

Chapitre I

La Conduction Bidimensionnelle en Régime Permanent

I.1. Introduction

Le but de chaque procédure d'analyse du phénomène de transfert thermique est la détermination de la distribution de la température et le flux de chaleur. Dans un système bidimensionnel et sans source de la chaleur, l'équation générale de conduction gouvernant la distribution de la température en régime permanent se simplifie à:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (I.1)$$

Dans un système où la propagation de la chaleur s'effectue pas selon une direction unique, plusieurs méthodes de résolution de l'équation (I.1) peuvent être appliquées :

I.2 Méthode de séparation des variables :

La solution analytique d'un problème de conduction thermique doit satisfaire l'équation gouvernante régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites relatives au problème physique considéré. L'approche traditionnelle de recherche d'une solution exacte pour l'équation de Fourier, est la méthode de séparation de variables. Donc, Pour la solution (l'intégration) mathématique de cette équation, on utilise la méthode de séparation de variables, qui est basée sur l'idée de supposer la solution sous forme de produit de deux fonctions.

Pour un corps isotrope et homogène, en régime permanent et sans sources de chaleur, l'équation générale de la conduction se réduit à l'équation (I.1).

Essayons d'intégrer cette équation pour un domaine rectangulaire en utilisant la méthode de séparation des variables. Séparons les variables :

$$T(x,y) = X(x).Y(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Y \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = X \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \quad (I.2)$$

Remplaçons dans l'équation (I.1) :

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \text{Cste} = \lambda^2 \quad (I.3)$$

En effet une fonction de x ne peut évaluer une fonction de y que si elle est constante.

Chaque membre de cette dernière relation doit être égale à une constante, puisqu'il ne fait intervenir qu'une variable indépendante x ou y . En posant cette constante égale à λ^2 , nous obtenons deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \lambda^2 \cdot X = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \lambda^2 Y = 0 \end{cases} \quad (I.4)$$

Dont les solutions sont respectivement :

$$\begin{cases} X = A \cdot \cos \lambda x + B \cdot \sin \lambda x \\ Y = C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y} \end{cases} \quad (I.5)$$

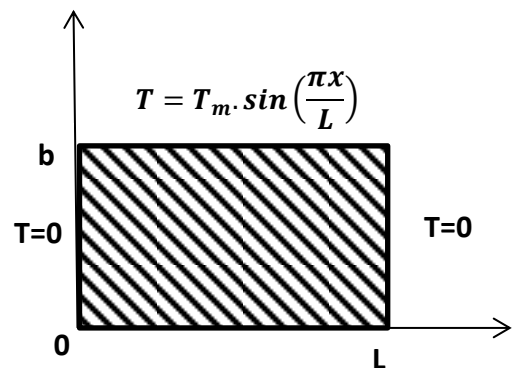
Entrainant l'expression de la température :

$$T(x,y) = X(x) \cdot Y(y) = [A \cdot \cos \lambda x + B \cdot \sin \lambda x] \cdot [C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y}] \quad (I.6)$$

Où A , B , C et D sont des constantes à déterminer d'après les conditions aux limites

Exemple ;

Soit une plaque rectangulaire illustrée ci-dessous. Il est demandé de déterminer la distribution de la température dans cette plaque en fonction de x et y .



Les conditions aux limites à satisfaire sont :

$$T(0,y)=0$$

$$T(L,y)=0$$

$$T(x,0)=0$$

$$T(x,b) = T_m \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

En substituant ses conditions dans l'équation (I.6), nous obtenons les équations suivantes :

$$A \cdot [C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y}] = 0 \quad (I.7)$$

$$[A \cdot \cos \lambda L + B \cdot \sin \lambda L] \cdot [C \cdot e^{\lambda y} + D \cdot e^{-\lambda y}] = 0 \quad (I.8)$$

$$[A \cdot \cos \lambda x + B \cdot \sin \lambda x] \cdot [C + D] = 0 \quad (I.9)$$

$$[A \cdot \cos \lambda x + B \cdot \sin \lambda x] \cdot [C \cdot e^{\lambda b} + D \cdot e^{-\lambda b}] = T_m \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (I.10)$$

L'équation (I.9) donne : $C+D=0 \Rightarrow C= - D$

L'équation (I.7) donne : $A=0$

En tenant compte de ces résultats l'équation (I.8) donne :

$$B. \sin \lambda L. [C. e^{\lambda y} - C. e^{-\lambda y}] = 0$$

$$\Rightarrow C. B. \sin \lambda L. [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}] = 0, \quad \text{sh} \lambda y = \frac{e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}}{2},$$

$$D'où : 2 C. B. \sin \lambda L. \text{sh} \lambda y = 0$$

Pour satisfaire cette condition, $\sin \lambda L = 0$ ou $= \frac{n\pi}{L}$, $n=1, 2, 3, \dots$ etc

Pour chaque nombre entier n , une solution différente ayant une constante d'intégration C_n distincte. Par sommation de ces solutions, nous obtenons :

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \text{sh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{L} \right) \quad (\text{I. 11})$$

La dernière condition aux limites permet l'évaluation de la constante C_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \text{sh} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot b}{L} \right) = T_m \cdot \sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \quad (\text{I. 12})$$

Et impose que seule la constante C_1 est nécessaire. Elle s'exprime :

$$C_1 = \frac{T_m}{\text{sh} \left(\frac{\pi \cdot b}{L} \right)}$$

Et la distribution de la température s'exprime finalement comme :

$$T(x, y) = T_m \cdot \frac{\text{sh} \left(\frac{\pi \cdot y}{L} \right)}{\text{sh} \left(\frac{\pi \cdot b}{L} \right)} \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot x}{L} \right) \quad (\text{I. 13})$$

I.3 Méthodes numériques

I.3.1. Principe de la méthode

Remplacer l'équation différentielle aux dérivées partielles (qu'on ne sait pas résoudre en général) par un système d'équations linéaire (que l'on pourra résoudre facilement). Plutôt que de chercher l'expression $T(x, y)$ de la température en tout point du domaine, on va s'intéresser à la détermination des températures uniquement en des lieux précis du domaine. On discrétise le

domaine à l'aide d'un maillage (voir **Figure I.1**) qui définit des points particuliers, les noeuds où l'on va chercher la température.

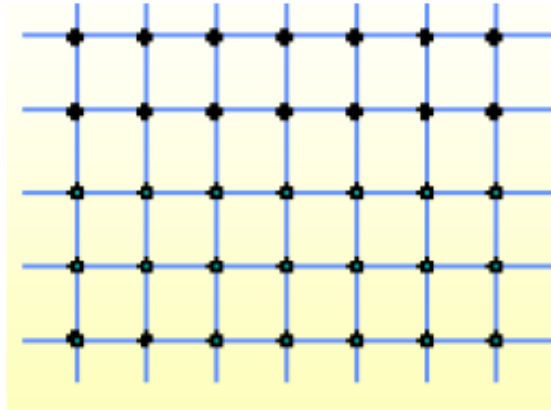


Figure I.1 : Représentation du maillage de la surface

I.3.2. Expression de l'équation de Laplace en différences finies

Considérons un exemple très simple où l'on souhaite déterminer le champ de température en régime permanent. La géométrie peut être discrétisée par un maillage de dimensions Δx , Δy . Chaque maille est caractérisée par un nœud.

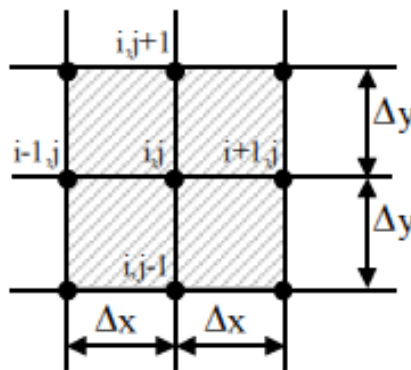


Figure I.2 : Représentation des nœuds sur un maillage

Les dérivées partielles de la température T peuvent s'exprimer selon les formules suivantes:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \Delta x \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \frac{1}{6} \Delta x^3 \cdot \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (\text{I. 14})$$

$$T_{i-1,j} = T_{i,j} - \Delta x \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} - \frac{1}{6} \Delta x^3 \cdot \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (\text{I. 15})$$

$$(I.13) + (I.14) \Rightarrow T_{i+1,j} + T_{i-1,j} = 2T_{i,j} + \overline{\Delta x}^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \vartheta(\Delta x^4) \quad (I.16)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta x^2} + \vartheta(\Delta x^4) \quad (I.17)$$

Dont un second temps on développe $T_{i,j}$ en série de Taylor au voisinage du point y_j , en x_i (voisinage du point j , en i) :

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \Delta y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \frac{1}{6} \Delta y^3 \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_{i,j} + \vartheta(\Delta y^4) \quad (I.18)$$

$$T_{i,j-1} = T_{i,j} - \Delta y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta y^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{1}{6} \Delta y^3 \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial y^3} \Big|_{i,j} + \vartheta(\Delta y^4) \quad (I.19)$$

$$(I.18) + (I.19) \Rightarrow T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 2T_{i,j} + \overline{\Delta y}^2 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} + \vartheta(\Delta y^4) \quad (I.20)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta y^2} + \vartheta(\Delta y^4) \quad (I.21)$$

L'équation de Laplace en bidimensionnel :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j}}{\Delta y^2} = 0 \quad (I.22)$$

Et si on choisit $\Delta x = \Delta y$, on obtient :

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4 \cdot T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (I.23)$$

Finalement :

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4 \cdot T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 0 \quad (I.24)$$

Pour retrouver la notation habituelle, remplaçant les indices i,j par les parenthèses (i,j) :

$$T(i+1, j) + T(i-1, j) - 4.T(i, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1) = 0 \quad (I. 25)$$

On a donc remplacé l'équation différentielle par une équation linéaire simple à résoudre. Pour chaque nœud on a une équation. Pour un problème comprenant au totale $I*J$ nœuds, on obtient ainsi un système de $I*J$ équations linéaires à $I*J$ inconnues ($T(i, j)$). La résolution du problème se ramène donc à la résolution d'un système d'équations linéaires.

I.3.3. Expression des conditions aux limites en différences finies

Aux frontières du domaine les principales conditions que nous allons rencontrer sont :

- La température constante
- La densité de flux est connue
- Echange par convection avec l'environnement.

Les cas de température sont très simples à expliciter. Nous nous limiterons ici aux échanges convectifs qui sont exprimés de la manière suivante :

-Convection sur la surface

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = h.L.\Delta x(T(i, j) - T_\infty) \quad (I. 26)$$

Où

$$\varphi_1 = \lambda.L.\frac{\Delta x T(i, j+1) - T(i, j)}{2\Delta x} \quad (I. 27)$$

$$\varphi_2 = \lambda.L.\frac{\Delta x T(i, j-1) - T(i, j)}{2\Delta x} \quad (I. 28)$$

$$\varphi_3 = \lambda.L.\Delta x \frac{T(i-1, j) - T(i, j)}{\Delta x} \quad (I. 29)$$

$$\lambda.L.\left[\frac{T(i, j+1) - T(i, j)}{2} + \frac{T(i, j-1) - T(i, j)}{2} + T(i-1, j) - T(i, j)\right] = h.L.\Delta x(T(i, j) - T_\infty) \quad (I. 30)$$

$$(2.T(i-1, j) + T(i, j+1) + T(i, j-1)) + \frac{h.\Delta x}{\lambda}T_\infty - 2\left(\frac{h.\Delta x}{\lambda} + 2\right)T(i, j) = 0 \quad (I. 31)$$

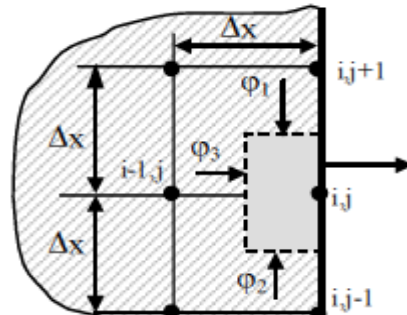


Figure III.3 : Représentation des flux élémentaires sur un bord rectiligne

-Convection dans un coin intérieur

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = h \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} (T(i, j) - T_\infty) + h \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} (T(i, j) - T_\infty) \quad (I.32)$$

$$\varphi_1 = \lambda \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{T(i+1, j) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.33)$$

$$\varphi_2 = \lambda \cdot L \cdot \Delta x \frac{T(i, j+1) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.34)$$

$$\varphi_3 = \lambda \cdot L \cdot \Delta x \frac{T(i-1, j) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.35)$$

$$\varphi_4 = \lambda \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{T(i, j-1) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.36)$$

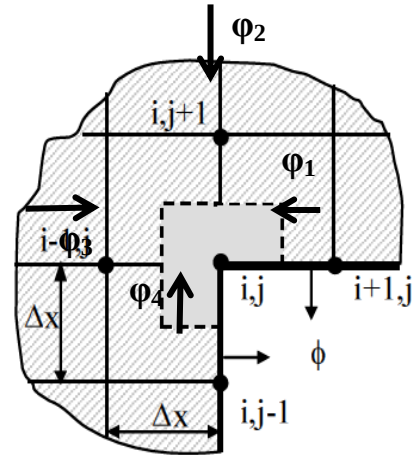


Figure I.4 : Représentation des flux élémentaires sur un coin intérieur

$$2 \cdot (T(i-1, j) + T(i, j+1)) + (T(i+1, j) + T(i, j-1)) + 2 \frac{h \cdot \Delta x}{\lambda} T_\infty - 2 \left(\frac{h \cdot \Delta x}{\lambda} + 3 \right) T(i, j) = 0 \quad (I.37)$$

-Convection sur un coin extérieur

$$\varphi_1 + \varphi_2 = h \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} (T(i, j) - T_\infty) + h \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} (T(i, j) - T_\infty) \quad (I.38)$$

$$\varphi_1 = \lambda \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{T(i-1, j) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.39)$$

$$\varphi_2 = \lambda \cdot L \cdot \frac{\Delta x}{2} \frac{T(i, j-1) + T(i, j)}{\Delta x} \quad (I.40)$$

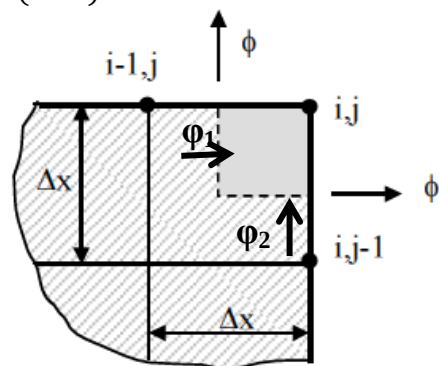


Figure I.5 : Représentation des flux élémentaires sur un coin extérieur

$$(T(i-1, j) + T(i, j-1)) + 2 \frac{h \cdot \Delta x}{\lambda} T_\infty - 2 \left(\frac{h \cdot \Delta x}{\lambda} + 1 \right) T(i, j) = 0 \quad (I.41)$$

I.3.4. Méthode de résolution numérique :

Le système d'équations linéaires étant obtenu, on peut le résoudre par :

- Une méthode directe : cas de 4 équations (problème de matrice)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

- Une méthode itérative (Gauss-Seidel) : On effectue des itérations successives consistant à remplacer la valeur de la température en chaque nœud du maillage par la valeur calculée par l'équation aux différences finies qui lui est associée. Une itération consiste à effectuer un balayage complet de tous les nœuds, ligne après ligne et de gauche à droite pour chaque ligne par exemple. Les valeurs recalculées sont immédiatement prises en compte pour le calcul de la valeur de la température T aux points d'ordre supérieur (points situés à droite et en-dessous dans le mode de balayage proposé).

Exemple : cas d'un système de quatre équations à quatre inconnues.

Soit à résoudre :

$$\begin{cases} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + a_{14}T_4 = f_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + a_{24}T_4 = f_2 \\ a_{31}T_1 + a_{32}T_2 + a_{33}T_3 + a_{34}T_4 = f_3 \\ a_{41}T_1 + a_{42}T_2 + a_{43}T_3 + a_{44}T_4 = f_4 \end{cases} \quad (I.42)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{f_1 - a_{12}T_2 - a_{13}T_3 - a_{14}T_4}{a_{11}} \\ T_2 = \frac{f_2 - a_{21}T_1 - a_{23}T_3 - a_{24}T_4}{a_{22}} \\ T_3 = \frac{f_3 - a_{31}T_1 - a_{32}T_2 - a_{34}T_4}{a_{33}} \\ T_4 = \frac{f_4 - a_{41}T_1 - a_{42}T_2 - a_{43}T_3}{a_{44}} \end{cases} \quad (I.43)$$

On appelle $T_1(0)$, $T_2(0)$, $T_3(0)$ et $T_4(0)$ des estimés initiaux des températures.

$$\begin{cases} T_1(1) = \frac{f_1 - a_{12}T_2(0) - a_{13}T_3(0) - a_{14}T_4(0)}{a_{11}} \\ T_2(1) = \frac{f_2 - a_{21}T_1(1) - a_{23}T_3(0) - a_{24}T_4(0)}{a_{22}} \\ T_3(1) = \frac{f_3 - a_{31}T_1(1) - a_{32}T_2(1) - a_{34}T_4(0)}{a_{33}} \\ T_4(1) = \frac{f_4 - a_{41}T_1(1) - a_{42}T_2(1) - a_{43}T_3(1)}{a_{44}} \end{cases} \quad (I.44)$$

-Critère de convergence :

On peut par exemple arrêter le calcul dès que la variation la plus grande de $T(i,j)$ au cours d'une itération reste inférieure à une valeur ε donnée.

$$|T_k(n-1) - T_k(n)| \leq \varepsilon \quad (I.45)$$

I.4 Méthode du coefficient de forme

Dans les systèmes bidimensionnels ou tridimensionnels où n'interviennent que deux températures limites T_1 et T_2 , on montre que le flux de chaleur peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lambda \cdot F \cdot \Delta T$$

λ Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces S_1 et S_2 ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$)

T_1 Température de la surface S_1 ($^\circ C$)

T_2 Température de la surface S_2 ($^\circ C$)

F Coefficient de forme(m)

Les valeurs de (F) , peuvent être déterminées pour différentes géométries.

-Facteur de forme pour une paroi prismatique (Mur 3D)

Pour un mur plan, le flux thermique (φ) est donné par:

$$\varphi = \lambda \cdot \frac{S}{e} (T_1 - T_2) = \lambda \cdot F \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow F = \frac{S}{e}$$

Le coefficient de forme F ne dépend que de la forme, des dimensions et de la position relative des deux surfaces S_1 et S_2 .

Cas particulier : Enceinte tridimensionnelle (four, chambre froide, pièce climatisée...)

Méthode : on découpe l'enceinte en différents éléments et on calcule le flux traversant chacun d'eux selon la représentation de la figure I.6.

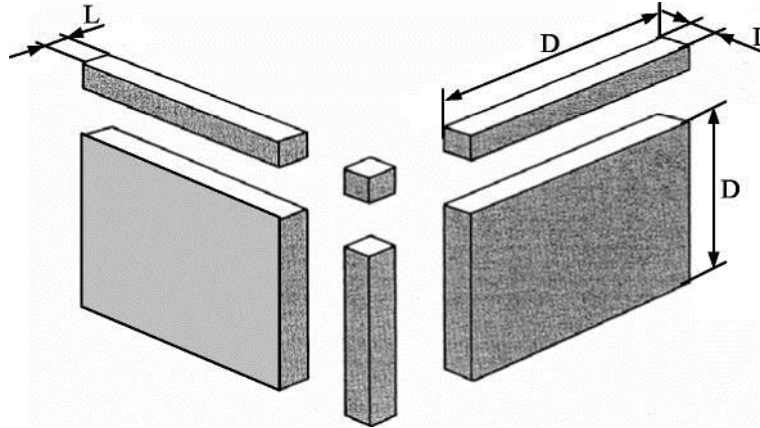


Figure I.6. Méthode de découpe d'une enceinte tridimensionnelle.

Si les dimensions longitudinales sont grandes devant l'épaisseur e des parois (supposée constante) nous avons les relations :

$$F_{\text{paroi } i} = \frac{S_i}{D_i}$$

$$F_{\text{bord } i} = 0.54 \cdot D_i$$

$$F_{\text{coin } i} = 0.15 \cdot L_i$$

Avec :

S_i : Aire de la paroi i

D_i : Longueur de la paroi ou du bord i

L_i : Epaisseur des parois

Le flux de chaleur traversant l'enceinte s'écrit alors :

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \lambda_i F_{\text{paroi } i} \cdot \Delta T_i + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i F_{\text{bord } i} \cdot \Delta T_i + \sum_{i=1}^8 \lambda_i F_{\text{coin } i} \cdot \Delta T_i$$

Avec :

λ_i : Conductivité thermique (équivalente si paroi multicouche)) de la paroi i ($\text{W m}^{-1}\text{C}^{-1}$)

ΔT_i : Différence de température entre les faces intérieure et extérieure de la paroi i ($^{\circ}\text{C}$)

-Facteur de forme pour une paroi cylindrique

On peut exprimer les flux thermiques pour une paroi cylindrique ou une paroi sphérique avec une méthode analogue à celle de mur plan. Donc, pour une paroi cylindrique:

$$\phi = \lambda \cdot \frac{S_{\text{eq}}}{e} (T_1 - T_2)$$

Avec; $e=r_1-r_2$, pour un cylindre creux :

$$\phi = \lambda \cdot \frac{S_{\text{eq}}}{e} (T_1 - T_2) = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\text{eq}}}} = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi \cdot L}}$$

$$\frac{S_{\text{eq}}}{e} = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \Rightarrow S_{\text{eq}} = \frac{2\pi L \cdot e}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L(r_2 - r_1)}{\ln(2\pi L \cdot \frac{r_2}{2\pi L} \cdot r_1)} = \frac{S_2 - S_1}{\ln(\frac{S_2}{S_1})}; F = \frac{S_{\text{eq}}}{e}$$

$$\Rightarrow \phi = \lambda \cdot \frac{S_{\text{eq}}}{e} (T_1 - T_2) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\text{eq}} \cdot \lambda}}$$

Avec $(\frac{e}{S_{\text{eq}} \cdot \lambda})$ exprime aussi la résistance thermique de la couche cylindrique.

Remarque: S varie entre S_1 et S_2 , selon la loi:

$$S = 2\pi \cdot L \cdot r = \lambda \cdot r$$

Donc S est proportionnelle au rayon r c'est à dire, lorsque ($r \uparrow \Rightarrow S \uparrow$).

-Facteur de forme pour une paroi sphérique

$$\phi = \lambda \cdot \frac{S_{\text{eq}}}{e} (T_1 - T_2) = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{S_{\text{eq}}}} = \lambda \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) / 4\pi} \Rightarrow \frac{S_{\text{eq}}}{e} = \frac{4\pi}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow S_{\text{eq}} = \frac{4\pi \cdot e}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{4\pi \cdot e}{\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}\right)} = \frac{4\pi \cdot (r_2 - r_1)}{\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}\right)} = 4\pi r_1 \cdot r_2$$

$$\Rightarrow S_{\text{eq}} = 4\pi r_1 \cdot r_2 = (2\sqrt{\pi} \cdot r_1)(2\sqrt{\pi} \cdot r_2) = \sqrt{4\pi r_1^2} \sqrt{4\pi r_2^2} = \sqrt{(4\pi r_1^2) \cdot (4\pi r_2^2)}$$

$$\Rightarrow S_{\text{eq}} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}; F = \frac{S_{\text{eq}}}{e}$$