$$

La condition de déformations longitudinales imposées (IV.51) ($\varepsilon_{zzf} = \varepsilon_{zzm} = \varepsilon$) conduit à :

$$C_f = C_m = \varepsilon \quad (\text{IV.55})$$

Les autres constantes A_f , A_m et B_m sont déterminées à partir :

- des conditions imposées sur la frontière ($r = r_m$) :

$$\sigma_{rrm} = 0 \quad (\text{IV.56})$$

- des conditions de continuité à l'interface fibre-matrice ($r = r_f$) :

• sur les déplacements :

$$u_{rf} = u_{rm},$$

$$u_{zf} = u_{zm} \quad (\text{Continuité assurée par (IV.55)}),$$

• sur les contraintes radiales :

$$\sigma_{rrf} = \sigma_{rrm} \quad (\text{IV.58})$$

Ayant déterminé les constantes A_f , A_m et B_m , les modules d'élasticité seront obtenus à partir des relations (IV.3). Dans le cas de la traction considérée :

- le module longitudinal E_L :

$$E_L = E_{11} = \frac{\bar{\sigma}_{zz}}{\varepsilon}$$

soit :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_S \sigma_{zz}(r) dS$$

où S est la section droite de la cellule;

- le coefficient de Poisson ν_{LT} :

$$\nu_{LT} = \nu_{12} = - \frac{u_{rm}(r = r_m)}{\varepsilon r_m}$$

Les conditions imposées à la frontière (IV.56), à l'interface (IV.58) et les expressions précédentes des modules montrent la nécessité de déterminer au préalable les expressions des contraintes σ_{rr} et σ_{zz} . Ces expressions sont déduites des relations (IV.50). Soit :

- dans la fibre :

$$\sigma_{rrf} = 2K_f (A_f + \nu_f \varepsilon),$$

$$\sigma_{zzf} = 2K_f [2\nu_f A_f + (1 - \nu_f) \varepsilon]$$

- dans la matrice :

$$\sigma_{rrm} = 2K_m \left[A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{zzm} = 2K_m [2\nu_m A_m + (1 - \nu_m) \varepsilon].$$

Les conditions (IV.57) et (IV.58) de continuité à l'interface fibre-matrice ($r = r_f$) imposent :

$$A_f r_f = A_m r_f + \frac{B_m}{r_f},$$

$$K_f (A_f + \nu_f \varepsilon) = K_m \left[A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_f^2} \right],$$

et la condition (IV.56) à la frontière ($r = r_m$) s'écrit :

$$A_m + \nu_m \varepsilon - (1 - 2\nu_m) \frac{B_m}{r_m^2} = 0$$

Les trois conditions précédentes permettent de trouver les constantes A_m , B_m et A_f . Soit :

$$A_m = A \varepsilon,$$

$$A_f = \left[A \left(1 + \frac{1}{1 - 2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right) + \frac{\nu_m}{1 - 2\nu_m} \frac{r_m^2}{r_f^2} \right] \varepsilon$$

$$B_m = \frac{A + \nu_m}{1 - 2\nu_m} r_m^2 \varepsilon,$$

avec :

$$A = - \frac{\frac{\nu_m}{K_f} (1 - V_f) + \frac{\nu_m}{G_m} + \frac{\nu_f}{K_m} V_f}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1}{G_m} + \frac{1 - V_f}{K_f}}$$

Les constantes étant obtenues, le module d'Young longitudinal est déterminé à partir de la relation (IV.59). Soit dans le cas de coordonnées cylindriques :

$$E_L = \frac{1}{\pi r_m^2 \varepsilon} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_m} \sigma_{zz}(r) r \, dr \, d\theta,$$

ou

$$E_L = \frac{2}{r_m^2 \varepsilon} \left[\int_0^{r_f} r \sigma_{zzf}(r) \, dr + \int_{r_f}^{r_m} r \sigma_{zzm}(r) \, dr \right]$$

D'après (IV.62), (IV.64), (IV.68) et (IV.69), les contraintes σ_{zz} s'écrivent :

- dans la fibre :

$$\sigma_{zzf}(r) = 2K_f C_{zf} \varepsilon,$$

avec

$$C_{zf} = 1 - \nu_f + 2\nu_f \left[A + \frac{1}{1 - 2\nu_m} \frac{1}{V_f} (A + \nu_m) \right]$$

- dans la matrice :

$$\sigma_{zzm}(r) = 2K_m C_{zm} \varepsilon$$

avec

$$C_{zm} = 1 - \nu_m + 2\nu_m A$$

En reportant les relations (IV.71) et (IV.72) dans l'expression (IV.70) du module, nous obtenons :

$$E_L = 2K_f C_{zf} V_f + 2K_m C_{zm} (1 - V_f)$$

Le développement de cette relation conduit finalement à l'expression du module longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) + \frac{4(\nu_f - \nu_m)^2 V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}$$

De même, l'exploitation de la relation (IV.60) conduit à l'expression du coefficient de Poisson :

$$\nu_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) + \frac{(\nu_f - \nu_m) \left(\frac{1}{K_m} - \frac{1}{K_f} \right) V_f (1 - V_f)}{\frac{V_f}{K_m} + \frac{1 - V_f}{K_f} + \frac{1}{G_m}}$$

Les relations (IV.73) et (IV.74) ainsi obtenues sont identiques aux bornes inférieures du module longitudinal (IV.43) et du coefficient de Poisson (IV.44).

D'autre part, des applications numériques, effectuées sur les expressions (IV.73) et (IV.74), montrent que ces expressions sont pratiquement confondues avec les lois des mélanges.

3. Autres modules

De la même manière, il est possible de trouver les solutions exactes de deux autres problèmes d'élasticité de la cellule cylindrique :

- le cisaillement longitudinal,
- la compression hydrostatique latérale.

La résolution du premier problème conduit à l'expression du module de cisaillement longitudinal :

$$G_{LT} = G_{12} = G_m \frac{G_f(1 + V_f) + G_m(1 - V_f)}{G_f(1 - V_f) + G_m(1 + V_f)}$$

alors que le second problème aboutit à l'expression du module de compression latérale :

$$K_L = K_m + \frac{V_f}{\frac{1}{k_f - k_m + \frac{1}{3}(G_f - G_m)} + \frac{1 - V_f}{k_m + \frac{4}{3}G_m}}$$

La relation (IV.75) obtenue pour le module de cisaillement longitudinal est identique à la borne inférieure (IV.42). De même, l'expression (IV.76) est confondue avec la borne inférieure de K_L (IV.40).

Ayant trouvé quatre modules indépendants, il reste à en exprimer un cinquième, par exemple le module de cisaillement transverse $G_{TT} = G_{23}$, déterminé dans un essai de cisaillement transverse. Toutefois, aucune solution analytique exacte n'a été trouvée au problème du cisaillement transverse de la cellule élémentaire cylindrique. Aucune expression du module G_{TT} , analogue aux expressions précédentes trouvées pour les autres modules, ne peut donc être proposée dans ce contexte. Cette constatation aboutit à envisager une autre approche abordée dans le paragraphe suivant.

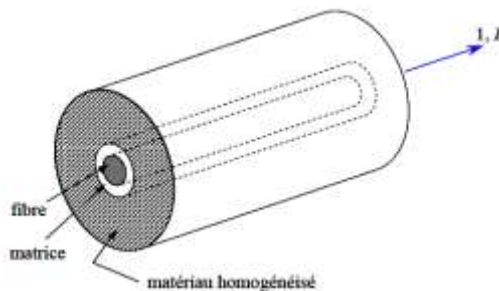


Fig. IV. 11 : Modèle cylindrique à trois phases.

4. Modèle pour la détermination du module de cisaillement transverse

La méthode utilisée pour lever les difficultés évoquées précédemment consiste à considérer un modèle cylindrique à trois phases (figure IV. 11).

Dans ce modèle, la cellule cylindrique élémentaire est entourée d'un cylindre de grandes dimensions, constitué par le matériau équivalent homogénéisé et possédant donc les propriétés effectives homogénéisées du matériau composite.

Ce cylindre est soumis sur ses frontières extérieures aux conditions de l'essai de cisaillement transversal. Ce modèle conduit à l'expression du module transverse :

$$G_{TT} = G_m \left(1 + \frac{V_f}{\frac{G_m}{G_f - G_m} + \frac{k_m + \frac{7}{3}G_m}{2k_m + \frac{8}{3}G_m} (1 - V_f)} \right)$$

Cette expression est confondue avec la borne inférieure (IV.41) de G_{TT} .

IV. 1. 4. 3. Approches simplifiées

Des expressions simplifiées et pratiques des modules peuvent être obtenues en faisant une approche très simplifiée du comportement mécanique de la cellule élémentaire du matériau composite unidirectionnel. Nous développons ces expressions dans le présent paragraphe.

1. Module d'Young longitudinal

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale (figure IV.12). L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice. Si Δl est l'allongement de la cellule (identique à celui de la fibre et de la matrice), la déformation longitudinale imposée à la cellule est :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$$

où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_1$$

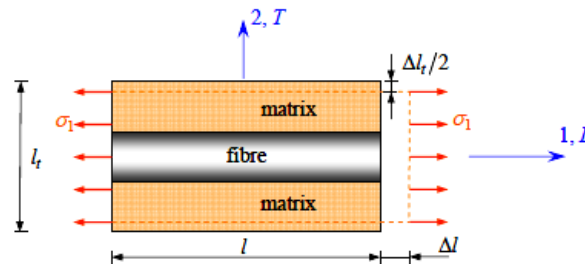


Fig. IV. 12 : Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1,$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1.$$

La charge totale appliquée est :

$$F_1 = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m$$

où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice. Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne $\sigma_1 = F_1/S$ s'écrit :

$$\sigma_1 = \sigma_f V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad (\text{IV.80})$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \varepsilon_1 \quad (\text{IV.81})$$

La combinaison des relations (IV.79) à (IV.81) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f)$$

Cette expression est connue sous le nom de loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres. Cette loi des mélanges est schématisée sur la figure IV. 13. La variation du module est linéaire entre les valeurs E_m module de la matrice et E_f module des fibres, lorsque la fraction volumique V_f de fibres varie de 0 à 1.

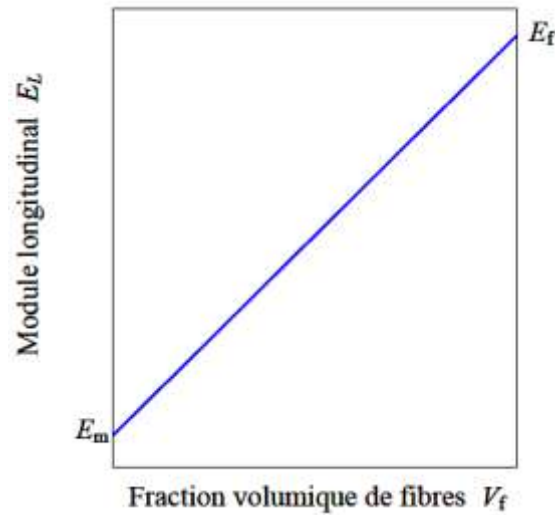


Fig. IV. 13 : Loi des mélanges pour le module d'Young longitudinal.

2. Module d'Young transverse

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. Une expression simplifiée de ce module peut être obtenue dans un schéma simpliste à deux dimensions. Dans un tel schéma, une tranche de matériau composite, d'épaisseur donnée, est considérée comme étant constituée (figure IV. 14) de couches successives, possédant alternativement les propriétés des fibres et de la matrice. La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m} \quad \text{et} \quad 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transverse est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad (\text{IV.84})$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m}$$

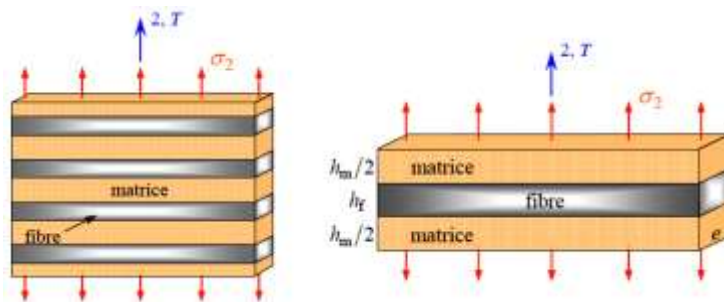


Fig. IV. 14 : Schématisation par couches d'un composite unidirectionnel.

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice. Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m}$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad (\text{IV.86})$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée sur la cellule, par le module transverse :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad (\text{IV.87})$$

La combinaison des expressions (IV.85) à (IV.87) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1-V_f}{E_m}$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f}$$

Le tableau IV. 1 donne les valeurs de E_T/E_m pour trois valeurs du rapport E_f/E_m . Il est à noter que, par exemple dans le cas d'un rapport $E_f/E_m = 100$, un volume de fibres de 50 % est nécessaire pour atteindre un module d'Young transverse double du module de la matrice. Ce résultat montre que les fibres participent peu au module transverse. La variation du module E_T en fonction de la fraction volumique de fibres est reportée sur la figure IV.15 pour plusieurs valeurs (5, 10, 100) du rapport E_f/E_m .

E_f/E_m	V_f									
	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
5	1	1,19	1,47	1,67	1,92	2,27	2,78	3,57	4,17	5
10	1	1,22	1,56	1,82	2,17	2,70	3,57	5,26	6,90	10
100	1	1,25	1,66	1,98	2,46	3,25	4,80	9,17	16,81	100

Tableau IV. 1 : Valeurs de E_T/E_m pour diverses valeurs du rapport E_f/E_m et de la fraction

3. Coefficient de Poisson longitudinal

Pour déterminer le coefficient de Poisson longitudinal ν_{LT} , nous reprenons le schéma précédent dans lequel le composite unidirectionnel est schématisé par couches successives. Le coefficient ν_{LT} est déterminé dans un essai de traction longitudinale, schématisé sur la figure IV.16. Ce schéma diffère de celui du paragraphe IV.4.4.1 par la modélisation de la cellule élémentaire : modélisation de la fibre et de la matrice sous forme cylindrique sur la figure IV.12 et modélisation par couches sur la figure IV.16.

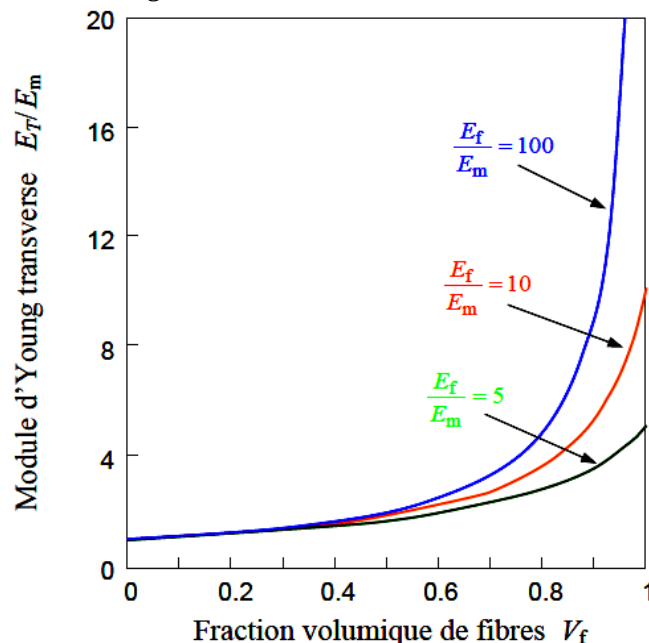


Fig. IV. 15 : Variation du module E_T en fonction de la fraction volumique V_f de fibres.

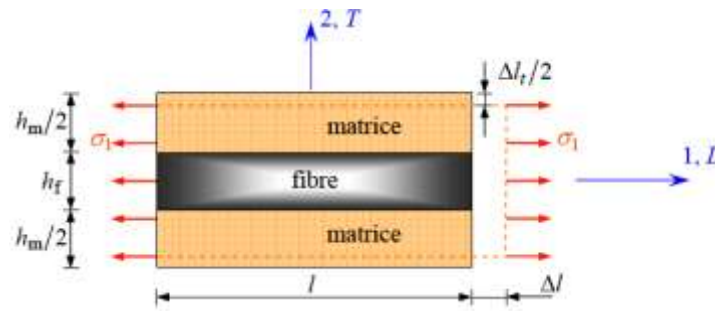


Fig. IV. 16 : Schéma par couches d'une traction longitudinale.

Comme dans le paragraphe IV.4.4.1, fibre et matrice subissent des déformations identiques (IV.78). Il en résulte que les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -v_m \varepsilon_1 h_m - v_f \varepsilon_1 h_f,$$

et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -[v_m(1-V_f) + v_f V_f] \varepsilon_1$$

D'où l'expression du coefficient de Poisson :

$$v_{LT} = v_f V_f + v_m(1-V_f)$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. La variation de v_{LT} en fonction de la fraction volumique de fibres est linéaire entre v_m et v_f . Dans la pratique, les valeurs de v_m et v_f sont assez proches (voisines de 0,3). Le coefficient de Poisson v_{LT} restera donc également proche de cette valeur.

4. Module de cisaillement longitudinal

Le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure IV.17, en utilisant à nouveau la modélisation par couches du composite unidirectionnel. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ imposées sur la cellule. Les déformations en cisaillement de la fibre matrice s'expriment donc suivant :

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{et} \quad \gamma_m = \frac{\tau}{G_m}$$

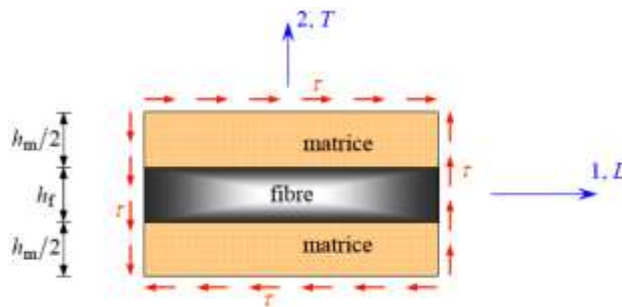


Fig. IV. 17 : Schéma par couches d'un essai de cisaillement longitudinal.

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure IV.18) sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f \quad \text{et} \quad \delta_m = h_m \gamma_m.$$

La déformation totale de la cellule (figure IV.18) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m.$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1-V_f)$$

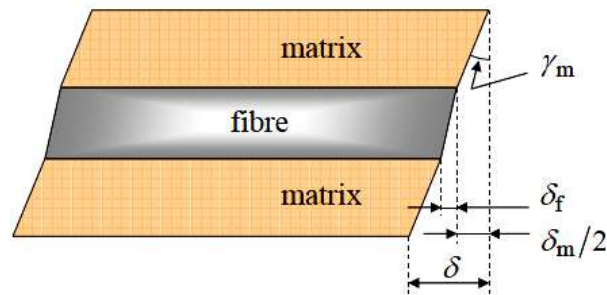


Fig. IV. 18 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}}$$

En combinant les expressions (IV.91) à (IV.93), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1-V_f}{G_m}$$

Cette expression a une forme identique à celle obtenue (IV.88) pour le module d'Young transverse. Les mêmes considérations peuvent être transposées ici.