

II.1. Introduction

Ce chapitre traite des problèmes théoriques liés à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont ubiquistes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétisme (Exemple: les équations de Maxwell). Certaines de ces EDP ont été résolues analytiquement et leurs solutions sont connues. Toutefois, un nombre important d'autres existent sans solutions analytiques. C'est dans cette vision que les recherches se sont inclinées sur les méthodes numériques pour arriver à approximer les solutions de ces équations.

Les perfectionnements de l'informatique ont permis de développer des méthodes numériques de calcul afin de déterminer de façon précise la distribution des paramètres physiques dans la plus part des systèmes électriques. Les méthodes numériques les plus connues et les plus utilisées dans ce type de problème sont donc la méthode des différences finies (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode de simulation de charges (MSC), la méthode des éléments finis de frontière (MEFF), la méthode des volumes finis (MVF), ... etc.

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques méthodes numériques qui permettent de résoudre les équations différentielles gouvernantes les phénomènes physiques. Nous présenterons, en particulier, la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis.

II.2. Définition

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des équations dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Une équation (EDP), est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de R^n dans R , les variables $x, y, \dots$, ses dérivées partielles, $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$. Elle s'écrit de façon générale : $f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0$

Cette équation est considérée dans un domaine Ω de R^n . Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω . L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.

Exemples :

$$u^2 u_{xy} + u_x = y$$

$$u_{xx} + 2y^2 u_{xy} + 3x u_{yy} = 1$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = 1$$

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

Les fonctions $u(x, y) = (x + y)^3$ et $u(x, y) = \sin(x - y)$ sont toutes deux des solutions de cette dernière équation.

Les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire; les problèmes incluent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions.

Pour assurer donc l'unicité de la solution, comme on le fait avec les équations différentielles ordinaires (EDO), on tiendra compte des conditions pré-données comme les conditions aux limites et les conditions initiales.

II.3. Classification des équations aux dérivées partielles

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}(X) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^n B_i(X) \frac{\partial u}{\partial x_i}(X) + Cu = G(X)$$

avec A_{ij} , B_i , C , G des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément dans $\mathbb{R}^n$. Si nous nous limitons dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité précédemment posée prend la forme de:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y)$$

La classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de :

$$\Delta = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$$

- Si $\Delta < 0$, on parle d'une équation elliptique,
- Si $\Delta = 0$, on parle d'une équation parabolique,
- Si $\Delta > 0$, on parle d'une équation hyperbolique.

II.4. Rappels sur la classification des systèmes physiques

Un système physique est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace $X = (x, y, z)$ et du temps t .

- Le système est dit stationnaire si ses variables ne dépendent pas du temps.

- Le système est dit non stationnaire si ses variables dépendent du temps.

II.4.1. Système continu

Un système est dit continu s'il possède un nombre de degrés de liberté infini et son comportement est représenté le plus souvent par un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) ou intégro-différentielles associés à des conditions aux limites en espace et en temps.

II.4.2. Système discrets

Un système est dit discret s'il possède un nombre de degrés de liberté fini et son comportement est représenté par un système d'équations algébriques.

Les équations algébriques des systèmes discrets peuvent être résolues par les méthodes numériques, par contre les équations des systèmes continus ne peuvent en générale pas être résolues directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est – à – dire de les remplacer par des équations matricielles.

II.4.3. Choix du maillage

Le choix du maillage consiste à diviser le domaine de travail Ω en parties égales ou non afin d'obtenir un espace discret. L'espace ainsi obtenu s'appellera espace d'interpolation et aura toutes les propriétés d'un sous-espace vectoriel de Ω . Les solutions héritées seront de ce fait approchées. Les sous-divisions obtenues sont appelées éléments finis. Les points de jonction entre les éléments sont les nœuds.

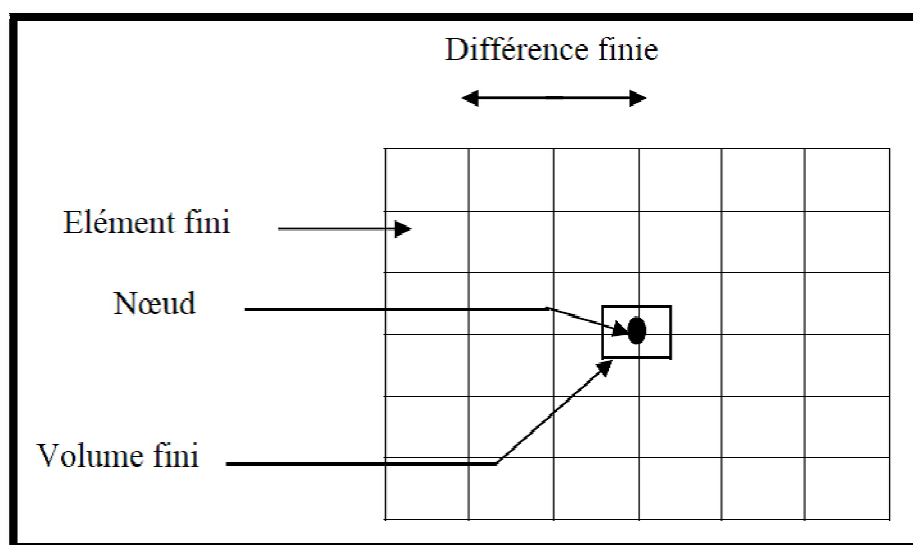


Fig.1. Maillage du domaine d'étude (Ω)

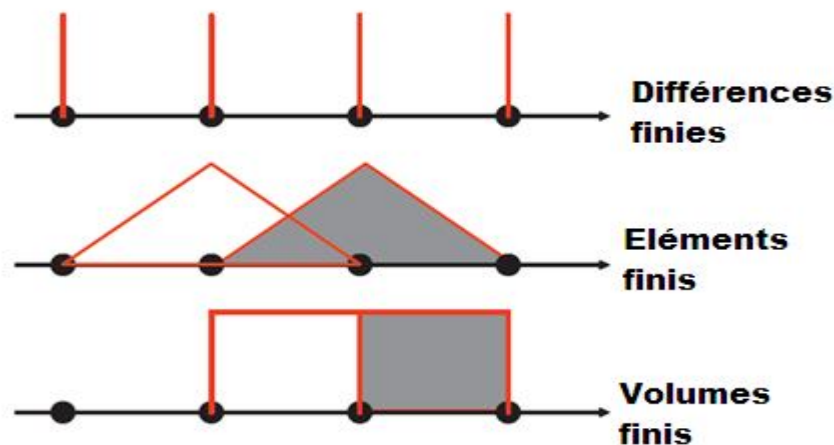


Fig. 2. Exemple unidimensionnel de fonction de projection pour différentes méthodes numériques (différences finies, éléments finis et volumes finis)

II.5. Différentes méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, lorsqu'il s'agit de calculer des effets dont les causes (densité du courant (tension), densité de la puissance dissipée) sont connues à l'avance. Ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques.
- Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'applications très difficiles dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains phénomènes, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non linéarités physiques, donc mathématiques.

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Celles-ci font appel à des techniques de discrétisation.

Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue en différents points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, la méthode des intégrales de frontières et la méthode des circuits couplés,... etc.

II.5.1. Méthode des Différences Finies (MDF) :

C'est la méthode la plus ancienne, connue depuis Gauss. Le principe fondamental de cette méthode consiste à appliquer au domaine d'étude un maillage en nœuds dont la finesse permet de donner une approximation des contours du domaine. Ensuite, en appliquant le développement limité en série de Taylor de la fonction à déterminer dans chaque nœud du maillage, ce qui permet d'obtenir un nombre d'équations algébriques égales au nombre des valeurs d'inconnues des grandeurs étudiées.

La générale de la méthode va nous permettre d'aborder les notions de consistance, de stabilité et de convergence.

1- Consistance :

Une méthode numérique est consistante si l'erreur de discrétisation de l'équation tend vers zéros lorsque le pas de discrétisation tend vers zéros.

2- Stabilité :

Une fois le schéma discret choisi, il va être nécessaire de résoudre les équations. Le processus de résolution, à la vue des équations sera la plupart du temps itératif. On calculera les valeurs de « Φ » de proche en proche : une valeur donnée de « Φ » sera donc calculée en utilisant le résultat du calcul d'autres valeurs de « Φ ».

Les erreurs d'arrondi être inévitables sur machine, la méthode sera stable si ces erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul.

3- Convergence :

Après s'être assuré que le schéma discret tend vers l'équation, que ce schéma conduit à un calcul stable, on dispose d'une solution. Le schéma utilisé est dit convergent si sa solution ainsi obtenue tend vers la solution de l'équation de départ, lorsque les pas de discrétisation tendent vers zéros.

Donc, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

4- Discrétisation de l'EDP :

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

On posera h_x et h_y les pas de discrétisation des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$

➤ Discrétisation de l'intervalle $[a; b]$

$$h_x = \frac{b-a}{n_x}$$

(n_x étant le nombre d'intervalles dans $[a, b]$)

$\Rightarrow x(i) = x_i = a + i \times h_x, \quad i = 0, 1, \dots, n_x.$

➤ Discrétisation de l'intervalle $[c, d]$

$$h_y = \frac{d-c}{n_y}$$

(n_y étant le nombre d'intervalles dans $[c, d]$)

$\Rightarrow y(j) = y_j = c + j \times h_y, \quad j = 0, 1, \dots, n_y.$

Remarquant que

$$x_{i+1} = a + (i+1)h_x = (a + ih_x) + h_x = x_i + h_x$$

Dans la suite, nous remplacerons chaque fois :

$$x_i + h_x, x_i - h_x, y_j + h_y, y_j - h_y.$$

Successivement par : $x_{i+1}, x_{i-1}, y_{j+1}$ et y_{j-1} .

5- Application de MDF:

La MDF consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée.

Soit $f(x, y)$ une fonction continue et dérivable de classe C^∞ , alors la dérivée partielle première de f par rapport à x est calculée par la formule:

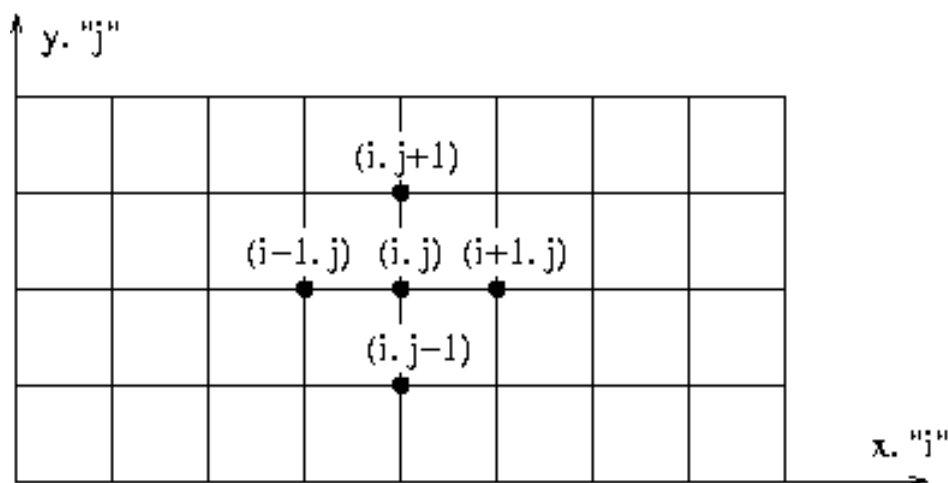


Fig. 3. Grille de discrétisation régulière $h_x = \Delta x = h_y = \Delta y$.

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}$$

Si $h_x \ll 1$, le développement de Taylor au voisinage de 0 de $f(x + h_x, y)$ donne:

$$f(x + h_x, y) = f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x, y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x}$$

Avec une erreur de l'ordre de h_x .

$$\Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x}$$

Ceci est appelé le schéma avant (différences finies en avant).

De la même manière, nous pouvons aussi donner le schéma arrière (différences finies en arrière) qui est de la forme:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x}$$

Avec la formule de Taylor, ceci nous donne :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \theta(h_x) \simeq f(x - h_x, y) + h \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\simeq \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x} \end{aligned}$$

Avec une erreur de l'ordre de h_x .

La somme de ces deux schémas nous donne le schéma centré suivant :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \simeq \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x}.$$

En résumé, on a les trois approximations suivantes pour la première dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x avec le développement limité de Taylor:

$$f'_x(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} \approx \begin{cases} \frac{f(x + h_x, y) - f(x, y)}{h_x} & \text{schéma avant} \\ \frac{f(x, y) - f(x - h_x, y)}{h_x} & \text{schéma arrière} \\ \frac{f(x + h_x, y) - f(x - h_x, y)}{2h_x} & \text{schéma centré} \end{cases}$$

La dérivée seconde f''_x de $f(x, y)$ sera alors de la forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)}{h_x} - \frac{f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)}{h_x}}{h_x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \simeq \frac{f(x_{i+1}, y_j) - 2f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2}$$

Exemple : prenons le cas d'une l'équation de Laplace:

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (*)$$

Posons $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ (en notation indicielle). Compte tenu de la formule de dérivée seconde f_x'' donnée au paragraphe précédent on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}$$

Puisque x_i et y_j jouent un rôle symétrique dans l'équation du potentiel (de Laplace), un raisonnement analogue à celui de l'approximation de f_x'' nous donne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

Rapportons ces approximations dans l'EDP de Laplace (*) on trouve :

$$\Leftrightarrow \Delta u \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0$$

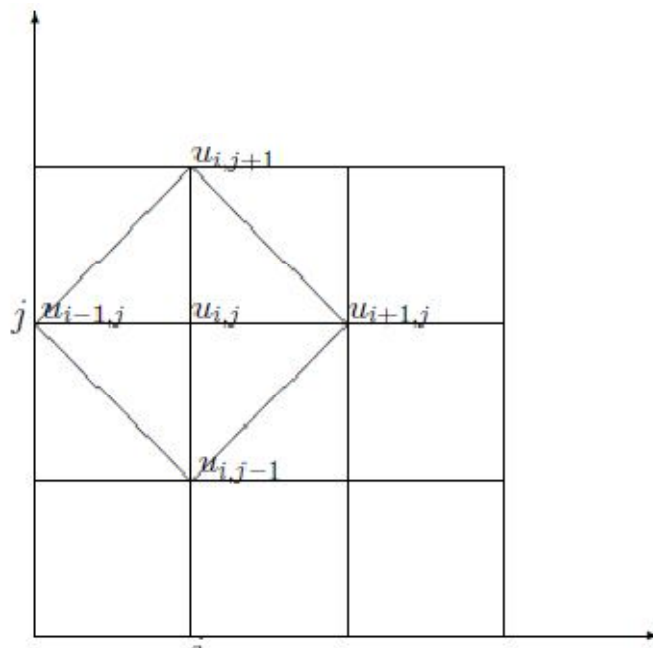
Dans ce cas particulier où $h_x = h_y = h$, donc, nous avons finalement:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0 \\ i = 0, 1, \dots, n_x \text{ et } j = 0, 1, \dots, n_y \end{cases}$$

A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_j) nous avons besoin de connaître les points :

$$u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i+1,j} \text{ et } u_{i,j+1}$$

Comme l'indique le dessin suivant:

Fig. 4. Molécule de l'équation de Laplace u .

C'est pour cela que nous appelons cette formule **la formule à 5 points** qui peut être représentée Comme suit:

$$\Delta u = 0 \Rightarrow \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} u_{i,j} = 0$$

II.5.1.a. Avantages de la MDF

- La méthode des différences finies est une méthode simple à appliquer lorsque la géométrie le permet et c'est une méthode raisonnablement exacte.
- De plus, elle se programme facilement et nécessite peu de mémoire pour le stockage des données.

II.5.1.b. Inconvénients de la MDF

- Lorsque la géométrie est de frontière courbe, le schéma ne peut s'appliquer près des frontières irrégulières et donc cette méthode devient difficilement applicable. On doit alors rechercher à la place une méthode qui est valide indépendamment de la géométrie.
- Elle n'est pas applicable pour des problèmes en 3 dimensions.

- Cette méthode nécessite la connaissance, sur toute la frontière entourant le domaine étudié, du potentiel, ce qui n'est pas toujours le cas en général.

II.5.2. Méthode des éléments Finis (MEF)

Cette méthode, utilisée depuis longtemps en mécanique. Elle a été introduite en électromagnétisme par P. Silvestre et M.V.K. Chari en 1970.

Elle a connu depuis, un développement considérable dans ce domaine, grâce aux rapports successifs des équipes universitaires de MC Gill au Canada, Rut Herford en grande Bretagne et Grenoble en France et par quelques grands laboratoires industriels de recherches.

La méthode des éléments finis est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) sur tout dans les géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnements.

A la différence avec la MDF, la MEF consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnue pour transformer les EDP en équations algébriques.

Toute fois, cette méthode ne s'applique pas directement aux EDP, mais à une formulation intégrale qui est équivalente au problème à résoudre, en utilisant l'une des deux approches suivantes:

- La méthode variationnelle qui consiste à minimiser une fonctionnelle qui représente généralement, l'énergie du système étudié. Cette méthode n'est donc applicable que si on connaît une fonctionnelle équivalente au problème différentiel que l'on veut résoudre.

- La méthode des résidus pondérés ou méthode projective qui consiste à minimiser le résidu induit par l'approximation de la fonction inconnue.

A l'une ou à l'autre des deux méthodes, on associe une subdivision du domaine d'étude, en éléments simples, appelés éléments finis, comme il est indiqué sur la figure (5), et à approximer la fonction inconnue sur chaque élément par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions sont généralement des polynômes de Lagrange de degré un, ou deux.

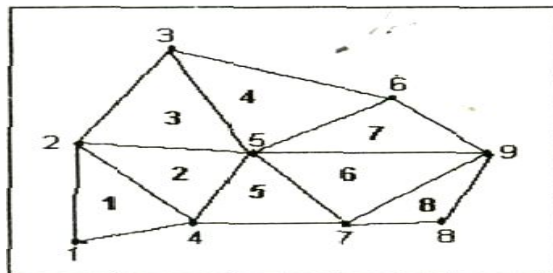


Fig.5. Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques propriétés de la méthode des éléments finis.

Une illustration de cette présentation est donnée en prenant l'équation de Poisson suivante en deux dimensions définie dans le domaine donné sur la figure (6).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = G(x, y)$$

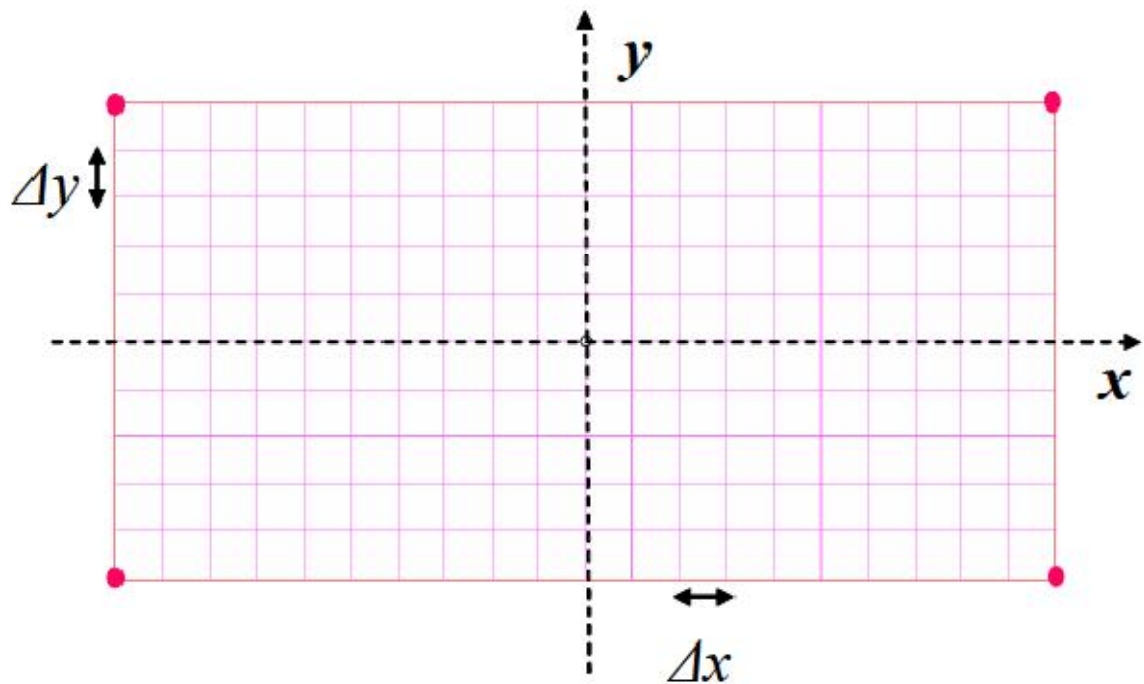


Fig.6. Maillage carré.

Chaque point est situé sur un des sommets d'un carré. Il existe d'autres maillages réguliers comme le maillage en triangles équilatéraux et en hexagones équi-angulaires.

La MEF, outil numérique très puissant, est beaucoup utilisé dans la résolution des problèmes à domaine spatial fini, surtout en mécanique où elle a connu son plus fort développement. Cette méthode a été appliquée avec succès dans les problèmes de calcul de potentiel et de champs électriques.

L'idée de cette méthode est de chercher une solution approchée à une équation différentielle après une reformulation sous forme d'identité intégrale appelée forme faible ou variationnelle. Au lieu de rechercher à satisfaire l'équation aux nœuds, nous décomposons ici le domaine en sous domaines appelés éléments finis, et nous imposons la satisfaction des équations par sous domaine. L'introduction d'une approximation locale par sous domaine (dit élément fini), permet de contourner le problème de complexité des géométries car il suffit alors de choisir une approximation ou une décomposition (maillage) qui respecte la géométrie.

La méthode des éléments finis utilise des approximations simples à variables inconnues dans chaque élément pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Les nœuds et les éléments n'ont pas forcément de signification physique particulière, mais sont basés sur des considérations de précision de l'approximation.

L'approximation peut fournir une solution approchée en tout point (x, y) d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points et une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles. Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée "erreur de discrétisation géométrique". Elle peut être réduite en diminuant la taille des éléments.

II.5.2.1. Principe de la méthode

La MEF repose sur deux principes : d'une part, la formulation d'un problème approché par la méthode de Galerkin, qui permet de remplacer un problème posé en dimension infinie par un système linéaire. D'autre part, la construction d'un espace d'approximation (de dimension finie) à l'aide d'un maillage, de fonctions polynomiales par morceaux et de degré de liberté sur chaque maille.

La première étape dans la construction de l'espace d'approximation S_b , consiste à mailler l'intervalle Ω en une dimension d'espace (7). Un maillage $\Omega =]a_k, b_k[$ est une collection indexée d'intervalle.

$$\{I_i = [x_{1,i}, x_{2,i}] \}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$$

Tous de mesure non nulle et formant une partition de Ω .

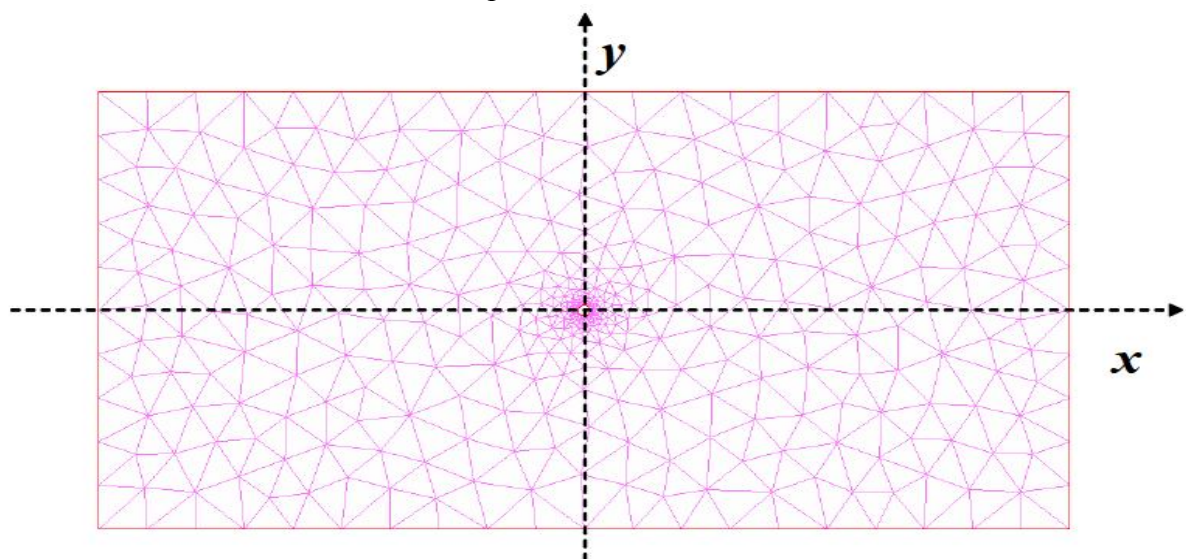


Fig.7. Le maillage en éléments finis triangulaires.

En d'autres termes nous avons :

$$]a_k, b_k[= \bigcup_{i=1}^{N_{ma}} [x_{1,i}, x_{2,i}] \quad \text{et} \quad]x_{1,i}, x_{2,i}[\cap]x_{1,j}, x_{2,j}[= \emptyset \quad \text{pour } i \neq j$$

Les intervalles I_i sont appelés les mailles (ou les éléments ou les cellules de maillage), et l'entier N_{ma} désigne le nombre totale de mailles.

La façon la plus simple de construire un maillage est de choisir $(N_{ma}+1)$ points distincts de Ω tels que :

$$a_k = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_{ma}} < x_{N_{ma}+1} = b_k$$

Et de poser :

$$x_{1,i} = x_i \quad \text{et} \quad x_{1,j} = x_j$$

Pour tout :

$$i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$$

Les points de l'ensemble :

$$\{x_1, \dots, x_{N_{ma}+1}\}$$

Sont appelés les sommets du maillage. Nous désignons par N_{s0} le nombre de sommets du maillage en une dimension d'espace. On a donc :

$$N_{s0} = N_{ma} + 1$$

Le maillage est à priori de pas variable, on pose pour tout :

$$i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$$

$$b_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{et} \quad b_k = \max_{1 \leq i \leq N_{ma}} b_i$$

On dit que le maillage est uniforme lorsque $b_k = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N_{ma}\}$ par la suite, le maillage est désigné sous la forme :

$$T_b = \{I_i\}_{1 \leq i \leq N_{ma}}$$

La deuxième étape dans la construction de l'espace d'approximation consiste à choisir des fonctions de forme sur chaque maille. Ces fonctions d'interpolation permettent alors de donner une approximation du potentiel Φ , notée $\tilde{\Phi}$, sur chaque élément en fonction de ses valeurs aux nœuds de l'élément comme suit :

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^{N_e} N_i \Phi_i$$

Avec N_e le nombre de nœuds d'interpolation, N_i les fonctions d'interpolation et Φ_i les valeurs nodales du potentiel.

Pour illustrer le principe de la MEF, on reprend l'exemple de l'équation de Poisson du paragraphe précédent en deux dimensions définie dans le domaine donné. Et on recherche à minimiser la quantité R_M telle que :

$$R_M = (\nabla^2 \tilde{\Phi}) \quad (1)$$

Parmi toutes les méthodes qui permettent d'annuler une grandeur dans un domaine Ω , la méthode des résidus pondérés est bien connue et souvent utilisée. Elle consiste à choisir un ensemble de fonctions linéairement indépendantes W_n , appelées fonctions de projection, et annuler ainsi toutes les intégrales (1) sur chacun des éléments finis.

$$I_n = \int_{\Omega} W_n R_M d\Omega \quad (2)$$

L'intégration par partie de l'équation (2) donne :

$$I_n = - \int_{\Omega_e} \text{grad} \tilde{\Phi} \cdot \text{grad} W_n d\Omega + \int_{S_e} (\text{grad} \tilde{\Phi} \cdot \vec{n}) W_n dS_e \quad (3)$$

Pour chaque élément, on annule les n intégrales I_n (3) qui correspondent aux n fonctions de projection. On obtient un ensemble de n équations à n inconnues formant ainsi un système élémentaire pouvant s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[A_e] \{\Phi_e\} = \{b_e\}$$

Avec :

$[A_e]$: est la matrice associée à l'élément considéré ;

$\{\Phi_e\}$: ses composantes sont les inconnues du potentiel aux nœuds du même élément ;

$\{b_e\}$: est le vecteur qui tient compte des éventuelles conditions aux limites présentées sur certains nœuds de l'élément considéré.

La résolution du système final est simple puisque les équations obtenues sont linéaires et les matrices ainsi formées sont symétriques. Pour déterminer la distribution du champ électrique, il faut calculer la dérivée du potentiel par une méthode numérique adaptée.

II.5.2.2. Les différentes étapes de la résolution par la MEF

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par les étapes successives suivantes (figure 8) :

1. On pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles à satisfaire en tout point d'un domaine Ω , avec des conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la formulation variationnelle du problème.
3. On divise Ω en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés *mailles*.
4. On choisit la famille de champs locaux, c'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.
5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée.
6. On résout le problème discret: C'est la *résolution*
7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs : C'est le *post-traitement*.
8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : C'est *l'exploitation des résultats*.

Les étapes 1, 2, 3,4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *prétraitement*.

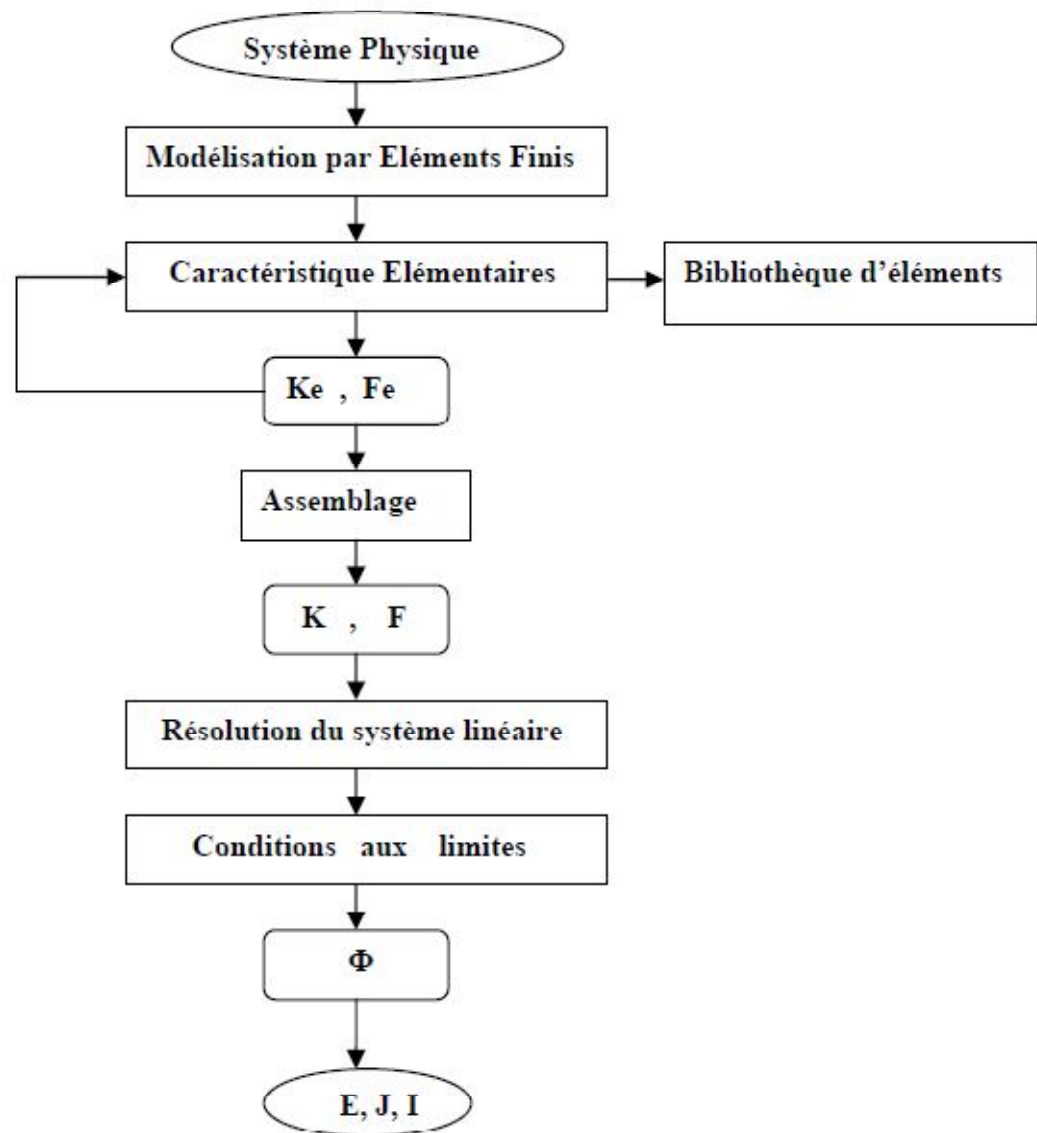


Fig. 8.Organigramme simplifié de l'analyse par la méthode des éléments finis.

II.5.2.3. Définition des mailles de référence

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion d'élément de référence (fig.9) : un élément de référence Ω^e est un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel Ω^e par une transformation géométrique. Cette transformation dépend de la forme et de la position de l'élément réel.

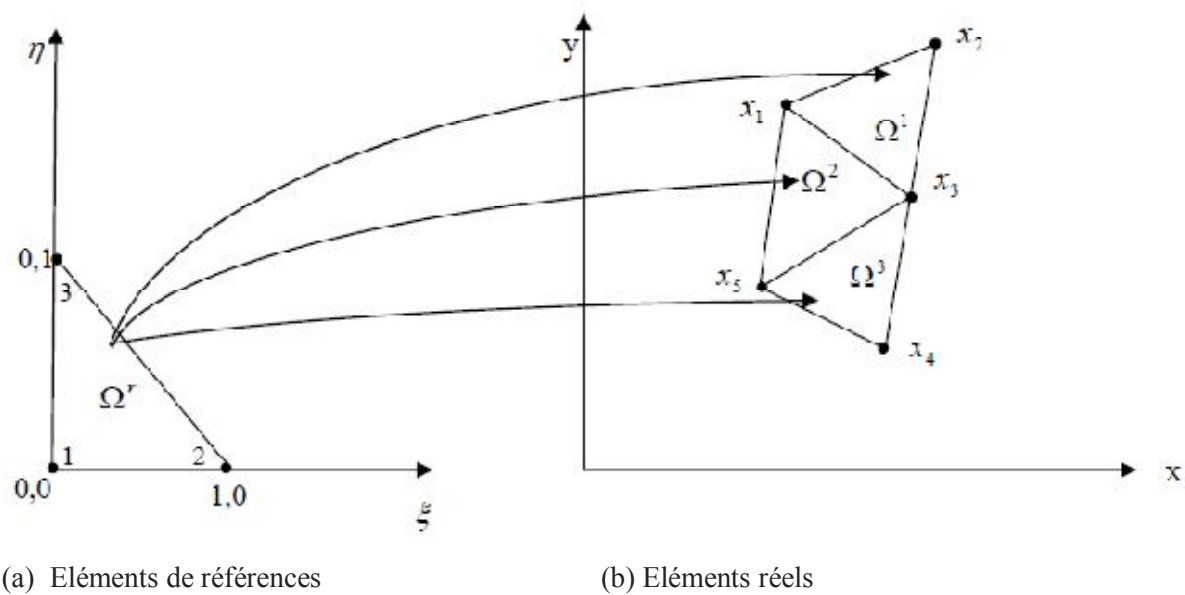


Fig. 9. Relation entre l'élément réel et l'élément de référence

Chaque transformation est choisie de manière à présenter les propriétés suivantes :

- Elle est bijective en tout point situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière : à tout point de Ω^r .
- Les nœuds géométriques de l'élément de référence correspondent aux nœuds de l'élément réel.
- Chaque portion de frontière de l'élément de référence, définie par les nœuds géométriques de cette frontière, correspond à la portion de frontière de l'élément réel définie par nœuds correspondants.

Soulignons que même l'élément de référence Ω^r (par exemple un triangle à 3 nœuds) se transforme en éléments réels Ω^e de même type par des transformations différentes.

Nous présentons ci- dessous la forme et la définition analytique des éléments de référence correspondant aux éléments classiques. Dans un maillage, toutes les mailles ont des formes et des dimensions différentes. On trouve des mailles linéiques, des mailles surfaciques et des mailles volumiques de toutes formes et de toutes tailles. Dans le but d'uniformiser et d'automatiser les calculs, on introduit la notion de maille de référence. Nous ne donnons ici que les mailles les plus classiques. Par convention généralement admise.

- La maille de référence linéique est le segment (fig. 10) :

$$x_1 \in [-1,1]$$

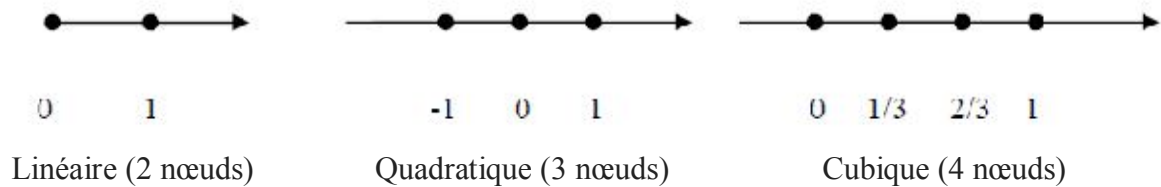


Fig. 10. Eléments de referens à une dimension

- La maille de référence surfacique triangulaire est le triangle (fig. 11.):

$$x_1 \geq 0 ; \quad x_2 \geq 0 ; \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

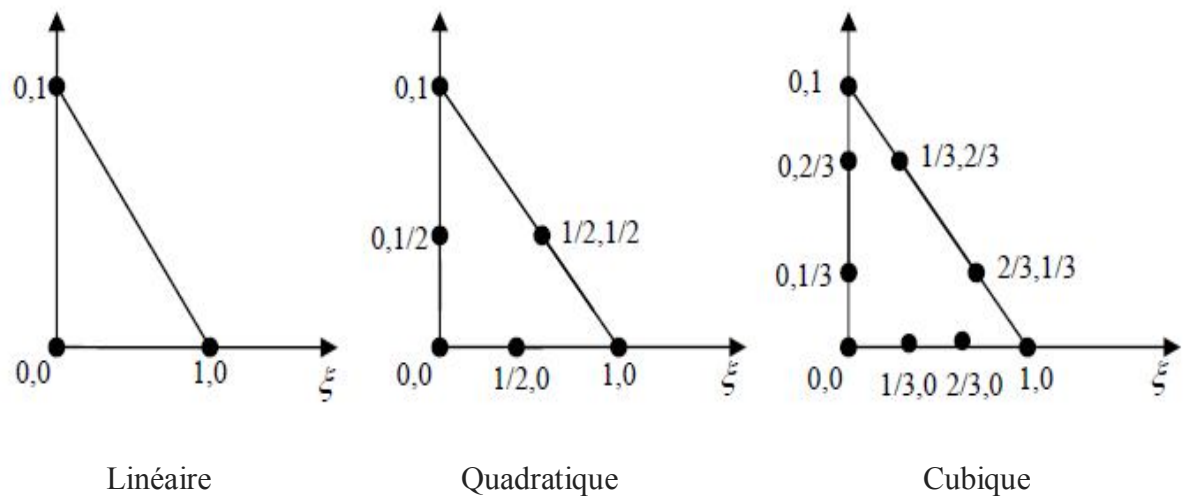


Fig. 11. Eléments de referens triangulaires.

- La maille de référence surfacique quadrangulaire est le carré (fig. 12.):

$$x_1 \in [-1,1] ; \quad x_2 \in [-1,1]$$

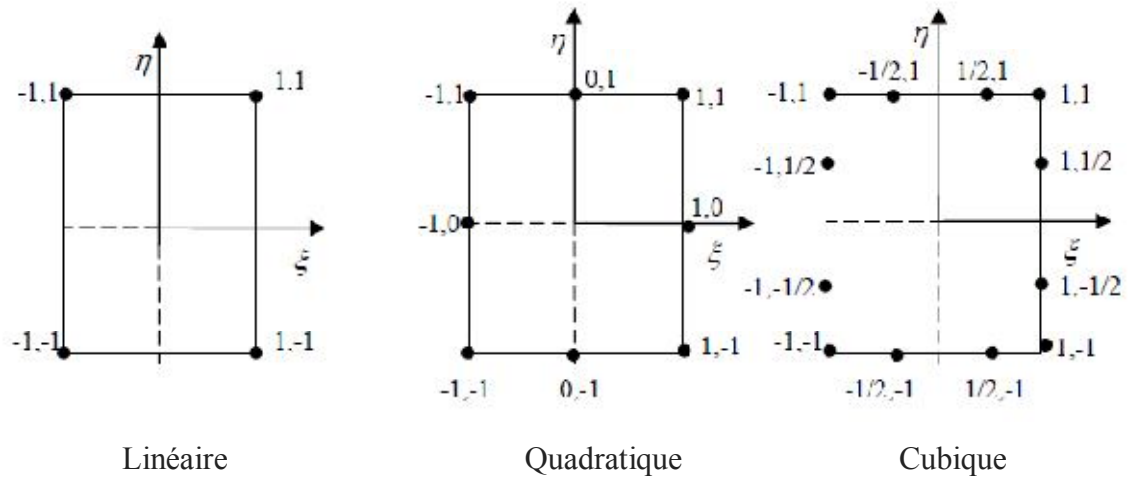


Fig. 12. Eléments de referens carrés.

- La maille de référence volumique tétraédrique est le tétraèdre (fig. 13):

$$x_1 \geq 0 ; \quad x_2 \geq 0 ; \quad x_3 \geq 0 ; \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

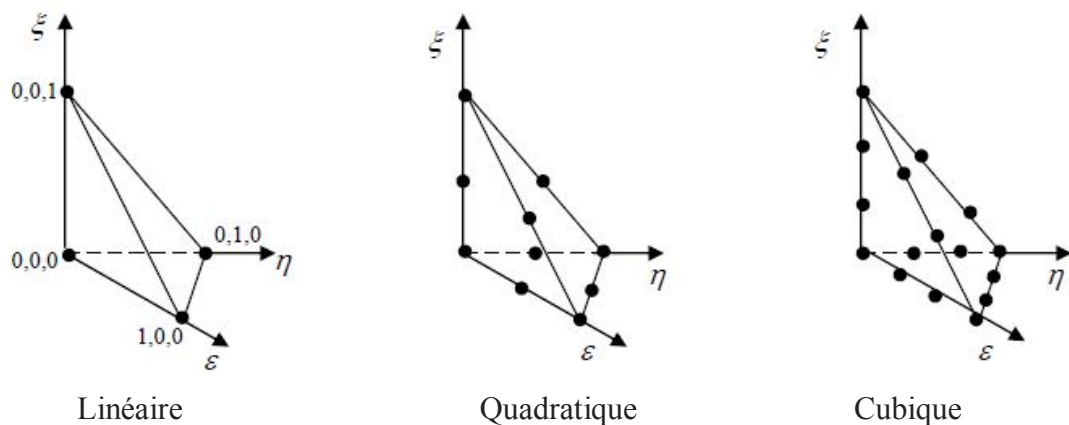


Fig. 13. Eléments de référence tétraédrique

- La maille de référence volumique hexaédrique est le cube (fig. 14):

Soit :

$$x_1 \in [-1,1] ; \quad x_2 \in [-1,1] ; \quad x_3 \in [-1,1]$$

Où x_1, x_2 et x_3 sont les coordonnées d'un point courant m de la maille de référence.

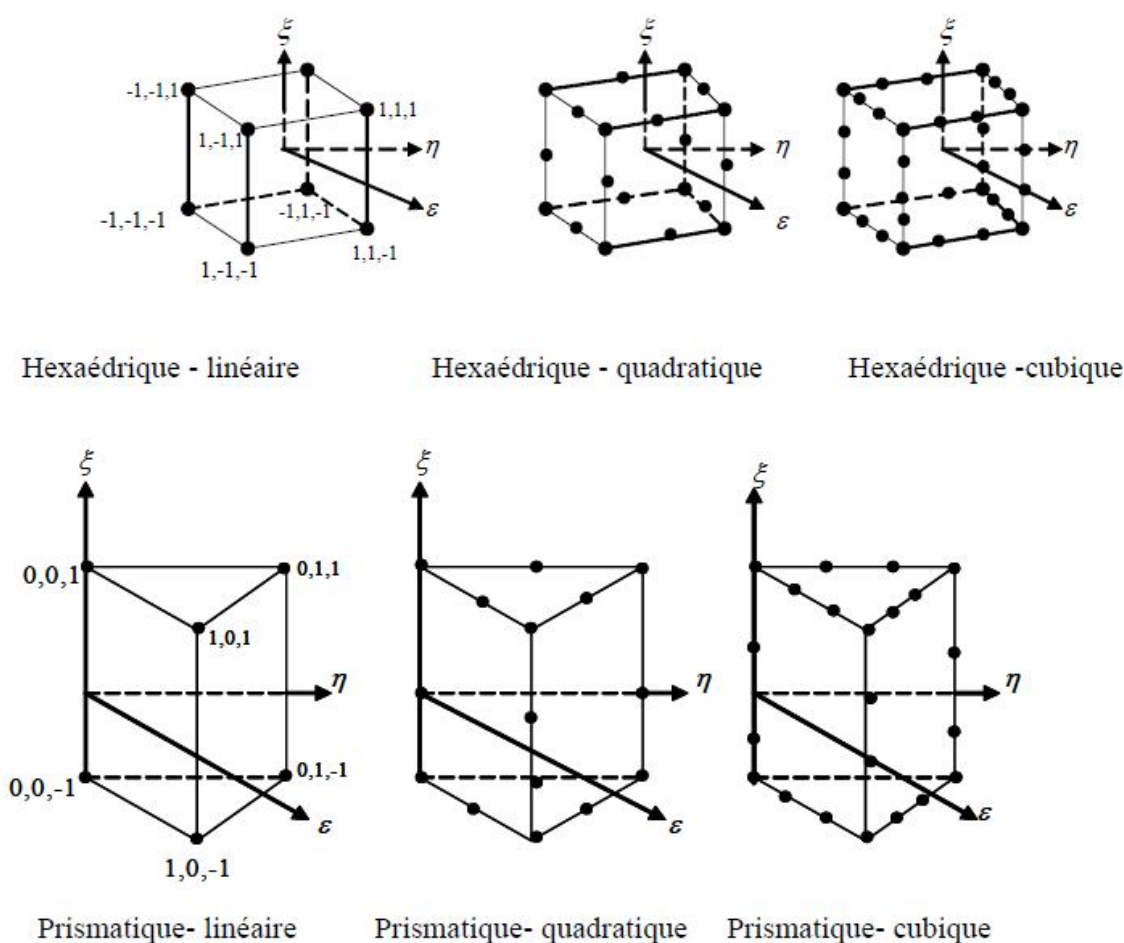


Fig. 14. La maille de référence volumique hexaédrique.

II.5.2.4. Interpolation polynomiale sur les mailles de référence

Les concepts de transformation géométrique et d'élément de référence simplifient la construction des fonctions d'interpolation pour des éléments de formes compliquées. Les fonctions $\Phi(x, y, a_1, a_2, \dots, a_n)$ sont souvent choisies de manière à être faciles à évaluer sur ordinateur, à intégrer ou dériver explicitement. Ainsi l'approximation peut fournir :

- Une expression approchée en tout point (x, y) d'une fonction difficile à évaluer ou connue seulement en certains points ;
- Une solution approchée d'une équation différentielle ou aux dérivées partielles.

Le polynôme d'interpolation d'ordre n à deux dimensions, est donné sous la forme:

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy + \dots + a_{2n+1}y^n$$

Pour $n=1$, nous avons l'équation d'interpolation linéaire suivante (fig. 15) :

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y$$

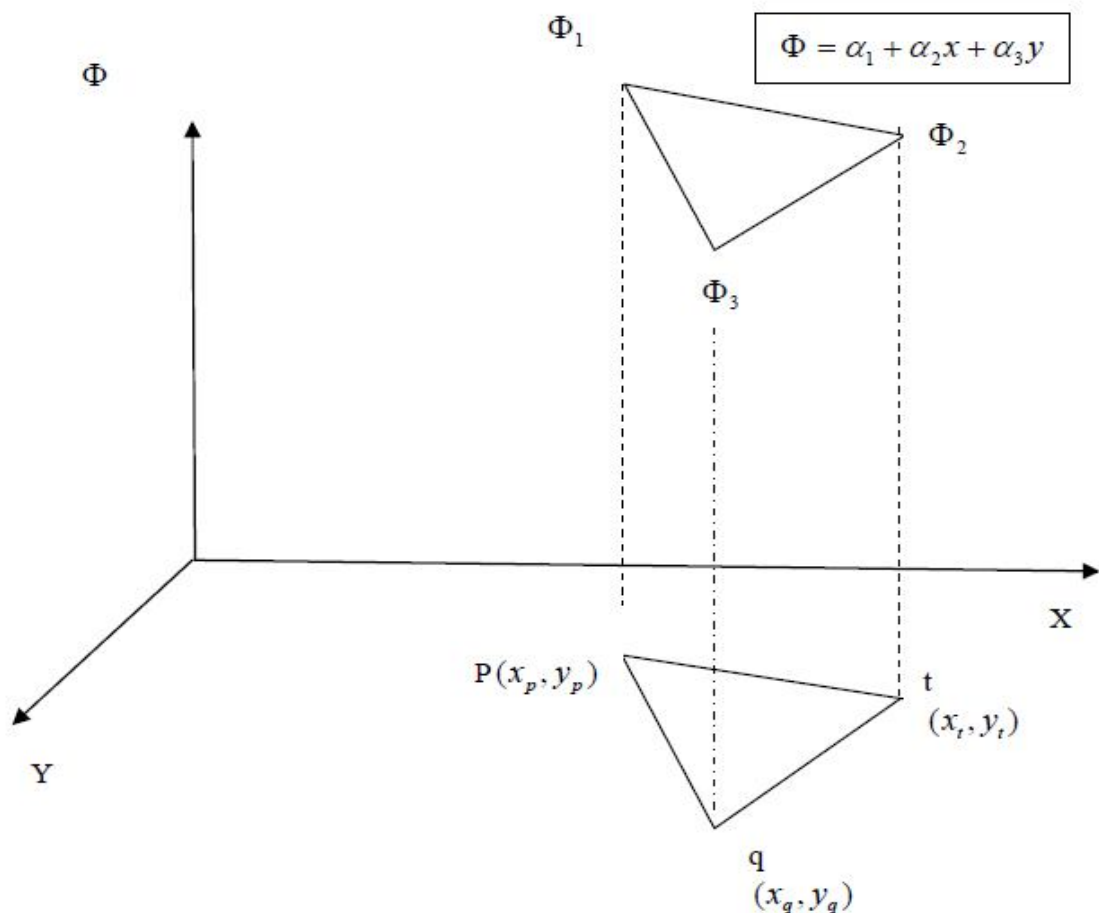


Fig.15. Paramètres de l'élément triangulaire linéaire.

Pour $n=2$, nous avons l'équation d'interpolation quadratique sous la forme :

$$\phi(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy.$$

Pour notre cas, nous utilisons l'élément triangulaire comme élément de référence.

Alors nous pouvons utiliser une équation d'interpolation linéaire de premier ordre.

II.5.3. Formulations matricielles de la MEF

Lorsque nous utilisons les techniques matricielles, nous sommes amenés successivement à s'intéresser à deux niveaux de formulation :

- La formulation élémentaire au niveau de l'élément fini ;
- La formulation globale au niveau de la structure complète.

L'équation de Poisson pour deux dimensions, est donnée sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} - G(x, y) = 0$$

D'après le théorème d'Euler, la résolution de cette équation différentielle est équivalente à minimiser la fonctionnelle d'énergie W qui s'écrit :

$$W = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] dx dy \quad (4)$$

L'intégrale est étendue à un ensemble du domaine de calcul, que l'on subdivise en petits éléments par maillage triangulaire où chaque triangle est repéré par ses trois sommets (nœuds).

Les polynômes d'interpolations du potentiel aux sommets du triangle sont donnés par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{cases}$$

La résolution de ce système, nous donne les coefficients α_i :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta_e} [a_1 \cdot \phi_1 + a_2 \cdot \phi_2 + a_3 \cdot \phi_3] \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta_e} [b_1 \cdot \phi_1 + b_2 \cdot \phi_2 + b_3 \cdot \phi_3] \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta_e} [c_1 \cdot \phi_1 + c_2 \cdot \phi_2 + c_3 \cdot \phi_3] \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$2 \cdot \Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$2 \cdot \Delta_e$; est l'aire de l'élément triangulaire.

Le potentiel en tout point d'un élément (e) est exprimé par la relation:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \cdot N_i(x, y) = [N_1 N_2 N_3] \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \Delta_e} (a_i + b_i x + c_i y) \quad ; i=1, 2, 3 .$$

Les fonctions N_i sont appelées fonctions de formes. Elles doivent vérifier la condition suivante :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{Si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

La minimisation de la fonctionnelle W est réalisée quand les dérivées partielles par rapport à tous les potentiels des nœuds sont nulles, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial W}{\partial \{\phi\}} = 0$$

Avec : $\{\phi\}$ est le vecteur potentiel pour tous les nœuds du système.

L'équation (4) montre que nous pouvons restreindre l'intégrale double au domaine formé des n éléments $(e_i)_n$ comportant le sommet i . Nous déduisons:

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi_i} \left(\frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial y} \right) \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{\partial \phi_{(e)}}{\partial \phi_i} \right] dx.dy \quad (5)$$

Ce qui devient, compte tenu de (4) à (5) :

$$\frac{\partial W}{\partial \phi_i} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \left[\left(\frac{b_i}{2\Delta} \sum_j \frac{b_j \phi_j}{2\Delta} + \frac{c_i}{2\Delta} \sum_j \frac{c_j \phi_j}{2\Delta} \right) - \frac{\rho}{\epsilon_0} N_i \right] dx.dy$$

Nous aboutissons à un système linéaire de forme matricielle :

$$K.\Phi = F$$

Avec : K : Matrice de raideur ;

Φ : Matrice des potentiels aux nœuds ;

F : Second membre du système.

Le terme K_{ij} se calcule par intégration sur les triangles comportant les nœuds i et j , soit :

$$K_{ij} = \sum_n \iint_{(e_i)_n} \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4\Delta^2} dx.dy = \frac{1}{4\Delta} \sum_n (b_i b_j + c_i c_j) = \iint_{\Delta_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy$$

Tandis que le second membre F est déterminé par :

$$F_i = \sum_n \iint_{(\epsilon_i)_n} \frac{\rho}{\epsilon_0} N_i dx dy = \sum_n \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{\Delta}{3}$$

La matrice K comporte un fort pourcentage de termes nuls, car K_{ij} n'est calculé que si le nœud i est relié au nœud j .

Pour le calcul de ces intégrales, nous utilisons la transformation suivante:

$$\iint_{\Delta_e} (N_1)^l (N_2)^m (N_3)^n dx dy = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)} \quad ; \quad i,j = 1, 2, 3.$$

II.5.4. Assemblage

La phase d'assemblage consiste à construire la matrice globale K et le vecteur global F de la structure complète à partir de la matrice et de vecteur caractéristiques des différents éléments K_e , F_e préalablement calculés. L'assemblage s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous-matrices nodales de chaque élément, les indices de ligne et colonne correspondant à la numérotation des nœuds de cet élément dans la matrice globale $[K]$ et le vecteur global $\{F\}$.

Avec :

$$\begin{cases} [K] = \sum_{e=1}^{N=\text{nbre. d'éléments}} [K_e] \\ \{F\} = \sum_{e=1}^{N=\text{nbre. d'éléments}} \{F_e\} \end{cases}$$

Une fois K et F construites, les potentiels inconnus sont obtenus en multipliant l'inverse de K par F . Dans le cas de l'équation de Laplace la même procédure est à suivre en prenant $\rho = 0$.

II.5.5. Introduction des conditions aux limites

Après l'assemblage, la forme intégrale globale s'écrit :

$$W = \langle \delta\Phi \rangle ([K] \{ \Phi \} - \{ F \}) = 0$$

Le problème consiste à trouver $\{ \Phi \}$ qui annule W pour tout $\langle \delta\Phi \rangle$ en satisfaisant les conditions aux limites.

Donc le système algébrique : $[K] \{ \Phi \} = \{ F \}$ doit être modifié en introduisant les conditions aux limites.

II.5.6. Conditions de convergence de la solution

La méthode des éléments finis fournit une solution approchée qui converge vers la solution exacte lorsque l'on diminue la taille des éléments, si l'approximation de Φ satisfait aux conditions suivantes :

- **Base polynomiale complète :**

Pour que la solution approchée tende vers la solution exacte lorsque la taille h des éléments tend vers zéro, il faut que l'erreur d'approximation de tous les termes We soit d'ordre h_n avec $n \geq 1$. Nous avons vu que l'approximation de Φ doit utiliser au moins une base polynomiale complète jusqu'à l'ordre m pour assurer la convergence des dérivées de Φ d'ordre m .

- **Continuité :**

A la condition locale précédente, il faut ajouter une condition globale concernant la continuité des approximations de Φ et de ses dérivées entre les éléments de manière à pouvoir écrire la solution du problème sans la discontinuité.

- **La fonction Φ** et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m qui apparaissent dans les équations doivent être bornées et continues sur les frontières entre éléments ; dans ce cas un élément est dit conforme.

II.5.7. Avantages de la MEF

- La flexibilité est l'un des plus importants avantages de la MEF. Les éléments peuvent avoir plusieurs formes variées et peuvent donc s'adapter facilement à n'importe quelles formes géométriques complexes et aussi tenir compte des propriétés inhomogènes et non linéaires des matériaux.
- La programmation de la méthode est assez simple surtout lorsqu'il s'agit de tenir compte de l'introduction des conditions aux limites.
- La MEF a fait ses preuves dans beaucoup de domaine en ingénierie. De plus, avec son développement important, il existe de très bons logiciels commerciaux qui sont basés sur cette méthode et qui la rendent très accessible. Et par conséquent, elle est applicable à beaucoup de problèmes sans que nous connaissions nécessairement la MEF en détail.
- Les matrices formant le système final d'équations sont symétriques ce qui simplifie grandement la résolution de celui ci.

II.5.8. Inconvénients de la MEF

- L'utilisation de la MEF pour la résolution d'un problème donné, nécessite la connaissance parfaite de la géométrie du problème mais aussi des conditions aux limites, ce qui n'est pas toujours le cas.
- Une fois le potentiel connu en chaque nœud, il faut procéder à un autre calcul numérique pour déterminer le champ électrique en tout point. Ce qui peut engendrer d'autres erreurs.
- Il a été dit que la MEF était une méthode flexible car elle s'adapte facilement aux différentes géométries, mais ce n'est pas le cas du maillage car celui ci doit être entièrement refait si une modification sur une partie de la géométrie du problème considéré intervient.

II.6. Conclusion

La méthode des éléments finis est l'un des outils les plus efficaces et plus généraux de la simulation numérique. L'application des conditions d'équilibre et des lois de comportement de la physique permet de construire des équations approchées dont les inconnues sont les valeurs de la solution en un ensemble bien choisi de points, appelés les nœuds de la discrétisation.

Une simulation réaliste peut exiger des centaines de milliers de nœuds et d'éléments.