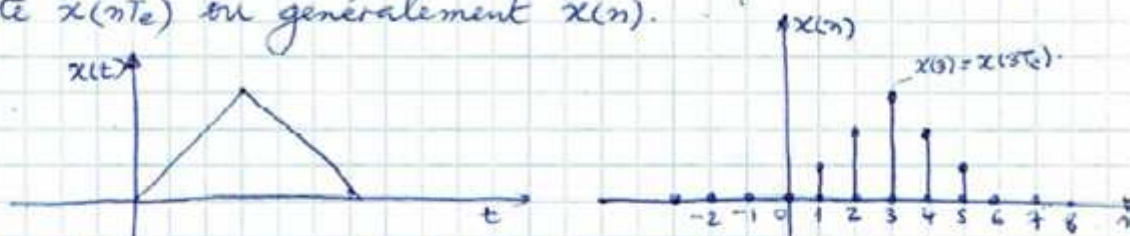


④

Chapitre 4 : Traitement du Signal Numérique

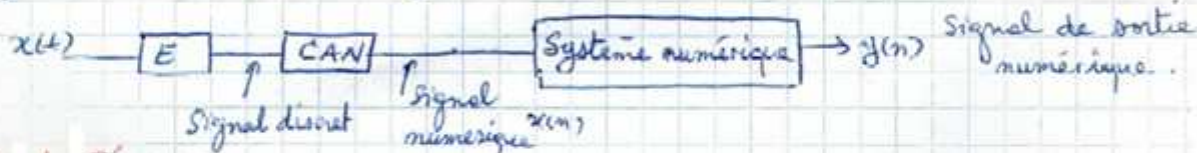
Représentation des signaux discrets :

- * Un signal continu est défini sur une variable continue "t"
- * Un signal discret il n'est défini qu'aux instants d'échantillonnage (nT_e) il se note $x(nT_e)$ ou généralement $x(n)$.



La suite $\{x(n)\}$ se nomme Signal discret ou séquence
 n représente le $n^{\text{ème}}$ échantillon.

Un signal numérique = signal discret quantifié



Exemple de Séquences :

01) Séquence impulsion unité $\delta(n)$

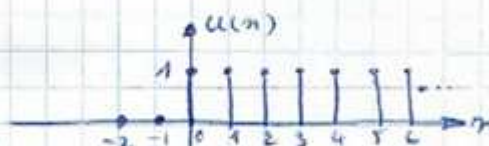
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases}$$



02) Séquence Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

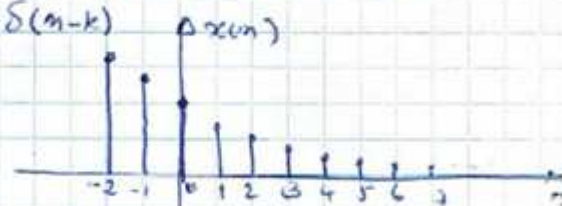
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \text{ et } u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)$$



03) Séquence exponentielle réelle :

$$x(n) = a^n, \quad a < 1$$

$$x(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow x(nT) = e^{-\alpha nT_e} = (e^{-\alpha T_e})^n = a^n$$



04) Séquence sinusoïdale :

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \varphi) \text{ avec } \omega_0 \text{ pulsation}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 T_e$$

05) Séquence périodique

$$x(n) = x(n+N) \quad N: \text{période}$$

Exemple :

$$x(n) = A \sin\left(\frac{2\pi}{N} n + \varphi\right)$$

Energie et Puissance des Signaux numériques:

* L'énergie d'une séquence $\{x(n)\}$ est définie par:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

* La puissance moyenne d'une séquence est définie par:

$$P_x = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{n=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} |x(n)|^2$$

Opérations élémentaires sur des signaux numériques:

* **Somme:** La somme de deux signaux est obtenue en additionnant deux à deux les échantillons pour une même valeur de la variable indépendante.

* **Produit:** Le produit de deux signaux est obtenu en multipliant deux à deux les échantillons pour une même valeur de la variable indépendante.

* **Produit par une constante:** Le produit d'un signal par une constante est obtenu par la multiplication de tous les échantillons du signal par la même constante.

* **Décalage:** on dit qu'un signal $y(n)$ est la version décalée ou retardée d'un autre signal $x(n)$ si l'on a pour tout n :
 $y(n) = x(n - n_0)$, où n_0 : entier positif ou négatif

* Toute séquence numérique peut s'écrire:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$$

Systèmes Discrets:

$$x(n) \rightarrow \boxed{T[\]} \rightarrow y(n)$$

où $[T[\]]$ c'est un opérateur qui agit sur une séquence d'entrée $x(n)$ et délivre à sa sortie une séquence $y(n)$: $y(n) = T[x(n)]$

Linéarité: si $T[x_1(n)] = y_1(n)$ et $T[x_2(n)] = y_2(n)$ alors:

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \quad a_1 \text{ et } a_2: \text{des constantes}$$

Invariance dans le temps: si $T[x(n)] = y(n)$ alors:

$$T[x(n-k)] = y(n-k)$$

Réponse impulsionnelle:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

avec $T[\delta(n)] = h(n)$: réponse impulsionnelle, alors

$$T[\delta(n-k)] = h(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n)$$

C'est la convolution discrète de $x(n)$ et $h(n)$

$$\text{de même } y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$$

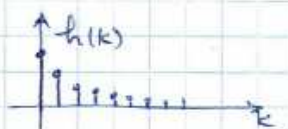
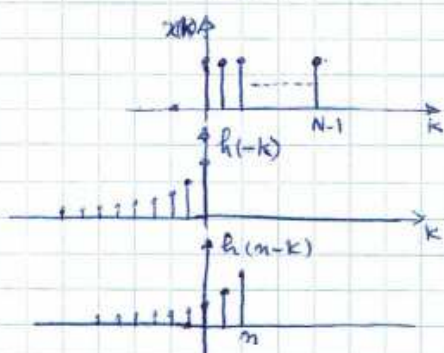
③

Exemple :

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \quad a < 1 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

impulsion rectangulaire

$$x(n) = u(n) - u[n - (N-1)]$$

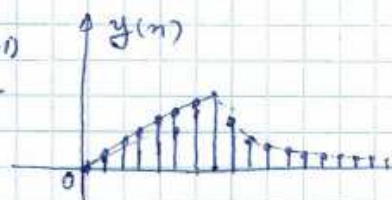


$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

$$01) n < 0 \Rightarrow y(n) = 0$$

$$02) 0 \leq n < N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n a^{n-k} = a^n \cdot \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}$$

$$03) n \geq N \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \cdot \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}$$

Stabilité :

$$\text{pour que le système soit stable} \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Démonstration : $x(n)$ bornée $\Rightarrow \tau[x(n) \text{ bornée}] = y(n)$ bornée

$$x(n) : \text{bornée} \Rightarrow |x(n)| < M \quad \forall n$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \left| \sum_k x(k) h(n-k) \right| \leq \sum_k |x(k)| \cdot |h(n-k)| \\ &\leq M \cdot \sum |h(n-k)| < \infty \\ &\Rightarrow \sum |h(n-k)| < \infty. \end{aligned}$$

Causalité :

$$\text{un système causal} \Rightarrow h(n) = 0 \text{ si } n < 0$$

$$* \text{ une séquence } x(n) \text{ causal} \Rightarrow x(n) = 0 \text{ si } n < 0$$

Exemple : $h(n) = a^n \cdot u(n)$

$$01) h(n) : \text{est causal}$$

$$02) \sum |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{1-|a|} \quad \left(\text{stable si } |a| < 1 \right)$$

Equation aux différences :

mathématiquement, l'excitation et la réponse d'un large sous ensemble de système linéaire satisfont une équation aux différences d'ordre N

$$\text{du type} \quad \sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r),$$

Exemple : $y(n) - a y(n-1) = x(n)$

$$\text{Si } x(n) = \delta(n) \text{ alors } y(n) = h(n)$$

$$\Rightarrow h(n) - a h(n-1) = \delta(n).$$

④ calcul de $h(n)$: Système causal $\Rightarrow h(n)=0$ pour $n < 0$.

$$\begin{aligned}h(n) - a h(n-1) &= \delta(n) \\ \Rightarrow h(n) &= a h(n-1) + \delta(n) \\ h(0) &= a h(-1) + \delta(0) = 1 \\ h(1) &= a h(0) + \delta(1) = a \\ h(2) &= a h(1) + \delta(2) = a^2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$h(n) = a^n, \quad h(n) = a^n \cdot u(n).$$

en général :

Si $h(n)$ est de durée finie $\Rightarrow$ R.I.F (réponse impulsionnelle finie)

Si $h(n)$ est de durée infinie $\Rightarrow$ R.I.I (réponse impulsionnelle infinie)

* Si l'ordre du système " N "

* $N = 0 \Rightarrow y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$ est un système non récursif (R.I.F)

$$y(n) = \sum_{r=0}^M h(r) x(n-r)$$

$$h(r) = \begin{cases} \frac{b_r}{a_0} & , r = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{Ailleurs.} \end{cases}$$

* Si $N \neq 0 \Rightarrow$ le système est dit récursif (R.I.I).

(11)

TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UN SIGNAL DISCRET

definition :

Soit un signal discret $x(n)$. Par définition, la transformée de Fourier de $x(n)$ est donnée par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi f n}, \quad T_e = 1 \text{ (normalisé } \Rightarrow f_e = 1 \text{)}.$$

Remarque : $X(f) = X(z) |_{z=e^{j2\pi f}}$.

* La transformée de Fourier est donc la transformée en z , calculée pour z appartenant au cercle unité.

Existence : La série de Fourier existe si $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$ c à d :

La transformée de Fourier existe pour les signaux, absolument sommable.

Propriétés :

1. Periodicité : $X(f)$ est périodique de période = 1.

$$X(f+1) = X(f)$$

Dem : $X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi n(f+1)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} \cdot e^{-j2\pi n} = X(f)$, car $e^{-j2\pi n} = 1$.

2. La transformée de Fourier inverse d'un signal discret est donnée par

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{j2\pi f n} df.$$

$$3 \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n}$$

$$\operatorname{Re}\{X(f)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot \cos 2\pi f n \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\{X(f)\} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \sin 2\pi f n$$

$$\text{avec } \operatorname{Re}\{X(f)\} = \operatorname{Re}\{X(-f)\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}\{X(-f)\} = -\operatorname{Im}\{X(f)\}$$

donc $|X(f)|$ est une fonction paire et $\angle X(f)$ est une fonction impaire de f .

4. Multiplication par une exponentielle (théorème de modulation)

$$\operatorname{TF}\{x(n) \cdot e^{j2\pi f_0 n}\} = X(f-f_0)$$

$$\text{Dem}^{\text{re}} : \sum_n x(n) \cdot e^{j2\pi f_0 n} \cdot e^{-j2\pi f n} = \sum_n x(n) e^{-j2\pi (f-f_0) n} = X(f-f_0)$$

5. Transformée de Fourier des fonctions de corrélation :

La fonction de corrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$ est donnée par :

$$R_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+k)$$

La transformée de $R_{xy}(k)$ est donnée par :

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(n+k) \right] e^{-j2\pi f k} = X^*(f) \cdot Y(f) \quad \text{ou } X^*(f) \text{ est le conjugué de } X(f).$$

⑫

Dem : posons $l = n+k$

$$\Rightarrow \phi_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j2\pi f n} \cdot \sum_{l=-\infty}^{+\infty} y(l) e^{-j2\pi f l} = X^*(f) \cdot Y(f)$$

donc $\phi_{xx}(f) = |X(f)|^2$.

6 Conservation du produit scalaire et relation de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

Dem 7D

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot x^*(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot e^{-j2\pi f n} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j2\pi f n} \right] X(f) df$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot X^*(f) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$$

N.B $\sum x(n) y^*(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) Y^*(f) df$

7 Transformée de Fourier d'un produit

* $x(n) \cdot y(n) \xrightarrow{T.F} X(f) * Y(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') Y(f-f') df'$

Dem : T.F $\{x(n), y(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') e^{j2\pi f' n} df' \cdot y(n) \cdot e^{-j2\pi f n}$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) \cdot e^{-j2\pi (f-f') n} df' = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f') \cdot Y(f-f') df'$$

et * $x(n) * y(n) \xrightarrow{T.F} X(f) \cdot Y(f)$

Dem :

$$\sum_n \sum_k x(k) y(n-k) e^{-j2\pi f n} = \sum_k x(k) \sum_n y(n-k) e^{-j2\pi f n}$$

posons $n = l+k$
 $n-k = l$

$$= \sum_k x(k) \cdot e^{-j2\pi f k} \cdot \sum_l y(l) e^{-j2\pi f l} = X(f) \cdot Y(f)$$

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'un signal discret est :

$$X(f) = \sum_n x(n) e^{-j2\pi f n} \quad \text{--- ① (avec } x(f) \text{ périodique de période 1)}$$

et la transformée inverse :

$$x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f n} df \quad \text{--- ②} = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi f n} df$$

* Le calcul numérique de ① et ② présente deux difficultés

* f : varie continuellement

* le nombre des valeurs de $x(n)$ est infini

Les solutions sont les suivantes :

— f peut être discrétisée

— $x(n)$ est supposé à durée limitée.

⑬ Pour discrétiser la fréquence f , on choisit $\Delta f = \frac{1}{N}$, c'est à dire N points entre 0 et 1, $f = (\frac{k}{N}, k=0, \dots, N)$.

⇒ ① devient $X(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$ (en notant $X(\frac{k}{N}) = X(k)$)

et ② peut être approché par :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \int \text{ devient Somme} \\ \text{et } df \rightarrow \frac{1}{N} \end{array} \right)$$

Remarque : $\hat{x}(n)$ est périodique de période N . car :

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} (n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi k}}_{=1} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \end{aligned}$$

Il est donc clair que $\hat{x}(n) \neq x(n)$ puisque l'une est périodique et généralement l'autre pas.

* Examinons dans quel cas $x(n) = \hat{x}(n)$ sur une période :

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j2\pi \frac{k}{N} m} \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} \right]$$

pour $\frac{m-n}{N} = \frac{1}{N}$ quelconque (non entier) $\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} \frac{1}{N}} = 0$

car c'est la somme vectorielle des vecteurs $\sqrt{1}$.

Exp : $\frac{1}{N} = \frac{1}{2}$  , $\frac{1}{N} = \frac{1}{4}$ 

et pour $(m-n) = iN$ (i entier) on a : $e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} = 1$, $\left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (m-n)} = 1 \right]$

d'où $\hat{x}(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(n+iN)$, ($m = n+iN$).

Par exemple, pour $n=0 \Rightarrow \hat{x}(0) = x(0) + x(N) + x(-N) + x(2N) + x(-2N) + \dots$

$\hat{x}(0) = x(0)$, si $x(N) = x(-N) = x(2N) = x(-2N) = \dots = 0$

càd si le signal $x(n)$ s'annule à partir de $n=N$.

et en définitive pour $x(n)$ s'annulant à partir de $n=N$ on a :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

et $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \quad k=0, 1, \dots, N-1$

en posant $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \\ X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \end{cases}$$

C'est la Transformée de Fourier discrète (TFD) d'ordre N

(14)

N.B. On peut aussi écrire la TFD sous forme matricielle, en mettant les $x(n)$ et les $X(k)$ sous forme vectorielle.

soit $x = x(n)$: vecteur colonne de dimension N $n = 0, 1, \dots, N-1$

et $X = X(k)$: vecteur colonne de dimension N $k = 0, 1, \dots, N-1$

d'où $X = [W_N] x$ ou $W = [W_N^{nk}]$ matrice $N \times N$

et $x = \frac{1}{N} [W_N]^* X$ $W^* = [W_N^{-nk}]$ matrice conjuguée de W

on vérifie que $X = \frac{1}{N} [W_N] [W_N]^* X \Rightarrow W \cdot W^* = N \cdot I$

$$\Rightarrow W^{-1} = \frac{1}{N} \cdot W^*$$

Propriétés de la TFD:

On s'intéresse donc aux propriétés mathématiques de :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{ou} \quad X = W \cdot x$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{N} W^* X$$

1. **Periodicité** : $X(k)$ et $x(n)$ sont périodique de période N

Dém :

$$\begin{aligned} X(k+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k+N)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} W_N^{nN} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(k) \quad (\text{car } W_N^{nN} = 1) \\ \text{et} \quad x(n+N) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-k(n+N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} W_N^{-kN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} = x(n) \quad (\text{car } W_N^{-kN} = 1) \end{aligned}$$

2. **Linéarité** : TFD $\{x(n) + \lambda y(n)\} = \text{TFD}\{x(n)\} + \lambda \text{TFD}\{y(n)\}$
 $= W \cdot x + \lambda \cdot W \cdot y$

3. **Décalage en temps (avance/retard)**

$$\text{TFD}\{x(n-m)\} = W_N^{mk} \cdot X(k)$$

$$\begin{aligned} \text{Dém} : \text{TFD}\{x(n-m)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n-m) W_N^{nk}, \quad \text{on pose } n-m=l \Rightarrow n=l+m \\ &= \sum_{l=-m}^{N-1-m} x(l) W_N^{(l+m)k} = W_N^{mk} \cdot \sum_{l=-m}^{N-1-m} x(l) W_N^{lk} \end{aligned}$$

et comme $x(n)$ est périodique de période " N " on a :

$$x(-m) = x(-m+N), \quad x_{\frac{N-1-m}{N}} = x_{\frac{-m+1+N}{N}}, \dots, \quad x_{\frac{-1}{N}} = x_{\frac{N-1}{N}}$$

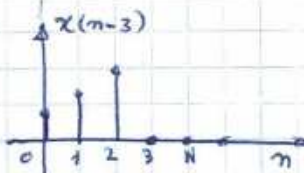
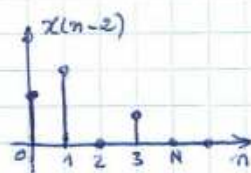
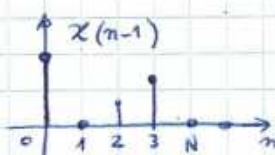
$$\text{et } W_N^{(l+m)k} = W_N^{lk} W_N^{mk}$$

$$\Rightarrow \text{TFD}\{x(n-m)\} = W_N^{mk} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W_N^{lk} = W_N^{mk} \cdot X(k)$$

Remarque : Une difficulté se présente lorsqu'on applique la TFD à une suite $x(n)$ non périodique de durée N . Le résultat ci-dessus reste valable en utilisant la notion de décalage circulaire.

13)

Exemple: de décalage circulaire



$$x[n-4] = x[n]$$

4. Décalage en fréquence:

Par raisonnement identique à celui du paragraphe précédent, on obtient:

$$\text{TFD}^{-1} \{ X[k-m] \} = W_N^{-mn} \cdot x[n]$$

5. Convolution circulaire:

$$\text{TFD} \{ x[n] \otimes y[n] \} = X[k] \cdot Y[k] \quad \text{car:}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \text{TFD} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x[m] y[n-m] \right\} &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \text{TFD} \{ y[n-m] \} = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \cdot W_N^{mk} \cdot Y[k] \\ &= X[k] \cdot Y[k] \end{aligned}$$

et d'une manière homologue, on obtient pour la convolution en fréquence:

$$\frac{1}{N} \text{TFD}^{-1} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} X[l] Y[k-l] \right\} = x[n] \cdot y[n]$$

6. Conservation du produit scalaire et relation de Parseval:

$$\text{si } X[k] = \text{TFD} \{ x[n] \}$$

$$\text{et } Y[k] = \text{TFD} \{ y[n] \} \quad \text{alors:}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{N} W^* X \\ y &= \frac{1}{N} W^* Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle x, y^* \rangle = x^T \cdot y^* = \frac{1}{N^2} \cdot X^T \cdot W^{*T} \cdot W Y^*$$

$$\text{or } W = W^T \quad \text{et } W W^* = N I \quad \text{alors:}$$

$$\langle x, y^* \rangle = \frac{1}{N} X^T \cdot Y^*$$

$$\text{càd: } x^T \cdot y^* = \frac{1}{N} X^T \cdot Y^* \quad (\text{c'est la conservation du produit scalaire}).$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] y^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot Y^*[k]$$

Si $x[n] = y[n]$ alors on a:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{c'est la relation} \\ \text{de Parseval} \end{array} \right)$$

(16)

TRANSFORMEE DE FOURIER RAPIDE (TFR) ou FFT (Fast Fourier Transform).

* Le calcul de $X(k)$ $\{k=0, \dots, N-1\}$ requiert (dans le cas où $x(n)$ est réel) puisque W_N^{mk} est complexe, N^2 additions et $2N^2$ multiplications (sans tenir compte des valeurs particulières prises par W_N^{mk}).

* La TFR (ou FFT) est un algorithme qui ne requiert que $N \cdot m$ additions et $\frac{N}{2} \cdot (m-1)$ multiplications (N est choisi égale à 2^m)

Exemple:

Si $N = 1024 = 2^{10}$, la FFT implique $512 \times 9 \approx 4500$ multiplications au lieu de $2 \cdot 10^6 \approx 2 \cdot 10^6$ pour un calcul non optimisé de TFD.

Principe de Calcul de FFT

$x(n)$ est décomposée en 2 suites entrelacées $\{x(2i)$ les termes pairs et $\{x(2i+1)$ les termes impairs} d'où

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) W_N^{ki} + \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_N^{k(2i+1)}$$

et comme $W_N^2 = W_{N/2} \Rightarrow X(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i) \cdot W_{N/2}^{ki} + W_N^k \cdot \sum_{i=0}^{N/2-1} x(2i+1) W_{N/2}^{ki} \quad k=0, \dots, N-1$

Le calcul de $X(k)$ se décompose en 2 calculs de TFD d'ordre $N/2$, (période $N/2$) qui requiert chacun $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ additions et $2\left(\frac{N}{2}\right)^2$ multiplications, auquel s'ajoutent pour la multiplication par W_N^k , $\frac{N}{2}$ additions et $\frac{N}{2}$ multiplications. Ceci donne donc :

$$2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + \frac{N}{2} \text{ additions, au lieu de } N^2$$

et $4 \left(\frac{N}{2}\right)^2 + N/2$ multiplications, au lieu de $2N^2$

* On a donc, de cette manière, réduit le nbre d'opérations à effectuer

* En choisissant $N = 2^m$, et en recommençant le processus

Ci-dessus, on peut décomposer le calcul d'une TFD d'ordre N en $(m-1)$ calculs de TFD d'ordre $\frac{N}{2}, \frac{N}{4}, \dots, 2$

* En fait, en ordonnant les calculs de la manière qui suit et en tenant compte que $W_N^N = 1$ et $W_N^{N/2} = -1$, on peut ramener le nombre de calculs, pour chaque étape (il y a m étapes) à N additions et $N/2$ multiplications.

(17) Exemple: Dans le cas ou $N = 8 = 2^3$

$\{X(k) \mid k = 0, \dots, N-1\}$ peut aussi s'écrire sous forme matricielle.

$$X(k) = W \cdot x$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \\ X(4) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = [W] \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

avec $[W] =$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 & w^6 & w^7 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} & w^{12} & w^{14} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} & w^{18} & w^{21} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} & w^{24} & w^{28} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} & w^{30} & w^{35} \\ 1 & w^6 & w^{12} & w^{18} & w^{24} & w^{30} & w^{36} & w^{42} \\ 1 & w^7 & w^{14} & w^{21} & w^{28} & w^{35} & w^{42} & w^{49} \end{bmatrix}, w = e^{-j\frac{2\pi}{8}}$$

on remarque que $w^8 = 1$, $w^4 = -1 \Rightarrow w^7 = -w^3$, $w^6 = -w^2$, $w^5 = -w$

$$\Rightarrow [W] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 & -1 & -w & -w^2 & -w^3 \\ 1 & w^2 & -1 & -w^2 & 1 & w^2 & -1 & -w^2 \\ 1 & w^3 & -w^2 & w & -1 & -w^3 & w^2 & -w \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w & w^2 & -w^3 & -1 & w & -w^2 & w^3 \\ 1 & -w^2 & -1 & w^2 & 1 & -w^2 & -1 & w^2 \\ 1 & -w^3 & -w^2 & -w & -1 & w^3 & w^2 & w \end{bmatrix}$$

En effectuant le produit $[W] \cdot x(n) \Rightarrow$ on aura :

$$X(0) = [x(0) + x(4)] + [x(2) + x(6)] + [x(1) + x(5)] + [x(3) + x(7)]$$

$$X(1) = [x(0) - x(4)] + w \cdot [x(2) - x(6)] + w \cdot [x(1) - x(5)] + w^3 [x(3) - x(7)]$$

$$X(2) = [x(0) + x(4)] - [x(2) + x(6)] + w^2 [x(1) + x(5)] - w^2 [x(3) + x(7)]$$

$$X(3) = [x(0) - x(4)] - w^2 [x(2) - x(6)] + w^3 [x(1) - x(5)] + w [x(3) - x(7)]$$

18

$$X(4) = [x(0) + x(4)] + [x(2) + x(6)] - [x(1) + x(5)] - [x(3) + x(7)]$$

$$X(5) = [x(0) - x(4)] + w^2[x(2) - x(6)] - w[x(1) - x(5)] - w^3[x(3) - x(7)]$$

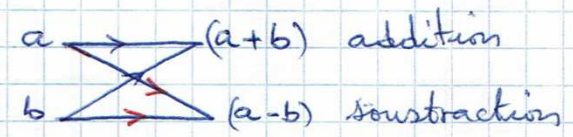
$$X(6) = [x(0) + x(4)] - [x(2) + x(6)] - w^2[x(1) + x(5)] + w^2[x(3) + x(7)]$$

$$X(7) = [x(0) - x(4)] - w^2[x(2) - x(6)] - w^3[x(1) - x(5)] - w[x(3) - x(7)]$$

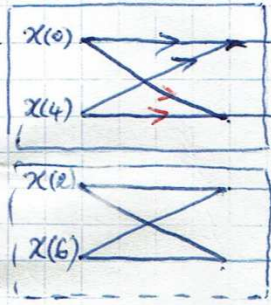
* Remarque : Les 4 dernier termes sont identiques aux 4 premiers, aux signes moins près, qui apparaissent devant les termes impairs.

* Il est usuel de représenter ceci sur un schéma à croisillons, qui permet de comprendre la décomposition et de décompter facilement les opération

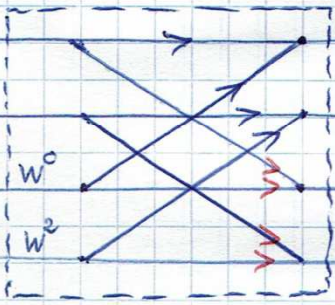
* La cellule de base s'appelle Croisillon ou "butterfly"



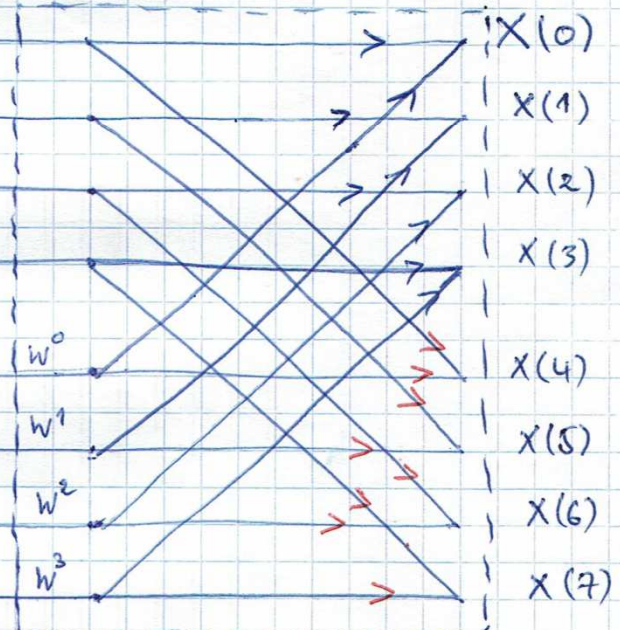
Les TFD d'ordre 2



Les TFD d'ordre 4



TFD d'ordre 8



8 additions et soustraction

↓
4 multiplication

8 additions et soustraction

↓
4 multiplication

↓
8 additions et soustraction

donc on a bien : $N \cdot m = 8 \times 3 = 24$ addition ou soustraction, et $\frac{N}{2} \cdot (m-1) = 4 \times 2 = 8$ multiplication