

Chapitre 2 : Cinématique des fluides

2.1 Introduction

La *cinématique* d'un milieu matériel repose sur la notion d'espace et de temps. Elle correspond à une branche de la mécanique des fluides qui décrit le mouvement du fluide et ses conséquences sans considération de la nature des forces provoquant le mouvement.

Habituellement, la vitesse décrit l'écoulement. En d'autres termes, un champ d'écoulement est spécifié par des vitesses en différents points dans la région et à différents instants. Une masse de fluide peut être conçue comme un ensemble de particules fluides.

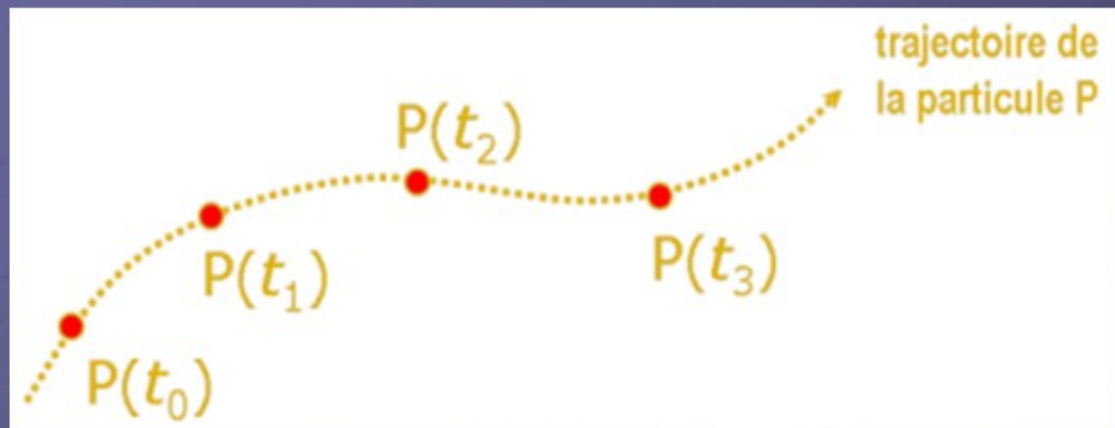
La vitesse instantanée en chaque point dans une région fluide est en fait la vitesse de chaque particule qui existe en ce point et à cet instant. Afin d'obtenir une image complète de l'écoulement, le mouvement du fluide est décrit par deux méthodes qui sont discutées ci-après

2.2 Repérage d'une particule fluide

Décrire le mouvement d'une particule de fluide et la " suivre " au cours du temps c'est à dire connaître à chaque instant sa position. On distingue 2 grandes façons de suivre l'évolution d'un écoulement fluide, et de repérer :

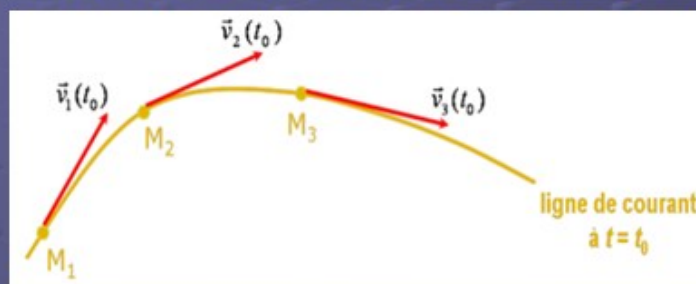
-2.1-1 Point de vue de la grange (Description lagrangienne) :

Le point de vue Lagrangien suit une parcelle de fluide dans son déplacement. Au cours du temps, la particule sera en différents points M, l'ensemble des points, constitue la **trajectoire** de la particule.



2.1.2-Point de vue d'Euler (Description eulérienne) :

La description d'Euler consiste à donner à un instant t défini, un champ de vecteur représentant la **vitesse** des particules d'un domaine fluide appelé **champs d'écoulement (champ de vecteurs vitesse)**



- **Variables d'euler:** Les variables d'Euler sont le temps t et les coordonnées X_i de la particule fluide à l'instant t , les fonctions à déterminer sont les vitesses U_i :

$$\begin{cases} u = g_1(a_1, a_2, a_3, t) \\ v = g_2(a_1, a_2, a_3, t) \\ w = g_3(a_1, a_2, a_3, t) \end{cases}$$

2.2-Lignes de courant, Ligne d'émission, trajectoire

2.2-1 Ligne de courant :

En régime stationnaire, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide. Une ligne de courant est tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse du fluide en ce point.

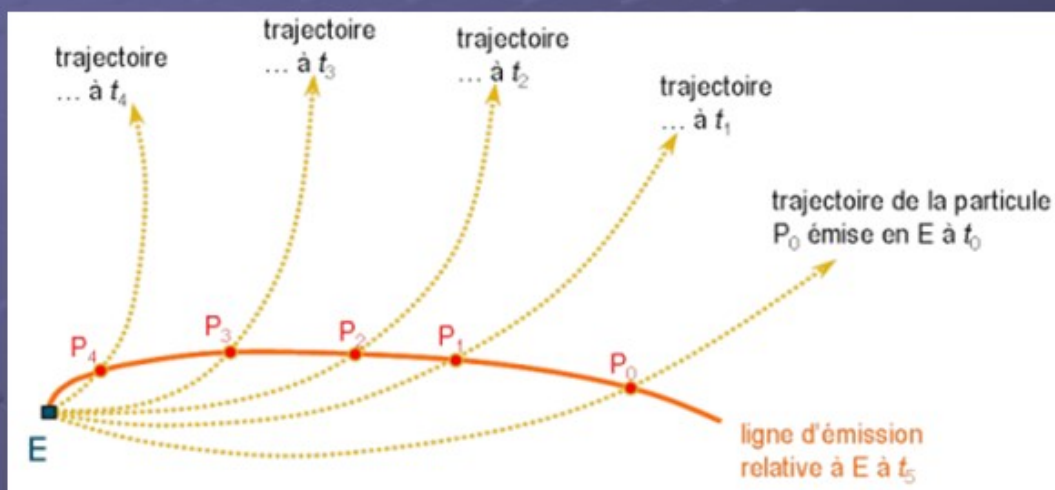
2.2.2-Trajectoire

C'est la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champ d'écoulement. Elle est donc solution de :

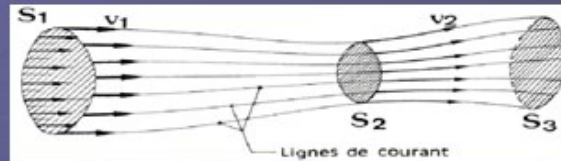
$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t) \quad \Leftrightarrow \quad dx_i = v_i(\vec{x}, t) dt$$

2.2-3 Ligne d'émission :

Toutes les particules étant passées par un même point **E** sont situées à l'instant sur une courbe appelée « **ligne d'émission** »



2.3-Tube de courant : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.



Tube de courant

2.3.1 Equation des lignes de courant

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par :

$$dt = \frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}$$

On a trois équations du premier ordre, donc **3** constantes d'intégration. On obtient ainsi une famille de courbes à 3 paramètres.

Plaçons à un instant donné t , une courbe qui en chaque un de ces points, est tangente au vecteur vitesse correspondant est dite **ligne de courant**. Si dx , dy et dz désigne les composantes d'un élément $d\vec{l}$ pris sur une telle ligne on dit avoir :



$$\overrightarrow{dl} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ U_1(x,y,z,t) \\ U_2(x,y,z,t) \\ U_3(x,y,z,t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nous aurons Une Ligne de courant est définie par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

2.3.2 Fonction de courant: : $\Psi(x, y)$

Pour un écoulement 2D incompressible dans le plan (x, y) , les lignes de courant sont telles que la fonction de courant $\Psi(x, y)$ est constante. Le débit volumique est donné par : $Q_s = \Psi_B - \Psi_A$
Ses dérivées permettent de retrouver le champ de vitesse 2D :

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques, on a défini $\Psi(r, \theta)$ par :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

Propriété : la fonction de courant $\Psi(x, y)$ prend une valeur constante le long d'une ligne de courant

2.3.3 Potentiel des vitesses : $\phi(x, y, z)$

On peut définir le champ de vitesse d'un écoulement à partir de la seule fonction scalaire, que l'on nommera potentiel des vitesses. Il en résulte que les composantes du vecteur vitesse :

Ecoulement à potentiel:

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$$

Pour les écoulements à 2 dimensions

- On obtient donc les relations :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

- Relation entre ϕ et Ψ

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v \end{cases}$$

- Ce sont les conditions de **Cauchy Riemann**

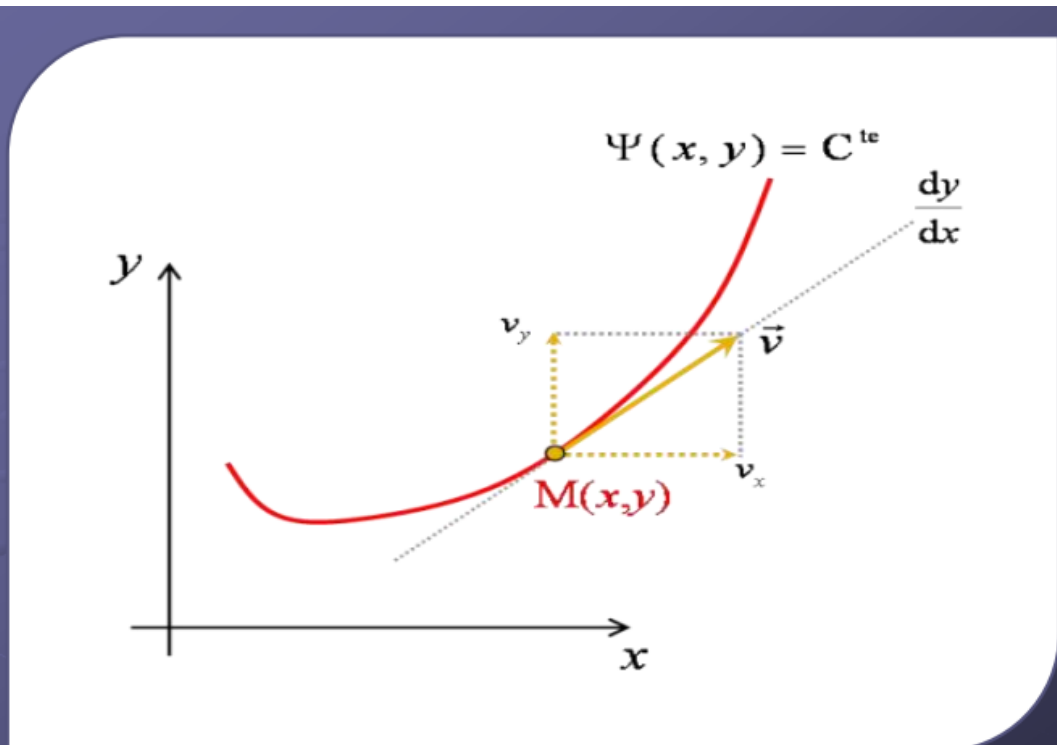
Pour la ligne de courant: on peut par ailleurs en déduire le champ de vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

- A chaque ligne de courant correspond une fonction constante, Il s'agit donc, $d\Psi=0$ où doit être vérifié

$$: \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{puisque} \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

ce qui signifie qu'en chaque point de cette courbe, doit être vérifié

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$$



Pour la ligne de potentiel :

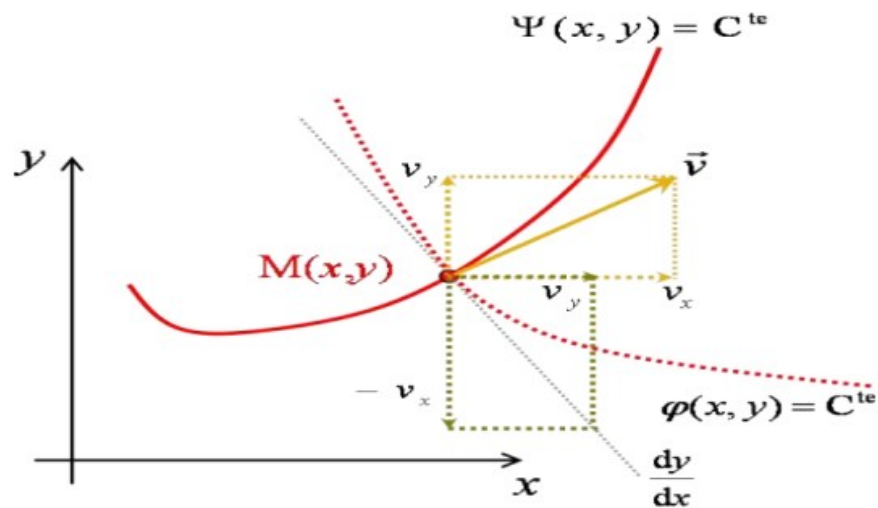
au sein d'un écoulement plan, le potentiel des vitesses étant constant, $\varphi(x, y) = C^{te}$ on doit vérifier .

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad \text{or,} \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{d'où :}$$

$v_x dx + v_y dy = 0$ devant être vérifiée en tout point de l'équipotentielle, on a :

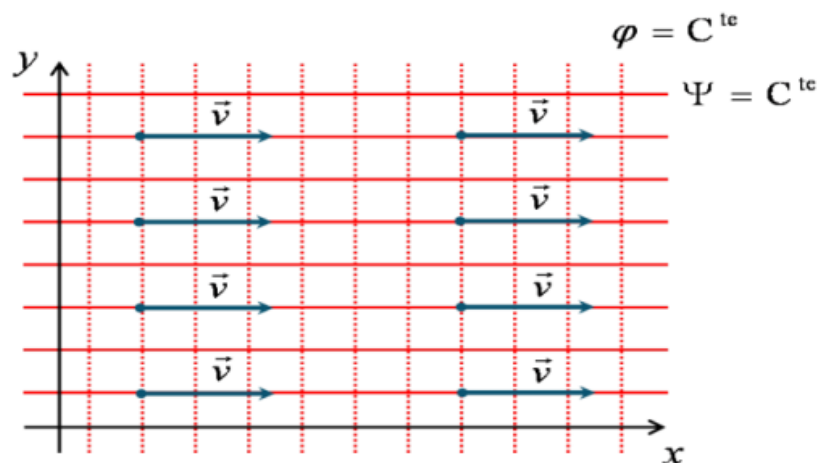
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=cte} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=cte} = \left(\frac{u}{v}\right) \cdot \left(\frac{-v}{u}\right) = -1$$



Réseau d'écoulement

Les lignes de courant sont **perpendiculaires** aux potentiels des vitesses. Alors



Configuration d'un réseau d'écoulement

2.4 Accélération d'une particule fluide et vecteur de tourbillon

L'accélération en point P est la dérivée particulaire du vecteur vitesse (x,y,z,t) en ce point:

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

et sous forme indicielle

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_i}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_i}{\partial x_3}$$

Pour la composante de **vitesse** V , on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Soit vectoriellement

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$$

Écoulement permanent

Le terme $\partial \vec{V} / \partial t$ est le terme d'accélération temporelle. Le mouvement est dit permanent (on parle aussi de régime stationnaire) s'il se reproduit identique à lui-même au cours du temps, c'est-à-dire si

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$$

On notera que dans un écoulement permanent, le terme d'accélération spatiale $(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$ (advection du vecteur vitesse) est, en général, non nul.

On pourra montrer, à titre d'exercice, que l'accélération d'une particule fluide peut se mettre sous la forme:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) \wedge \vec{V}$$

- **Vecteur de tourbillon:** On définit le vecteur rotation (ou vecteur tourbillon) d'un fluide en mouvement, à partir du champ local des vitesses, par la relation:

$$\vec{T} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$$

Remarque

Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de Laplace. En effet, on a :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} \quad \left| \begin{array}{c} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{array} \right| \wedge \left| \begin{array}{c} \partial\Phi/\partial y \\ -\partial\Phi/\partial x \\ 0 \end{array} \right| = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \Delta\Phi = 0$$

2.5 Equation de continuité

Le principe de la conservation de la masse se traduit par l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \sum q$$

$\sum q$: représente les débits massiques

En écoulement permanent incompressible, l'équation de continuité se réduit à:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Réseau d'écoulement

