

Chapitre 4 : Ecoulement isentropique avec frottement dans une conduite (écoulement de Fanno)

VI.1 Introduction:

Le chapitre II a fait l'objet de l'étude de l'écoulement isentropique unidirectionnel d'un gaz parfait à travers un tuyère en négligeant le transfert de chaleur et (le frottement) la friction. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'un écoulement isentropique d'un gaz parfait à travers une section constante avec friction (frottement) et sans transfert de chaleur ce qu'on nomme l'écoulement de Fanno.

Considérons le cas de l'écoulement compressible d'un gaz parfait entre deux sections d'une tuyère comme illustré sur la figure IV.1.

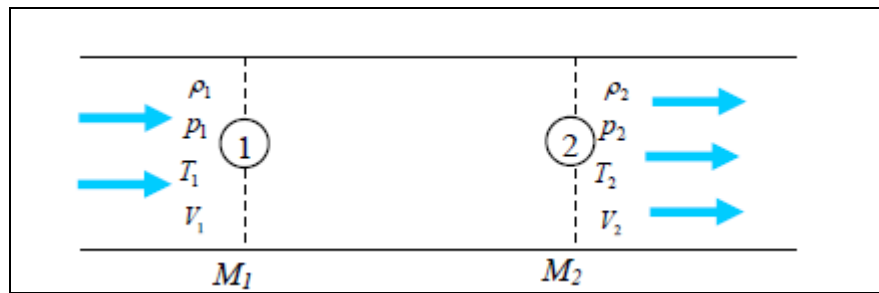


Figure IV.1 : Ecoulement compressible de fluide à travers une section constante.

Dans ce cas la variation de section est égale à zéro. Nous avons l'équation suivante :

$$\frac{dS}{dv} = -\frac{S}{v}(1 - M^2) \quad (\text{IV.1})$$

Cette équation nous a conduit à la variation de vitesse est égale à zéro, d'où :

$$dv = 0 \Rightarrow v = \text{cst} \quad (\text{IV.2})$$

Donc l'écoulement s'effectue à une vitesse constante. De même, à partir de l'équation d'énergie, nous avons ;

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (\text{IV.3})$$

Puisque la vitesse est constante est constante donc l'enthalpie est aussi une constante d'où la température est aussi une constante.

D'autre part, nous avons :

$$a = \sqrt{\gamma r T} \quad \text{donc } a = \text{cst} \quad (\text{IV.4})$$

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{\gamma r T}} \quad (\text{IV.5})$$

Donc le nombre de Mach est constant. Nous avons aussi :

$$\frac{P_0}{P} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{IV.6})$$

Donc la pression est constante. Nous avons de même :

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{IV.7})$$

Donc la masse volumique est constante.

A partir de ces informations , on constate que l'étude d'un écoulement isentropique unidimensionnel pour un gaz parfait dans une canalisation ne produit aucune variation dans la vitesse et les propriétés du fluide tant que la section ne change pas. Dans ce qui suit (chapitre 4 et chapitre 5) on va étudier les écoulements unidimensionnels d'un gaz parfait à travers une conduite à section constante. On va voir que le frottement et/ou le transfert de chaleur peut aussi accélérer ou décélérer le fluide.

Actuellement, les écoulements des fluides sont non isentropiques. Dans ces écoulements on distingue les écoulements adiabatiques sans transfert de chaleur avec friction et les écoulements avec transfert de chaleur (écoulements diabatiques). Dans ce chapitre on va aborder l'écoulement adiabatique d'un gaz parfait à travers une section constante avec friction, ce type d'écoulement est appelé écoulement de Fanno. Dans le chapitre suivant vas aborder l'écoulement diabatique d'un gaz à travers une conduite à section constante sans friction ; c'est l'écoulement de Rayleigh.

VI.2 Equations de bases :

Considérons l'écoulement permanent dans une conduite de section circulaire constant, parfaitement calorifugée, alimentée par un réservoir de grand volume où règnent les conditions génératrices supposées constantes et débitant dans une enceinte où règne la pression P .

Considérons le volume de contrôle élémentaire de la conduite de section S et la longueur dx comme représenté sur la figure (IV.2). La section est constante, mais les autres propriétés de fluide (p, ρ, T, h, v) peuvent varier avec x . L'application de la loi de conservation de masse et du théorème d'Euler à cet élément de volume donne les équations différentielles.

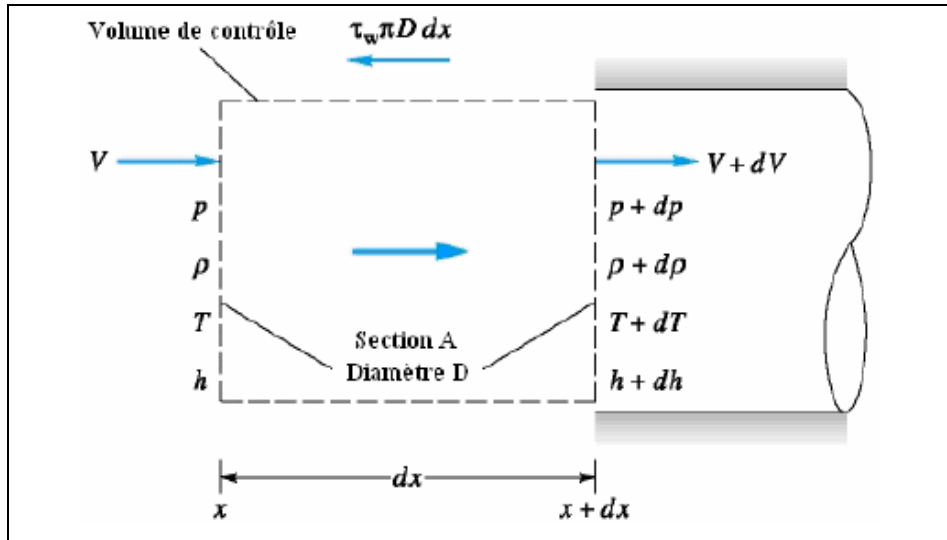


Figure IV.2 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement avec friction dans une conduite de section constante.

IV.2.1 L'équation de continuité :

L'équation de continuité est donnée par la relation suivante :

$$\rho S v = \text{cst} \Rightarrow \rho v = \frac{\dot{m}}{S} = \text{cst} \quad (\text{IV.8})$$

Avec :

ρ : la masse volumique du fluide ;

v : la vitesse du fluide ;

S : la section de la conduite ;

En dérivant cette équation, on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{IV.9})$$

IV.2.2 Théorème d'Euler :

Appliquons le théorème d'Euler au volume élémentaire. En désignant par dF la force latérale de frottement, on obtient :

$$PS + q_m v - dF = (P + dP)S + q_m (v + dv) \quad (A)$$

$$(A) \Leftrightarrow -dF - PS - q_m dv = 0$$

$$\Leftrightarrow dF + PS + q_m dv = 0$$

Nous avons la relation du débit massique:

$$q_m = \rho S v$$

$$\Rightarrow dP + \frac{dF}{S} + \rho v dv = 0$$

On désigne par dF la force latérale de frottement et df/S la perte de charge dans la conduite due au frottement, elle est donnée par la relation suivante :

$$\frac{dF}{S} = \frac{\lambda}{D} dx \rho \frac{v^2}{2}$$

D présente le diamètre de la conduite.

Dans le cas où la vitesse est suffisamment grande pour que le régime soit turbulent rugueux. Rappelons que dans ce cas, le coefficient de perte de charge linéaire λ est constant et ne dépend que de la rugosité de la conduite.

Le théorème d'Euler s'écrit donc comme suit :

$$dP + \frac{\lambda}{D} \rho \frac{v^2}{2} dx + \rho v dv = 0 \quad (IV.10)$$

IV.2.3 Autres équations générales :

Ces équations sont identiques à celles déjà signalées pour l'onde de choc droite, qui est aussi une transformation adiabatique irréversible :

- L'équation caractéristique du fluide : $P = \rho r T$.
- Les diverses formes du théorème de Barré de Saint Venant sont applicables aux écoulements adiabatiques irréversibles :

$$H_i = C_p T_i = \frac{v^2}{2} + C_p T \quad (IV.11)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{P_i}{\rho_i} = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma+1} \frac{P}{\rho} \quad (IV.12)$$

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{P}{\rho} \quad (IV.13)$$

VI.3 Relations différentielles de l'écoulement :

Afin de prévoir qualitativement les propriétés physiques de cet écoulement établissons les équations différentielles reliant ses divers caractéristiques au nombre de Mach et au coefficient de la perte de charge linéaire λ .

Ecrivant la vitesse en fonction du nombre de Mach.

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{\gamma r T}} \Rightarrow v^2 = \gamma r T M^2 \frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{P}{\rho} \quad (IV.14)$$

D'autre part, nous avons :

$$P = \rho r T \Rightarrow r T = \frac{P}{\rho} \frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{P}{\rho} \quad (IV.15)$$

Donc

$$v^2 = \frac{\gamma P}{\rho} M^2 \frac{T_i}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{P}{\rho} \quad (IV.16)$$

Introduisant cette équation dans l'équation d'Euler (IV.10), on obtient :

$$dP + \frac{\lambda}{D} \frac{\rho}{2} \frac{\gamma P}{\rho} M^2 dx + \frac{1}{2} \rho dv^2 = 0 \quad (\text{IV.17})$$

Divisant cette équation par P :

$$\frac{dP}{P} + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\rho}{P} dv^2 = 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx + \frac{\gamma}{2} M^2 \frac{dv^2}{v^2} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

Pour chercher l'expression $\frac{dP}{P}$ éliminant $\frac{dv^2}{v^2}$

A partir de l'équation de Barré de Saint Venant :

$$\frac{dv^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} dT = 0 \Leftrightarrow \frac{dv^2}{2} + \frac{\gamma T}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Introduisant le nombre de Mach :

$$a = \sqrt{\gamma T} \Rightarrow \sqrt{\gamma T} = \frac{v}{M} \Leftrightarrow \gamma T = \frac{v^2}{M^2} \quad (\text{IV.21})$$

Donc :

$$\frac{dv^2}{2} + \frac{v^2}{(\gamma-1)M^2} \frac{dT}{T} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

A partir de l'équation de la loi des gaz parfaits :

$$P = \rho R T \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (\text{IV.23})$$

A partir de l'équation de continuité :

$$\rho v = cst \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2} \frac{dv^2}{v^2} \quad (\text{IV.24})$$

De l'équation (IV.22) et l'équation (IV.24), l'équation (IV.23) donne :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{2} \frac{dv^2}{v^2} - \frac{M^2(\gamma-1)}{2} \frac{dv^2}{v^2} \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{1}{2} (1 + M^2(\gamma-1)) \frac{dv^2}{v^2} \quad (\text{IV.25})$$

En éliminant $\frac{dv^2}{v^2}$ de cette équation et de l'équation d'Euler, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx + \frac{\gamma}{2} M^2 \left(-\frac{2}{1 + (\gamma-1)M^2} \right) \frac{dP}{P} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{P} \left[1 - \frac{\gamma M^2}{1 + (\gamma-1)M^2} \right] + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{P} \left[\frac{1 + (\gamma-1)M^2 - \gamma M^2}{1 + (\gamma-1)M^2} \right] + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{P} \left[\frac{1 - M^2}{1 + (\gamma-1)M^2} \right] + \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} = \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 \left(\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} \right) dx \quad (\text{IV.26})$$

A partir de l'équation (IV.25), nous obtenons :

$$(\text{IV.25}) \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{dv}{v} = \frac{\lambda \gamma M^2}{2D(M^2 - 1)} dx$$

L'équation (IV.22) donne :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{M^2(\gamma - 1)}{2} \frac{dv^2}{v^2} = \frac{M^2(\gamma - 1)}{2} 2 \frac{dv}{v} = M^2(\gamma - 1) \left[-\frac{\lambda \gamma M^2}{2D(M^2 - 1)} dx \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dT}{T} &= \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} \frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \end{aligned} \quad (\text{IV.27})$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = \frac{dc^2}{c^2} - \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{dM^2}{M^2} = -\frac{\lambda}{D} M^2 dx \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{M^2 - 1} \quad (\text{IV.28})$$

La pression d'arrêt est donné par :

$$\frac{dP'_i}{P} = \left(1 + \frac{(\gamma - 1)M^2}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{IV.29})$$

$$\frac{dP'_i}{P'_i} = \frac{dP}{P} + \frac{\gamma M^2}{2(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)} \frac{dM^2}{M^2} \quad (\text{IV.30})$$

Et en remplaçant $\frac{dP}{P}$ et $\frac{dM^2}{M^2}$ par leurs valeurs :

$$\frac{dP'_i}{P'_i} = -\gamma \frac{M^2}{2} \frac{\lambda}{D} dx \quad (\text{IV.31})$$

Calculons également la variation d'entropie :

$$ds = \frac{dQ}{T} = Cp \frac{dT}{T} - \frac{dP}{\rho T} = Cp \frac{dT}{T} - r \frac{dP}{P} \quad (\text{IV.32})$$

Et remplaçant $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dP}{P}$ par leurs valeurs :

$$ds = \frac{\lambda}{D} dx \gamma r \frac{M^2}{2} \quad (\text{IV.33})$$

Et en éliminant $\frac{\lambda}{D} dx$ de l'expression $\frac{dM^2}{M^2}$, on tire :

$$\frac{ds}{dM} = \frac{r(1 - M^2)}{M(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2)} \quad (\text{IV.34})$$

VI.4 Interprétation physique :

Les expressions de $\frac{dP}{P}$, $\frac{dv}{v}$, $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dM}{M}$ contiennent l'expression $M^2 - 1$ au dénominateur.

$$\frac{dP}{P} = \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} M^2 \left(\frac{1 + (\gamma - 1)M^2}{1 - M^2} \right) dx \quad (\text{IV.35})$$

$$\frac{dv}{v} = - \frac{\lambda \gamma M^2}{2D(M^2 - 1)} dx \quad (\text{IV.36})$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\lambda}{D} \frac{\gamma}{2} \frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} dx \quad (\text{IV.37})$$

$$\frac{dM^2}{M^2} = - \frac{\lambda}{D} M^2 dx \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{M^2 - 1} \quad (\text{IV.38})$$

Ces équations montrent que :

- Pour un écoulement subsonique ($M < 1$), le frottement entraîne une augmentation de la vitesse, du nombre de Mach et une diminution de pression, de température et de la masse volumique.
- Pour un écoulement supersonique ($M > 1$), le frottement entraîne des conséquences inverses des précédentes, c'est-à-dire une diminution de la vitesse et du nombre de Mach et une augmentation de pression, de température et de masse volumique.
- L'expression de $\frac{ds}{dM}$ montre que l'entropie ne peut pas être maximale qu'en un point ou $M=1$. Comme le long de l'écoulement, l'entropie ne peut qu'augmenter et le nombre de Mach tend vers l'unité. On conclut que le nombre de Mach ne peut être égale à l'unité qu'à l'extrémité de la conduite, pour une valeur particulière de la longueur de la conduite dite longueur critique, comme illustré sur la figure IV.3. A l'intérieur de la conduite il ne peut pas y voir passage continu d'un écoulement subsonique à un écoulement supersonique ou vis-à-vis.

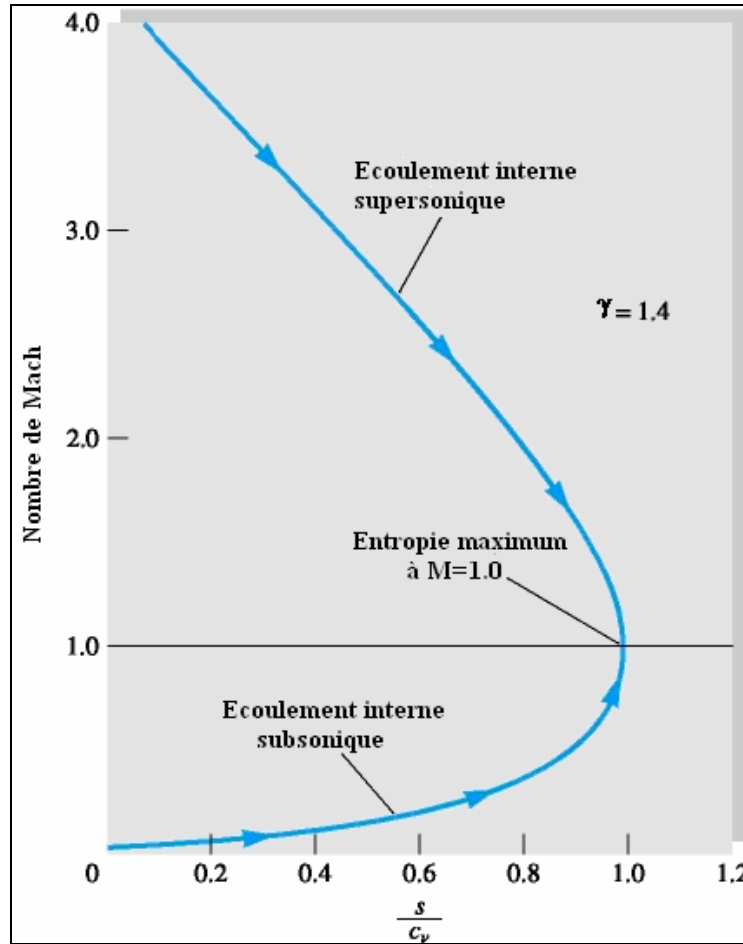


Fig. IV.3 : Ecoulement adiabatique avec friction dans un conduit de section constante s'approche toujours de $M=1$ pour satisfaire la seconde loi de la thermodynamique. La courbe calculée est indépendante de la valeur du coefficient de friction.

VI.5 Intégration des équations entre deux points de l'écoulement :

L'expression de $\frac{dM^2}{M^2}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\lambda}{D} dx = \frac{1 - M^2}{\gamma M^4 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} dM^2 \quad (\text{IV.39})$$

Et en intégrant entre deux points 1 et 2.

$$\frac{\lambda}{D} (x_2 - x_1) = \frac{M_2^2 - M_1^2}{\gamma M_1^2 M_2^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_1^2}{M_2^2} \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right] \quad (\text{IV.40})$$

La représentation graphique de la fonction précédente pour une valeur donnée de M_1 permet donc de déterminer la valeur de M_2 pour une abscisse x_2 . Les autres relations entre les grandeurs aux points 1 et 2 s'obtiennent à partir de la loi des gaz parfaits, de l'équation de continuité, et du théorème de Barré de Saint Venant. Celui-ci peut s'écrire :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \quad (\text{IV.41})$$

L'équation de continuité donne :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad (\text{IV.42})$$

Et la loi des gaz parfaits :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{T_2}{T_1} \quad (\text{IV.43})$$

En pratique cette méthode est peu commode car la relation entre M_2 et x_2-x_1 dépend de la valeur de M_1 .

$$\frac{\bar{\lambda}}{D} L^* = \frac{1-M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right] \quad (\text{IV.44})$$

$\bar{\lambda}$ C'est le coefficient de perte de charge moyen entre 0 et L^* .

Pour les conduites non circulaires, D est remplacé par le diamètre hydraulique, dont l'expression est donnée par :

VI.6 Calculs pratiques (Table de Fanno) :

Les applications pratiques sont facilitées en faisant intervenir les conditions dans la section (réelle ou fictive) où le nombre de Mach est égal à l'unité. Nous caractérisons ces conditions dites conditions soniques par l'exposant *. Nous avons vu que cette condition ne pouvait être réalisée qu'à l'extrémité de la conduite. La longueur critique L^* correspond à un nombre de mach M à l'entrée est obtenue en faisant $M_2=1$ et $M_1=M$ dans les expressions précédentes. On a donc :

$$D_h = \frac{4 * \text{Surface}}{\text{Perimètre}} \quad (\text{IV.45})$$

L'équation précédente (IV.44) est tabulée en fonction du nombre de Mach dans le tableau IV.1 (Table de Fanno). L^* est la longueur du conduit nécessaire pour développer un écoulement à partir du nombre de Mach M jusqu'au point sonique. Plusieurs problèmes comportent des petits conduits qui ne deviennent jamais sonique, pour eux la solution utilise la différence des tables. Par exemple la longueur ΔL exige un développement de M_1 à M_2 est donné par :

$$\frac{\bar{\lambda}}{D} \Delta L = \left(\frac{\bar{\lambda}}{D} L^* \right)_1 - \left(\frac{\bar{\lambda}}{D} L^* \right)_2 \quad (\text{IV.46})$$

A partir du théorème de BSV :

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{\gamma-1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} = \frac{T}{T_c} \quad (\text{IV.47})$$

D'après l'équation de continuité :

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{v}{v^*} = M \sqrt{\frac{T}{T^*}} = M \sqrt{\frac{\gamma+1}{2(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}} \quad (\text{IV.48})$$

D'après l'équation des gaz parfaits :

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{T}{T^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{\gamma+1}{2(\gamma + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}} \quad (\text{IV.49})$$

D'après les relations isentropiques pendant l'arrêt :

$$\frac{\frac{P_i'}{P}}{\frac{P_i'^*}{P^*}} = \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{IV.50})$$

D'où :

$$\frac{P_i'}{P_i^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\left[\frac{2(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)}{\gamma+1} \right]^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \quad (\text{IV.51})$$

Tous ces rapports sont tabulés dans les tables de Fanno en fonction du nombre de Mach (.le tableau IV.1).

Remarques :

- Les conditions soniques à l'extrémité de la longueur critique sont différentes des conditions critiques définies au col d'une tuyère, sauf en ce qui concerne les températures. En effet $\frac{T_i}{T^*} = \frac{T_i}{T_c}$ puisqu'il y a conservation de la température d'arrêt.
- Dans le cas où le changement s'effectue entre M_1 et M_2 , le produit de ces rapports est utilisé par exemple. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P^*} \frac{P^*}{P_1}$

P^* est la valeur constante de référence.

VI.7 Exemple numérique :

Une conduite de section constante est le siège d'un écoulement adiabatique d'air. A l'entrée, les conditions sont $M_1 = 3$ bars, $T_1 = 300\text{K}$. A la sortie le nombre de Mach est $M_2 = 0.7$. Etudier cet écoulement en comparant le calcul direct et l'utilisation des tables de Fanno.

Calcul de la température de sortie :

Le théorème de BSV s'écrit :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} = \frac{1 + 0.2(0.3)^2}{1 + 0.2(0.7)^2} = 0.927$$

$$\text{Donc : } T_2 = T_1 \cdot 0.927 = 300 \times 0.927 = 278.142 \text{ K}$$

A partir des tables de Fanno :

$$\text{Pour } M=0.3 \quad \text{donc} \quad \frac{T_1}{T^*} = 1.1788$$

$$\text{Pour } M=0.7 \quad \text{donc} \quad \frac{T_2}{T^*} = 1.0929$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1.1788}{1.0929} = 1.0785$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{1.0785} = \frac{300}{1.0785} = 278.14K$$

Calcul de la pression de sortie :

A partir de l'équation de continuité :

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \Leftrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{P_1}{rT_1}}{\frac{P_2}{rT_2}} = \frac{v_2}{v_1} \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1 v_2}{T_2 v_1}$$

D'autre part :

$$v = M \sqrt{\gamma T}$$

Donc :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \frac{M_2 \sqrt{T_2}}{M_1 \sqrt{T_1}}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{M_2 \sqrt{T_1}}{M_1 \sqrt{T_2}} = \frac{0.7}{0.3} \sqrt{\frac{1}{0.927}} = 2.423$$

Donc :

$$P_2 = \frac{P_1}{2.423} = \frac{3}{2.423} = 1.238bar$$

A partir des tables de Fanno :

$$\text{Pour } M=0.3 \quad \text{donc } \frac{P_1}{P^*} = 3.6191$$

$$\text{Pour } M=0.7 \quad \text{donc } \frac{P_2}{P^*} = 1.4935$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = 2.4232$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{3}{2.423} = 1.238bar$$

Calcul de la pression d'arrêt à l'entrée et à la de sortie :

$$\frac{P_{r1}}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Leftrightarrow P_{r1} = P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3 \left(1 + \frac{0.2}{2} (0.3)^2\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 3.1932bar$$

$$\frac{P_{r2}}{P} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Leftrightarrow P_{r2} = P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 3 \left(1 + \frac{0.2}{2} (0.7)^2\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 1.7186bar$$

A partir des tables de Fanno, on est obligé de calculer les conditions P^* , P_i^* et T^* au point $M=1$. A partir des tables :

Pour $M=0.3$ donc $\frac{P_1}{P^*} = 3.6191 \Leftrightarrow P^* = 0.829 \text{ bar}$

Pour $M=0.7$ donc $\frac{P_2}{P^*} = 1.4935 \Leftrightarrow P^* = 0.829 \text{ bar}$

La même chose pour la température :

$$T^* = \frac{T_1}{1.1788} = \frac{T_2}{1.0929} = 254.496 \text{ K} \approx 254.5 \text{ K}$$

A partir du théorème de Barré de Saint Venant :

$$\frac{P_0^*}{P^*} = \frac{P_i'^*}{P_i^*} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{3.5} = 1.892$$

$$\frac{P_i'^*}{P_i^*} = 1.892 \Leftrightarrow P_i'^* = 1.568 \text{ bar} \text{ C'est la pression d'arrêt du point critique, d'où :}$$

Pour $M=0.3$ donc $\frac{P_{r1}}{P_i^*} = 2.0351 \Leftrightarrow P_{r1} = 3.1949 \text{ bar}$

Pour $M=0.7$ donc $\frac{P_{r2}}{P_i^*} = 1.0944 \Leftrightarrow P_{r2} = 1.718 \text{ bar}$

Calcul de des vitesses à l'entrée et à la de sortie :

$$v_1 = M_1 \sqrt{\gamma T_1} \Rightarrow v_1 = 104.15 \text{ m/s}$$

$$v_2 = M_2 \sqrt{\gamma T_2} \Rightarrow v_2 = 234.01 \text{ m/s}$$

A partir des tables de Fanno,

Nous avons ;

$$v^* = \sqrt{\gamma T^*} \Rightarrow v^* = 319.78 \text{ m/s}$$

D'où :

$$\frac{v_2}{v^*} = 0.7318 \Rightarrow v_2 = 234.015 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_1}{v^*} = 0.3257 \Rightarrow v_1 = 104.15 \text{ m/s}$$

Calcul de de la longueur de la conduite si $\lambda=0.04$ et $D= 0.1 \text{ m}$:

Pour $M=0.3$ donc $\frac{\lambda L_1^*}{D} = 5.2993 \Leftrightarrow L_1^* = 13.24 \text{ m}$

Pour $M=0.7$ donc $\frac{\lambda L_2^*}{D} = 0.2081 \Leftrightarrow L_2^* = 0.52025 \text{ m}$

$$\Delta L = L_1^* - L_2^* = 12.72 \text{ m}$$

Université de Med Boudiaf M'sila
Département de Génie Mécanique
Option : Energétique

Série N°4

Exo01 :

Un courant d'air s'écoule de façon subsonique dans une conduite adiabatique de 2 cm de diamètre. Le coefficient de friction moyen est 0.024.

- Quelle est la longueur de conduite nécessaire d'accélérer l'écoulement fluide de $M_1 = 0.1$ à $M_2 = 0.5$?
- Quelle longueur complémentaire l'accélérera à $M_3 = 1.0$? Supposez que $\gamma = 1.4$.

Exo02 :

L'entrée d'une conduite parfaitement calorifugée, l'air présente les caractéristiques suivantes : $P_1 = 1\text{ bar}$, $T_1 = 260\text{ K}$, $M_1 = 2.6$. L'air sera assimilé à un gaz parfait de constantes : $\gamma = 1.4$, $C_p = 1000\text{ J/kg K}$, $r = 287\text{ J/kg K}$. La conduite a un diamètre de 50 mm, son coefficient de perte de charge linéaire est $\lambda = 0.01$.

1°) A l'aide des tables de Fanno déterminer la longueur de la conduite pour que l'écoulement soit sonique à la section de sortie, sans la présence d'aucune discontinuité à l'intérieur de la conduite.

2°) En opérant d'une part par calcul et d'autre part en utilisant les tables de Fanno et en comparant les résultats calculer ;

- La température à la sortie ;
- La pression à la sortie ;
- Les pressions génératrices locales à l'entrée et à la sortie.
-

3°) Calculer les températures d'arrêt et les vitesses à l'entrée et à la sortie de la conduite.

4°) Calculer la variation d'entropie $S_2 - S_1$ entre l'entrée et la sortie.

Exo03 :

De l'air s'écoule subsoniquement dans un conduit adiabatique de 2 cm de diamètre avec un coefficient de frottement de 0.024. Assumant à $M_1 = 0.1$, nous avons $P_1 = 600\text{ kPa}$ et $T_1 = 450\text{ K}$ à une autre section 2, $M_2 = 0.5$, on demande de calculer :

- P_2 ,
- T_2 ;
- v_2 ;
- P_{02}

A partir des tables de Fanno et par calcul.

TABLE IV.1 : Ecoulement adiabatique d'un fluide visqueux dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Fanno).

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
0.00	∞	∞	1.2000	∞	∞
0.02	1778.4500	54.7701	1.1999	45.6454	28.9421
0.04	440.3523	27.3817	1.1996	22.8254	14.4815
0.06	193.0311	18.2509	1.1991	15.2200	9.6659
0.08	106.7182	13.6843	1.1985	11.4182	7.2616
0.10	66.9216	10.9435	1.1976	9.1378	5.8218
0.12	45.4080	9.1156	1.1966	7.6182	4.8643
0.14	32.5113	7.8093	1.1953	6.5333	4.1824
0.16	24.1978	6.8291	1.1939	5.7200	3.6727
0.18	18.5427	6.0662	1.1923	5.0879	3.2779
0.20	14.5333	5.4554	1.1905	4.5826	2.9635
0.22	11.5961	4.9554	1.1885	4.1694	2.7076
0.24	9.3865	4.5383	1.1863	3.8255	2.4956
0.26	7.6876	4.1851	1.1840	3.5347	2.3173
0.28	6.3572	3.8820	1.1815	3.2857	2.1656
0.30	5.2993	3.6191	1.1788	3.0702	2.0351
0.32	4.4467	3.3887	1.1759	2.8818	1.9219
0.34	3.7520	3.1853	1.1729	2.7158	1.8229
0.36	3.1801	3.0042	1.1697	2.5684	1.7358
0.38	2.7054	2.8420	1.1663	2.4367	1.6587
0.40	2.3085	2.6958	1.1628	2.3184	1.5901
0.42	1.9744	2.5634	1.1591	2.2115	1.5289
0.44	1.6915	2.4428	1.1553	2.1145	1.4740
0.46	1.4509	2.3326	1.1513	2.0261	1.4246
0.48	1.2453	2.2313	1.1471	1.9451	1.3801
0.50	1.0691	2.1381	1.1429	1.8708	1.3398
0.52	0.9174	2.0519	1.1384	1.8024	1.3034
0.54	0.7866	1.9719	1.1339	1.7391	1.2703
0.56	0.6736	1.8975	1.1292	1.6805	1.2403
0.58	0.5757	1.8282	1.1244	1.6260	1.2130
0.60	0.4908	1.7634	1.1194	1.5753	1.1882
0.62	0.4172	1.7026	1.1143	1.5279	1.1656
0.64	0.3533	1.6456	1.1091	1.4836	1.1451
0.66	0.2979	1.5919	1.1038	1.4421	1.1265
0.68	0.2498	1.5413	1.0984	1.4032	1.1097
0.70	0.2081	1.4935	1.0929	1.3665	1.0944
0.72	0.1721	1.4482	1.0873	1.3320	1.0806
0.74	0.1411	1.4054	1.0815	1.2994	1.0681
0.76	0.1145	1.3647	1.0757	1.2686	1.0570
0.78	0.0917	1.3261	1.0698	1.2395	1.0471
0.80	0.0723	1.2893	1.0638	1.2119	1.0382
0.82	0.0559	1.2542	1.0578	1.1858	1.0305
0.84	0.0423	1.2208	1.0516	1.1609	1.0237
0.86	0.0310	1.1889	1.0454	1.1373	1.0179

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
0.88	0.0218	1.1583	1.0391	1.1148	1.0129
0.90	0.0145	1.1291	1.0327	1.0934	1.0089
0.92	0.0089	1.1011	1.0263	1.0730	1.0056
0.94	0.0048	1.0743	1.0198	1.0535	1.0031
0.96	0.0021	1.0485	1.0132	1.0348	1.0014
0.98	0.0005	1.0238	1.0066	1.0170	1.0003
1.00	0.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.0005	0.9771	0.9933	0.9837	1.0003
1.04	0.0018	0.9551	0.9866	0.9681	1.0013
1.06	0.0038	0.9338	0.9798	0.9531	1.0029
1.08	0.0066	0.9133	0.9730	0.9387	1.0051
1.10	0.0099	0.8936	0.9662	0.9249	1.0079
1.12	0.0138	0.8745	0.9593	0.9116	1.0113
1.14	0.0182	0.8561	0.9524	0.8988	1.0153
1.16	0.0230	0.8383	0.9455	0.8865	1.0198
1.18	0.0281	0.8210	0.9386	0.8747	1.0248
1.20	0.0336	0.8044	0.9317	0.8633	1.0304
1.22	0.0394	0.7882	0.9247	0.8524	1.0366
1.24	0.0455	0.7726	0.9178	0.8418	1.0432
1.26	0.0517	0.7574	0.9108	0.8316	1.0504
1.28	0.0582	0.7427	0.9038	0.8218	1.0581
1.30	0.0648	0.7285	0.8969	0.8123	1.0663
1.32	0.0716	0.7147	0.8899	0.8031	1.0750
1.34	0.0785	0.7012	0.8829	0.7942	1.0842
1.36	0.0855	0.6882	0.8760	0.7856	1.0940
1.38	0.0926	0.6755	0.8690	0.7773	1.1042
1.40	0.0997	0.6632	0.8621	0.7693	1.1149
1.42	0.1069	0.6512	0.8551	0.7615	1.1262
1.44	0.1142	0.6396	0.8482	0.7540	1.1379
1.46	0.1215	0.6282	0.8413	0.7467	1.1501
1.48	0.1288	0.6172	0.8344	0.7397	1.1629
1.50	0.1360	0.6065	0.8276	0.7328	1.1762
1.52	0.1433	0.5960	0.8207	0.7262	1.1899
1.54	0.1506	0.5858	0.8139	0.7198	1.2042
1.56	0.1579	0.5759	0.8071	0.7135	1.2190
1.58	0.1651	0.5662	0.8004	0.7074	1.2344
1.60	0.1724	0.5568	0.7937	0.7016	1.2502
1.62	0.1795	0.5476	0.7869	0.6958	1.2666
1.64	0.1867	0.5386	0.7803	0.6903	1.2836
1.66	0.1938	0.5299	0.7736	0.6849	1.3010
1.68	0.2008	0.5213	0.7670	0.6796	1.3190
1.70	0.2078	0.5130	0.7605	0.6745	1.3376
1.72	0.2147	0.5048	0.7539	0.6696	1.3567
1.74	0.2216	0.4969	0.7474	0.6648	1.3764
1.76	0.2284	0.4891	0.7410	0.6601	1.3967
1.78	0.2352	0.4815	0.7345	0.6555	1.4175
1.80	0.2419	0.4741	0.7282	0.6511	1.4390
1.82	0.2485	0.4668	0.7218	0.6467	1.4610
1.84	0.2551	0.4597	0.7155	0.6425	1.4836
1.86	0.2616	0.4528	0.7093	0.6384	1.5069
1.88	0.2680	0.4460	0.7030	0.6344	1.5308
1.90	0.2743	0.4394	0.6969	0.6305	1.5553
1.92	0.2806	0.4329	0.6907	0.6267	1.5804

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
1.94	0.2868	0.4265	0.6847	0.6230	1.6062
1.96	0.2929	0.4203	0.6786	0.6193	1.6326
1.98	0.2990	0.4142	0.6726	0.6158	1.6597
2.00	0.3050	0.4082	0.6667	0.6124	1.6875
2.02	0.3109	0.4024	0.6608	0.6090	1.7160
2.04	0.3168	0.3967	0.6549	0.6057	1.7451
2.06	0.3225	0.3911	0.6491	0.6025	1.7750
2.08	0.3282	0.3856	0.6433	0.5994	1.8056
2.10	0.3339	0.3802	0.6376	0.5963	1.8369
2.12	0.3394	0.3750	0.6320	0.5934	1.8690
2.14	0.3449	0.3698	0.6263	0.5905	1.9018
2.16	0.3503	0.3648	0.6208	0.5876	1.9354
2.18	0.3556	0.3598	0.6152	0.5848	1.9698
2.20	0.3609	0.3549	0.6098	0.5821	2.0050
2.22	0.3661	0.3502	0.6043	0.5794	2.0409
2.24	0.3712	0.3455	0.5989	0.5768	2.0777
2.26	0.3763	0.3409	0.5936	0.5743	2.1153
2.28	0.3813	0.3364	0.5883	0.5718	2.1538
2.30	0.3862	0.3320	0.5831	0.5694	2.1931
2.32	0.3911	0.3277	0.5779	0.5670	2.2333
2.34	0.3959	0.3234	0.5728	0.5647	2.2744
2.36	0.4006	0.3193	0.5677	0.5624	2.3164
2.38	0.4053	0.3152	0.5626	0.5602	2.3593
2.40	0.4099	0.3111	0.5576	0.5580	2.4031
2.42	0.4144	0.3072	0.5527	0.5558	2.4479
2.44	0.4189	0.3033	0.5478	0.5537	2.4936
2.46	0.4233	0.2995	0.5429	0.5517	2.5403
2.48	0.4277	0.2958	0.5381	0.5497	2.5880
2.50	0.4320	0.2921	0.5333	0.5477	2.6367
2.52	0.4362	0.2885	0.5286	0.5458	2.6864
2.54	0.4404	0.2850	0.5239	0.5439	2.7372
2.56	0.4445	0.2815	0.5193	0.5421	2.7891
2.58	0.4486	0.2781	0.5147	0.5402	2.8420
2.60	0.4526	0.2747	0.5102	0.5385	2.8960
2.62	0.4565	0.2714	0.5057	0.5367	2.9511
2.64	0.4604	0.2682	0.5013	0.5350	3.0073
2.66	0.4643	0.2650	0.4969	0.5333	3.0647
2.68	0.4681	0.2619	0.4925	0.5317	3.1233
2.70	0.4718	0.2588	0.4882	0.5301	3.1830
2.72	0.4755	0.2558	0.4839	0.5285	3.2439
2.74	0.4791	0.2528	0.4797	0.5269	3.3061
2.76	0.4827	0.2498	0.4755	0.5254	3.3695
2.78	0.4863	0.2470	0.4714	0.5239	3.4342
2.80	0.4898	0.2441	0.4673	0.5225	3.5001
2.82	0.4932	0.2414	0.4632	0.5210	3.5674
2.84	0.4966	0.2386	0.4592	0.5196	3.6359
2.86	0.5000	0.2359	0.4552	0.5182	3.7058
2.88	0.5033	0.2333	0.4513	0.5169	3.7771
2.90	0.5065	0.2307	0.4474	0.5155	3.8498
2.92	0.5097	0.2281	0.4436	0.5142	3.9238
2.94	0.5129	0.2256	0.4398	0.5129	3.9993
2.96	0.5160	0.2231	0.4360	0.5116	4.0762
2.98	0.5191	0.2206	0.4323	0.5104	4.1547

M	$\bar{f}L^*/D$	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
3.00	0.5222	0.2182	0.4286	0.5092	4.2346
3.02	0.5252	0.2158	0.4249	0.5080	4.3160
3.04	0.5281	0.2135	0.4213	0.5068	4.3989
3.06	0.5310	0.2112	0.4177	0.5056	4.4835
3.08	0.5339	0.2090	0.4142	0.5045	4.5696
3.10	0.5368	0.2067	0.4107	0.5034	4.6573
3.12	0.5396	0.2045	0.4072	0.5023	4.7467
3.14	0.5424	0.2024	0.4038	0.5012	4.8377
3.16	0.5451	0.2002	0.4004	0.5001	4.9304
3.18	0.5478	0.1981	0.3970	0.4991	5.0248
3.20	0.5504	0.1961	0.3937	0.4980	5.1209
3.22	0.5531	0.1940	0.3904	0.4970	5.2189
3.24	0.5557	0.1920	0.3872	0.4960	5.3186
3.26	0.5582	0.1901	0.3839	0.4951	5.4201
3.28	0.5607	0.1881	0.3807	0.4941	5.5234
3.30	0.5632	0.1862	0.3776	0.4931	5.6286
3.32	0.5657	0.1843	0.3745	0.4922	5.7357
3.34	0.5681	0.1825	0.3714	0.4913	5.8448
3.36	0.5705	0.1806	0.3683	0.4904	5.9558
3.38	0.5729	0.1788	0.3653	0.4895	6.0687
3.40	0.5752	0.1770	0.3623	0.4886	6.1837
3.42	0.5775	0.1753	0.3594	0.4878	6.3007
3.44	0.5798	0.1736	0.3564	0.4869	6.4197
3.46	0.5820	0.1718	0.3535	0.4861	6.5409
3.48	0.5842	0.1702	0.3507	0.4853	6.6642
3.50	0.5864	0.1685	0.3478	0.4845	6.7896
3.52	0.5886	0.1669	0.3450	0.4837	6.9172
3.54	0.5907	0.1653	0.3422	0.4829	7.0470
3.56	0.5928	0.1637	0.3395	0.4821	7.1791
3.58	0.5949	0.1621	0.3368	0.4813	7.3134
3.60	0.5970	0.1606	0.3341	0.4806	7.4501
3.62	0.5990	0.1590	0.3314	0.4799	7.5891
3.64	0.6010	0.1575	0.3288	0.4791	7.7304
3.66	0.6030	0.1560	0.3262	0.4784	7.8742
3.68	0.6049	0.1546	0.3236	0.4777	8.0204
3.70	0.6068	0.1531	0.3210	0.4770	8.1690
3.72	0.6087	0.1517	0.3185	0.4763	8.3202
3.74	0.6106	0.1503	0.3160	0.4757	8.4739
3.76	0.6125	0.1489	0.3135	0.4750	8.6302
3.78	0.6143	0.1475	0.3111	0.4743	8.7891
3.80	0.6161	0.1462	0.3086	0.4737	8.9506
3.82	0.6179	0.1449	0.3062	0.4730	9.1147
3.84	0.6197	0.1436	0.3039	0.4724	9.2816
3.86	0.6214	0.1423	0.3015	0.4718	9.4513
3.88	0.6231	0.1410	0.2992	0.4712	9.6237
3.90	0.6248	0.1397	0.2969	0.4706	9.7989
3.92	0.6265	0.1385	0.2946	0.4700	9.9770
3.94	0.6282	0.1372	0.2923	0.4694	10.1580
3.96	0.6298	0.1360	0.2901	0.4688	10.3419
3.98	0.6315	0.1348	0.2879	0.4683	10.5288
4.00	0.6331	0.1336	0.2857	0.4677	10.7187
∞	0.8215	0	0	0.4082	∞