

TP 4 : Résolution d'un problème d'optimisation linéaire avec contraintes.

4.1 Introduction :

Généralement un programme linéaire est représenté sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ll} c^T x & \longrightarrow \min \\ \text{s.t.} & \\ Ax & \leq a \\ Bx & = b \\ lb \leq x & \leq ub; \end{array}$$

Avec :

A : matrice des contraintes d'inégalité ;

B : matrice des contraintes d'égalité ;

c : le vecteur des coefficients de la fonction objet ;

a : le vecteur des contraintes d'inégalité ;

b : le vecteur des contraintes d'égalité ;

lb : la borne inférieure de x ;

ub : la borne supérieure de x.

4.2 Comment résoudre un PL en Matlab

Pour résoudre un problème linéaire en Matlab on a plusieurs syntaxes. On utilise la fenêtre du MATLAB ou bien l'outil d'optimisation. On commence avec la première méthode ensuite la deuxième méthode(en utilisant l'Optimtool).

On a trois formes possibles comme illustré sur les exemples suivants :

La première forme :

Résoudre un problème linéaire simple définit uniquement par les contraintes d'inégalités, il est donné par :

$$x = \text{linprog}(f,A,b)$$

Cela signifie; trouver le minimum de la fonction f (min f) sachant qu'il satisfait les contraintes d'inégalités données par la relation suivante: $A*x \leq b$. illustrant cela par l'exemple suivant :

Les contraintes sont :

$$x(1) + x(2) \leq 2$$

$$x(1) + x(2)/4 \leq 1$$

$$x(1) - x(2) \leq 2$$

$$-x(1)/4 - x(2) \leq 1$$

$$-x(1) - x(2) \leq -1$$

$$-x(1) + x(2) \leq 2.$$

Et la fonction objet : $-x(1) - x(2)/3$.

Ecrivant la matrice des contraintes d'inégalité comme suit :

```
A = [1 1  
     1 1/4  
     1 -1  
     -1/4 -1  
     -1 -1  
     -1 1];
```

Le vecteur des contraintes d'inégalités :

```
b = [2 1 2 1 -1 2];
```

La fonction objet:

```
f = [-1 -1/3];
```

Solvant le programme linéaire en utilisant l'instruction linprog comme suit.

```
x = linprog(f,A,b)
```

Optimal solution found.

```
x =
```

```
0.6667  
1.3333
```

Remarque:

Si on veut afficher la solution optimale et la valeur de la fonction objet pour cette solution, on écrit :

```
[x,fval] = linprog(f,A,b)
```

Optimal solution found.

```
x =
```

```
0.6667  
1.3333
```

```
fval = -1.1111
```

La deuxième forme :

Résoudre un problème linéaire défini par les contraintes d'inégalités et d'égalités, il est donné par :

$$x = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq)$$

Cela indique; trouver le minimum de la fonction f ($\min f$) sachant qu'il satisfait les contraintes d'inégalités données par la relation suivante: $A*x \leq b$ et les contraintes d'égalités $Aeq*x = beq$. Un l'exemple illustratif est donné par :

Les contraintes d'inégalités sont :

$$x(1) + x(2) \leq 2$$

$$x(1) + x(2)/4 \leq 1$$

$$x(1) - x(2) \leq 2$$

$$-x(1)/4 - x(2) \leq 1$$

$$-x(1) - x(2) \leq -1$$

$$-x(1) + x(2) \leq 2.$$

Donc la matrice des contraintes d'inégalités A est égale à :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/4 \\ 1 & -1 \\ -1/4 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

Le vecteur des contraintes d'inégalités b est donné par:

$$b = [2 \ 1 \ 2 \ 1 \ -1 \ 2];$$

Utilisant la contrainte d'égalité suivante: $x(1) + x(2)/4 = 1/2$.

La matrice des contraintes d'égalités Aeq est égale à :

$$Aeq = [1 \ 1/4];$$

Le vecteur des contraintes d'égalités est donné par :

$$beq = 1/2;$$

Soit la fonction objet suivante: $-x(1) - x(2)/3$.

$$f = [-1 \ -1/3]$$

Résolvant ce programme linéaire, en écrivant l'instruction suivante :

$$x = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq)$$

La solution optimale trouvée est :

$$x = \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

La troisième forme :

Résoudre un problème linéaire défini par les contraintes d'inégalités, d'égalités et limitant la variable x par une limite supérieure et une limite inférieure : $lb \leq x \leq ub$, il est donné par :

$$x = \text{linprog}(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub)$$

Cela indique; trouver le minimum de la fonction f ($\min f$) sachant qu'il satisfait les contraintes d'inégalités données par la relation suivante: $A*x \leq b$, les contraintes d'égalités $Aeq*x = beq$ et la variable x est comprise entre lb et ub : $lb \leq x \leq ub$.

Remarque :

Si on n'a pas de contraintes d'égalités on écrit :

$$Aeq = [] \text{ et } beq = [].$$

Un exemple illustratif est donné par :

Les contraintes d'inégalités sont :

$$x(1) + x(2) \leq 2$$

$$x(1) + x(2)/4 \leq 1$$

$$x(1) - x(2) \leq 2$$

$$-x(1)/4 - x(2) \leq 1$$

$$-x(1) - x(2) \leq -1$$

$$-x(1) + x(2) \leq 2.$$

Donc la matrice des contraintes d'inégalités A est égale à :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/4 \\ 1 & -1 \\ -1/4 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

Le vecteur des contraintes d'inégalités b est donné par:

$$b = [2 \ 1 \ 2 \ 1 \ -1 \ 2];$$

Utilisant la contrainte d'égalité suivante: $x(1) + x(2)/4 = 1/2$.

La matrice des contraintes d'égalités Aeq est égale à :

$$Aeq = [1 \ 1/4];$$

Le vecteur des contraintes d'égalités est donné par :

$$beq = 1/2;$$

Les limites des variables $x(1)$ et $x(2)$ sont données par :

$$-1 \leq x(1) \leq 1.5$$

$$-0.5 \leq x(2) \leq 1.25.$$

Donc les bornes inférieures et supérieures sont données par :

$$lb = [-1, -0.5];$$

$$ub = [1.5, 1.25];$$

Soit la fonction objet suivante: $-x(1) - x(2)/3$.

$$f = [-1 \ -1/3]$$

Résolvant ce programme linéaire, en écrivant l'instruction suivante :

$$x = \text{linprog}(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

La solution optimale trouvée est :

$$x =$$

$$0.1875$$

$$1.2500$$