

Performances d'un système asservi linéaire :

Un système régulé est dit idéal s'il possède un comportement stable, une bonne précision ainsi qu'un régime transitoire rapide et bien amorti.

les critères permettant de qualifier et quantifier les performances du système seront :

5.3.1 Stabilité

Un système est stable si :

- Il reste au repos en absence d'excitation.
- Ecarté de sa position d'équilibre, il y revient.
- Toute entrée bornée produit une sortie bornée.
- Sa réponse impulsionnelle tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Le bouclage d'un système peut rendre celui-ci instable. Les courbes ci-dessous illustrent les deux cas de figure (figures 5.5 et 5.6).

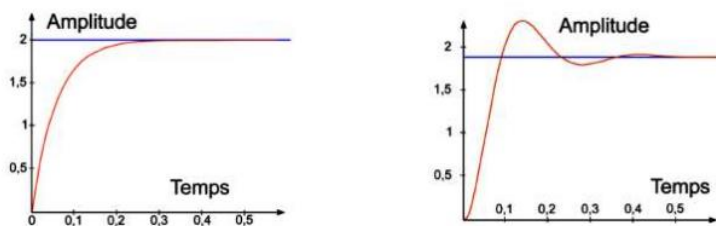


Figure 5.5. Systèmes stables (Réponse indicielle)

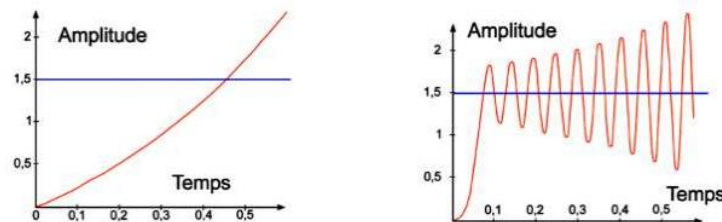


Figure 5.6. Systèmes instables (Réponse indicielle)

5.3.2.1 Erreur statique

C'est l'écart en régime permanent entre la sortie mesurée et la consigne lorsque le système asservi ou régulé est dans son état permanent. L'erreur statique est donnée par :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) \quad (\text{Théorème de la valeur finale}).$$

Erreur dynamique L'erreur dynamique représente l'écart instantané entre la sortie et l'entrée pendant leur évolution. Un écart transitoire apparaît à chaque changement de consigne ou suite à une perturbation.

Comparaison des Performances de Quelques Systèmes Élémentaires

1. Introduction

L'étude des systèmes linéaires permet d'analyser leurs performances en fonction de leurs caractéristiques dynamiques. Deux types fondamentaux de systèmes sont souvent considérés :

- **Systèmes du premier ordre**
- **Systèmes du deuxième ordre**

Nous allons analyser leur comportement en fonction de différents paramètres tels que le coefficient d'amortissement et les pôles.

2. Systèmes du Premier Ordre

2.1. Fonction de Transfert

2.1. Fonction de Transfert

Un système du premier ordre est modélisé par la fonction de transfert générale :

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

Où :

- K est le gain statique,
- τ est la constante de temps du système.

2.2. Réponse à un échelon

La réponse temporelle à un signal échelon unité est donnée par :

$$y(t) = K (1 - e^{-t/\tau})$$

2.3. Performances

- Temps de montée T_m : Approximativement 2.2τ .
- Temps de réponse à 5% : Approximativement 3τ .

- **Erreur statique** : Nulle si le gain est bien ajusté.
-

3. Systèmes du Deuxième Ordre

3.1. Fonction de Transfert

Un système du deuxième ordre est décrit par :

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Où :

- ω_n est la pulsation propre du système,
- ζ est le coefficient d'amortissement.
- Si $\zeta > 1$ (**Sur-amorti**) : Pas d'oscillation, réponse lente.
- Si $\zeta = 1$ (**Critiquement amorti**) : Réponse plus rapide sans oscillation.
- Si $0 < \zeta < 1$ (**Sous-amorti**) : Réponse oscillatoire avec dépassement.
- Si $\zeta = 0$ (**Non amorti**) : Oscillations continues.

3.3. Performances

- **Temps de montée** : Diminue avec ω_n , dépend de ζ .
- **Temps de réponse à 5%** : Augmente avec ζ .
- **Dépassement** : Maximal pour $\zeta \approx 0.7$.
- **Temps de dépassement T_p** : Temps nécessaire pour atteindre le premier pic maximal de la réponse. Il est donné par :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

4. Influence des Coefficients d'Amortissement et des Pôles

- **Les pôles** d'un système déterminent sa stabilité et sa rapidité de réponse.
- **Un coefficient d'amortissement faible** conduit à des oscillations importantes.
- **Des pôles proches de l'origine** impliquent un système lent.

Le temps de monté est le temps pendant lequel la réponse du système atteint 90 % de sa valeur finale à partir de 10 %. Le temps de montée est représenté sur la figure . Le temps de stabilisation désigne le temps après lequel le temps de réponse du système reste à 2 % de sa réponse finale.

❖ **Time constant, $\tau = 1/a$**

- Time to decay to 37 % of its initial value
- $e^{-at} \big|_{t=1/a} = e^{-1} = 0.37$
or to rise to 63 % of its final value.
- $c(t) \big|_{t=1/a} = 1 - e^{-at} \big|_{t=1/a} = 1 - 0.37 = 0.63$
 a : the exponential frequency

❖ **Rise time, T_r**

- Time for the waveform to go from 0.1 to 0.9 of its final value
- $T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a}$

❖ **Settling time, T_s**

- Time for the response to reach, and stay within, 2 % of its final value
- $T_s = \frac{4}{a}$

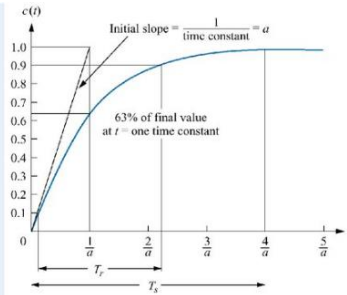
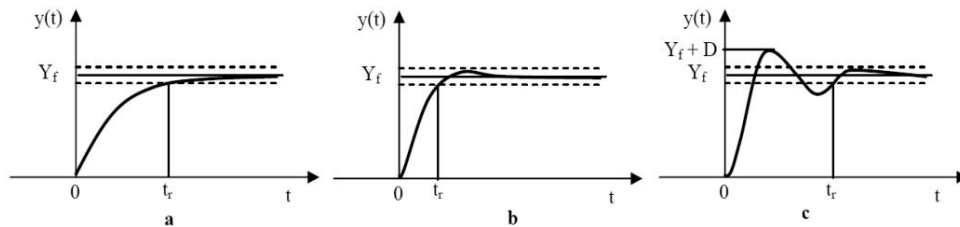


Figure 4.4
First-order system response to a unit step

Temps de réponse

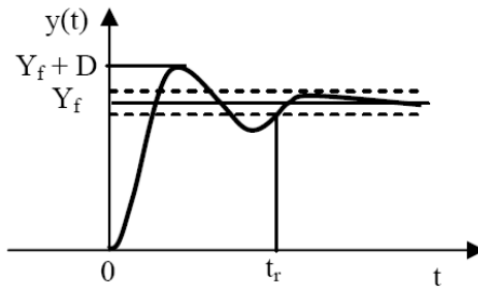
Définition : C' est le temps que met la sortie du processus pour atteindre une zone encadrant sa valeur finale et ne plus en sortir.

Cette zone est généralement donnée à $\pm 5\%$



Dépassement

Définition : Le dépassement **D** est la différence entre la valeur maximale et la valeur finale de la grandeur physique considérée.



il est exprimé en pourcentage, soit $D\% = \frac{D}{Y_f} \times 100$

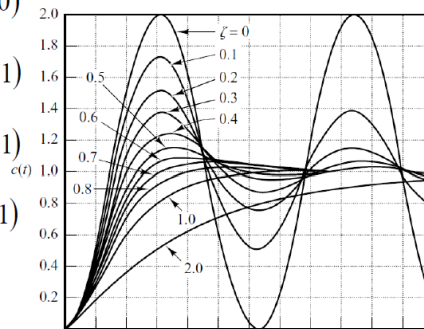
Second-Order System



The dynamic behaviour of the second-order system can be described in terms of two parameters ζ and ω_n .

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

1. Undamped case ($\zeta = 0$)
2. Under-damped case ($0 < \zeta < 1$)
3. Critically damped case ($\zeta = 1$)
4. Over-damped case ($\zeta > 1$)



Second-Order System

1. Undamped case ($\zeta = 0$)

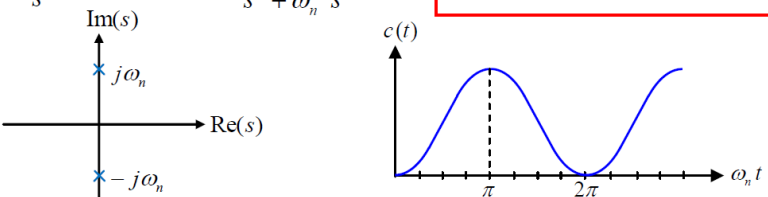
In this the oscillation continues indefinitely.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

The roots of the denominator are on the imaginary axis

$$s_1 = j\omega_n \quad s_2 = -j\omega_n$$

The unit-step response is obtained as

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad c(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \quad \text{for } t \geq 0$$


16

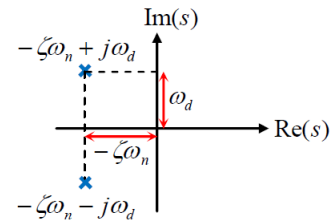
Second-Order System

2. Under-damped case ($0 < \zeta < 1$)

- In this case the closed-loop poles are complex conjugates and lie in the left-half s plane.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- The transient response is oscillatory.



- The closed-loop transfer function can be written as

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)} \quad \begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_n + j\omega_d \\ s_2 &= -\zeta\omega_n - j\omega_d \end{aligned}$$

where $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ is called the damped natural frequency.

17

Second-Order System

2. Under-damped case ($0 < \zeta < 1$)

The unit-step response of this case is as follows

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad \text{for } t \geq 0$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad \text{for } t \geq 0$$

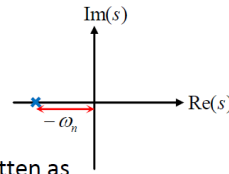
18

Second-Order System

3. Critically-damped case ($\zeta = 1$)

- In this case the two poles are equal.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2}$$



- The closed-loop transfer function can be written as

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2}$$

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

- The unit-step response of this case is as follows

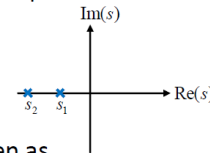
$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \text{ for } t \geq 0$$

10

4. Over-damped case ($\zeta > 1$)

In this case the two poles are negative real and unequal.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



- The closed-loop transfer function can be written as

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$s_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

$$s_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

- The unit-step response of this case is as follows

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

20

4. Over-damped case ($\zeta > 1$)

- The unit-step response of this case is as follows

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow C(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

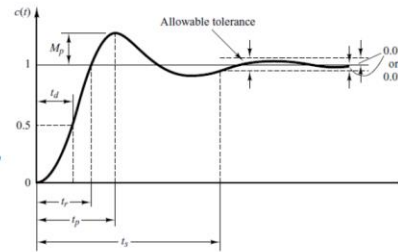
- Taking inverse Laplace transform yields

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right) \text{ for } t \geq 0$$

Definitions of Transient-Response Specifications

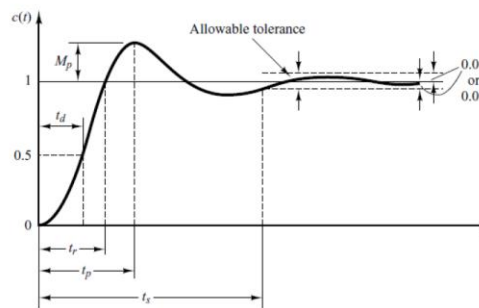
In specifying the transient-response characteristics of a control system to a unit-step input, it is common to specify the following:

1. Delay time, t_d
2. Rise time, t_r
3. Peak time, t_p
4. Maximum overshoot, M_p
5. Settling time, t_s



Definitions of Transient-Response Specifications

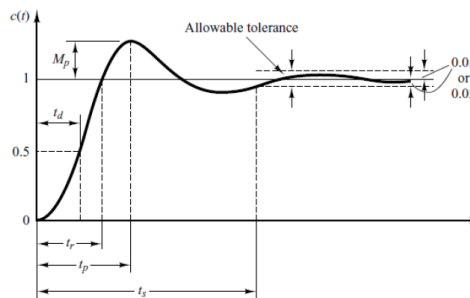
1. **Delay time, t_d** : The delay time is the time required for the response to reach half the final value the very first time.



23

Definitions of Transient-Response Specifications

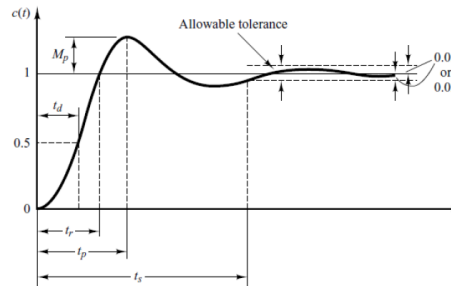
2. **Rise time, t_r** : The rise time is the time required for the response to rise from 10% to 90%, 5% to 95%, or 0% to 100% of its final value. For underdamped second order systems, the 0% to 100% rise time is normally used. For overdamped systems, the 10% to 90% rise time is commonly used.



24

Definitions of Transient-Response Specifications

3. **Peak time, t_p** : The peak time is the time required for the response to reach the first peak of the overshoot.

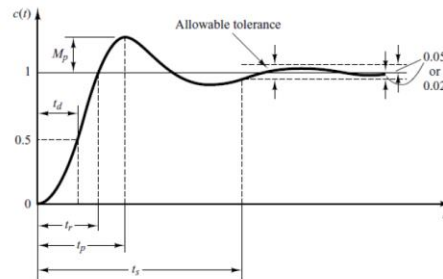


25

Definitions of Transient-Response Specifications

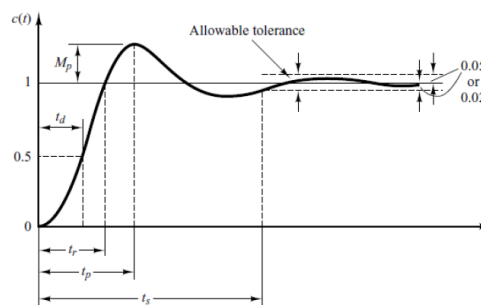
4. **Maximum overshoot, M_p** : The maximum overshoot is the maximum peak value of the response curve measured from unity. If the final steady-state value of the response differs from unity, then it is common to use the maximum percent overshoot. It is defined by

$$M_p \% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100$$



26

5. **Settling time, t_s** : The settling time is the time required for the response curve to reach and stay within a range about the final value of size specified by absolute percentage of the final value (usually 2% or 5%). The settling time is related to the largest time constant of the control system.



7

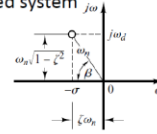
Rise time t_r : By letting $c(t_r) = 1$ in an under-damped system

$$c(t_r) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t_r + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\frac{e^{-\zeta \omega_n t_r}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t_r + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0 \quad \text{since } e^{-\zeta \omega_n t_r} \neq 0 \quad \text{so}$$

$$\sin\left(\omega_d t_r + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_r = -\frac{1}{\omega_d} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$t_r = \frac{\pi - \cos^{-1} \zeta}{\omega_d} \quad \text{where} \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$



28

Peak time t_p : Assume again the system is under-damped

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dt} = \zeta \omega_n \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) - \omega_d \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cos\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_p} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_d t_p) = 0$$

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \quad \xrightarrow{\text{1st peak}} \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

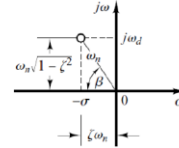
29

Maximum overshoot M_p : Assume again the system is under-damped

$$M_p = c(t_p) - 1 \quad \Rightarrow \quad M_p = -\frac{e^{-\zeta \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\pi + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$M_p = -\frac{e^{-\zeta \omega_n t_p}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\sin \pi \cos\left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) + \cos \pi \sin\left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \right]$$

$$M_p = e^{-\zeta \omega_n (\pi/\omega_d)} \quad \Rightarrow \quad M_p = e^{-\left(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\right)\pi}$$



30

Settling time t_s : Assume again the system is under-damped

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad \text{for } t \geq 0$$

Consider the time constant is $T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (2\% \text{ criterion})$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad (5\% \text{ criterion})$$