

Chapitre 1 : Programmation linéaire(PL).

1.1 Introduction :

La programmation linéaire est un outil très puissant de la recherche opérationnelle. C'est un outil générique qui peut résoudre un grand nombre de problèmes. En effet, une fois un problème modélisé sous la forme d'équations linéaires, des méthodes assurent la résolution du problème de manière exacte. On distingue dans la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombres réels, pour laquelle les variables des équations sont dans $\mathbb{R}_+$ et la programmation en nombres entiers, pour laquelle les variables sont dans $\mathbb{N}$. Bien entendu, il est possible d'avoir les deux en même temps. Cependant, la résolution d'un problème avec des variables entières est nettement plus compliquée qu'un problème en nombres réels.

Une des méthodes les plus connues pour résoudre des programmes linéaires en nombre réel est la méthode du Simplex. En théorie, elle a une complexité non polynomiale et est donc supposée peu efficace. Cependant, en pratique, il s'avère au contraire qu'il s'agit d'une bonne méthode.

De plus, de nombreux logiciels intégrant cette méthode existent. Certains sont utilisés via une interface graphique alors que d'autres permettent une communication par fichiers ce qui autorise l'utilisation du programme de manière cachée dans le développement d'un autre logiciel.

1.2 Problématique de la programmation linéaire :

Un programme linéaire est un programme mathématique, i.e. un problème consistant à trouver un **extremum** (maximum ou minimum) d'une fonction à plusieurs variables, vérifiant en outre un système **d'équations** ou **d'inéquations**, ces fonctions étant *linéaires*.

La fonction à optimiser est baptisée **fonction coût**.

Ou bien sous une autre manière, la programmation linéaire permet la résolution d'un programme linéaire. Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

1.2.1 Définition :

Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, alors on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire.

1.2.2 Exemple1 : (Agriculteur)

Un agriculteur possède 40 ha, 63 000 FF et 840 jours de travail. Il désire semer du maïs, du blé et du soja qui ont les coûts et les rapports suivants :

	Prix (FF/ha)	Temps (jour)	Rapports (FF/ha)
Maïs	1500	18	420
Blé	1800	27	510
soja	1050	15	360

La question ou le problème :

Quelles sont les quantités du blé, du maïs et de soja que doit semer cet agriculteur ? (Avec le respect des contraintes ci-dessus).

On peut modéliser le problème de la manière suivante :

On suppose : x_1 la quantité du maïs qu'il doit semer [ha] ;

x_2 la quantité du blé qu'il doit semer [ha] ;

x_3 la quantité du soja qu'il doit semer [ha] ;

Donc notre problème prend la forme suivante :

$$\begin{cases} 1500 x_1 + 1800 x_2 + 1050 x_3 \leq 63\,000 \\ 18 x_1 + 27 x_2 + 15 x_3 \leq 840 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+ \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

et la fonction économique qu'on doit maximiser est

$$Z_{\max} = 420 x_1 + 510 x_2 + 360 x_3$$

1.2.3 Exemple2 : (Usine)

Une usine produit deux produits "1" et "2", chaque produit passe dans 3 ateliers ; Atelier A, Atelier B, Atelier C. On connaît la consommation horaire d'énergie nécessaire à l'élaboration de chacun des produits dans chaque Atelier.

Consommation	Produit 1	Produit 2
A	1	2
B	1	1
C	1	0

On connaît pour chacun des produits le bénéfice effectué sur sa vente.

Les produits	Produit 1	Produit 2
Bénéfice	2	1

La consommation horaire d'énergie dans chaque atelier est limitée :

$$\text{Energie (A)} \leq 5$$

$$\text{Energie (B)} \leq 4$$

$$\text{Energie (C)} \leq 3$$

La question ou le problème :

Trouvez la production horaire de chaque produit qui maximise le bénéfice ?

On note x_1, x_2 les quantités horaires produites et Z le bénéfice horaire

x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}^+$ et x_1 et $x_2 \geq 0$

Les contraintes

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 \leq 3$$

La fonction à maximiser $Z_{\max} = 2x_1 + x_2$

1.3 La forme canonique :

Pour résoudre un programme linéaire de manière automatique, il faut qu'il ait une certaine forme que l'on appelle "canonique". Dans ce cours, on a choisi la forme canonique suivante : un programme linéaire n'a que des contraintes d'infériorité et l'on tente de maximiser la fonction objectif. De plus toutes les variables sont positives.

Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique, c'est à dire un système avec un ensemble d'inéquation et une fonction à optimiser.

$\max z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$	← Fonction économique
$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq m$	m: contraintes
$x_j \geq 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq n$	n: nbre de variables $x_1, \dots, x_n$

Il y a m contraintes propres et n variables naturelles. Une solution admissible est une solution qui vérifie toutes les contraintes ; parmi ces solutions admissibles celle(s) pour la(les)quelle(s) la fonction économique est maximale, s'appelle(nt) solution(s) optimale(s).

Propriété : Tout programme linéaire peut être mis sous forme canonique.

$$\begin{aligned} \text{Min}(z) &= -\max(-z) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) \cdot x_j \leq -b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) \cdot x_j \leq -b_i \end{cases} \end{aligned}$$

$x_j \leq 0 \Leftrightarrow -x_j \geq 0 \Rightarrow$ changement de variable $x'_j = -x_j$ dans le PL

si certaines variables n'ont pas de condition de signe, on pose $x_i = x'_i - x''_i$, avec $x'_i \geq 0$ et $x''_i \geq 0$.

Remarques:

1. Contraintes non linéaires :

$$2x_1^2 + x_2 \leq 12$$

$$5x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 = 8$$

$$x_1x_2 + 8x_3 \geq 25$$

Elles sont impossibles d'être résolu avec cet outil.

2. Si une variable x_1 est négative, on la remplace par une variable positive $x_1' = -x_1$. Par exemple :

$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ sous: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$ $9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \leq 0$	$\Rightarrow$	$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 - 8x_3'$ sous: $5x_1 - 2x_2 - 4x_3' \leq 8$ $x_1 + 3x_2 - 8x_3' \leq 25$ $9x_1 + 6x_2 + 3x_3' \leq 17$ $x_1, x_2, x_3' \geq 0$
---	---------------	--

3. Si une variable n'a pas de contrainte de signe, on la remplace par deux variables positives x_1' et x_1'' telles que $x_1 = x_1' - x_1''$. Par exemple :

$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ sous: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$ $9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$ $x_1, x_2 \geq 0$	$\Rightarrow$	$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3' - 8x_3''$ sous: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3' - 4x_3'' \leq 8$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3' - 8x_3'' \leq 25$ $9x_1 + 6x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \leq 17$ $x_1, x_2, x_3', x_3'' \geq 0$
--	---------------	---

4. Si le programme linéaire a une contrainte de supériorité, on la remplace par une contrainte d'infériorité en inversant le signe des constantes. Par exemple:

$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ sous: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$ $9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$\Rightarrow$	$\text{max: } z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$ sous: $5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$ $x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$ $-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
---	---------------	---

5. Si le programme linéaire a une contrainte d'égalité, on la remplace par deux contraintes équivalentes, l'une d'infériorité, l'autre de supériorité. Les variables du programme doivent satisfaire ces deux contraintes, ce qui revient alors à l'égalité de départ. Par exemple :

$$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

sous:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 17$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

sous:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \geq 17$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max: z = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3$$

sous:

$$5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 8$$

$$\Rightarrow x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 25$$

$$9x_1 + 6x_2 - 3x_3 \leq 17$$

$$-9x_1 - 6x_2 + 3x_3 \leq -17$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.4 Interprétation géométrique :

Soit le PL suivant :

$$\begin{cases} \max z = -x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Soit le système:

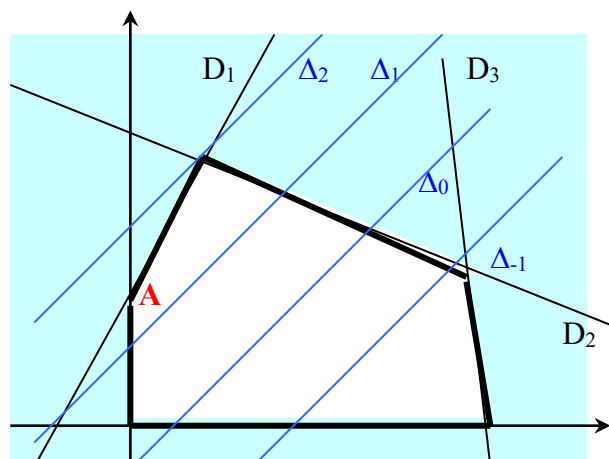
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 4 \\ \max z = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$D_1 \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 2x_1 + 1 \end{cases}$$

$$D_2 \quad \begin{cases} 3x_2 = 10 - x_1 \\ x_2 = 10/3 - (1/3)x_1 \end{cases}$$

$$D_3 \quad \begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 = 2x_1 + 1 \end{cases}$$

$$\Delta_k \quad \begin{cases} x_2 - x_1 = k \\ x_2 = x_1 + k \end{cases}$$



z a pour maximum 2 atteint en $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

$$A \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} -2x_1 + x_2 + t_1 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + t_2 &= 10 \\ x_1 &+ t_3 = 4 \end{aligned} \quad t_1: \text{variable d'écart}$$

1.5 La forme standard :

Définition (Forme standard) : Un programme linéaire est sous forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables sont non-négatives.

On introduit des variables dites d'écart. La **forme standard** d'un PL est telle que :

- On maximise une fonction économique linéaire des variables
- Les variables sont assujetties à des contraintes :
 - Propres : équations linéaires (en introduisant des variables d'écart, positives)
 - Impropres : conditions de positivité (des variables naturelles et des variables d'écart)

Ou bien :

Forme standard

Théorème :

Tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique ou sous forme standard.

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} &= b_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\ x_j &\geq 0, \text{ pour } 1 \leq j \leq n \\ x_{n+i} &\geq 0, \text{ pour } 1 \leq i \leq m \end{aligned}$$

Ecriture matricielle :

$$\begin{aligned} \max ({}^t c \cdot x) \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

avec :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, x, c \in \mathbb{R}^{n+m}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, A \in \mathcal{M}_{m,n+m}(\mathbb{R}),$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}^m$$

Exemple d'application (Production de peinture).

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2.

➤ **Données :**

	Quantité utilisée par tonne		Quantité disponible par jour
	Extérieure	Intérieure	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

➤ **Contraintes supplémentaires**

- Demande maximum en peinture d'intérieur : 2 tonnes / jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasser que d'une tonne celle d'extérieur.

➤ **Formulation** (Production de peinture)

x_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour

x_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour

➤ **Fonction objectif à optimiser**

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$

➤ **Restrictions (contraintes)**

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

➤ **Solutions et méthodes de résolution**

Une solution admissible : satisfait toutes les contraintes.

$$x_1 = 3; x_2 = 1 \quad (z = 19)$$

Il existe une infinité de solutions admissibles. Nous voulons trouver la solution (admissible) *optimale*.

➤ **Méthodes pour trouver l'optimum**

- Méthode graphique
- Simplexe

Représentation graphique

Production de peinture $\max z = 5x_1 + 4x_2$

Sous les contraintes :

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2)$$

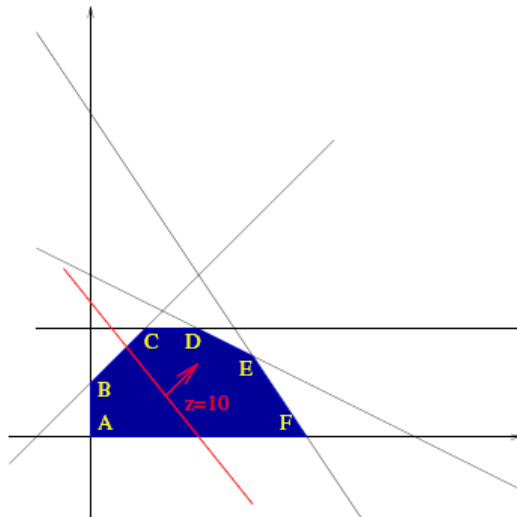
$$x_2 \leq 2 \quad (3)$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$

Géométrie des solutions



Ensemble des solutions admissibles

C'est l'ensemble des points du Polyèdre (ABCDEF)

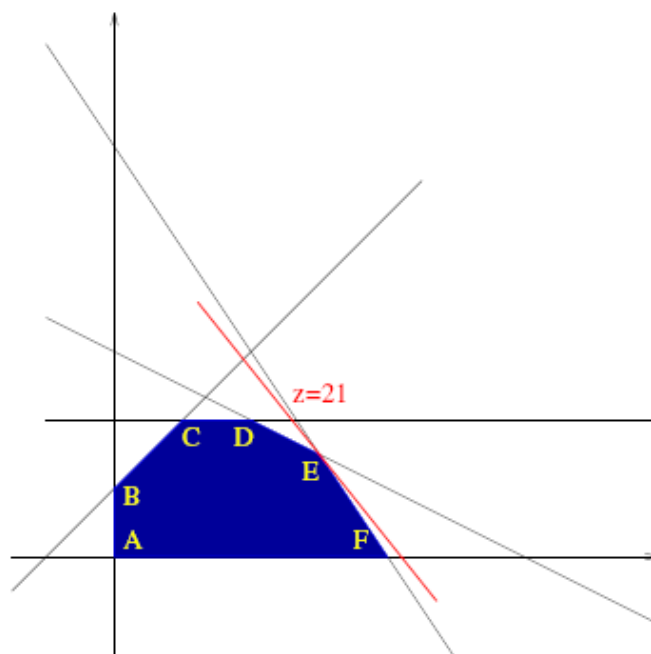
Courbes de niveaux de l'objectif

Ensemble de solutions ayant un profit (valeur de l'objectif) donné : intersection entre une droite et le polyèdre.

Amélioration de la solution

Recherche d'une direction dans laquelle le profit z augmente. Pour notre cas, pour la recherche de la solution optimale :

- La droite mobile doit garder une intersection avec l'ensemble des solutions admissibles.
- La solution optimale : $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ (le point E)
- La solution optimale est un sommet du polyèdre.
- Cette observation est la base de l'algorithme du simplexe.



1.6 Méthode du simplexe

L'idée fondamentale du simplexe : déplacement de sommet en sommet adjacent de manière à améliorer la fonction objectif.

Transformation des inégalités en égalités : forme standard du programme linéaire - système de m équations à n inconnues ($m < n$).

Puisque la solution optimale est un sommet (point extrême), identification algébrique des sommets : correspondance avec les bases d'un système d'équations.

Cette méthode passe à partir d'une solution de base admissible à une solution de base voisine qui améliore la valeur de l'objectif, elle présente 3 étapes :

1. Détermination de la variable entrante.
2. Détermination de la variable sortante.
3. Pivotage.

Présentation en tableau

Présentation compacte pour effectuer les calculs sans répéter les systèmes d'équations.

Itération 1

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	5	4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	-1	1	0	0	0	1	1

Itération 2

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{6}$	0	0	0	-20
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
s_3	0	0	1	0	0	1	0	2
s_4	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	1	5

Itération 3

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
z	-1	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{5}{2}$

1.7 Cas particuliers

1.7.1 Solutions optimales multiples

- Si la fonction objectif est parallèle à une contrainte active pour la solution optimale, la même valeur de l'objectif peut être prise par plusieurs solutions admissibles.
- Il y a une infinité de solutions optimales dans ce cas (toutes les combinaisons convexes de sommets optimaux).
- Cela se traduit par un profit marginal nul pour une ou plusieurs variables hors base.

Exemple :

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	4	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	5
s_2	0	1	1	0	1	4
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
z	-1	0	0	-2	0	-10
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3

La solution optimale est :

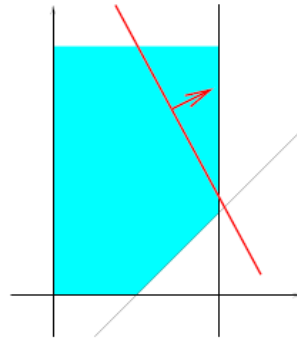
$$\begin{aligned} x_1 &= 0\alpha + 3(1 - \alpha) = 3 - 3\alpha \\ x_2 &= \frac{5}{2}\alpha + 1(1 - \alpha) = 1 + \frac{3}{2}\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \end{aligned}$$

1.7.2 Problèmes non bornés

Certains problèmes sont non bornés dans une direction donnée. Si cette direction est une direction d'amélioration de la fonction objectif, celle-ci peut prendre une valeur arbitrairement grande !

Exemple :

$$\begin{array}{ll} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Var. en base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
z	-1	2	1	0	0	0
s_1	0	1	-1	1	0	1
s_2	0	2	0	0	1	4

- Tous les coefficients (sauf le profit marginal) dans la colonne de x_2 sont négatifs ou nuls.
- Cela signifie que toutes les contraintes de non-négativité sont satisfaites quelle que soit la valeur de x_2 .
- L'objectif peut donc augmenter indéfiniment.

1.7.3 Problèmes impossibles

Le système de contraintes peut n'avoir aucune solution, généralement, provient d'une mauvaise formulation du problème.

Exemple :

$$\begin{array}{ll}
 \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.c.} & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$