

Chapitre III :

Transfert De Chaleur Par Conduction En Regime Variable

III.1. Introduction

Lorsque la température d'un milieu subit un changement brusque, elle mettra un certain temps pour atteindre une nouvelle valeur d'équilibre. Celle-ci évolue en fonction du temps pour la plupart des applications industrielles (chauffage, refroidissement, etc...).

Pour analyser le transfert de chaleur par conduction en régime transitoire, on procède nécessairement à la résolution de l'équation de la chaleur sous la forme :

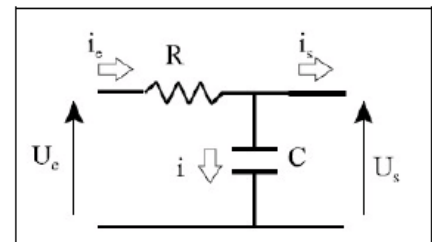
$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}}{\lambda} \quad (\text{III. 1})$$

Avant de revenir en détail sur les méthodes de résolution de cette équation, nous étudions d'abord un cas particulier où la distribution de la température est uniquement temporelle (température uniforme sur l'ensemble du milieu).

III.2. Méthode de la capacité thermique

On considère une bille métallique de faible dimension initialement à la température T_i et placée dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme.

Nous pouvons modéliser ce solide par une "résistance" d'entrée (convection) suivie d'une "capacité". En effet le solide reçoit un flux qui a pour effet de modifier sa température. De plus tout le flux sert à élever la température de ce dernier. Il n'y a donc pas de "résistance de sortie".



Dès lors on peut écrire les équations suivantes :

Figure III.1 : Analogie électrique

a) Equation électriques :

$$\begin{cases} i = i_e - i_s = C \cdot \frac{dU}{dt} \\ U = U_e - U_s = R \cdot i_e \end{cases}$$

Si on se rappelle que suivant l'analogie électrique-thermique :

$$i \rightarrow \dot{Q}$$

$$U \rightarrow T$$

$$C \rightarrow m \cdot c_p$$

$$R_{\text{convection}} \rightarrow 1/(h \cdot S)$$

b) Equations thermiques :

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dot{Q}_e - \dot{Q}_s = m \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \\ T = T_e - T_s = \frac{1}{h \cdot S} \cdot \dot{Q}_e \end{cases}$$

Et si on remplace $\dot{Q}_e$ dans la première équation, on obtient :

$$(T_e - T_s) \cdot h \cdot S - \dot{Q}_s = m \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \quad (\text{III. 2})$$

Avec :

$T_e : T_0$ (Température ambiante)

T_s : variable $T(t)$

$\dot{Q}_s = 0$: tout reste dans le solide

On écrit :

$$h \cdot S (T_0 - T(t)) = m \cdot c_p \cdot \frac{dT}{dt} \Rightarrow (T(t) - T_0) = - \frac{m \cdot c_p}{h \cdot S} \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{(T(t) - T_0)} = - \frac{h \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} dt$$

$$(T(t) - T_0) = C \cdot \exp\left(- \frac{h \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} t\right) \quad (\text{III. 3})$$

On détermine la constante de l'intégrale C à partir de la condition initiale :

à $t=0$ $T(0) = T_i$

$$(\text{III. 3}) \Rightarrow T_i - T_0 = C$$

$$\Rightarrow \frac{T(t) - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(- \frac{h \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} t\right) \quad (\text{III. 4})$$

Où S et V représentent respectivement la surface et le volume de la bille.

On remarque que le groupement $\frac{\rho \cdot c_p \cdot V}{h \cdot S}$ est homogène à un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système :

$$\tau = \frac{\rho \cdot c_p \cdot V}{h \cdot S} \quad (\text{III. 5})$$

Cette grandeur est fondamentale dans la mesure où elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique, on a en effet :

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp\left(- \frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{III. 6})$$

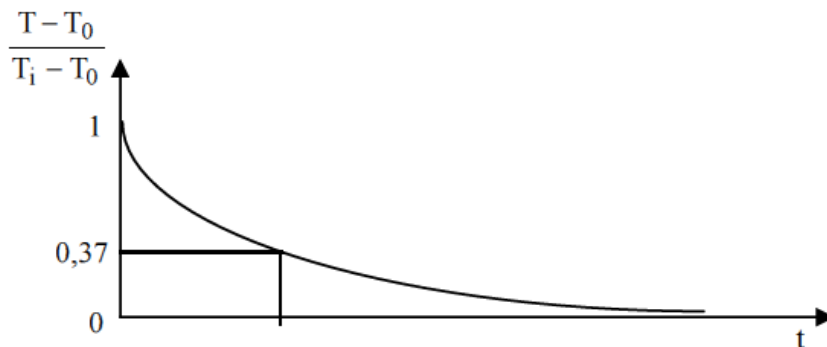


Figure III.2 : Evolution de la température d'un milieu à température uniforme

Dans l'équation (III.4), le terme de l'exponentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{h \cdot S}{\rho \cdot c_p \cdot V} t = \left(\frac{h \cdot V}{\lambda \cdot S} \right) \left(\frac{S^2 \cdot \lambda \cdot t}{\rho \cdot c_p \cdot V^2} \right) = \left(\frac{h \cdot V}{\lambda \cdot S} \right) \left(\frac{a \cdot t}{(V/S)^2} \right) = B_i \cdot F_0$$

Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, deux nombres adimensionnels sont particulièrement important en régime variable :

- **Le nombre de Biot** : représente le rapport de la résistance thermique conductive $\left(R_{cd} = \frac{L}{\lambda \cdot S} \right)$ par la résistance thermique convective $\left(R_{cv} = \frac{1}{h \cdot S} \right)$

L est la dimension caractéristique du milieu, $L=r$ pour une sphère.

Soit :

$$B_i = \frac{h \cdot L}{\lambda} \quad (\text{III. 7})$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifiée lorsque $B_i < 0,1$.

- **Le nombre de Fourier** : le nombre de Fourier caractérise la pénétration de la chaleur en régime variable.

$$F_0 = \frac{a \cdot t}{L^2} \quad (\text{III. 8})$$

La définition de ces deux nombres permet d'écrire l'expression de la température de la bille sous la forme:

$$\frac{T - T_0}{T_i - T_0} = \exp(-B_i \cdot F_0) \quad (\text{III. 9})$$

La connaissance du produit des nombres de Biot et de Fourier permet de déterminer l'évolution de la température de la sphère. On considère généralement qu'un système tel que $B_i < 0,1$ peut être considéré comme étant à température uniforme, le critère $B_i < 0,1$ est appelé le critère d'« accommodation thermique ».

III.3. Milieu semi –infini

Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face. Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face (vrai tout le temps que la température de l'autre face n'a pas varié).

III.3. 1. Température constante imposée en surface (Condition de Dirichlet)

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Le milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface, cette condition limite est appelée condition de Dirichlet :

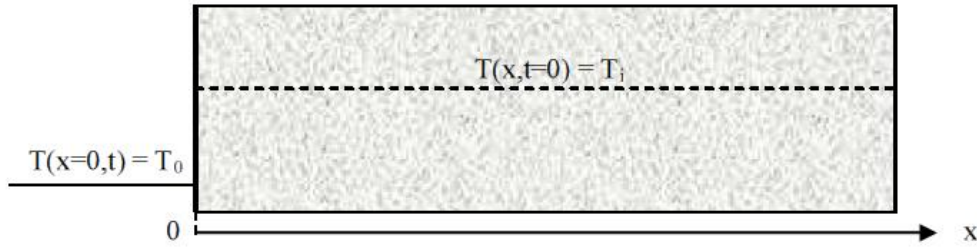


Figure III.3 : Schéma du milieu semi-infini avec température de surface imposée

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 10})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (\text{III. 11}) \\ T(x = 0, t) = T_0 & (\text{III. 12}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_i & (\text{III. 13}) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\bar{T} = T - T_i$$

D'où :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation (III.10) peut alors s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \quad (\text{III. 14})$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \bar{T}(x, 0) = 0 & (\text{III. 15}) \\ \bar{T}(x = 0, t) = T_0 - T_i & (\text{III. 16}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{T}(x, t) = 0 & (\text{III. 17}) \end{cases}$$

La transformée de Laplace de $\bar{T}(x, t)$ par rapport au temps s'écrit (cf. annexe A.3.1 sur les transformations intégrales) :

$$\theta(x, p) = L\{\bar{T}(t)\} = \int_0^\infty \exp(-pt) \cdot \bar{T}(x, t) dt$$

La transformée de Laplace de l'équation (III.14) conduit à :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{1}{a} [p\theta - \bar{T}(x, 0)] = 0 \quad \text{avec} \quad \bar{T}(x, 0) = 0$$

Cette équation est donc de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - q^2 \theta = 0 \quad (\text{III. 18})$$

Avec : $q^2 = \frac{p}{a}$

D'où :

$$\theta(x, p) = A. e^{-qx} + B. e^{+qx} \quad (\text{III. 19})$$

la température garde une valeur finie quand $x \rightarrow \infty$, donc $B = 0$, nous en déduisons que :

$$\theta(x, p) = A. e^{-qx}$$

La transformée de Laplace de l'équation (III.16) conduit à

$$\begin{aligned} \theta(0, p) &= \frac{T_0 - T_i}{p} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{T_0 - T_i}{p} \\ \Rightarrow \theta &= (T_0 - T_i) \frac{e^{-qx}}{p} \quad (\text{III. 20}) \end{aligned}$$

L'utilisation des tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 conduit au résultat suivant :

$$\frac{T(x, t) - T_0}{T_i - T_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (\text{III. 21})$$

Avec : $\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-t^2) dt$

La fonction erf est appelée la fonction erreur (cf. valeurs en annexe A.3.4)

III.3. 2. Flux imposé (Condition de Neumann)

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini, cette condition limite est appelée condition de Neumann.

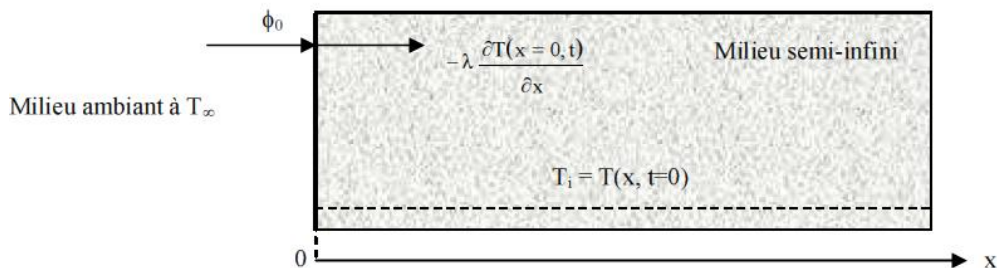


Figure III.4 : Schéma du milieu semi-infini avec un flux surfacique imposé

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 10})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (\text{III. 22}) \\ T(\infty, t) = T_i & (\text{III. 23}) \\ -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \phi_0 & (\text{III. 24}) \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle avec ces conditions initiales en utilisant les tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 donne la distribution de température :

$$\bar{T}(x, t) = T(x, t) - T_i = \frac{2\phi_0}{\lambda} \sqrt{a \cdot t} \operatorname{ierfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) \quad (\text{III. 25})$$

Avec : $\operatorname{ierfc}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-u^2) - u[1 - \operatorname{erf}(u)]$, cette fonction est tabulée en annexe A. 3.4

III.3. 3.Coefficient de transfert imposé

Méthode : Transformée intégrale de Laplace sur le temps et inversion par les tables.

On considère le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé, cette condition limite est appelée condition de Newton.

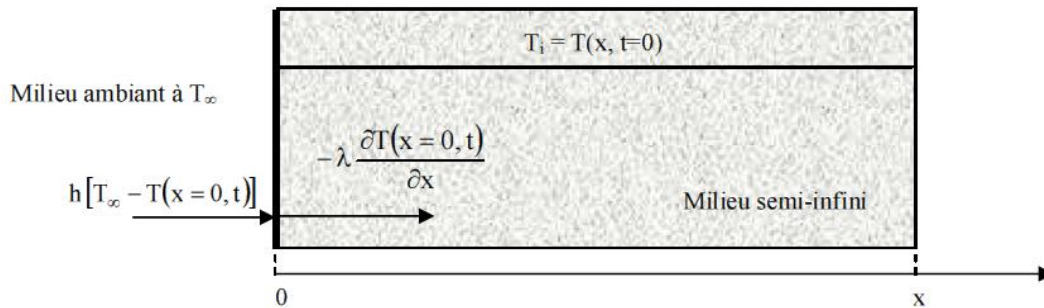


Figure III.4 : Schéma du milieu semi-infini avec un coefficient de transfert convectif imposé

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 26})$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x, 0) = T_i & (\text{III. 27}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T(\infty, t) = T_i & (\text{III. 28}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h[T_\infty - T(x=0, t)] & (\text{III. 29}) \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle avec ces conditions initiales en utilisant les tables de la transformée de Laplace inverse présentées en annexe A.3.2 donne la distribution de température :

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}\right) + \exp\left(\frac{h \cdot x}{\lambda} + \frac{ah^2 t}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}} + \frac{h\sqrt{a \cdot t}}{\lambda}\right) \quad (\text{III. 30})$$