

II.1 Introduction:

Ce chapitre traite les écoulements compressibles, avec un nombre de Mach plus de 0,3 et ainsi exhibent des changements de densité non négligeables. Si le changement de la densité est significatif, il s'ensuit à partir de l'équation d'état que les changements de pression et de température sont ainsi considérables. Donc on travaille avec quatre (4) équations :

- * L'équation de continuité
- * L'équation de MVT ;
- * L'équation d'énergie ;
- * L'équation d'état.

Avec quatre inconnues ; la pression, la densité, la température et la vitesse (P, ρ , T, V). Ainsi la théorie générale de l'écoulement compressible est tout à fait compliquée et on va essayer de mettre des simplifications, spécialement par supposition que l'écoulement est isentropique (adiabatique et réversible).

II.2 Mise en forme du 1^{er} principe de la thermodynamique :

Le premier principe de la thermodynamique s'exprime comme :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = q + \int \frac{dp}{\rho} \quad (\text{II.1a})$$

Avec :

h : l'enthalpie du gaz ;

e_c : l'énergie cinétique ;

e_p : l'énergie potentielle ;

q : la quantité de chaleur ;

p : la pression ;

ρ : la masse volumique.

Si on néglige les forces de pesanteur, la variation d'énergie potentielle devient négligeable et il reste :

$$\Delta h + \Delta e_c = q + \int \frac{dp}{\rho} \quad (\text{II.1b})$$

Pour un écoulement adiabatique ($q = 0$) en l'absence de machine ($\int \frac{dP}{\rho} = 0$) pas de travail de transvasement $W'=0$) alors :

$$\Delta h + \Delta e_c = 0 \quad (\text{II.1c})$$

Ou encore :

$$h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0 \quad (\text{II.1d})$$

Qui se résume par :

$$h + \frac{1}{2}v^2 = cst \quad (\text{II.1e})$$

La somme $(h + 1/2v^2)$ est appelée énergie totale du fluide. Ainsi dans un écoulement adiabatique, l'énergie totale du fluide est constante.

Cette équation (parfois appelée équation de ZEUNER) est valable que le fluide soit visqueux ou non. Elle pourra en particulier s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.

Remarquons aussi que cette somme fait intervenir la grandeur thermodynamique « h » et une grandeur mécanique « v », c'est pourquoi il n'y a pas de terme de perte de charge dans cette équation de conservation.

II.3 Ecoulement adiabatique pour un gaz parfait

Nous ne faisons aucune hypothèse ici sur la réversibilité de l'écoulement. Il est considéré comme irréversible. Nous avons les équations suivantes :

$$h + \frac{1}{2}v^2 = cst \quad (\text{II.2a})$$

$$dh = Cp dt \quad (\text{II.2b})$$

$$Cp = \frac{\gamma}{\gamma - 1} r \quad (\text{II.2c})$$

$$P = \rho r T \quad (\text{II.d})$$

A partir de l'équation (II.2b), nous avons :

$$dh = Cp dt \Leftrightarrow \int dh = \int Cp dt \Rightarrow h = CpT$$

Puisque $h(T=0)=0$.

A partir de l'équation (II.2c), nous avons :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} rT$$

D'autre part, l'équation (II.2d) nous permet d'écrire :

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}$$

Donc l'équation (II.2a) donne :

$$h + \frac{1}{2}v^2 = cst \Rightarrow \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma - 1} rT + \frac{1}{2}v^2 = cst & (\text{II.3a}) \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = cst & (\text{II.3b}) \end{cases}$$

Ces deux relations présentent la relation de Barré de Saint Venant (BSV).

Remarque :

Ces deux relations restent valables pour les écoulements adiabatiques réversibles.

II.4 Définitions particulières :

a) Etat générateur :

On appelle ainsi l'état du fluide en un point de l'écoulement où sa vitesse est nulle ($v=0$ m/s). On le caractérise avec un indice « i » ou « 0 ». Cette notion d'état générateur est particulière aux fluides compressibles. On peut avoir une représentation physique en supposant que l'écoulement est alimenté par un réservoir grand dans lequel la vitesse est particulièrement nulle comme illustré sur la figure 1. A l'intérieur du réservoir, les caractéristiques indicées « 0 » sont celles de l'état générateur. Notamment, la vitesse d'écoulement v_0 est quasiment nulle.

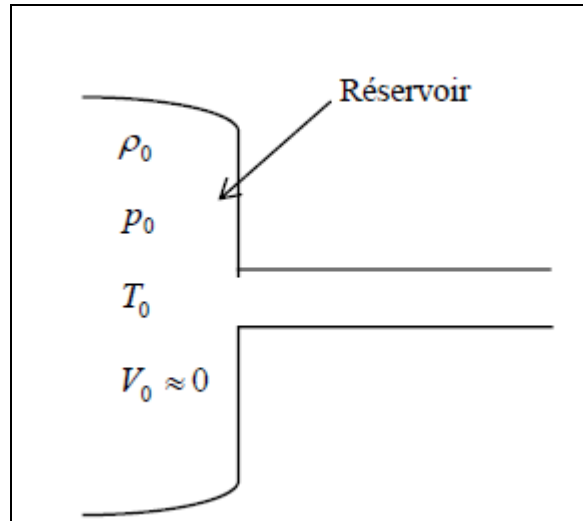


Figure II.1 : Etat générateur.

On peut donc exprimer la constante de la relation de Barré de Saint Venant, grâce à cet état générateur :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} rT + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} rT_i \quad (\text{II.4a})$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_i}{\rho_i} \quad (\text{II.4b})$$

b) Nombre de Mach :

On appelle le nombre de Mach le rapport $M=v/a$.

v : la vitesse du fluide au point considéré.

a : la vitesse local du son c.-à-d. la vitesse du son dans le fluide à la température du point étudié.

c) Vitesse de propagation du son :

Pour cela, imaginons un milieu indéfini homogène et isotrope. Une perturbation est générée depuis une source (une surpression par exemple) qui va se propager depuis ce point. Nous savons que cette propagation se fait à vitesse constante qui représente la vitesse du SON v comme illustré sur la figure 2.

On désigne dans le milieu non perturbé, la pression par « p » et la masse volumique par « ρ », et dans le milieu perturbé (en amont, donc) « $p+dp$ » et « $\rho + dp$ ».

Raisonnons sur l'écoulement relatif du milieu non perturbé : on prend pour repère la petite surface « S », et on analyse l'écoulement du milieu non perturbé au travers de cette surface.

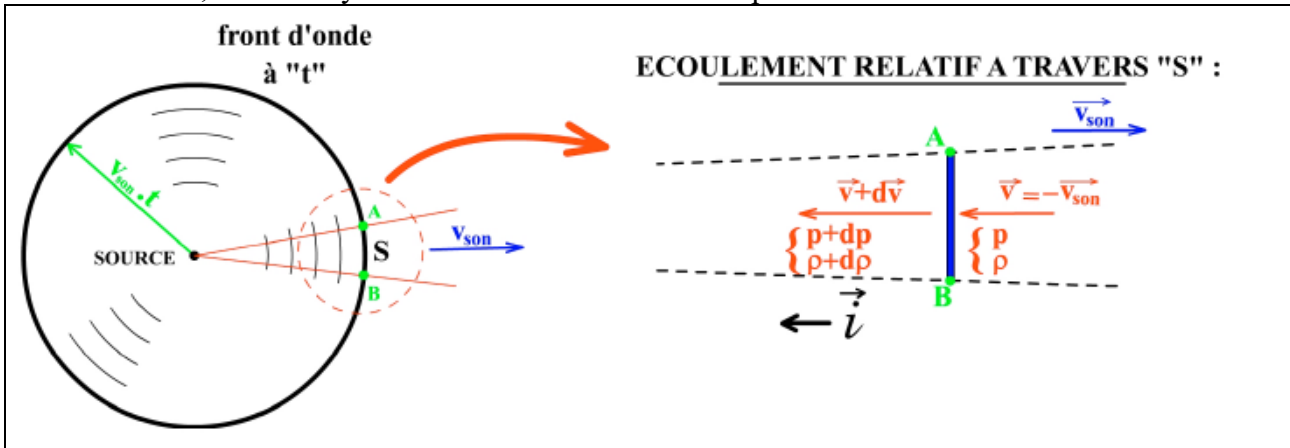


Figure II.2 : Propagation du son.

La conservation du débit massique s'exprime par :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{s} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (\text{II.5a})$$

Ici, puisque la section S ne varie pas sous l'action de la perturbation (onde longitudinale) :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv_{SON}}{v_{SON}} = 0 \quad (\text{II.5b})$$

Le théorème d'Euler en régime stationnaire $Q_m (\vec{v}_s - \vec{v}_i) = \sum_{\text{Systeme}} \vec{F}_{ext}$ qui s'exprime par projection sur $\vec{i}$.

$$\begin{aligned} Q_m (v_s - v_i) \vec{i} &= P_s \vec{i} - (P + dP) s \vec{i} \Rightarrow \rho s v_{son} (v_s - v_i) = P_s - P_s + dP s \\ &\Rightarrow -\rho v_{SON} dv_{SON} = -dP \\ &\Rightarrow -\rho v_{SON} dv_{SON} + dP = 0 \\ &\Rightarrow dv_{SON} = -\frac{dP}{\rho v_{SON}} \quad (\text{II.5c}) \end{aligned}$$

L'équation (II.5b) devient :

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho v_{SON}} \times \frac{1}{v_{SON}} &= 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho v_{SON}^2} = 0 \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} &= v_{SON}^2 \\ \Rightarrow v_{SON} &= \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (\text{II.5d}) \end{aligned}$$

Application au gaz parfait :

Pour les gaz, l'évolution est très rapide si bien que la propagation peut être considérée comme adiabatique. De plus, les frottements étant négligeables, on pourra considérer la transformation comme isentropique :

$$PV^\gamma = cst = \frac{P}{\rho^\gamma} = P\rho^{-\gamma}$$

On dérive :

$$\rho^{-\gamma} dP + (-\gamma)P\rho^{-(\gamma+1)} d\rho = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{d\rho} = \frac{\gamma P \rho^{-(\gamma+1)}}{\rho^{-\lambda}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{d\rho} = \gamma P \rho^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Ainsi la vitesse du son s'exprime :

$$v_{SON} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (\text{II.6a})$$

D'autre part, puisque le gaz est parfait :

$$P = \rho r T \Leftrightarrow \frac{P}{\rho} = r T$$

Donc la vitesse du son s'exprime comme suit :

$$v_{SON} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\gamma r T} \quad (\text{II.6b})$$

Pour l'air, dans les conditions normales, $p = 1,013 \text{ bar}$, $\gamma=1,4$ et $\rho = 1,293 \text{ kg m}^3$, on obtient $v_{SON} = 331 \text{ m/s}$.

REMARQUE :

Dans les tuyaux de faibles sections, les frottements ne sont plus négligeables, et il y a des échanges avec la paroi. On pourra constater des écarts avec la valeur théorique.

II.5 Classification des écoulements :

Le nombre de Mach est le paramètre dominant dans l'étude de l'écoulement compressible. L'aérodynamique notamment utilise une classification des écoulements en fonction des diverses valeurs du nombre de Mach :

- $M < 0.3$: écoulement incompressible, où les effets de la densité sont négligeables.
- $0.3 < M < 0.8$: écoulement subsonique, où les effets de la densité sont importants mais sans apparition des ondes de choc.
- $0.8 < M < 1.2$: écoulement transsonique, où les ondes de choc apparaissent, en divisant l'écoulement en régions subsonique et supersonique.
- $1.2 < M < 5.0$: écoulement supersonique, où les ondes de choc existent sans aucune région subsonique.
- $5.0 < M$: écoulement hypersonique, où les ondes de choc et d'autres variations des propriétés de l'écoulement sont spécialement fortes.

Ces cinq catégories sont essentiellement utilisées dans les écoulements compressibles externes. Alors, pour les écoulements internes, la question sera simplement si que l'écoulement est **subsonique** ($M < 1$), **supersonique** ($M > 1$) et **sonique** ($M = 1$).

II.6 Autres formulations de la relation de Barré de Saint Venant :

En considérant toujours l'écoulement du gaz parfait comme adiabatique, en partant de l'équation de BSV.

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_i}{\rho_i}$$

Nous avons :

$$\frac{P}{\rho} = rT$$

Donc, l'équation de BSV peut être exprimée en fonction de la température comme suit :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} rT + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} rT_i$$

Nous avons également la vitesse du son :

$$a = \sqrt{\gamma rT} \Leftrightarrow a^2 = \gamma rT$$

L'équation d BSV prend la forme suivante :

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{a_i^2}{\gamma-1}$$

On multipliant cette équation par $2/a^2$, on obtient :

$$\left[\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{1}{2} v^2 \right] \frac{2}{a^2} = \frac{2a_i^2}{(\gamma-1)a^2} \Leftrightarrow \frac{2}{\gamma-1} + \frac{v^2}{a^2} = \left(\frac{a_i}{a} \right)^2 \times \frac{2}{\gamma-1} \Leftrightarrow \frac{2}{\gamma-1} + M^2 = \frac{T_i}{T} \times \frac{2}{\gamma-1}$$

Donc :

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \quad (\text{II.7a})$$

Si l'écoulement est isentropique :

$$PV^\gamma = cst = \frac{P}{\rho^\gamma} = cst \Rightarrow P = cst \times \rho^\gamma$$

De même :

$$PV^{\gamma-1/\gamma} = cst \Rightarrow T = cst \times P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\frac{T_i}{T} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 = \left(\frac{P_i}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_i}{\rho} \right)^{\gamma-1} \quad (\text{II.7b})$$

Cette équation porte le nom d'équation de Barré de Saint Venant (BSV). Elle exprime le rapport des températures, des pressions et des masses volumiques en fonction du nombre de Mach. Les tables en annexe à la fin du cours donnent, entre autre, les résultats numériques de cette équation.

Pour deux points d'un même écoulement :

$$\frac{T_i}{T_1} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2 \quad (\text{a})$$

$$\frac{T_i}{T_2} = 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_2^2 \quad (\text{b})$$

On divise (a) sur (b), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_2^2} \quad (\text{II.7c})$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \left[\frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_2^2} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.7d})$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left[\frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_2^2} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.7e})$$

II.7 Etat critique :

L'état d'un fluide en un point où la vitesse est sonique est appelée « état critique » et noté « c ». Il est facile de calculer les caractéristiques de cet état grâce à l'équation de BSV.

$$\frac{T_i}{T_c} = \left(\frac{P_i}{P_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_i}{\rho_c} \right)^{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{2}$$

Ou bien :

$$\frac{T_i}{T_c} = \frac{\gamma+1}{2} \quad (\text{II.8a})$$

$$\frac{P_i}{P_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II.8b})$$

$$\frac{\rho_i}{\rho_c} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (\text{II.8c})$$

De même :

$$\frac{a_i}{a_c} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}} \quad (\text{II.8d})$$

Pour le cas de l'air où $\gamma = 1.4$, nous avons :

$$\frac{T_c}{T_i} = 0.8316$$

$$\frac{P_c}{P_i} = 0.5274$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_i} = 0.6343$$

$$\frac{a_c}{a_i} = 0.912$$

II.8 Théorie de Hugoniot (Relations entre p , v et S) :

Nous savons que dans un écoulement de fluide incompressible, la section et la vitesse varient en sens inverse que la vitesse et la pression. En vue d'établir des propriétés qualitatives analogues pour les écoulements de fluide compressibles, cherchons la relation entre dS et dv d'une part, et entre dv et dP d'autre part.

a) Relation entre dS et dv

En différentiant l'équation de conservation de masse, on obtient :

$$\rho S v = \text{cst}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0 \quad (1)$$

A partir de l'équation de BSV :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv^2}{2} = 0 \quad (2)$$

La vitesse du son est donnée par :

$$a = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \Rightarrow dP = a^2 d\rho$$

L'équation (2) devient :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dv^2}{2a^2}$$

Donc l'équation (1) prend la forme suivante:

$$-\frac{dv^2}{2a^2} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2v dv}{2a^2} + \frac{dS}{S} + \frac{dv}{v} = 0$$

$$\frac{dv}{v} \left[1 - \frac{v^2}{a^2} \right] + \frac{dS}{S} = 0 \Leftrightarrow -\frac{dv}{v} [1 - M^2] + \frac{dS}{S} = 0$$

$$\frac{dS}{S} + = (M^2 - 1) \frac{dv}{v} \quad (\text{II.9a})$$

b) Relation entre dv et dP

A partir de la loi de BSV :

$$v dv + \frac{dP}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow v dv = -\frac{dP}{d\rho} = -\frac{dP}{P} (rT)$$

$$\Leftrightarrow v dv = -(rT) \frac{dP}{P}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{\gamma T}{c^2 \gamma} \frac{dP}{P} = -\frac{a^2}{c^2 \gamma} \frac{dP}{P} = -\frac{1}{M^2 \gamma} \frac{dP}{P} \quad (\text{II.9b})$$

L'inspection de ces deux équations (2.9a et 2.9b) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme $M^2 - 1$. Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.

1. Si $M = 1$; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation 2.9a), donc $dA = 0$, qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure 3), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).

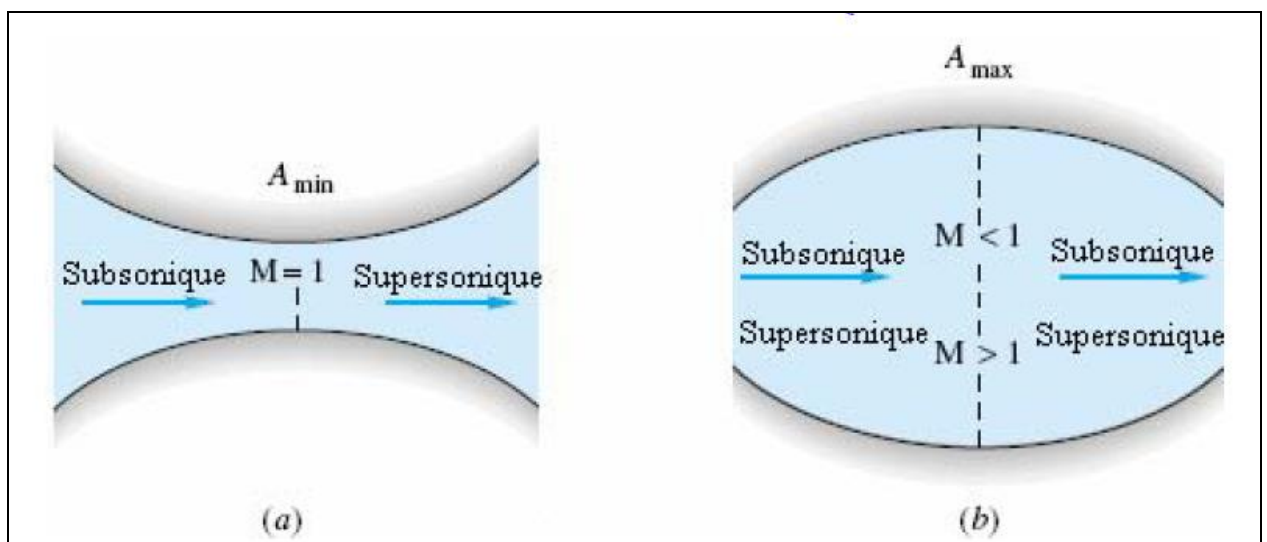


Figure II.3 : Écoulement compressible dans une canalisation de section variable : (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique ; (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

2. Si $M < 1$; écoulement subsonique, quand la section A augmenté la vitesse V diminue et vice-versa.
3. Si $M > 1$; écoulement supersonique, toute augmentation de la section A impliquent une augmentation de la vitesse V et vice-versa.
4. Ainsi d'après l'équation (2.9b), toute variation de la vitesse V entraîne une variation de la pression p dans le sens inverse. Le tableau 2.1 suivant récapitule les quatre cas déjà cités :

Tableau II.1 : Les cas des écoulements.

Propriétés	Écoulement			
	Subsonique		Supersonique	
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

II.9 Relation entre la section S et le nombre de Mach M:

Entre deux points (1) et (2) l'expression de continuité s'écrit :

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \times \frac{v_2}{v_1} \quad (1)$$

Pour l'écoulement isentropique :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

D'autre part :

$$M = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{\gamma T}} \Leftrightarrow c = M \sqrt{\gamma T}$$

Donc l'équation (1) devient :

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \times \frac{M_2 \sqrt{\gamma T_2}}{M_1 \sqrt{\gamma T_1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/2}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2)$$

D'autre part nous avons une relation de T en fonction de M :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_1^2}{1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M_2^2}$$

D'où l'équation (2) prend la forme suivante :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.10a})$$

Si on choisit comme référence la section critique (Sc) du col de la tuyère, nous avons :

$$\frac{S_1}{S_c} = \frac{M_c}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_c^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Mc=1 :

$$\frac{S_1}{S_c} = \frac{1}{M_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.10b})$$

La représentation graphique de cette équation est donnée sur la figure 4.

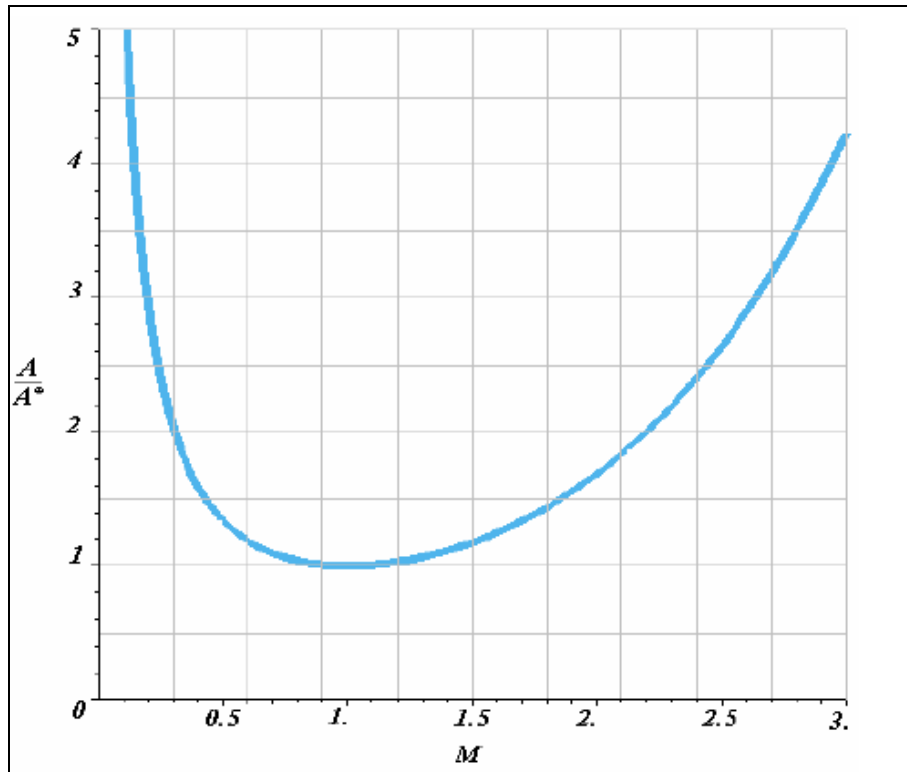


Figure II.4 : Evolution du rapport de section S/S^* en fonction du nombre de Mach pour la cas de l'air $\gamma=1,4$.

On peut tirer les conclusions suivantes :

- En subsonique, lorsque la section décroît, la vitesse augmente et inversement. Le résultat est conforme à celui de la mécanique des fluides incompressibles.
- Par contre, en supersonique, la vitesse augmente si la section augmente.
- Pour passer du subsonique au supersonique, il faut donc que la tuyère présente une section minimale appelée « col ».

Notant que l'évolution du rapport de section en fonction du nombre de Mach est résumée dans les tables de l'écoulement isentropique (en annexe).

II.10 Débit massique d'une canalisation de section variable :

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique $\dot{m}$ en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation :

$$\dot{m} = \rho S v$$

Substituons c par son expression d'après l'équation de Saint-Venant :

$$\dot{m} = \rho S \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{(\gamma-1)\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique :

$$\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma} = cst \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

D'où le débit massique s'exprime comme :

$$\dot{m} = \rho_0 S \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{(\gamma-1)\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad (\text{II.11a})$$

$$\dot{m} = \rho_0 S v_{\max} \Psi$$

Avec :

$$v_{\max} = v_L = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \times \frac{P_0}{\rho_0}}$$

Et

$$\Psi = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Posons : $\frac{P}{P_0} = x$, donc :

$$\frac{d\Psi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Quand P/P_0 atteindra la valeur $(2/(\gamma+1))^{\gamma/(\gamma-1)}$, la fonction ψ est maximum, puisque :

$\Psi = \Psi \left(\frac{P}{P_0} \right)$ s'annule si $P=0$ et $P=P_0$ comme illustré sur la figure 5.

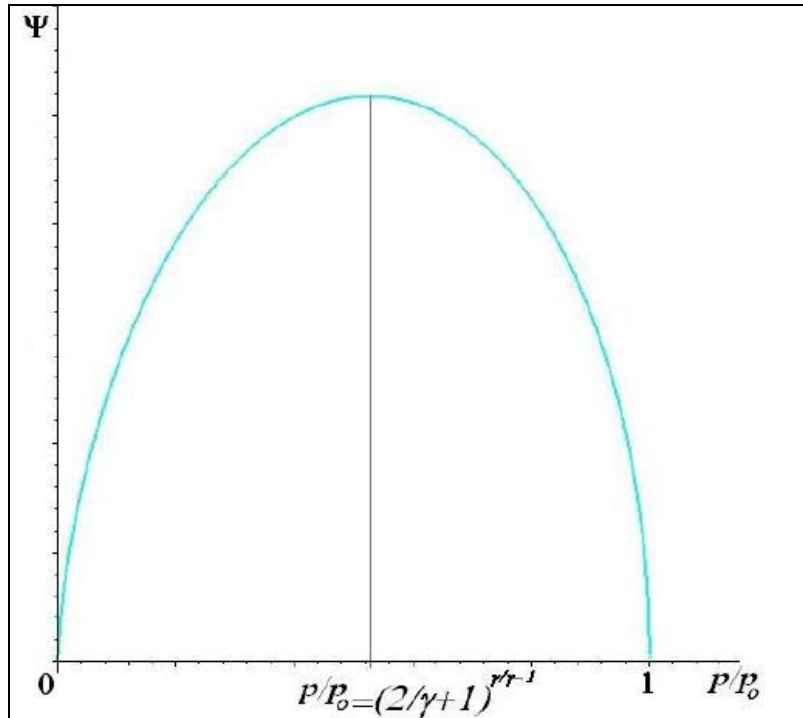


Figure II.5 : Evolution de la fonction ψ en fonction de (P/P_0) .

La pression correspondante est appelée pression critique et s'écrit :

$$\frac{P_c}{\rho_0} = \frac{P^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

elle s'obtiendra au col d'après la théorie d'Hugoniot, et le débit massique maximal sera :

$$\dot{m}_{\max} = \rho_0 S v_{\max} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma+1}} \Rightarrow \dot{m}_{\max} = \rho_0 S \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (\text{II.11b})$$

Aussi au col on a :

$$a^* = v^* \text{ ou } v^* = a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$$

Et le débit massique critique sera :

$$\dot{m}_{\max} = \rho^* S^* v^* \Rightarrow \dot{m}_{\max} = \rho_0 S^* a_0 \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{II.11c})$$

Cette expression donne le débit massique maximum au col de la tuyère, où règnent les conditions critiques. Pour $\gamma = 1.4$ on a :

$$\dot{m}_{\max} = 0,685 \times \rho_0 S^* a_0$$

II.11 Régime d'écoulement dans une tuyère

1. Tuyère convergente

Un gaz de pression P_0 , densité ρ_0 et de température T_0 s'écoule isentropiquement depuis un réservoir de grandes dimensions ($V_0 \approx 0$) à travers une tuyère convergente (figure 6) vers un compartiment de décharge où règne la pression en aval p inférieure à P_0 . Adoptons que la pression et la vitesse de sortie P_e et V , d'après la formule de Saint Venant :

$$\dot{m}_{\max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{P_e}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et $\dot{m}_{\max} = \rho c S$ on étudie les différents états de l'écoulement dans la tuyère convergente en changeant la pression en aval P_b à divers valeurs modérées.

Si on considère des valeurs de P_b comme dans le cas *a* et *b* (figure 6.b), la pression au col est supérieure à la pression critique p^* . L'écoulement au sein de la tuyère convergente est subsonique et jet sort à la pression $P_e = P_b$. Le débit massique de l'écoulement isentropique subsonique est inférieur à la valeur critique $\dot{m}_{\max}$ (figure 6c).

Si la pression p est égale à p^* (le cas *c*) au col. L'écoulement au col sera sonique, et le jet aussi ($P_e = P_b$), et le débit massique de l'écoulement sera maximal. L'écoulement en amont du col est subsonique.

Finalement, si P_b est diminuée au-dessus de P^* , comme les cas *d* et *e*, la tuyère ne peut répondre plus puisqu'elle est suffoquée à sa valeur maximum du débit massique. Le col reste sonique avec $P_e = P^*$, et la distribution de la pression dans la tuyère est la même que celle dans

le cas *c*. le jet s'étend de façon supersonique en réduisant sa pression de sa valeur critique P^* (au col) à la pression P_b . Mathématiquement parlant, le débit massique donné par l'équation (2.11a) voit sa valeur se réduire dans les cas *d* et *e* ; mais ceci n'est pas vrai physiquement, en raison de la violation de la condition de l'écoulement isentropique autour d'elle s'appuie sur la théorie, l'écoulement sera non-isentropique à cause des ondes de choc qui apparaissent en rendant le phénomène irréversible.

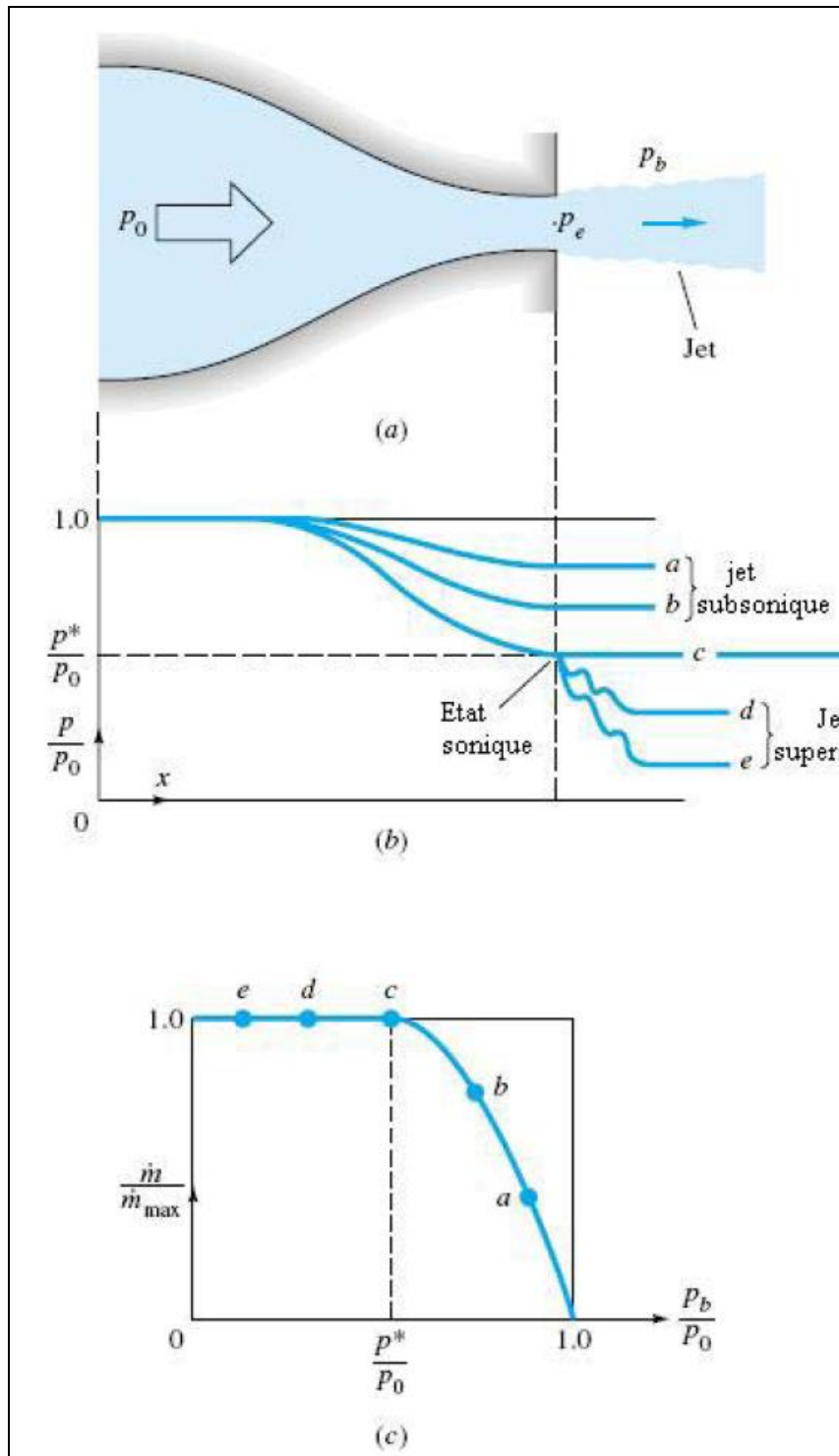


Figure II.6 : Tuyère convergente : a) Géométrie et pressions caractéristiques de la tuyère : (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval P_b : (c) débit massique.

2. Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (7.a). Si la pression en aval P_b est suffisamment faible, il existera un écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

Pour les cas A et B (figure II.7.b), la pression P_b n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est $P_b = P_e$ et le jet est subsonique.

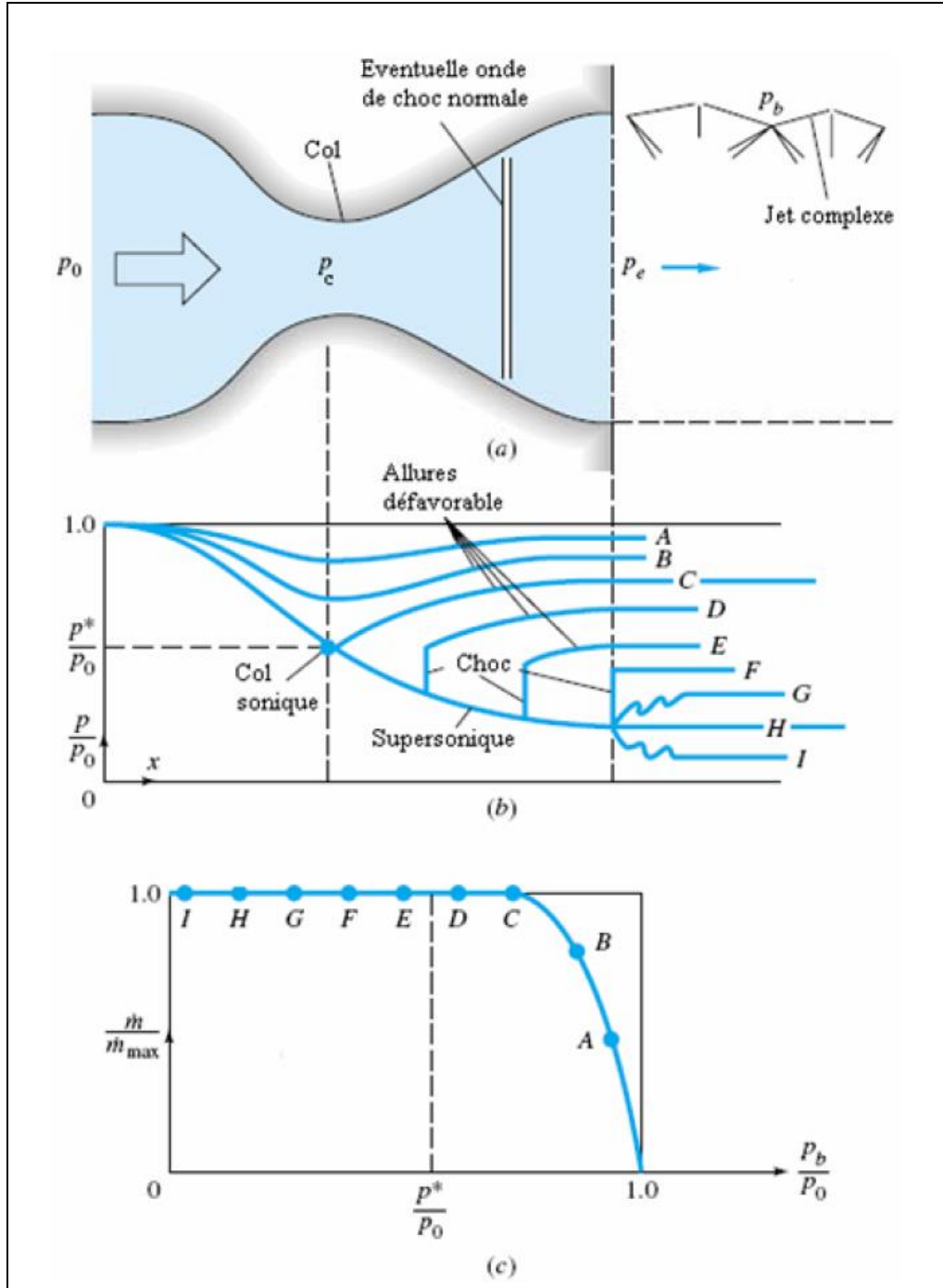


Figure II.7 : Tuyère convergente-divergente: a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles: (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval P_b : (c) débit massique.

Pour le cas C, le rapport des sections $\frac{A_e}{A_{col}}$ est exactement égal à $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 7c). L'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et $P_e = P_b$.

Cette fois considérons le cas H. ici P_b est tel que $\frac{P_b}{P_0}$ correspond exactement au rapport $\frac{A_e}{A^*}$ d'un nombre de Mach supersonique à la sortie. L'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique, y compris le jet et $P_b = P_e$.

Supposons dans ce cas que P_b se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions P_b des cas D à F ont lieu (figure 7b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 7c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression P_b .

Finalement dans le cas I, P_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

Université de Med Boudiaf M'sila
Département de Génie Mécanique
Option : Energétique

Série N°1

Exo01 :

L'air provenant d'un réservoir s'écoule dans un conduit adiabatique et sans friction, la température et la pression dans le réservoir sont $T = 400\text{K}$ et $P = 500\text{kPa}$.

- Déterminer M , T , ρ et c à une section du conduit où $P = 430\text{ kPa}$.

Exo02 :

Déterminer la valeur de la constante massique des gaz parfaits r sachant que la masse molaire de l'air est 28.97 kg/K mole .

Exo03 :

Calculer le rapport $\frac{T_c}{T_0}, \frac{\rho_c}{\rho_0}, \frac{P_c}{P_0}$ caractérisant l'état critique d'un gaz ayant un rapport des chaleurs massiques $\gamma = 1.25$.

Exo04 :

Ecrire le théorème de Barré de Saint Venant pour un écoulement isentropique de gaz parfait en calculant la constante à partir des conditions critiques.

- Montrer que cette écriture se ramène à une relation entre le nombre de Mach local M et le rapport $M_c = c/a_c$.
- Calculer la limite de M_c quand M tend vers l'infini.

Exo05 :

Montrer que dans un écoulement isotherme réversible à partir des conditions génératrices ;

- La vitesse en chaque point est donnée par : $\frac{v^2}{2} = rT \ln \frac{P_i}{P}$;
- L'état critique correspond à $\frac{P_c}{P_0} = 0.607$ ce rapport est indépendant de la nature du gaz.

Université de Med Boudiaf M'sila
Département de Génie Mécanique
Option : Energétique

Série N°2

Exo01 :

La figure ci-dessous Fig.1 représente une chaudière qui produit de la vapeur d'eau à un débit massique $\dot{q}_m=13,4$ kg/s. Par une canalisation cylindrique, la vapeur arrive dans une section S de diamètre $d=10$ cm à une pression $P=15$ bar et une température $T=541$ °K. On donne les caractéristiques de la vapeur d'eau : $\gamma=1,3$ et $r=462$ J/kg°K.

Travail demandé:

- 1) On suppose que la vapeur est un gaz parfait, calculer la masse volumique ρ de la vapeur d'eau en sortie de la chaudière.
- 2) Déterminer la vitesse d'écoulement V .
- 3) Calculer la célérité du son C .
- 4) En déduire le nombre de Mach M . Préciser la nature de l'écoulement.
- 5) Ecrire l'équation de Saint-Venant en terme de rapport de pression, et calculer la pression d'arrêt P_i à l'intérieur de la chaudière.

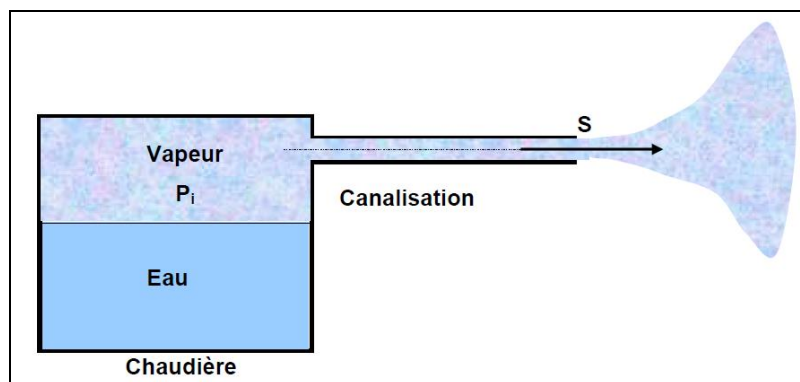


Fig. 1

Exo02 :

L'air s'écoule de façon isentropique dans un conduit montré à Fig. 2. À section 1 $A_1 = 0.05$ m² et $V_1 = 180$ m/s, $P_1 = 500$ kPa, et $T_1 = 470$ K. Calculez :

- (a) T_o , (b) Ma_1 , (c) P_o , (d) A^* et $\dot{m}$.

Si $A_2 = 0.036$ m², calculez Ma_2 et P_2 pour l'écoulement

- (a) subsonique ou (b) supersonique.

Donnée : $k = 1.4$.

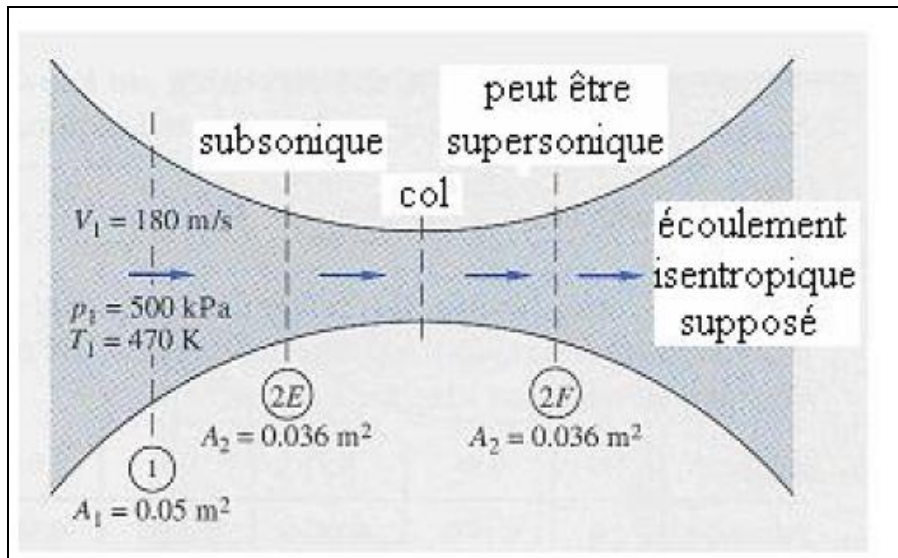


Fig. 2

Exo03 :

Une tuyère convergente divergente à sections circulaires possède les caractéristiques suivantes : diamètre d'entrée de 80 mm , diamètre au col de 40 mm , diamètre de sortie de 42 mm . Cette tuyère évacue dans l'atmosphère l'air d'un réservoir où règne la pression P_i et la température $T_i = 300 \text{ K}$. Les conditions dans ce réservoir sont supposées invariables.

La pression à la section de sortie est $P_A = 1 \text{ bar}$. On suppose successivement :

- Que M est maximal au col et égal à 1 (valeur limite) ;
- Que M est maximal à la section de sortie sans qu'il se produise de phénomène réversible. Calculer pour chaque cas :
 1. La pression P_i ;
 2. Les conditions au col P_c , T_c et v_c ;
 3. La température T et la vitesse c à la sortie ;
 4. Le débit massique q_m et la puissance cinétique de la vaine au col.

Table II.1 : Tables de l'écoulement isentropique d'un gaz parfait ($\gamma=1.4$).

M	p / p_0	ρ / ρ_0	T / T_0	A / A^*	M	p / p_0	ρ / ρ_0	T / T_0	A / A^*
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	∞	0.92	0.5785	0.6764	0.8552	1.0056
0.02	0.9997	0.9998	0.9999	28.9421	0.94	0.5658	0.6658	0.8498	1.0031
0.04	0.9989	0.9992	0.9997	14.4815	0.96	0.5532	0.6551	0.8444	1.0014
0.06	0.9975	0.9982	0.9993	9.6659	0.98	0.5407	0.6445	0.8389	1.0003
0.08	0.9955	0.9968	0.9987	7.2616	1.00	0.5283	0.6339	0.8333	1.0000
0.10	0.9930	0.9950	0.9980	5.8218	1.02	0.5160	0.6234	0.8278	1.0003
0.12	0.9900	0.9928	0.9971	4.8643	1.04	0.5039	0.6129	0.8222	1.0013
0.14	0.9864	0.9903	0.9961	4.1824	1.06	0.4919	0.6024	0.8165	1.0029
0.16	0.9823	0.9873	0.9949	3.6727	1.08	0.4800	0.5920	0.8108	1.0051
0.18	0.9776	0.9840	0.9936	3.2779	1.10	0.4684	0.5817	0.8052	1.0079
0.20	0.9725	0.9803	0.9921	2.9635	1.12	0.4568	0.5714	0.7994	1.0113
0.22	0.9668	0.9762	0.9904	2.7076	1.14	0.4455	0.5612	0.7937	1.0153
0.24	0.9607	0.9718	0.9886	2.4956	1.16	0.4343	0.5511	0.7879	1.0198
0.26	0.9541	0.9670	0.9867	2.3173	1.18	0.4232	0.5411	0.7822	1.0248
0.28	0.9470	0.9619	0.9846	2.1656	1.20	0.4124	0.5311	0.7764	1.0304
0.30	0.9395	0.9564	0.9823	2.0351	1.22	0.4017	0.5213	0.7706	1.0366
0.32	0.9315	0.9506	0.9799	1.9219	1.24	0.3912	0.5115	0.7648	1.0432
0.34	0.9231	0.9445	0.9774	1.8229	1.26	0.3809	0.5019	0.7590	1.0504
0.36	0.9143	0.9380	0.9747	1.7358	1.28	0.3708	0.4923	0.7532	1.0581
0.38	0.9052	0.9313	0.9719	1.6587	1.30	0.3609	0.4829	0.7474	1.0663
0.40	0.8956	0.9243	0.9690	1.5901	1.32	0.3512	0.4736	0.7416	1.0750
0.42	0.8857	0.9170	0.9659	1.5289	1.34	0.3417	0.4644	0.7358	1.0842
0.44	0.8755	0.9094	0.9627	1.4740	1.36	0.3323	0.4553	0.7300	1.0940
0.46	0.8650	0.9016	0.9594	1.4246	1.38	0.3232	0.4463	0.7242	1.1042
0.48	0.8541	0.8935	0.9559	1.3801	1.40	0.3142	0.4374	0.7184	1.1149
0.50	0.8430	0.8852	0.9524	1.3398	1.42	0.3055	0.4287	0.7126	1.1262
0.52	0.8317	0.8766	0.9487	1.3034	1.44	0.2969	0.4201	0.7069	1.1379
0.54	0.8201	0.8679	0.9449	1.2703	1.46	0.2886	0.4116	0.7011	1.1501
0.56	0.8082	0.8589	0.9410	1.2403	1.48	0.2804	0.4032	0.6954	1.1629
0.58	0.7962	0.8498	0.9370	1.2130	1.50	0.2724	0.3950	0.6897	1.1762
0.60	0.7840	0.8405	0.9328	1.1882	1.52	0.2646	0.3869	0.6840	1.1899
0.62	0.7716	0.8310	0.9286	1.1656	1.54	0.2570	0.3789	0.6783	1.2042
0.64	0.7591	0.8213	0.9243	1.1451	1.56	0.2496	0.3710	0.6726	1.2190
0.66	0.7465	0.8115	0.9199	1.1265	1.58	0.2423	0.3633	0.6670	1.2344
0.68	0.7338	0.8016	0.9153	1.1097	1.60	0.2353	0.3557	0.6614	1.2502
0.70	0.7209	0.7916	0.9107	1.0944	1.62	0.2284	0.3483	0.6558	1.2666
0.72	0.7080	0.7814	0.9061	1.0806	1.64	0.2217	0.3409	0.6502	1.2836
0.74	0.6951	0.7712	0.9013	1.0681	1.66	0.2152	0.3337	0.6447	1.3010
0.76	0.6821	0.7609	0.8964	1.0570	1.68	0.2088	0.3266	0.6392	1.3190
0.78	0.6691	0.7505	0.8915	1.0471	1.70	0.2026	0.3197	0.6337	1.3376
0.80	0.6560	0.7400	0.8865	1.0382	1.72	0.1966	0.3129	0.6283	1.3567
0.82	0.6430	0.7295	0.8815	1.0305	1.74	0.1907	0.3062	0.6229	1.3764
0.84	0.6300	0.7189	0.8763	1.0237	1.76	0.1850	0.2996	0.6175	1.3967
0.86	0.6170	0.7083	0.8711	1.0179	1.78	0.1794	0.2931	0.6121	1.4175
0.88	0.6041	0.6977	0.8659	1.0129	1.80	0.1740	0.2868	0.6068	1.4390
0.90	0.5913	0.6870	0.8606	1.0089	1.82	0.1688	0.2806	0.6015	1.4610

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
1.84	0.1637	0.2745	0.5963	1.4836
1.86	0.1587	0.2686	0.5910	1.5069
1.88	0.1539	0.2627	0.5859	1.5308
1.90	0.1492	0.2570	0.5807	1.5553
1.92	0.1447	0.2514	0.5756	1.5804
1.94	0.1403	0.2459	0.5705	1.6062
1.96	0.1360	0.2405	0.5655	1.6326
1.98	0.1318	0.2352	0.5605	1.6597
2.00	0.1278	0.2300	0.5556	1.6875
2.02	0.1239	0.2250	0.5506	1.7160
2.04	0.1201	0.2200	0.5458	1.7451
2.06	0.1164	0.2152	0.5409	1.7750
2.08	0.1128	0.2104	0.5361	1.8056
2.10	0.1094	0.2058	0.5313	1.8369
2.12	0.1060	0.2013	0.5266	1.8690
2.14	0.1027	0.1968	0.5219	1.9018
2.16	0.0996	0.1925	0.5173	1.9354
2.18	0.0965	0.1882	0.5127	1.9698
2.20	0.0935	0.1841	0.5081	2.0050
2.22	0.0906	0.1800	0.5036	2.0409
2.24	0.0878	0.1760	0.4991	2.0777
2.26	0.0851	0.1721	0.4947	2.1153
2.28	0.0825	0.1683	0.4903	2.1538
2.30	0.0800	0.1646	0.4859	2.1931
2.32	0.0775	0.1609	0.4816	2.2333
2.34	0.0751	0.1574	0.4773	2.2744
2.36	0.0728	0.1539	0.4731	2.3164
2.38	0.0706	0.1505	0.4688	2.3593
2.40	0.0684	0.1472	0.4647	2.4031
2.42	0.0663	0.1439	0.4606	2.4479
2.44	0.0643	0.1408	0.4565	2.4936
2.46	0.0623	0.1377	0.4524	2.5403
2.48	0.0604	0.1346	0.4484	2.5880
2.50	0.0585	0.1317	0.4444	2.6367
2.52	0.0567	0.1288	0.4405	2.6864
2.54	0.0550	0.1260	0.4366	2.7372
2.56	0.0533	0.1232	0.4328	2.7891
2.58	0.0517	0.1205	0.4289	2.8420
2.60	0.0501	0.1179	0.4252	2.8960
2.62	0.0486	0.1153	0.4214	2.9511
2.64	0.0471	0.1128	0.4177	3.0073
2.66	0.0457	0.1103	0.4141	3.0647
2.68	0.0443	0.1079	0.4104	3.1233
2.70	0.0430	0.1056	0.4068	3.1830
2.72	0.0417	0.1033	0.4033	3.2439
2.74	0.0404	0.1010	0.3998	3.3061
2.76	0.0392	0.0989	0.3963	3.3695
2.78	0.0380	0.0967	0.3928	3.4342
2.80	0.0368	0.0946	0.3894	3.5001
2.82	0.0357	0.0926	0.3860	3.5674
2.84	0.0347	0.0906	0.3827	3.6359
2.86	0.0336	0.0886	0.3794	3.7058
2.88	0.0326	0.0867	0.3761	3.7771
2.90	0.0317	0.0849	0.3729	3.8498

M	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A/A^*
2.92	0.0307	0.0831	0.3696	3.9238
2.94	0.0298	0.0813	0.3665	3.9993
2.96	0.0289	0.0796	0.3633	4.0762
2.98	0.0281	0.0779	0.3602	4.1547
3.00	0.0272	0.0762	0.3571	4.2346
3.02	0.0264	0.0746	0.3541	4.3160
3.04	0.0256	0.0730	0.3511	4.3989
3.06	0.0249	0.0715	0.3481	4.4835
3.08	0.0242	0.0700	0.3452	4.5696
3.10	0.0234	0.0685	0.3422	4.6573
3.12	0.0228	0.0671	0.3393	4.7467
3.14	0.0221	0.0657	0.3365	4.8377
3.16	0.0215	0.0643	0.3337	4.9304
3.18	0.0208	0.0630	0.3309	5.0248
3.20	0.0202	0.0617	0.3281	5.1209
3.22	0.0196	0.0604	0.3253	5.2189
3.24	0.0191	0.0591	0.3226	5.3186
3.26	0.0185	0.0579	0.3199	5.4201
3.28	0.0180	0.0567	0.3173	5.5234
3.30	0.0175	0.0555	0.3147	5.6286
3.32	0.0170	0.0544	0.3121	5.7357
3.34	0.0165	0.0533	0.3095	5.8448
3.36	0.0160	0.0522	0.3069	5.9558
3.38	0.0156	0.0511	0.3044	6.0687
3.40	0.0151	0.0501	0.3019	6.1837
3.42	0.0147	0.0491	0.2995	6.3007
3.44	0.0143	0.0481	0.2970	6.4197
3.46	0.0139	0.0471	0.2946	6.5409
3.48	0.0135	0.0462	0.2922	6.6642
3.50	0.0131	0.0452	0.2899	6.7896
3.52	0.0127	0.0443	0.2875	6.9172
3.54	0.0124	0.0434	0.2852	7.0470
3.56	0.0120	0.0426	0.2829	7.1791
3.58	0.0117	0.0417	0.2806	7.3134
3.60	0.0114	0.0409	0.2784	7.4501
3.62	0.0111	0.0401	0.2762	7.5891
3.64	0.0108	0.0393	0.2740	7.7304
3.66	0.0105	0.0385	0.2718	7.8742
3.68	0.0102	0.0378	0.2697	8.0204
3.70	0.0099	0.0370	0.2675	8.1690
3.72	0.0096	0.0363	0.2654	8.3202
3.74	0.0094	0.0356	0.2633	8.4739
3.76	0.0091	0.0349	0.2613	8.6302
3.78	0.0089	0.0342	0.2592	8.7891
3.80	0.0086	0.0335	0.2572	8.9506
3.82	0.0084	0.0329	0.2552	9.1147
3.84	0.0082	0.0323	0.2532	9.2816
3.86	0.0080	0.0316	0.2513	9.4513
3.88	0.0077	0.0310	0.2493	9.6237
3.90	0.0075	0.0304	0.2474	9.7989
3.92	0.0073	0.0299	0.2455	9.9770
3.94	0.0071	0.0293	0.2436	10.1580
3.96	0.0069	0.0287	0.2418	10.3419
3.98	0.0068	0.0282	0.2399	10.5288