

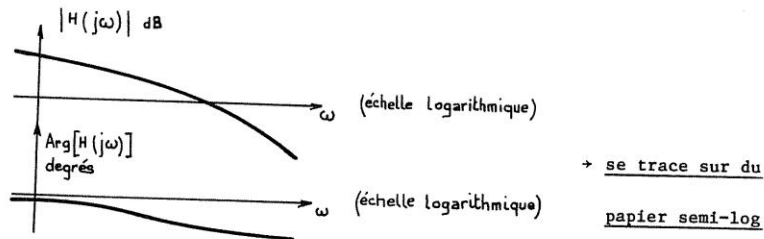
- le plan de Black-Nichols

3.2.1 - Diagramme de Bode :

La représentation dans le plan de Bode d'une transmittance $H(p)$ consiste à tracer :

- $20 \log_{10} |H(j\omega)|$, c'est-à-dire le module de $H(j\omega)$, exprimé en décibels (dB) [on le note $|H(j\omega)|$ dB]
- $\text{Arg}[H(j\omega)]$, c'est-à-dire la phase de $H(j\omega)$, exprimée en degrés [on la note aussi $\angle H(j\omega)$]

en fonction de $\log_{10}\omega$, pour ω variant de 0 à l'infini.



REMARQUE :

Les conventions de cette représentation (module en décibels, ω porté sur une échelle logarithmique) lui confèrent les propriétés suivantes :

- ① Si $H(p)$ est le produit de deux transmittances $F(p)$ et $G(p)$:

$$H(p) = F(p) \cdot G(p)$$

le diagramme de Bode de $H(p)$ s'obtient par simple addition des diagrammes de $F(p)$ et de $G(p)$.

$$\text{On sait en effet que : } |F(p) \cdot G(p)| = |F(p)| \cdot |G(p)|$$

$$\text{Donc : } |F(p) \cdot G(p)|_{\text{dB}} = |F(p)|_{\text{dB}} + |G(p)|_{\text{dB}}$$

$$\text{En outre : } \angle F(p) \cdot G(p) = \angle F(p) + \angle G(p)$$

(il est sous-entendu que l'on a : $p = j\omega$)

Cette propriété remarquable permet de construire très facilement le diagramme de Bode d'une transmittance quelconque à partir des diagrammes - que l'on va présenter dans le paragraphe suivant - des 4 types de processus élémentaires.

- ② La représentation de Bode présente un grand intérêt en raison de ses "lieux

asymptotiques", formés de segments de droite, qui permettent d'avoir très rapidement, et sans calcul, l'allure du diagramme de Bode. Nous y reviendrons plus tard à travers les exemples traités.

- ③ L'origine de l'axe des ω [c'est-à-dire la pulsation $\omega = 0$] est située à $(-\infty)$.

3. Réponse fréquentielle des systèmes linéaires :

L'étude de la réponse en fréquence concerne l'étude de la réponse du système lorsqu'il est soumis aux entrées sinusoïdales de fréquences différentes. La réponse en fréquences peut être regardée de deux manières : par l'intermédiaire du diagramme de Bode ou diagramme de Nyquist.

3.1 Diagramme de BODE:

Le diagramme de Bode permet d'étudier la réponse en fréquences d'un système linéaire de fonction de transfert $G(p)$. Pour ce faire, on remplace p par $j\omega$, ce qui permet d'écrire la fonction de transfert sous la forme suivante: $G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$. Dans cette expression, on considère le module $A(\omega)$ et l'argument $\varphi(\omega)$ de la fonction complexe paramétrée par la pulsation ω . Le diagramme de Bode est obtenu en traçant (asymptotiquement) les fonctions suivantes de $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sur des échelles logarithmiques en abscisse ω (Figure 4.6)

$$A|_{dB} = 20\log_{10}|G(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(G(j\omega)) \quad (4.27)$$

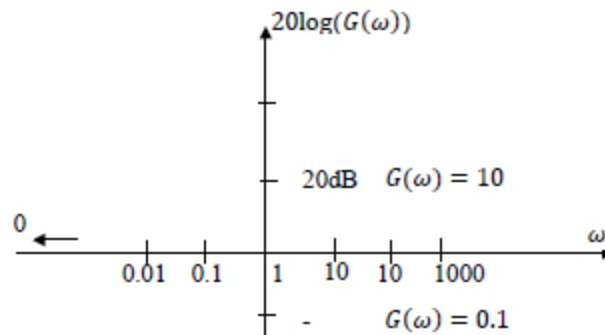


Figure 4.6 : Echelle logarithmique du diagramme de Bode

On notera que l'un des avantages du diagramme de Bode est que le diagramme global est la somme algébrique des diagrammes partiels. On donnera quelques exemples de tracés des courbes de Bode.

3.1.1 Exemple 1

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte : $G(p) = p$ (4.28)

Pour étudier la réponse en fréquences de ce système, on remplace $p = j\omega$,

D'où : $G(j\omega) = j\omega$ (4.29)

Pour utiliser la représentation de Bode, on cherche les expressions du gain et de la phase de la fonction de transfert.

Le gain est : $G|_{dB} = 20\log_{10}|j\omega|$ (4.30)

$$D'où : \quad G|_{dB} = 20 \log_{10} \omega \quad (4.31)$$

C'est cette courbe qu'il faut tracer asymptotiquement. Il s'agit d'une droite de pente égale à : +20dB/décade (décade=[ω 10 ω])

$$\text{La phase est : } \varphi = \arg\left(\frac{\omega}{0}\right) = \arg(\infty) = \frac{\pi}{2}, \text{ elle est constante (90°).} \quad (4.32)$$

La courbe asymptotique est donnée par la figure 4.7

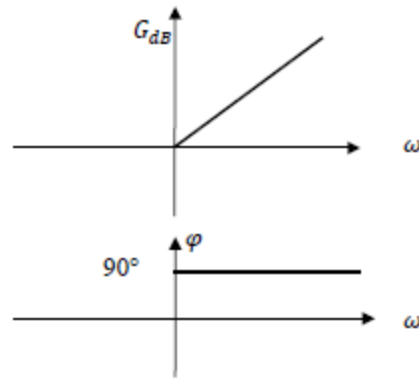


Figure 4.7 : Diagramme de Bode asymptotique de $G(p)=p$

3.1.2 Exemple 2

On considère le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1}{1+\tau p} \quad (4.33)$$

τ est une constante positive (la constante de temps).

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\tau\omega} \quad (4.34)$$

Le gain en dB

$$G_{dB} = -20 \log_{10}(1 + \tau^2 \omega^2)^{1/2} = -10 \log_{10}(1 + \tau^2 \omega^2) \quad (4.35)$$

$$\text{Et la phase : } \varphi = -\arctan(\tau\omega) \quad (4.36)$$

Le diagramme asymptotique est obtenu par le raisonnement suivant. On étudie le gain aux basses fréquences et aux hautes fréquences. Les basses et hautes fréquences sont déterminées par rapport à une fréquence de coupure ω_c qui est définie par : $\tau\omega_c = 1$.

--Si $\omega \ll \omega_c$, le gain en basses fréquences est : $G_{dB} = -10 \log_{10}(1) = 0dB$. Donc en basse fréquences : de $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$ le gain en décibel est nul.

--Si $\omega \gg \omega_c$, le gain en hautes fréquences est : $G_{dB} = -20 \log_{10}(\tau\omega)$. Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega = \infty$, le gain est asymptotiquement linéaire.

De même, pour le déphasage,

--Si $\omega \ll \omega_c$, le déphasage en basses fréquences est : $\varphi = -\arg(0) = 0^\circ$. Donc en basse fréquences : de $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega_c$, le déphasage en décibel est pratiquement nul.

--Si $\omega \gg \omega_c$, le déphasage en hautes fréquences est : $\varphi = -\arg(\infty) = -90^\circ$. Donc en hautes fréquences : de $\omega = \omega_c$ jusqu'à $\omega = \infty$, le déphasage est asymptotiquement égale à 90° .

Ayant déterminé le comportement asymptotique, il reste à préciser les valeurs du gain et du déphasage au voisinage de la fréquence de coupure. Ceci est obtenu en posant $\omega = \omega_c$. On en déduit le gain qui vaut -3 dB.

$$G(\omega = \omega_c) = -20 \log_{10}(1 + \tau^2 \omega_c^2)^{\frac{1}{2}} = 20 \log_{10}(2) = -3 \text{ dB} \quad (4.37)$$

Pour le déphasage à la fréquence de coupure, on a : $\varphi = -\arg(\tau \omega_c) = -\arg(1) = -45^\circ$. (4.38)

Le diagramme de Bode Asymptotique est donné par la figure

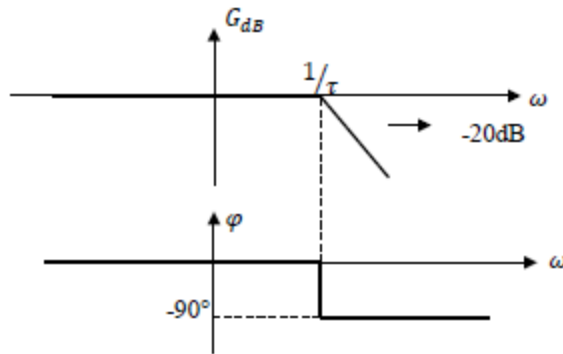


Figure 4.7 : Diagramme de Bode asymptotique d'un système du premier ordre

3.1.3 Exemple 3 : Système du second ordre :

Soit le système de fonction de transfert : $G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$ avec $0 < \zeta < 1$ (4.39)

On a déjà déterminé les expressions du gain et du déphasage qui sont :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega_n^2)^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2}} \quad \text{et} \quad \Phi(\omega) = -\frac{2\zeta\omega_n}{(1 - \omega_n^2)} \quad (4.40)$$

- Comportement asymptotique

L'expression du gain est : $G_{dB} = -20 \log_{10} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ (4.41)

15.4 BODE PLOTS OF SIMPLE CONTINUOUS-TIME FREQUENCY RESPONSE FUNCTIONS AND THEIR ASYMPTOTIC APPROXIMATIONS

The constant K_B has a magnitude $|K_B|$, a phase angle of 0° if K_B is positive, and -180° if K_B is negative. Therefore the Bode plots for K_B are simply horizontal straight lines as shown in Figs. 15-1 and 15-2.

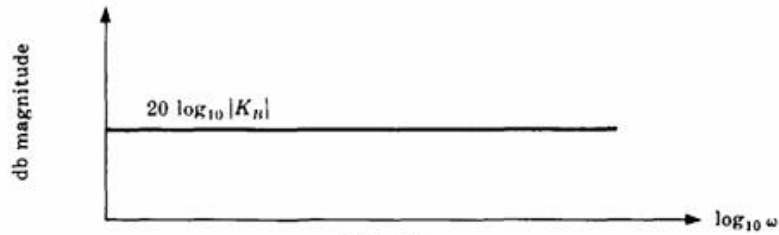


Fig. 15-1

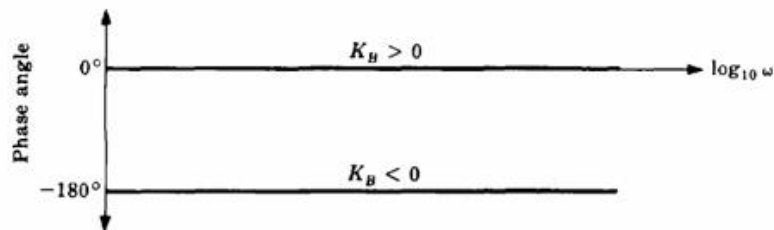


Fig. 15-2

The frequency response function (or sinusoidal transfer function) for a *pole of order l at the origin* is

$$\frac{1}{(j\omega)^l} \quad (15.4)$$

The bode plots for this function are straight lines, as shown in Figs. 15-3 and 15-4.

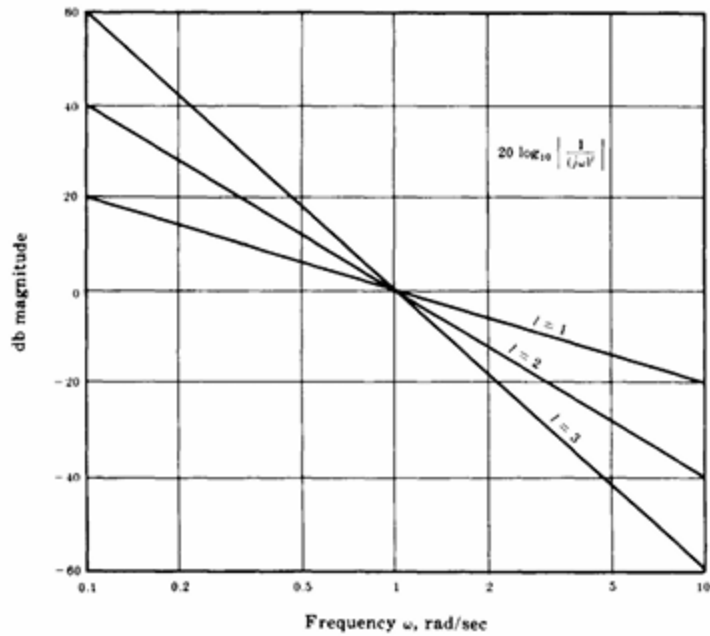


Fig. 15-3

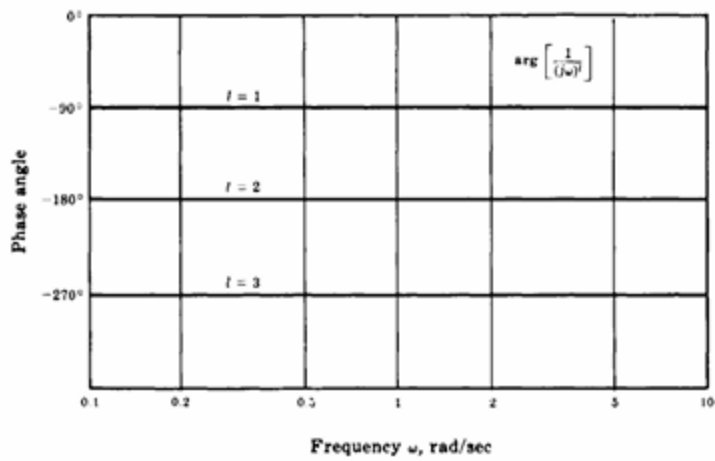


Fig. 15-4

For a zero of order l at the origin,

$$(j\omega)^l. \quad (15.5)$$

the Bode plots are the reflections about the 0-dB and 0° lines of Figs. 15-3 and 15-4, as shown in Figs. 15-5 and 15-6.

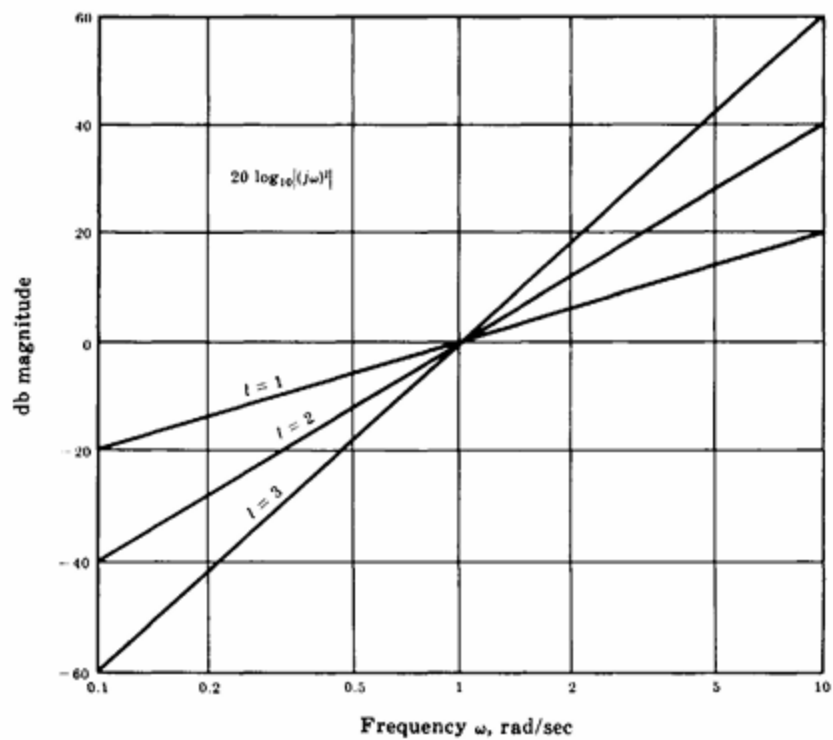


Fig. 15-5

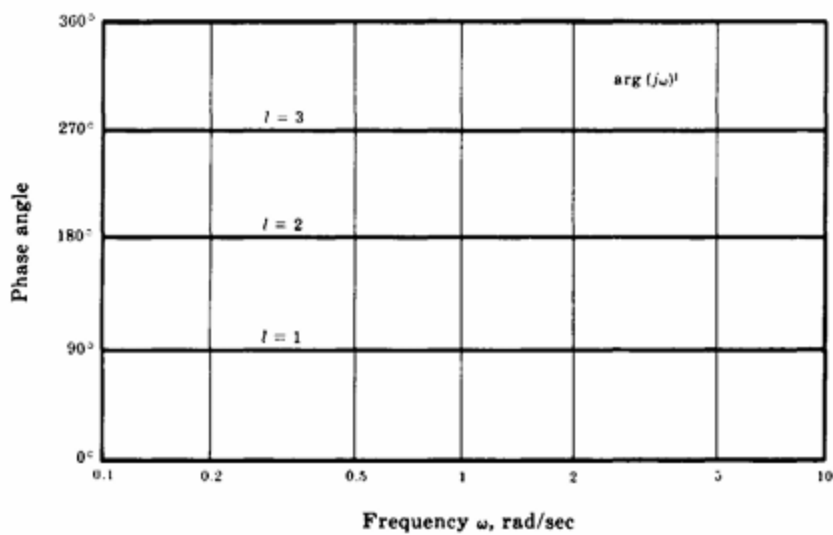


Fig. 15-6

Consider the *single-pole* transfer function $p/(s + p)$, $p > 0$. The Bode plots for its frequency response function

$$\frac{1}{1 + j\omega/p} \quad (15.6)$$

are given in Figs. 15-7 and 15-8. Note that the logarithmic frequency scale is normalized in terms of p .

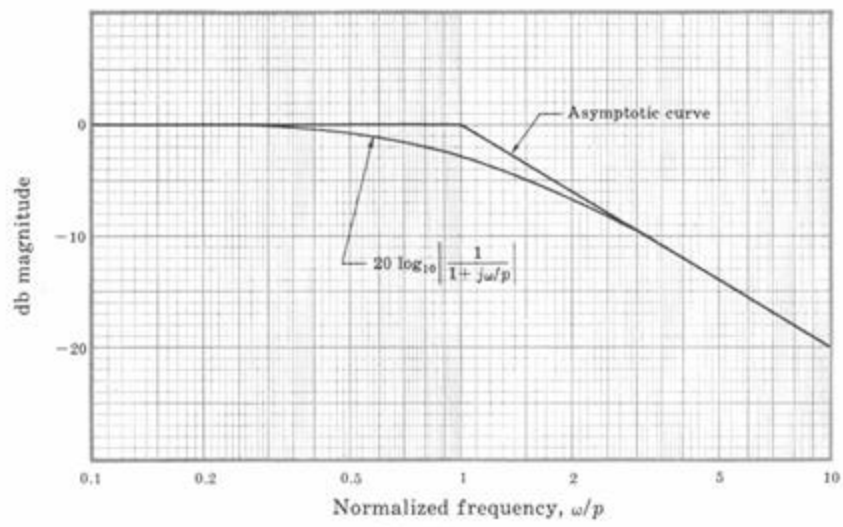


Fig. 15-7

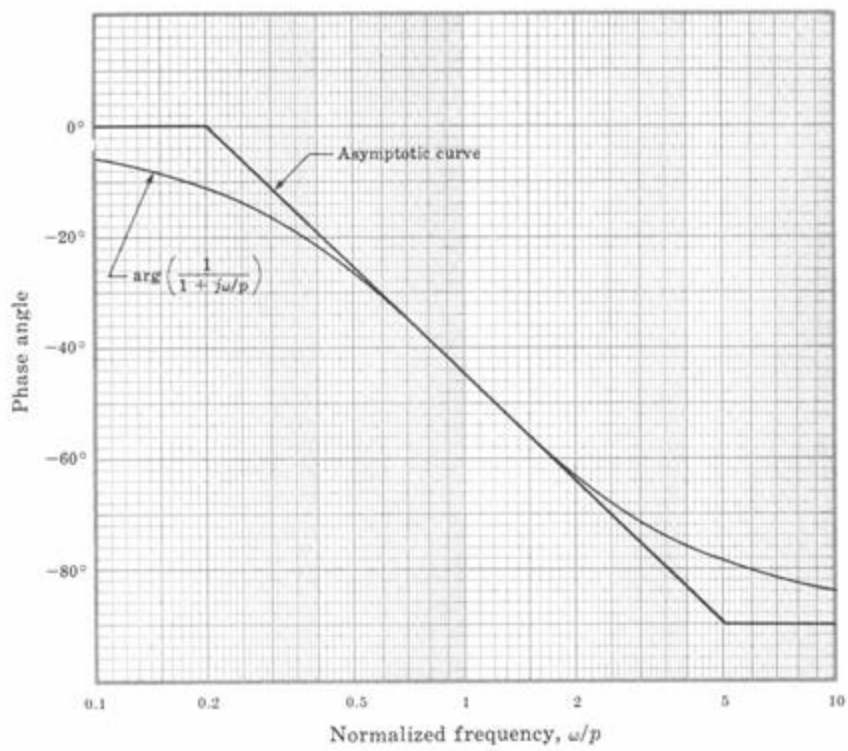


Fig. 15-8

To determine the *asymptotic approximations* for these Bode plots, we see that for $\omega/p \ll 1$, or $\omega \ll p$,

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega/p} \right| \cong 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ db}$$

and for $\omega/p \gg 1$, or $\omega \gg p$,

$$20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 + j\omega/p} \right| \cong 20 \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega/p} \right| = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{p} \right)$$

Therefore the Bode magnitude plot asymptotically approaches a horizontal straight line at 0 db as ω/p approaches zero and $-20 \log_{10}(\omega/p)$ as ω/p approaches infinity (Fig. 15-7). Note that this high-frequency asymptote is a straight line with a slope of -20 db/decade, or -6 db/octave when plotted on a logarithmic frequency scale as shown in Fig. 15-7. The two asymptotes intersect at the **corner frequency** $\omega = p$ rad/sec. To determine the phase angle asymptote, we see that for $\omega/p \ll 1$, or $\omega \ll p$,

$$\arg \left(\frac{1}{1 + j\omega/p} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{p} \right) \bigg|_{\omega \ll p} \cong 0^\circ$$

and for $\omega/p \gg 1$, or $\omega \gg p$,

$$\arg \left(\frac{1}{1 + j\omega/p} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{p} \right) \bigg|_{\omega \gg p} \cong -90^\circ$$

Thus the Bode phase angle plot asymptotically approaches 0° as ω/p approaches zero, and -90° as ω/p approaches infinity, as shown in Fig. 15-8. A negative-slope straight-line asymptote can be used to join the 0° asymptote and the -90° asymptote by drawing a line from the 0° asymptote at $\omega = p/5$ to the -90° asymptote at $\omega = 5p$. Note that it is tangent to the exact curves at $\omega = p$.

The *errors* introduced by these asymptotic approximations are shown in Table 15-1 for the single-pole transfer function at various frequencies.

Table 15-1. Asymptotic Errors for $\frac{1}{1 + j\omega/p}$

ω	$p/5$	$p/2$	p	$2p$	$5p$
Magnitude error (db)	-0.17	-0.96	-3	-0.96	-0.17
Phase angle error	-11.3°	-0.8°	0°	+0.8°	+11.3°

The Bode plots and their asymptotic approximations for the *single-zero* frequency response function

$$1 + \frac{j\omega}{z_1} \quad (15.7)$$

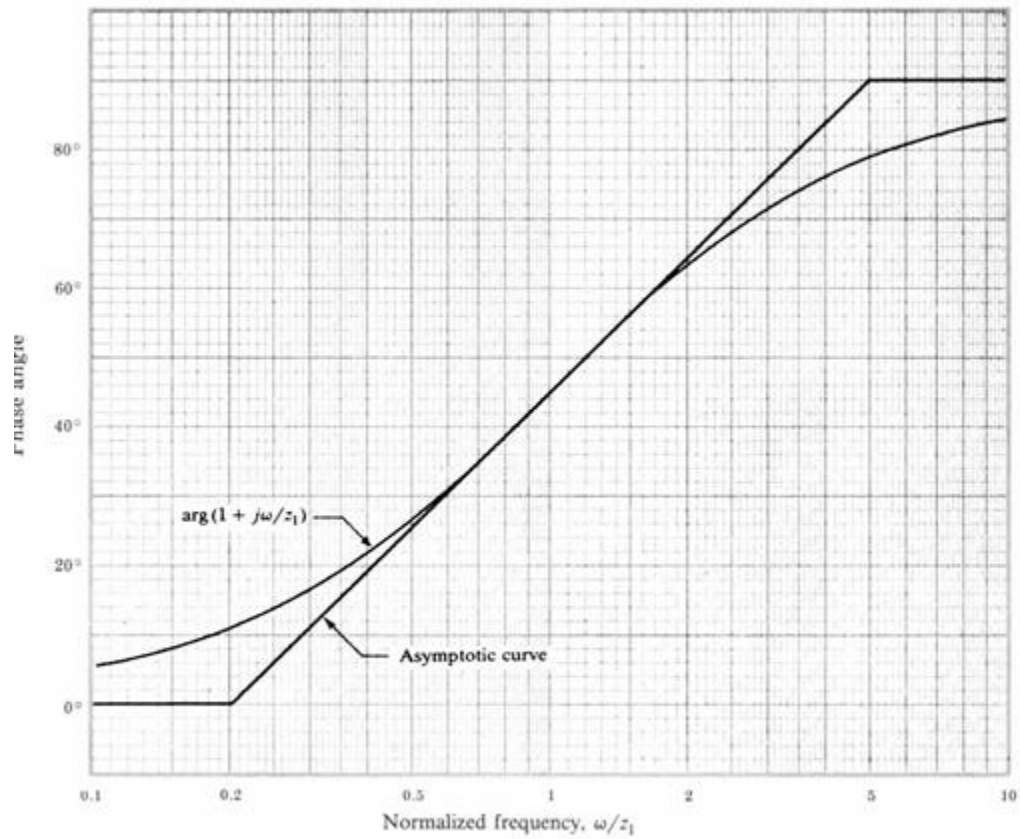
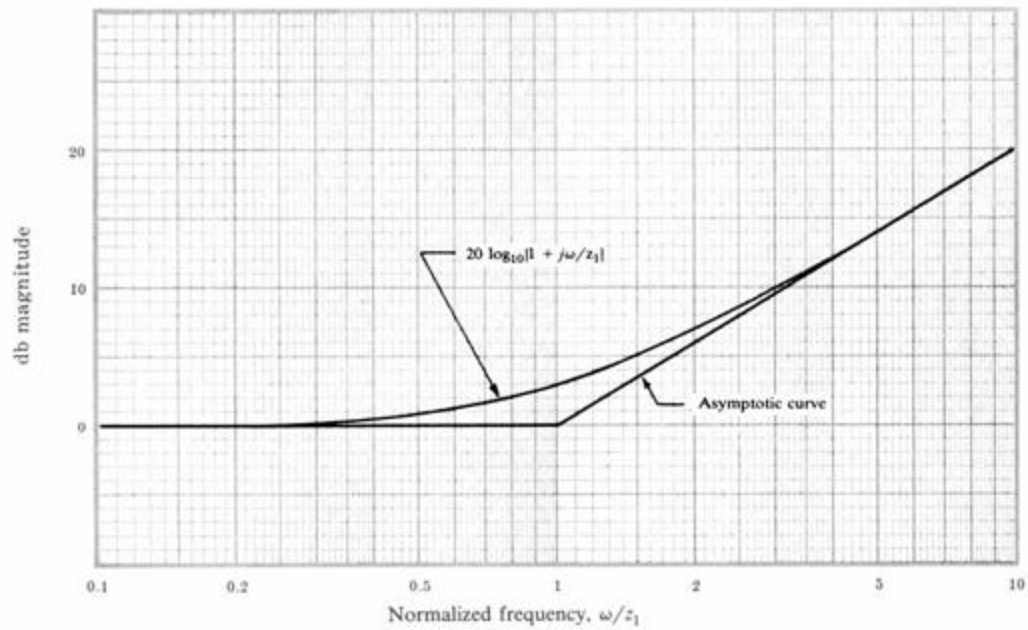


Fig. 15-10

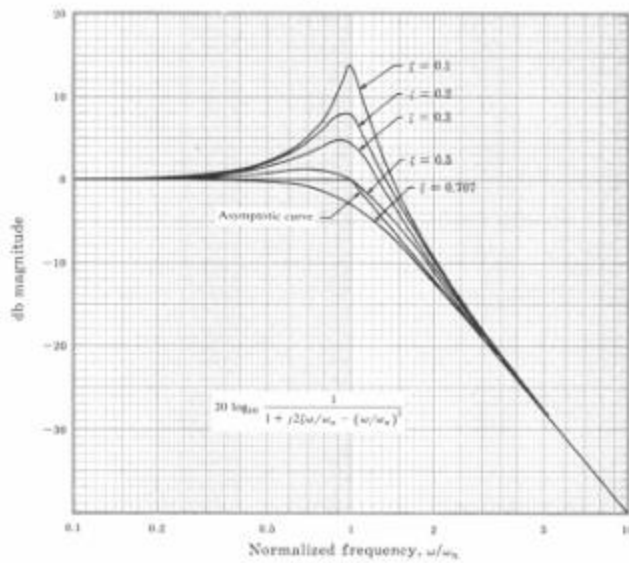


Fig. 15-11

15]

BODE ANALYSIS

371

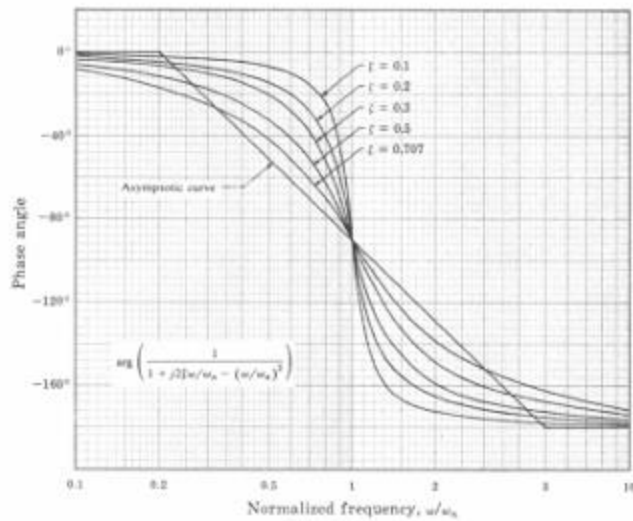


Fig. 15-12

The Bode plots and their asymptotic approximations for the second-order frequency response function with complex poles,

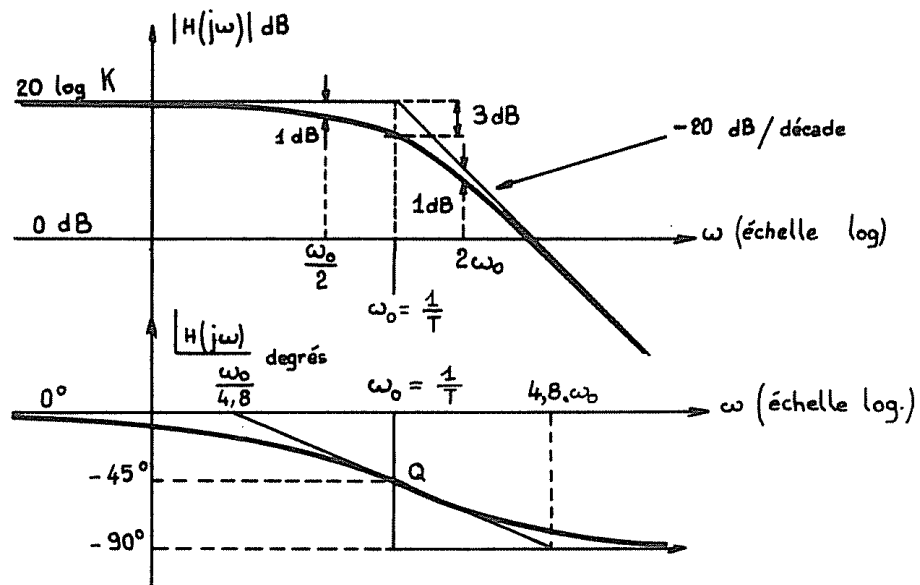
$$\frac{1}{1 + j2\zeta\omega/\omega_n - (\omega/\omega_n)^2} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (15.8)$$

are shown in Figs. 15-11 and 15-12. Note that the damping ratio ζ is a parameter on these graphs.

The magnitude asymptote shown in Fig. 15-11 has a corner frequency at $\omega = \omega_n$ and a high-frequency slope twice that of the asymptote for the single-pole case of Fig. 15-7. The phase angle asymptote is similar to that of Fig. 15-8 except that the high-frequency portion is at -180° instead of -90° and the point of tangency, or inflection, is at -90° .

The Bode plots for a pair of complex zeros are the reflections about the 0 db and 0° lines of those for the complex poles.

* diagramme de BODE :



Commentaires :

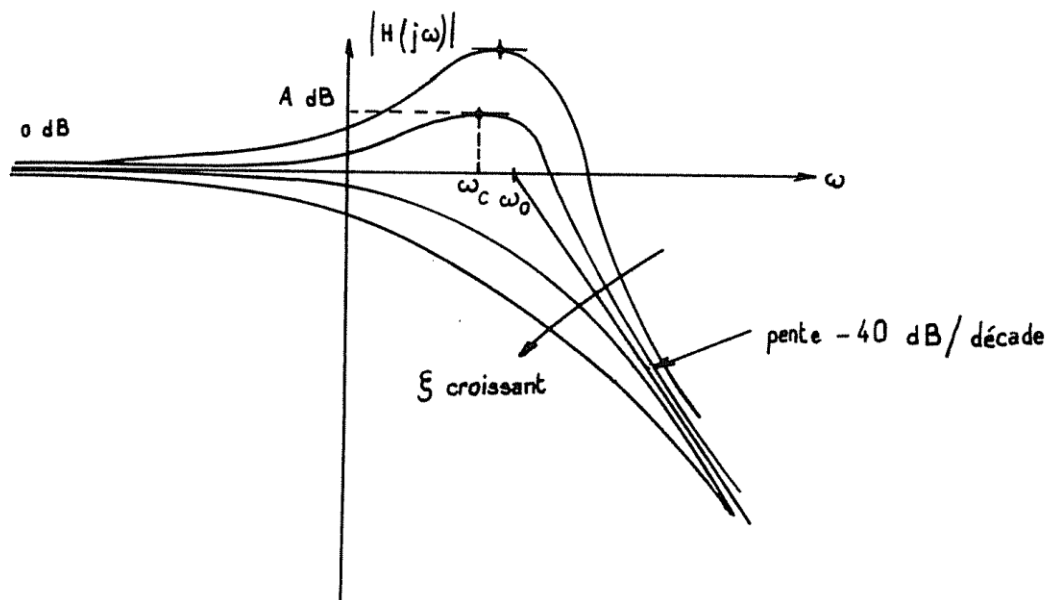
- la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{T}$ s'appelle pulsation de cassure,
- cette fois, le diagramme réel est distinct du diagramme asymptotique ;

3.3.4. Processus du second ordre :

$$H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2 \xi \omega_0 p + \omega_0^2}$$

* diagramme de BODE :

quand ξ / , ω_c et A \



N.B. : si $H(p)$ comporte un facteur K , le tracé du module part de $20 \cdot \log K$ (comme pour le processus à constante de temps).

la courbe de module de $H(j\omega)$ présente un maximum

pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_c = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2} \\ A = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} \Rightarrow A \text{ dB} \end{array} \right.$$

N.B. : ne pas confondre cette condition [déphasement pour $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$] avec la condition concernant la réponse indicielle [déphasement pour $\xi < 1$].

(pour $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cela donne : $\left\{ \begin{array}{l} \omega_c = 0 \text{ rd/s} \\ A = 0 \text{ dB} \end{array} \right.$

soit une "bosse" d'amplitude nulle repoussée à $(-\infty)$ sur l'axe des ω)

