

Chapitre II :

Transfert De Chaleur Par Conduction en Régime Permanent

II.1. Equation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :

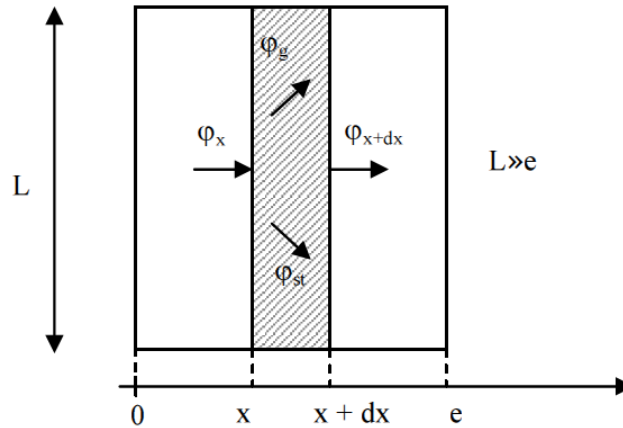


Figure II.1 : Bilan thermique sur un système élémentaire

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normalement à la direction ox .

Le bilan thermique dans l'intervalle du temps dt :

[La chaleur qui entre + la chaleur engendrée par les sources internes-la chaleur qui sort= la variation d'enthalpie]

Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \quad (\text{II.1})$$

Avec

$$\varphi_x = -\left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \quad (\text{II.2})$$

$$\text{et } \varphi_{x+dx} = -\left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} \quad (\text{II.3})$$

$$\varphi_g = \dot{q}_s \cdot S \cdot dx \quad (\text{II.4})$$

$$\varphi_{st} = \rho \cdot c_p \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

En reportant dans le bilan d'énergie et en divisant par dx , nous obtenons :

$$\frac{(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x})_{x+dx} - (\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x})_x}{dx} + \dot{q}_s \cdot S = \rho \cdot c_p \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_s \cdot S = \rho \cdot c_p \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.6})$$

Et dans le cas tridimensionnel, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas le plus général :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_s = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.7})$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}] + \dot{q}_s \quad (\text{II. 8})$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$
- b) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système : $\dot{q}_s$
- c) Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 9})$$

- d) Si de plus λ est constant (écart modéré de température), nous obtenons l'équation de Poisson :

$$\mathbf{a} \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 10})$$

Le rapport $\mathbf{a} = \lambda/(\rho \cdot c)$ est appelé la diffusivité thermique ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur à travers un matériau.

- e) En régime permanent, nous obtenons l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (\text{II. 11})$$

❖ Par ailleurs, les hypothèses a), c) et d) permettent d'écrire :

-Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} = \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 12})$$

Dans le cas d'un problème à symétrie cylindrique où la température ne dépend que de r et de t, l'équation (II.12) peut s'écrire sous forme simplifiée :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} = \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 13})$$

-Equation de la chaleur en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\dot{q}_s}{\lambda} = \frac{1}{\mathbf{a}} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 14})$$

II.2. Conditions aux limites spatio-temporelles pour la résolution de l'équation de la chaleur

L'équation générale de la chaleur exprime une relation entre la fonction température T et les variables x, y, z et t. La solution mathématique de cette équation aux dérivées partielles, linéaires, du deuxième ordre admet en principe une infinité de solutions. Aussi, sa résolution nécessite la connaissance, d'une part de la condition initiale c'est-à-dire la répartition initiale des températures en tout point du milieu T(x, y, z, 0), d'autre part la loi de variation en fonction du temps de la température ou de sa dérivée sur la surface S. Ce sont **les conditions aux limites spatio-temporelles**.

➤ **Condition initiale**

C'est la répartition de température à l'instant $t=0$ soit $T_0=f(x, y, z, 0)$. Généralement cette condition est connue.

➤ **Conditions aux limites**

Sur les frontières d'un matériau différents types de conditions aux limites peuvent apparaître dans les problèmes couramment rencontrés en transfert de chaleur.

a) Conditions de Dirichlet (1^{er} type)

La distribution de température T_p à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface. $T=f(x,y,z)$. Le cas le plus courant est celui où T_p ne dépend ni de t , ni de l'espace (uniforme sur l'espace).

$$T_p = \text{constante}$$

b) Conditions de Neumann (2^{ème} type)

On impose la densité de flux à la surface, pour tous les points de la surface en fonction du temps : $\phi_s(x, y, z, t)$

$$\phi_s = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = f(M_s, t) \quad (\text{II.15})$$

Où $\left(\frac{dT}{dn} \right)_s$ est la dérivée normale à la surface.

On impose un gradient de température $\Rightarrow$ on impose la pente du profil de température à la frontière.

Cas particulier de **la frontière adiabatique** : dans ce cas, le flux de chaleur traversant la frontière est nul.

$$\phi_s = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = 0 \quad (\text{II.16})$$

$\Rightarrow$ On impose une pente nulle au profil de température à la frontière.

c) Conditions de Fourier ou de Robin (3^{ème} type)-Echanges convectifs sur une paroi

Lorsqu'une paroi échange de la chaleur par convection avec l'extérieur, la densité du flux qu'elle échange est proportionnelle à la différence de température entre la paroi et le milieu fluide extérieur, multipliée par un coefficient d'échange h en $\text{W/m}^2.\text{K}$ qui tient compte des différentes propriétés physiques et cinématiques du fluide en contact avec la paroi. On impose au fluide ambiant une température que l'on notera T_∞ qui sera connue.

$$\phi_s = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_s = h(T_p - T_\infty) \quad (\text{II.17})$$

-Echanges radiatifs sur une paroi

Le rayonnement d'une paroi peut être un mode d'échange à prendre en compte, surtout si la température est élevée (supérieure à 100 degrés environ). La densité du flux d'une paroi à la température T_p échange par rayonnement avec le milieu externe à la température T_{ext} vaut :

$$\phi = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_p^4 - T_{\text{ext}}^4) \quad (\text{II.18})$$

σ : est la constante de stefan – Boltzmann

ε : émissivité ($0 \leq \varepsilon \leq 1$)

Dans tel cas, la condition aux limites à la frontière deviendra donc :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{paroi}} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (T_p^4 - T_{\text{ext}}^4) \quad (\text{II.19})$$

d) Le solide étudié est en contact avec un autre matériau

-Contact parfait

A l'interface S des deux milieux possédant des conductivités différentes λ_1 et λ_2 la conservation du flux s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_1 = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_2 \quad (\text{II.20})$$

Une deuxième condition est obtenue, dans le cas d'un contact parfait. Il s'agit des températures sur S :
 $T_1 = T_2$

-Contact imparfait

Dans la réalité cette condition n'est pas réalisée : les deux surfaces ne sont pas strictement en contact due à l'air présent entre les milieux. Les températures ne sont plus égales. On considère une résistance thermique de contact R_c [$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$]. La condition obtenue sur l'interface s'écrit alors :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_1 = \lambda_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T_2 \quad (\text{II.21})$$

$$\Phi = \frac{1}{R_c} (T_1 - T_2) \quad (\text{II.22})$$

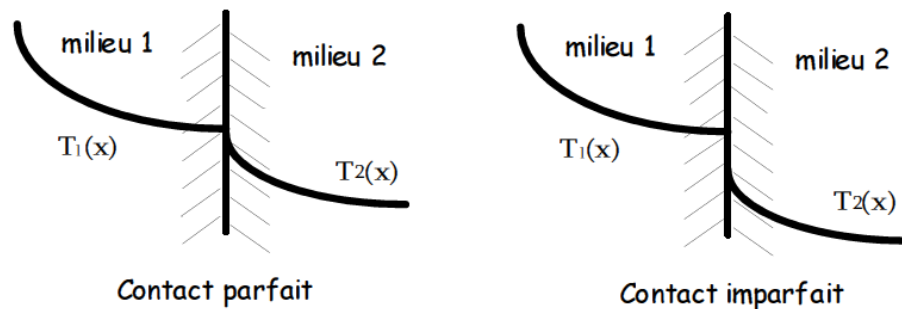


Figure II.2 : la conduction entre deux milieux en contact

II.3. Conduction en régime permanent sans dissipation interne de chaleur

II.3.1. Un mur simple sans source

On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable d'épaisseur e et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures T_1 et T_2 . on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur établie précédemment :

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \dot{q}_s \quad (\text{II.23})$$

En régime stationnaire (permanent) et sans dissipation interne de chaleur $\dot{q}_s = 0$ et $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

D'où : $\Delta T = 0$

Conditions aux limites du problème : Les deux faces du mur sont maintenues à des températures fixes dans le temps (conditions de Dirichlet)

Nous prendrons $x=0$ pour l'une des faces et $x=e$ pour l'autre.

$T=T_1$ si $x=0$ et $T=T_2$ si $x=e$

Le problème traité est un problème à une dimension. La température est uniquement fonction de la variable x .

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = A$$

$$\Rightarrow T(x) = A \cdot x + B$$

$$\text{En } x=0, T=T_1 \Rightarrow T(0) = A \cdot (0) + B = T_1$$

$$\Rightarrow B = T_1$$

$$\text{En } x=e, T=T_2 \Rightarrow T(e) = A \cdot e + T_1 = T_2$$

$$\text{d'où } A = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} x + T_1 \quad (\text{II. 24})$$

$$\phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} \quad \text{d'où } \phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$\phi = \lambda \cdot S \cdot \frac{T_1 - T_2}{e} \quad (\text{II. 25})$$

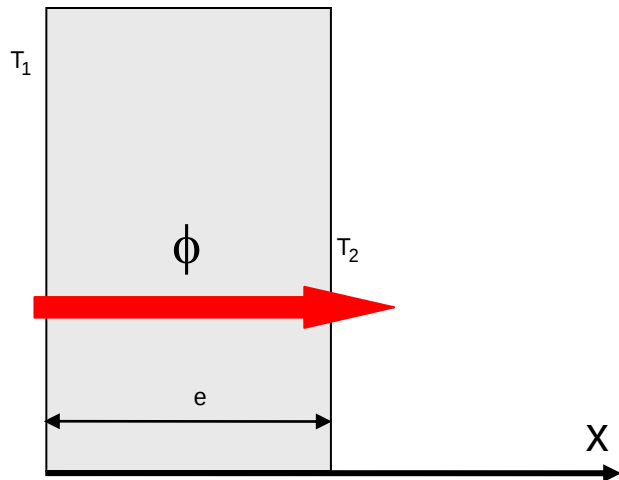


Figure II.3 : la conduction unidimensionnelle dans un mur simple

La relation (II.25) peut également se mettre sous la forme : $\phi = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e}{\lambda S}}$, cette relation est analogue à la d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant comme le rapport de la différence de potentiel électrique sur la résistance électrique ($V_1 - V_2 = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{V_1 - V_2}{R}$). La température apparaît ainsi comme un potentiel thermique et le terme $\frac{e}{\lambda S}$ apparaît comme la résistance thermique d'un mur plan d'épaisseur e , de conductivité thermique λ et de surface latérale S . On se ramène donc au schéma équivalent représenté sur la figure II.4

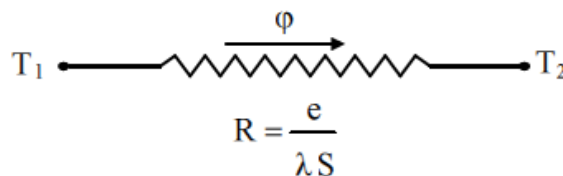


Figure II.4 : Schéma électrique équivalent d'un mur simple.

II.3.2. Mur multicouches

C'est le cas des murs réels (schématisé sur la figure II.5) constitués de plusieurs couches de matériaux différents et où on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les deux faces du mur de surface latérale S .

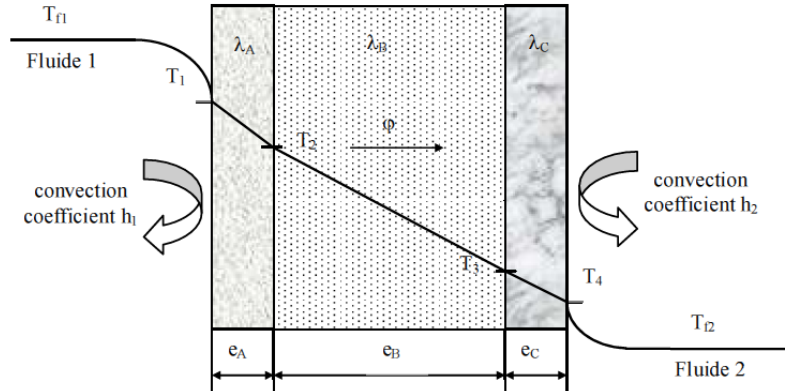


Figure II.5 : Schématisation des flux et des températures dans un mur multicouches

En régime permanent, le flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\phi = h_1 \cdot S \cdot (T_{f1} - T_1) = \frac{\lambda_A S (T_1 - T_2)}{e_A} = \frac{\lambda_B S (T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C S (T_3 - T_4)}{e_C} = h_2 \cdot S \cdot (T_4 - T_{f2}) \quad (\text{II. 26})$$

D'où

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{II. 27})$$

On a considéré que les contacts entre les couches de différentes natures étaient parfaits et qu'il n'existait pas de discontinuité de température aux interfaces. En réalité, compte-tenu de la rugosité des surfaces, une microcouche d'air existe entre les creux des surfaces en regard qui contribue à la création d'une résistance thermique (l'air est un isolant) appelée résistance thermique de contact. La formule précédente s'écrit alors :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_A}{\lambda_A S} + R_{AB} + \frac{e_B}{\lambda_B S} + R_{BC} + \frac{e_C}{\lambda_C S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (\text{II. 28})$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure II.6

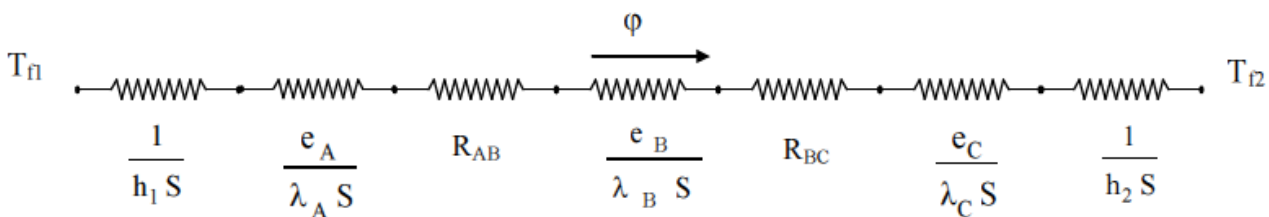


Figure II.6 : Schéma électrique équivalent d'un mur multicouches

II.3.3. Mur composite

Considérons un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux et de hauteur $I = l_1 + l_2 + l_3$ (figure II.7). En utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7 \quad (\text{II. 29})$$

Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_1 \cdot l \cdot L}; R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot l \cdot L}; R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot l_1 \cdot L}; R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 \cdot l_2 \cdot L}; R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot l_3 \cdot L}; R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 \cdot l \cdot L}; R_7 = \frac{1}{h_2 \cdot l \cdot L}$$

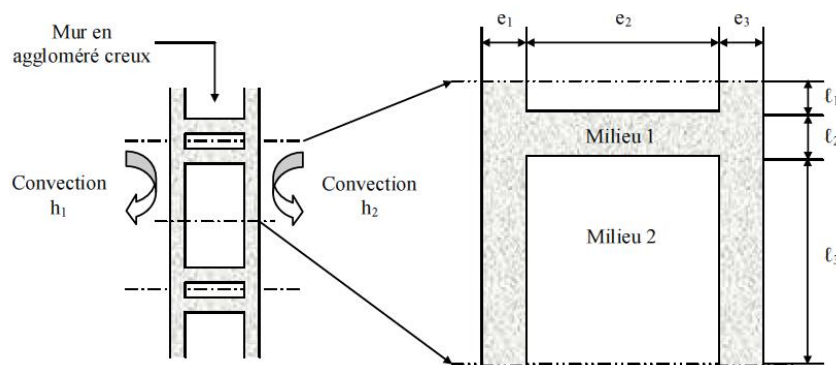


Figure II.7 : Schématisation d'un mur composite.

Ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure II.8.

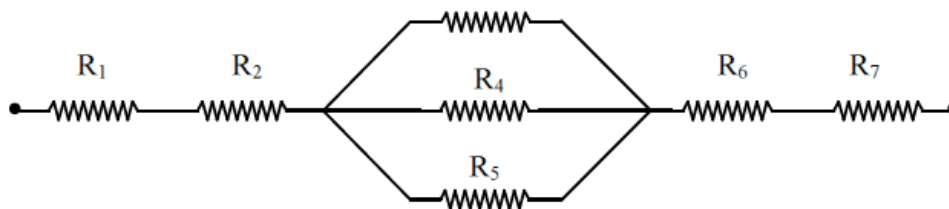


Figure II.8 : Schéma électrique équivalent du mur composite

II.3.4. Cylindre creux long (tube): Application au calorifugeage

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ , de rayon intérieur r_1 , de rayon extérieur r_2 , de longueur L , les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 (cf. figure II.9). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

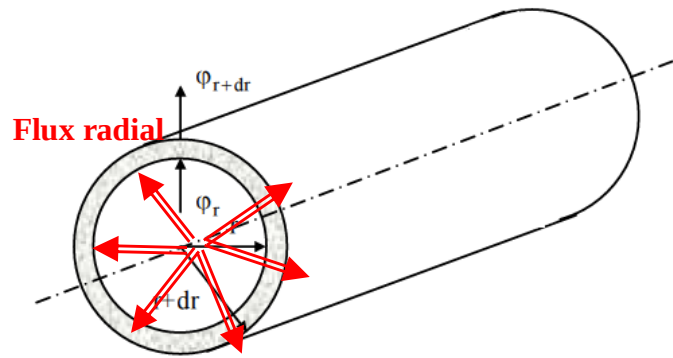


Figure II.9 : Schéma des transferts dans un cylindre creux

L'équation de la conduction est :

$$\lambda \cdot \Delta T + \dot{q}_s = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 30})$$

Dans le cas d'une conduction sans source interne ($\dot{q}_s = 0$ en régime permanent ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$)) :

$$\Delta T = 0$$

Dans le cas du cylindre, le problème est radial et ne dépend que de r . On rappelle que le Laplacien en coordonnées cylindriques (indépendant de θ et z) s'écrit :

$$\Delta T = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr}$$

Soit : $r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0$ ou encore $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$

Après une première intégration :

$$r \frac{dT}{dr} = A$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$$

D'où :

$$T(r) = A \cdot \ln r + B \quad (\text{II. 31})$$

Considérons des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$T = T_1 \quad \text{si} \quad r = r_1$$

$$T = T_2 \quad \text{si} \quad r = r_2$$

On obtient le système :
$$\begin{cases} T_1 = A \cdot \ln r_1 + B \\ T_2 = A \cdot \ln r_2 + B \end{cases}$$

Soit

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)} \quad \text{et} \quad B = \frac{(T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2)}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

D'où :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln r + \frac{(T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2)}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \quad (\text{II. 32})$$

Et par l'application de la loi de Fourier : $\varphi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dr}$

Soit :

$$\varphi = -\lambda \cdot (2 \cdot \pi \cdot L \cdot r) \cdot \frac{dT}{dr} \text{ si on considère une longueur } L \text{ de cylindre.}$$

$$\frac{dT}{dr} = \left[\frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \right] \frac{1}{r}$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} (T_1 - T_2) \\ \varphi &= \frac{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (\text{II. 33})$$

La résistance thermique est définie comme : $R_{12} = \frac{T_1 - T_2}{\varphi}$

$$\text{Soit} \quad R_{12} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} \quad (\text{II. 34})$$

On a ainsi défini **une nouvelle résistance thermique pour une conduite cylindrique**.

Cette relation être représentée par le schéma électrique équivalent :

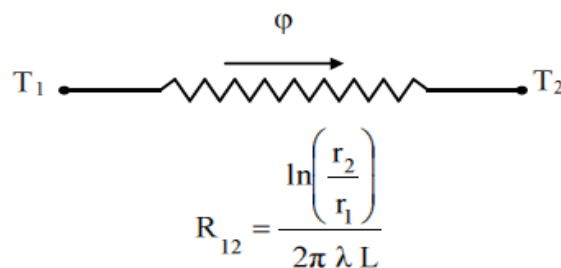


Figure II.10 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux

II.3.5. Cylindre creux multicouches

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on ne connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces interne et externe du cylindre ; h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les fluides et les faces internes et externes (cf. figure II.11)

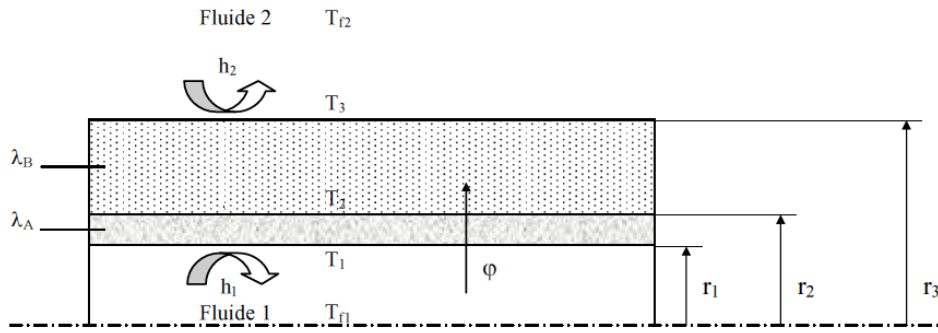


Figure II.11: Schéma des transferts dans un cylindre creux multicouches

En régime permanent, le flux de chaleur ϕ se conserve lors de la traversée des différentes couches et s'écrit :

$$\phi = h_1 \cdot 2\pi \cdot r_1 \cdot L(T_{f1} - T_1) = \frac{2\pi\lambda_A L(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi\lambda_B L(T_2 - T_3)}{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)} = h_2 \cdot 2\pi r_3 L(T_3 - T_{f2})$$

D'où :

$$\phi = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi r_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_B L} + \frac{1}{h_2 2\pi r_3 L}} \quad (\text{II.35})$$

Ce qui peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure II.12.

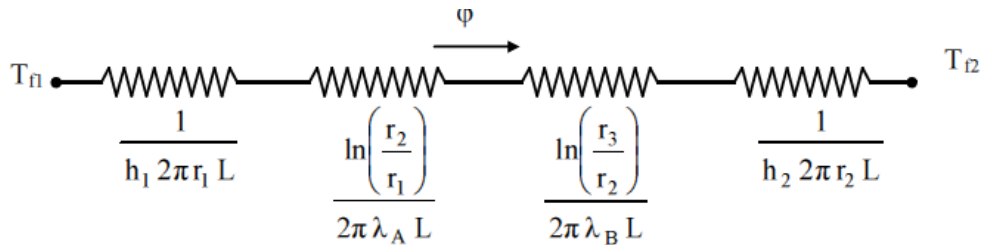


Figure II.12 : Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouches

Dans le cas d'un tube circulaire composite, composé par exemple de n matériaux superposés limité par des cylindres $r_0, r_1 \dots r_n$ de conductivité respectives $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

La résistance thermique de chaque cylindre est : $R_i = \frac{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)}{2\pi\lambda_i L}$

La résistance thermique totale du tube est : $R_T = \sum_{i=1}^n R_i$ (résistances en série)

Si les températures extrêmes T_1 et T_2 sont imposées, on peut calculer le flux par la relation : $\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_T}$
où R_T est la résistance thermique totale.

II.3.6. Les sphères concentriques

Dans le cas d'une conduction sans source interne $\dot{q}_s = 0$ en régime permanent $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$:
 $\Delta T = 0$

Considérons une sphère creuse de rayon extérieur r_e et de rayon intérieur r_i . Le problème est radial (r). En coordonnées sphériques on a :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

Qui conduit à

$$T(r) = \frac{A}{r} + B \quad (\text{II.38})$$

En considérant des conditions aux limites de type Dirichlet :

$$\begin{aligned} T &= T_e & \text{si } r &= r_e \\ T &= T_i & \text{si } r &= r_i \end{aligned}$$

On tire

$$\begin{cases} T_i = \frac{-A}{r_i} + B \\ T_e = \frac{-A}{r_e} + B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(T_e - T_i)}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \\ B = T_i + \frac{1}{r_i} \cdot \frac{(T_e - T_i)}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \end{cases}$$

$$T(r) = T_i + (T_i - T_e) \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} \quad (\text{II.36})$$

Et par l'application de la loi de Fourier :

$$\varphi = \frac{4\pi\lambda}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}} (T_i - T_e) \quad (\text{II.37})$$

Cette relation peut aussi être mise sous la forme : $\varphi = \frac{T_i - T_e}{R_{12}}$

Avec :

$$R_{12} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_e}}{4\pi\lambda} \quad (\text{II.38})$$

II.4. Surfaces auxiliaires ou ailettes en régime permanent

Les ailettes sont de bons conducteurs de la chaleur dont une dimension est grande par rapport aux autres. Elles sont utilisées pour améliorer l'évacuation de la chaleur d'un système solide confiné dans lequel les densités de flux de chaleur sont élevées.

A titre d'exemple sont présentées ci-dessous quelques photos d'ailettes vendues dans le commerce pour la microélectronique ou l'électricité qui constituent parmi les plus importants champs d'application.

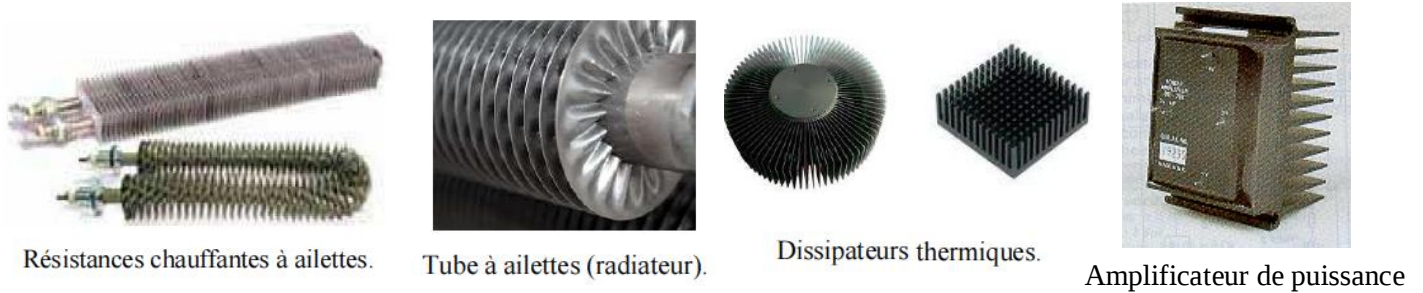


Figure II.13 : Exemples de systèmes à ailettes utilisés dans différents secteurs d'applications.

Le flux de chaleur évacué du mur par convection s'exprime par la loi de Newton :

$$\phi = h \cdot S_{\text{éch}} \cdot (T_p - T_{\infty}) \quad (\text{II. 39})$$

Si T_p est fixée, il y a deux possibilités pour augmenter le flux de chaleur évacué :

- Augmenter le coefficient d'échange convectif h .
- Augmenter la surface d'échange $S_{\text{éch}}$ en utilisant des ailettes s'étendant à partir du solide dans le milieu environnant (voir Figure II.14)

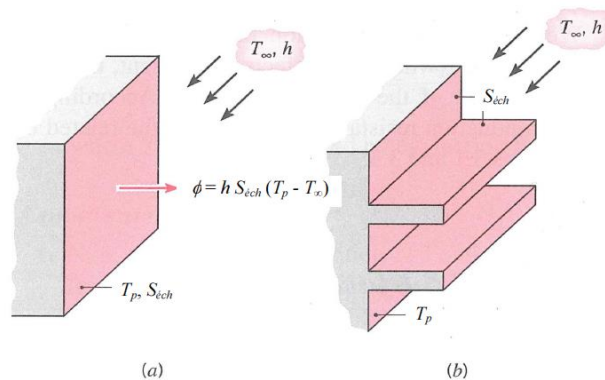


Figure II.14 : Utilisation d'ailettes pour augmenter le flux de chaleur évacué du mur : (a) mur plan, (b) mur muni d'ailettes.

II.4.1. L'équation de la chaleur pour des ailettes à section constante

Considérons l'ailette de section constante schématisée sur la figure II.16 baignant dans un fluide en mouvement à la température T_{∞} . Pour quantifier le transfert de chaleur associé à cette ailette nous devons tout d'abord déterminer la distribution de température le long de l'ailette à partir d'un bilan d'énergie que nous allons établir en posant les hypothèses suivantes :

- Le régime est permanent et il n'y a pas de dissipation interne de chaleur.
- La conductivité thermique de l'ailette λ est constante.
- Le coefficient d'échange convectif h est uniforme sur toute la surface de l'ailette.
- On néglige le transfert de chaleur par rayonnement.
- Le problème est monodimensionnel, c'est-à-dire que le flux de chaleur ne se propage que dans une seule direction (la direction x). On considère ainsi que la température est uniforme dans une section de l'ailette en x donné, ce qui est généralement assuré par l'utilisation d'ailettes fines.

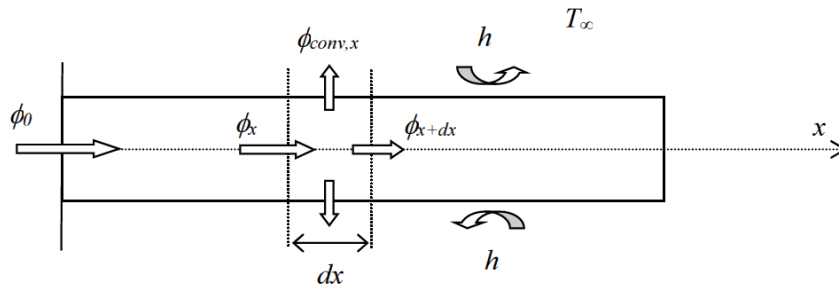


Figure II.15 : Bilan d'énergie sur une tranche d'ailette d'épaisseur dx .

Effectuons un bilan d'énergie sur le système constitué d'une tranche de l'ailette comprise entre x et $x + dx$:

$$\varphi_x = \varphi_{x+dx} + \varphi_{conv}$$

- φ_x flux de chaleur transmis par conduction en x : $\varphi_x = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_x$
- φ_{x+dx} flux de chaleur transmis par conduction en $x + dx$: $\varphi_{x+dx} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx}$
- $\Phi_{conv,x}$ flux évacué par convection à la frontière entre x et $x + dx$: $\varphi_{conv,x} = h \cdot p \cdot dx(T(x) - T_\infty)$

où :

S est l'aire de la section de passage du flux de conduction.

p est le périmètre de l'ailette (périmètre d'échange du flux convectif).

$$\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = h \cdot p \cdot dx(T(x) - T_\infty)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = \frac{h \cdot p}{\lambda S} dx(T(x) - T_\infty)$$

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = \left[\left(\frac{dT}{dx}\right)_x + d\left(\frac{dT}{dx}\right) \right] - \left(\frac{dT}{dx}\right)_x = \frac{d^2T}{dx^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} dx = \frac{h \cdot p}{\lambda S} dx(T(x) - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = \frac{h \cdot p}{\lambda S} (T(x) - T_\infty) \quad (\text{II. 40})$$

Le champ de température dans l'ailette $T(x)$, est ainsi déterminé par la résolution de cette équation (parfois appelée équation de la barre) associée à deux conditions aux limites, écrites à la base et à l'extrémité de l'ailette.

Posons $\theta(x) = (T(x) - T_\infty)$ et $m^2 = \frac{h.p}{\lambda.S}$

L'équation (II.40) devient :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (\text{II.41})$$

- h coefficient d'échange convectif ($\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).
- λ conductivité thermique du matériau constituant l'ailette ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$).
- S section de l'ailette (m^2).
- p périmètre de l'ailette (m).

Pour une ailette rectangulaire d'épaisseur e et de largeur l : $S = l.e$ et $p = 2.(l+e)$

Pour une ailette cylindrique de rayon R : $S = \pi.R^2$ et $p = 2\pi.R$

L'équation différentielle (II.41), d'ordre 2 linéaire et homogène à coefficients constants, admet une solution générale de la forme :

$$\theta = A e^{mx} + B e^{-mx} \quad (\text{II.42})$$

$$\text{Où } \theta = A_1 \cosh(mx) + B_1 \sinh(mx) \quad (\text{II.43})$$

Les constantes A , B , A_1 et B_1 sont déterminées à partir des conditions aux limites à la base et l'extrémité de l'ailette.

II.4. 2. Ailette rectangulaire infiniment longue de section constante

Pour une ailette de longueur « infinie », la température à l'extrémité sera égale à la température du milieu environnant T_∞ . Ainsi $\theta_L \rightarrow 0$ si $L \rightarrow \infty$. La condition aux limites en $x = L$ s'écrit alors :

$$\text{en } x = 0 : \theta(0) = T_0 - T_\infty \quad (\text{a})$$

$$\text{en } x = L : \theta(L) = 0 \quad (\text{b})$$

$$(\text{b}) \Rightarrow A = 0$$

$$(\text{a}) \Rightarrow B = T_0 - T_\infty$$

D'où :

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx} \quad (\text{II.44})$$

Le flux dissipé sur toute la surface de l'ailette peut être calculé par intégration du flux de convection local :

$$\phi_p = \int_0^L h.p [T(x) - T_\infty] dx$$

Ou plus facilement en remarquant que dans le cas du régime permanent, c'est le même que celui transmis par conduction à la base de l'ailette soit : $\phi_p = \phi_{c(x=0)}$

$$\varphi_c = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot (T_0 - T_\infty)(-m)e^{(-mx)} \quad \text{avec } m = \sqrt{\frac{h \cdot p}{\lambda \cdot S}}$$

D'où :

$$\varphi_p = \sqrt{h \cdot p \cdot \lambda \cdot S} (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II. 45})$$

Remarque :

Dans la pratique, l'hypothèse $L \rightarrow \infty$ sera considéré valide si $\frac{\theta_L}{\theta_0} < 0.01 (= 1\%)$ (ou $T_L = 0.99T_\infty$), soit $mL \geq \ln(10)$ ou $L \geq \frac{4.6}{m}$ avec $m = \sqrt{\frac{h \cdot p}{\lambda \cdot S}}$

II.4.3. Ailette rectangulaire de section constante isolée à l'extrémité

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$\theta(x) = A_1 \text{ch}(mx) + B_1 \text{sh}(mx) \quad (\text{II.46})$$

On détermine A_1 et B_1 à partir des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_0 \Rightarrow \theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_0 \\ -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = 0 \text{ (conservation du flux de chaleur en } x = L) \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = 0 \end{cases}$$

$$\theta_0 = A_1 \text{ch}(m \cdot 0) + B_1 \text{sh}(m \cdot 0) \Rightarrow A_1 = \theta_0$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=L} = A_1 \cdot \text{sh}(mL) + B_1 \text{ch}(mL) = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{-\theta_0 \cdot \text{sh}(mL)}{\text{ch}mL}$$

La distribution de température s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta_0 \text{ch}(mx) - \frac{\theta_0 \text{sh}(mL)}{\text{ch}mL} \text{sh}(mx) \\ \Rightarrow \theta(x) &= \theta_0 \left[\frac{\text{ch}(mx) \cdot \text{ch}mL - \text{sh}(mL) \cdot \text{sh}(mx)}{\text{ch}mL} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \theta_0 \left[\frac{\text{ch}(m(L-x))}{\text{ch}mL} \right]$$

La solution peut s'écrire :

$$\frac{(T(x) - T_\infty)}{T_0 - T_\infty} = \frac{\text{ch}(m(L-x))}{\text{ch}mL} \quad (\text{II. 47})$$

Et le flux total dissipé par l'ailette a pour expression :

$$\varphi_p = m \cdot \lambda \cdot S \cdot \tanh(m \cdot L) (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II. 48})$$

II.4. 4. Efficacité et rendement d'une ailette

On définit l'efficacité d'une ailette comme étant le rapport entre le flux de chaleur évacué par l'ailette φ_p et le flux de chaleur qui serait évacué sans ailette $\varphi_{\max}$:

Le flux échangé par cette ailette idéale serait :

$$\varphi_{\max} = h \cdot S \cdot (T_0 - T_{\infty}) \quad (\text{II. 49})$$

➤ Dans le cas de l'ailette « de longueur infinie », l'efficacité s'écrit :

$$\varphi_p = \sqrt{h \cdot p \cdot \lambda \cdot S} (T_0 - T_{\infty}) \quad (\text{II. 50})$$

$$\varepsilon = \frac{\varphi_p}{\varphi_{\max}}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{h \cdot p \cdot \lambda \cdot S} (T_0 - T_{\infty})}{h \cdot S \cdot (T_0 - T_{\infty})}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda \cdot p}{h \cdot S}} \quad (\text{II. 51})$$

➤ Dans le cas de l'ailette « de longueur finie L », $\varphi_{\max} = h \cdot p \cdot L \cdot (T_0 - T_{\infty})$ (II. 52)

L'efficacité s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{\varphi_p}{\varphi_{\max}} = \frac{m \cdot \lambda \cdot S \cdot \tanh(m \cdot L) (T_0 - T_{\infty})}{h \cdot p \cdot L \cdot (T_0 - T_{\infty})} = \frac{\sqrt{\frac{h \cdot p}{\lambda \cdot S}} \cdot \lambda \cdot S \cdot \tanh(mL)}{h \cdot p \cdot L} = \frac{\sqrt{h \cdot p \cdot \lambda \cdot S}}{h \cdot p \cdot L} \cdot \tanh(mL)$$

$$\varepsilon = \frac{\tanh(m \cdot L)}{m \cdot L} \quad (\text{II. 53})$$

L'efficacité d'une ailette est avérée si $\varepsilon \geq 1$. Ainsi l'efficacité de l'ailette est améliorée par :

- ✓ le choix d'un matériau de conductivité élevée.
- ✓ le choix de la géométrie de l'ailette, telle que $\frac{p}{S}$ élevé (utilisation d'ailettes fines).
- ✓ le choix d'un coefficient d'échange convectif « relativement » peu élevé (tout en assurant un flux évacué φ_p élevé). Ainsi l'utilisation d'ailettes sera plus justifiée dans le cas où le fluide en écoulement est un gaz plutôt que dans le cas d'un liquide, et lorsque le transfert de chaleur se produit par convection naturelle.