

Chapitre III :

Transfert de Chaleur par Convection Naturelle

III.1. Introduction

La transmission de chaleur entre un fluide et une paroi est appelée convection libre ou naturelle quand le mouvement du fluide est provoqué uniquement par des forces d'ARCHIMEDE qui dépendent du gradient de densité. L'origine de la force d'ascension (d'Archimède) est normalement la force de gravité mais dans les machines rotatives elle dépend de la force centrifuge.

Dans la plupart des cas le gradient de densité résulte d'une différence de température dans le fluide.

Les vitesses des écoulements naturels sont généralement faibles, il en résulte que la chaleur transmise est généralement plus faible que dans le cas des écoulements forcés.

La convection libre est considérée comme un phénomène important dans de nombreux cas techniques (p.ex. chauffage par radiateur, "pipelines", appareils électroniques, mouvements atmosphériques et mouvements de la mer, etc.).

III.2. Couche limite hydrodynamique et thermique

Considérons une plaque plane verticale, de température de surface T_p , au contact d'un fluide froid dont la température au loin est T_∞ .

Plaçons-nous par exemple dans le cas où la plaque est plus chaude que le fluide ($T_p > T_\infty$). D'après ce que l'on sait déjà, le fluide va s'élever le long de la paroi ($\rho(T_p) < \rho(T_\infty)$)

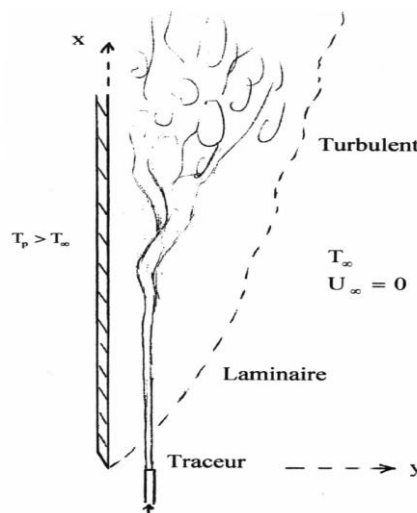


Figure III.1. : Visualisation d'un écoulement de convection libre; la plaque plus chaude que le fluide.

Le transfert de chaleur entre la plaque et le fluide s'effectue d'abord par conduction dans une région très proche de la plaque. Ainsi, un gradient de température s'établit au sein du fluide et provoque une diminution de sa masse volumique. Il s'ensuit alors un mouvement ascendant sous l'effet du repos dont la masse volumique est plus élevée (poussée d'Archimède ou force de flottabilité). L'expérience montre que les distributions de la vitesse et de la température ont les allures représentées sur les figures III.2 et III.3.

Lorsque la plaque est froide et le fluide est chaud, l'écoulement de celui-ci est inversé : il aura lieu de haut en bas.

Une couche limite dynamique d'épaisseur δ_H et une autre, thermique δ_T , se développent au voisinage de la plaque. En bas de la plaque, la couche limite est laminaire, l'écoulement devient instable puis turbulent à partir d'une certaine distance du bord.

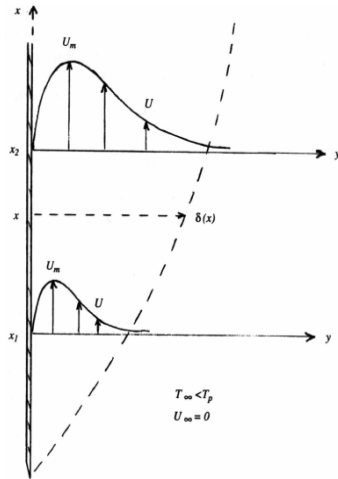


Figure III.2 : couche limite hydrodynamique

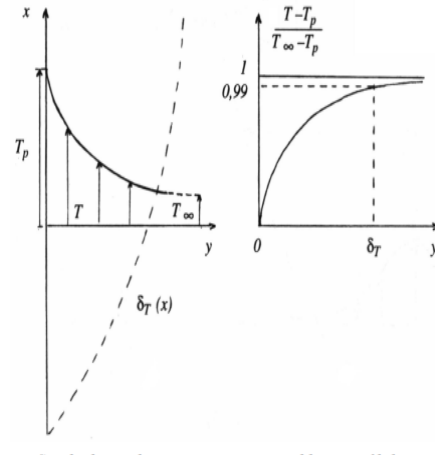


Figure III.3: Couche limite thermique

III.3. Equations de la convection naturelle- Approximation de Boussinesq :

Les équations de base à considérer sont celles de la mécanique des fluides et de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{U}) = 0 \quad (\text{III. 1})$$

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{F}_i - \frac{1}{\rho} \text{grad}P + \nu \cdot \Delta \vec{U} \quad (\text{III. 2})$$

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{DT}{Dt} = \text{div}(\lambda \cdot \text{grad}T) + T\beta \cdot \frac{dp}{dt} + \dot{q} + \psi \quad (\text{III. 3})$$

Toutefois, les vitesses modérées conduisent à négliger, dans la plupart des cas, $\frac{dp}{dt}$ et la dissipation ψ devant le terme de convection. Lorsqu'il n'y a pas de source interne de chaleur, on considère donc l'équation (III.4) au lieu de l'équation (III.3)

$$\frac{DT}{Dt} = a \cdot \Delta T \quad (\text{III. 4})$$

De plus, pour les forces de volume, on ne tient compte que de la résultante des forces externes qui est limitée aux forces gravitationnelles de sorte que l'influence de la convection naturelle provoquée par des gradients de la température soit évidente. De plus, les écarts de température sont souvent faibles devant une température absolue de référence.

De ce fait, il est encore possible de simplifier les équations de quantités de mouvement, ce qui conduit à l'approximation de **Boussinesq** :

La variation de la masse volumique en fonction de la température est linéaire,

$$\rho = \rho_0 - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0) \quad (\text{III.5})$$

Donc, on peut écrire :

$$P = p + \rho_0 \cdot g \cdot z$$

Sachant que : $\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$ est le coefficient de dilatation à pression constante.

T_0 : la température de référence.

ρ_0 : la masse volumique à T_0 .

L'équation (III.2) s'écrit alors ;

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_i) + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} \right) = \rho \cdot \bar{g} - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (\text{III. 6})$$

$$\begin{aligned} \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)) \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_i) + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} \right) \\ = -\rho_0 \beta (T - T_0) \bar{g} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III. 7})$$

Dans la décomposition $\rho = \rho_0 - \rho_0 \cdot \beta \cdot (T - T_0)$; le premier terme ρ_0 ne contribue pas au mouvement il est simplement pris en compte dans le terme de pression motrice par $P = p + \rho_0 \cdot g \cdot z$. Le deuxième terme est le moteur du mouvement et doit bien sûr être gardé dans les équations de Navier-Stokes.

Par contre, la décomposition de ρ ne fait que modifier légèrement le terme d'inertie par rapport à $\rho_0 \cdot \frac{d\vec{U}}{dt}$ et on peut faire l'approximation :

Si : $\beta \cdot (T - T_0) \ll 1$, $\rho \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} \approx \rho_0 \cdot \frac{d\vec{U}}{dt}$, le terme $\beta \cdot (T - T_0) \cdot \rho_0 \cdot \frac{d\vec{U}}{dt}$ étant d'un ordre de grandeur inférieur.

Finalement, on retiendra l'équation suivante :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\text{grad}} p - \beta \cdot (T - T_0) \vec{g} + \nu \cdot \Delta \vec{U} \quad (\text{III. 8})$$

Avec : $P = p + \rho_0 \cdot g \cdot z$ la pression motrice

Bien que l'approximation soit moins correcte qu'en convection forcée, on fait encore l'approximation de la couche limite.

On suppose donc que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \delta_H \ll x$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad \delta_T \ll x$$

Les équations (III. 1), (III. 8), (III. 4) en 2d (suivant x et y) en régime stationnaire s'écrivent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III. 9)} \\ \text{(III. 10)} \\ \text{(III. 11)} \\ \text{(III. 11)} \end{array}$$

On trouve un système analogue à celui de la convection forcée sur une plaque plane sans gradient de pression, mais avec le terme de force d'Archimède en plus dans l'équation de Navier – Stokes.

III.4. Formulation adimensionnée et critères de similitude

Les variables adimensionnelles :

$$x^* = \frac{x}{L}, y^* = \frac{y}{L}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, v^* = \frac{v}{u_0}, T^* = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

Où L est une longueur caractéristique et u_0 est une vitesse de référence arbitraire.

La forme adimensionnelle des équations gouvernantes devient :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{(III. 12)}$$

- **Equation de quantité de mouvement**

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty) \cdot L}{u_0^2} T^* + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad \text{(III. 13)}$$

$$\text{avec} \quad Re_L = \frac{u_0 \cdot L}{\nu}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty) \cdot L}{u_0^2} \cdot \frac{\left(\frac{u_0 \cdot L}{\nu}\right)^2}{\left(\frac{u_0 \cdot L}{\nu}\right)^2} T^* + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad \text{(III. 14)}$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_P - T_\infty) \cdot L^3}{\left(\frac{u_0 \cdot L}{v}\right)^2} T^* + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (III. 15)$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{Gr_L}{Re_L^2} T^* + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (III. 16)$$

Ici le nombre de Grashof, est un nombre adimensionnel défini par :

$$Gr_L = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_P - T_\infty) \cdot L^3}{v^2}$$

Le nombre de Grashof est le rapport des forces de pesanteur qui agissent pour mettre en mouvement le fluide, aux forces de viscosité qui tendent à amortir ce mouvement. Plus Gr_L est grand, plus la convection naturelle sera intense. Gr_L est donc à la convection naturelle ce que Re_L est à la convection forcée.

- **Equation d'énergie :**

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{u_0 \cdot L} \cdot \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (III. 17)$$

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L \cdot Pr} \cdot \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \quad (III. 18)$$

Note :

Si le transfert convectif forcé et le transfert convectif naturel sont dans les mêmes ordres de grandeur, les corrélations sont de la forme :

$$Nu_L = f(Re_L, Gr_L, Pr)$$

$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \approx 1 \rightarrow$ Transferts convectif forcé et naturel comparables.

$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \ll 1 \rightarrow$ Transferts convectif naturel négligeable.

$\frac{Gr_L}{Re_L^2} \gg 1 \rightarrow$ Transferts convectif forcé négligeable.

-Le nombre de Rayleigh

Le nombre de Rayleigh détermine la transition laminaire –turbulent et qui est le produit $Gr_L \cdot Pr$.

$$Ra_L = Gr_L \cdot Pr = \frac{g \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{a \cdot v}$$

Le nombre de Rayleigh compare les effets de la gravité (poussée d'Archimède) avec les effets de la dissipation (dissipation thermique et visqueuse).

Un grand nombre de Rayleigh signifie une forte différence de température ou/et une faible viscosité ou diffusion de la chaleur. La convection ne peut ainsi démarrer qu'à partir d'un certain nombre de Rayleigh critique, indépendant du matériau, ce nombre est voisin de 1000.

III.5. Corrélations expérimentales :

III.5.1. Convection naturelle externe

a)- Plaque plane verticale

Les relations rendant compte des études expérimentales de transfert thermique en convection naturelle sont généralement de la forme :

$$Nu_L = C(Gr_L \cdot Pr)^n = C(Ra_L)^n \quad (III. 19)$$

Les grandeurs physiques intervenant dans les nombres de Grashof et de Prandtl doivent être calculées pour la température moyenne $\frac{T_P + T_\infty}{2}$

L'exposant n prendra les valeurs suivantes :

- $n=1/4$ lorsque la convection est laminaire
- $n=1/3$ lorsque la convection est turbulente.

La valeur du coefficient C dépend du régime de convection ainsi que de la géométrie et de l'inclinaison de la paroi. Cette valeur est donné dans le tableau III.1 .

Tableau III.1 : Constantes C et n

Géométrie et orientation de la paroi	Dimension caractéristique L	C	
		Convection laminaire $n=1/4$	Convection turbulente $n=1/3$
Plaque verticale	Hauteur	0.59 $10^4 < Ra_L < 10^9$	0.13 $10^9 < Ra_L < 10^{13}$
Cylindre	Diamètre extérieur	0.53 $10^3 < Ra_D < 10^9$	0.10 $10^9 < Ra_D < 10^{13}$
Surface supérieure d'une plaque chauffée ou surface inférieure d'une plaque refroidie	Largeur Ou S/P	0.54 $10^5 < Ra_L < 2 \times 10^7$	0.14 $2 \times 10^4 < Ra_L < 3 \times 10^{10}$
Surface inférieure d'une plaque chauffée ou surface supérieure d'une plaque refroidie	Largeur Ou S/P	0.27 $3 \times 10^5 < Ra_L < 3 \times 10^{10}$	0.07 $3 \times 10^{10} < Ra_L < 10^{13}$

-**Churchill et Chu** proposent pour toute la gamme de Ra_L :

$$\overline{Nu}_L = \left(0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{1 + (0.492/Pr)^{8/27}} \right)^2 \quad (III. 20)$$

Cette corrélation peut être appliquée pour un cylindre verticale si :

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr_L^{1/4}}$$

Churchill et Chu proposent aussi une corrélation plus précise dans le cas d'écoulements laminaires :

$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.67 Ra_L^{\frac{1}{4}}}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{4}{9}}} \quad (III. 21) \quad Ra_L \leq 10^9$$

b)- Plaque plane inclinée

La poussée d'Archimède possède deux composantes : normale et parallèle à la surface de la plaque. La réduction de la composante parallèle entraîne la réduction de la convection. Le coefficient de convection peut être calculé de façon approximative à l'aide des corrélations de plaque verticale en remplaçant g par $g \cdot \cos(\theta)$ pour $0 \leq \theta \leq 60^\circ$.

c)- Cylindre horizontal

Le nombre de Nusselt moyen basé sur le diamètre du cylindre :

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h} \cdot D}{\lambda} = C \cdot Ra_D^n \quad (III. 22)$$

C et n des constantes dont les valeurs sont données dans le tableau III.2

Tableau III.2 : Constantes C et n

Ra_D	C	n
$10^{-10} - 10^{-2}$	0.675	0.058
$10^{-2} - 10^2$	1.02	0.148
$10^2 - 10^4$	0.850	0.188
$10^4 - 10^7$	0.480	0.250
$10^7 - 10^{12}$	0.125	0.333

Pour un cylindre horizontal, le nombre de Nusselt moyen pour une vaste gamme de nombre de Rayleigh a été corrélié par **Churchill et Chu**(1975) tel que :

$$\overline{Nu}_D = \left(0.60 + \frac{0.387 Ra_D^{1/6}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right)^2 \quad (III. 22) \quad Ra_D \leq 10^{12}$$

d)- Sphères

Pour les sphères, en extrapolant les résultats de Churchill et Chu pour les cylindres, l'expression du nombre de Nusselt moyen pour $Pr \geq 0.7$ et $Ra_D \leq 10^{11}$ est donné par Churchill(1983) :

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.469/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (III. 23)$$

III.5.2.Convection naturelle entre plaques parallèles

La couche limite se développe sur les deux surfaces en même temps. Des conditions d'écoulement pleinement développé peuvent survenir.

a)- Canaux verticaux

-Pour un canal vertical dont les parois sont à températures constantes et identiques, Elenbaas a déterminé que :

$$\overline{Nu}_e = \frac{1}{24} \cdot Ra_e \left(\frac{e}{L} \right) \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{35}{Ra_e (e/L)} \right] \right\}^{3/4} \quad (III. 24)$$

Cette corrélation est semi-empirique et valide pour les canaux chauffés de façon symétrique où :

$$\overline{Nu}_e = \left(\frac{q_s}{T_p - T_\infty} \right) \frac{e}{\lambda} \quad \text{et} \quad Ra_e = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)e^3}{a \cdot \nu}$$

Sont les nombres de Nusselt moyen et de Rayleigh basés sur l'espacement «e» entre les plaques.

-Pour les canaux avec les plaques isoflux, les nombres de Nusselt local est défini tel que :

$$\overline{Nu}_{e,L} = \left(\frac{\varphi_p}{T_{p,L} - T_\infty} \right) \frac{e}{\lambda}$$

L réfère à la condition $x=L$ où la température de la plaque est maximum.

-Pour les canaux avec les plaques isoflux symétriques dans le régime complètement développé :

$$Nu_{e,L} = 0.144 \left[Ra_e^* \left(\frac{e}{L} \right) \right]^{1/2} \quad (III. 25)$$

Et le nombre de Rayleigh modifié par :

$$Ra_e^* = \frac{g\beta\varphi_p e^4}{\lambda \cdot a \cdot \nu}$$

Et pour les conditions axisymétriques avec une surface isolée à la limite :

$$Nu_{e,L} = 0.204 \left[Ra_e^* \left(\frac{e}{L} \right) \right]^{1/2} \quad (III. 26)$$

b)- Canaux inclinés :

Azevedo et Sparrow ont effectué des expériences dans les canaux inclinés rempli d'eau. Pour les conditions des plaques isothermes et plaques isothermes-isolées pour $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ dans la limite de $Ra_e(e/L) > 200$ le nombre de Nusselt moyen est donné par :

$$Nu_e = 0.645 \left[Ra_e \left(\frac{e}{L} \right) \right]^{1/4} \quad (III. 27)$$

Et les propriétés du fluide sont évaluées à la température du film : $T_f = \frac{T_P + T_\infty}{2}$

III.5.3. Cavités rectangulaires

$$Ra_e = \frac{g\beta(T_1 - T_2)L^3}{a \cdot \nu} > 1708$$

Lorsque les surfaces sont verticales

- Pour de faibles rapports de forme [Catton]

$$\overline{Nu}_L = 0.22 \left[Ra_L \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} \right) \right]^{0.28} \left[\frac{H}{L} \right]^{-1/4} \quad (III. 28) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 < \frac{H}{L} < 10 \\ Pr < 10^5 \\ 10^3 < Ra_L < 10^{10} \end{array} \right.$$

- Pour de très faibles rapports de forme [Catton]

$$\overline{Nu}_L = 0.18 \left[Ra_L \left(\frac{Pr}{0.2 + Pr} \right) \right]^{0.29} \quad (III. 29) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 < \frac{H}{L} < 2 \\ 10^{-3} < Pr < 10^5 \\ 10^3 < \frac{Ra_L \cdot Pr}{0.2 + Pr} \end{array} \right.$$

- Pour de grands rapports de forme [McGregor]

$$\overline{Nu}_L = 0.42 \cdot Ra_L^{1/4} \cdot Pr^{0.012} \left[\frac{H}{L} \right]^{-0.3} \quad (III. 30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 10 < \frac{H}{L} < 40 \\ 1 < Pr < 2 \times 10^4 \\ 10^4 < Ra_L < 10^7 \end{array} \right.$$

- Pour une large plage de rapports de forme [McGregor]

$$\overline{Nu}_L = 0.046 \cdot Ra_L^{1/3} \quad (III. 31) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 < \frac{H}{L} < 40 \\ 1 < Pr < 20 \\ 10^6 < Ra_L < 10^9 \end{array} \right.$$

Pour toutes ces corrélations $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$