

Chapitre 2 Traitement du signal analogique

2.1 Série de Fourier

2.1.1 Série de Fourier trigonométrique réelle

Tous signal périodique $s(t)$, de période T_0 , il peut être développé en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences f multiple de la fréquence du signal $f_0 = \frac{1}{T_0}$. Cette série est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_0}\right) \right]$$
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \cdot \sin(2\pi n f_0 t)]$$

Où a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier trigonométrique réelle, ils se calculent à partir des relations suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot dt \quad \text{et } b_0 = 0, \forall s(t)$$

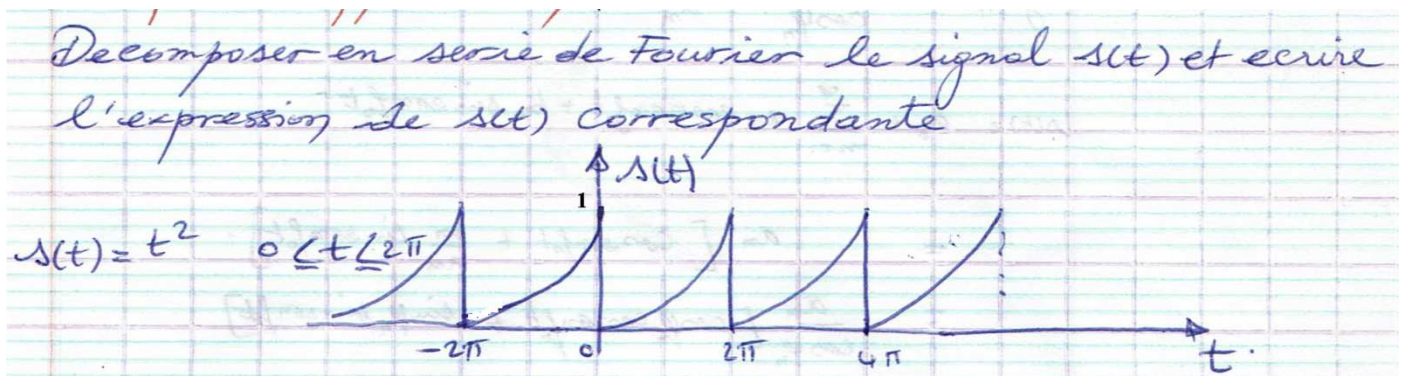
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \cos(2\pi n f_0 t) \cdot dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot \sin(2\pi n f_0 t) \cdot dt$$

Où $f_0 = \frac{1}{T_0}$, est la fréquence fondamentale et $n f_0$ les fréquences des harmoniques.

a_0 : La valeur moyenne ou la composante continue du signal.

Exemple d'application



Solution

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \cos 2\pi n f_0 t dt = \frac{4}{n^2} ; n \neq 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{(T_0)} s(t) \sin 2\pi n f_0 t dt = -\frac{4\pi}{n} ; n \neq 0$$

} intégration par partie

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}$

et la série de Fourier Correspondante sera :

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos 2\pi n f_0 t - \frac{4\pi}{n} \sin 2\pi n f_0 t \right).$$

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi}{n} \sin nt \right).$$

$$s(t) = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \cos t - 4\pi \sin t + \cos 2t - 2\pi \sin 2t + \dots$$

2.1.2 Série de Fourier Alternative réelle

Elle se déduit de la série trigonométrique réelle. Elle est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$$

Où

$$A_0 = a_0, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \varphi_n = \arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Remarque : les coefficient A_n sont appelés les amplitudes spectrales ; c.à.d. : A_n est l'amplitude de la composante spectrale : $A_n \cdot \cos(2\pi n f_0 t - \varphi_n)$ à la fréquence $n f_0$.

2.1.3 Série de Fourier complexe

Elle est donnée par la relation suivante :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

Avec

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} \cdot dt$$

Où $C_0 = a_0$, $a_n = 2 \times \text{Re}\{C_n\}$, $b_n = -2 \times \text{Im}\{C_n\}$ et $C_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$

Exemples :

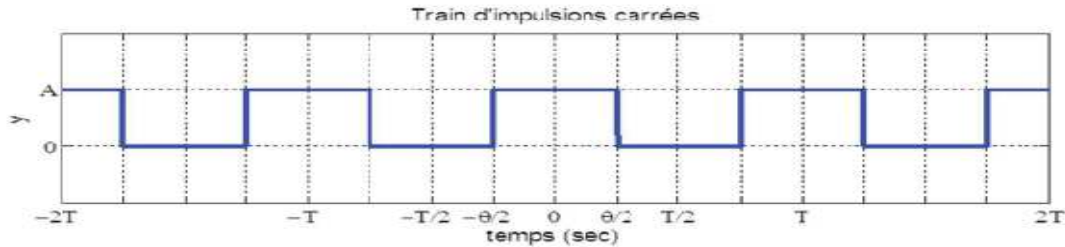
1) Soit C_n une suite définie par: $C_1 = C_{-1} = \frac{A}{2}$ et $C_n = 0$, si $n \neq (1, -1)$.

Déterminer $s(t)$?

Solution

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2\pi j \frac{nt}{T}} = \frac{A}{2} (e^{2\pi j \frac{t}{T}} + e^{-2\pi j \frac{t}{T}}) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Calculer les coefficients réel et complexe de développement en série de Fourier du signal $s_1(t)$ de la figure suivante :



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\theta/2}^{\theta/2} A dt = \frac{A\theta}{T}$$

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{2A}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} = \frac{2A}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2A\theta}{T} \frac{\sin\left(\frac{\pi n\theta}{T}\right)}{\frac{\pi n\theta}{T}} = \frac{2A\theta}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\theta}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{2A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt = \frac{2A}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$b_n = \frac{A}{\pi n} \left[-\cos\left(\frac{\pi n\theta}{T}\right) + \cos\left(-\frac{\pi n\theta}{T}\right) \right] = 0$$

Tapez une équation ici.

$$c_n = \frac{A}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

$$c_n = -\frac{A}{j2\pi n} \left[e^{-j2\pi n f_0 t} \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$c_n = -\frac{A}{j2\pi n} \left[e^{-j\pi n f_0 \theta} - e^{j\pi n f_0 \theta} \right]$$

Tapez une équation ici.

$$C_n = \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta)$$

Donc le signal $s_1(t)$ s'écrit :

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta) \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

2.1.4 Représentation spectrale

Les coefficients C_n sont les composants du spectre en fréquences $S(f)$ du signal (t) , tel que :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_0)$$

Le spectre $S(f)$ est dit bilatérale parce qu'il utilise les fréquences positives et négatives
 $S(f)$ est en général complexe, il peut être écrit :

$$S(f) = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$

Avec :

$|S(f)| = |C_n|$: le module du spectre appelé spectre d'amplitude.

$\varphi(f) = [C_n]$: l'argument de C_n (la phase du spectre) appelé spectre de phase.

✓ **Spectre d'amplitude :**

$$|S(f)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cdot \delta(f - nf_0)$$

✓ **Spectre de phase :**

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \theta_n \delta(f - nf_0), \quad \text{avec} \quad \theta_n = \text{Arg}[C_n] = \arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

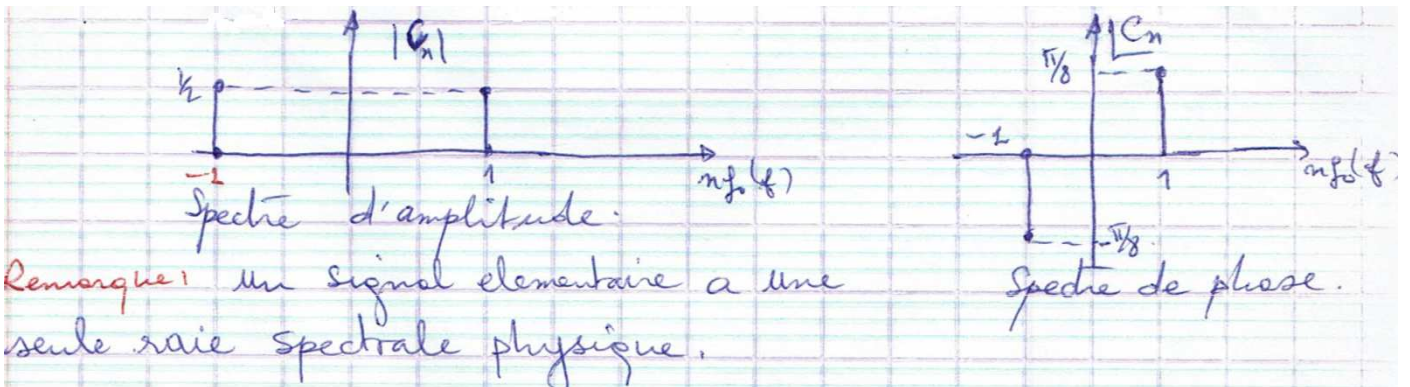
$$-\pi \leq \theta_n \leq \pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple 1

représenter le spectre de phase et le spectre d'amplitude du signal
 $s(t) = \cos(2\pi t + \pi/4)$.

Solution

* le signal $s(t)$ est périodique de période $T_0 = 1s$, alors il est décomposable en série de Fourier, et il peut être écrit comme
 $s(t) = \cos(2\pi t + \pi/4) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t}$ où $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1Hz$.
 $s(t) = \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\pi/8}}_{n=1} \cdot e^{j2\pi t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\pi/8}}_{n=-1} \cdot e^{-j2\pi t}$



Exemple 2

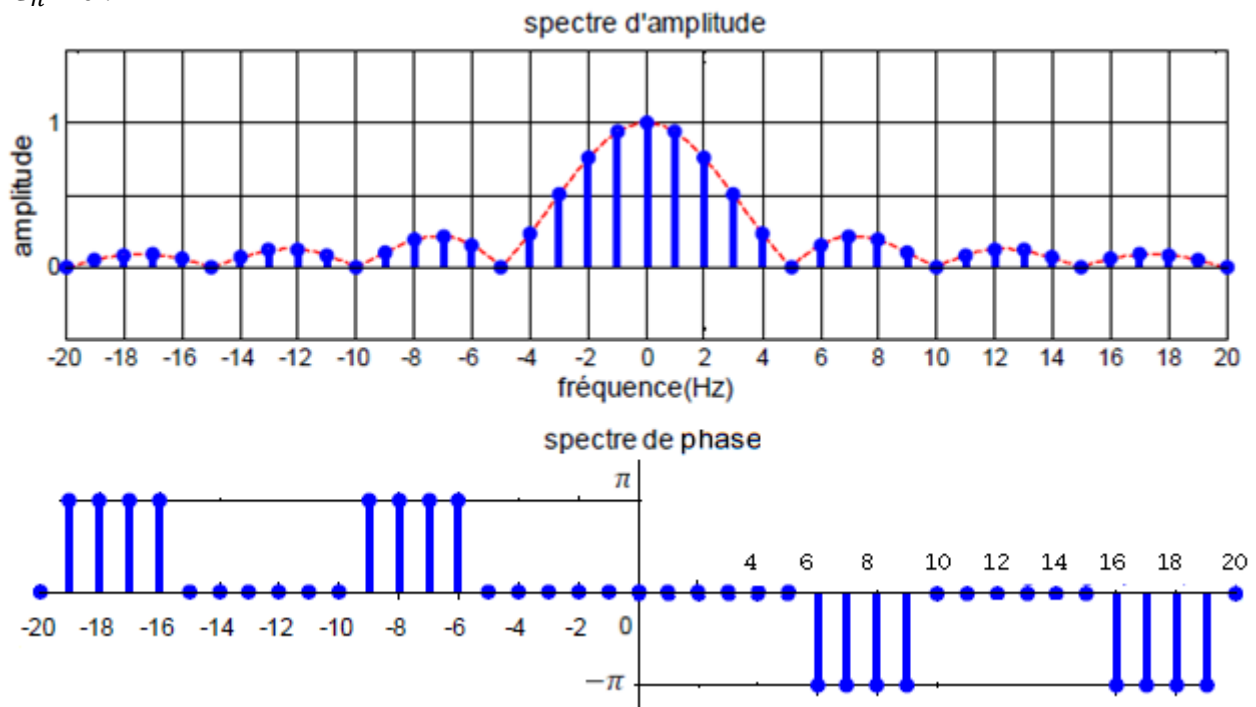
Si on prend le signal train d'impulsions rectangulaires $s_1(t)$ de l'exemple précédent, $C_n = \frac{A\theta}{T} \text{sinc}(\pi n f_0 \theta)$.

avec $\theta = 5\theta$. On a aussi $f_0 = \frac{1}{T}$, Alors :

Le spectre d'amplitude sera :

$$|C_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{5} \text{sinc}\left(\frac{\pi n}{5}\right) \delta(f - n f_0)$$

Les coefficients C_n sont réel, donc le spectre de phase est nul pour $C_n \geq 0$ tandisqu'il est égale à π ou $-\pi$ pour $C_n < 0$.



2.2 Transformée de Fourier

2.2.1 Définitions

a) Transformée de Fourier

On peut considérer la transformée de Fourier des fonctions non-périodiques comme une extension du développement en série de Fourier au cas où la période est infinie. Ceci fait tendre la fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0}$ vers zéro et le spectre devient alors une fonction continue de f .

Soit un signal $s(t)$ non périodique, alors la transformée de Fourier de $s(t)$ est notée par $S(f)$, elle est définie par :

$$S(f) = TF[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

$S(f)$: Spectre complexe

$|S(f)|$: spectre d'amplitude

$Arg[S(f)]$: spectre de phase

b) Transformée de Fourier inverse

On peut reconstruire le signal $s(t)$ à partir de son spectre complexe $S(f)$ en utilisant la transformée de Fourier inverse, elle est définie par :

$$s(t) = TF^{-1}[S(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi ft} \cdot df$$

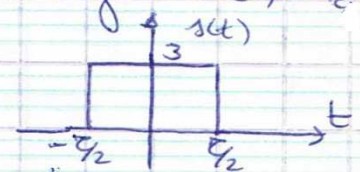
théorème : Si un signal $s(t)$ est absolument intégrable dans le sens que : $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$ alors $S(f) \exists$

Remarque : Si la transformée de Fourier $S(f)$ existe, $\rightarrow$ elle est unique.

Exemple d'application :

Trouver le spectre (la transformée de Fourier du signal $s(t) = 3P_{\tau}(t)$)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} 3 e^{-j2\pi ft} dt$$



$$S(f) = \frac{-3}{j2\pi f} \cdot e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\tau/2}^{+\tau/2} = \frac{-3}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \tau/2} - e^{j2\pi f \tau/2} \right)$$

$$S(f) = \frac{3}{\pi f} \cdot \left(\frac{e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau}}{2j} \right) = \frac{3}{\pi f} \cdot \sin \pi f \tau$$

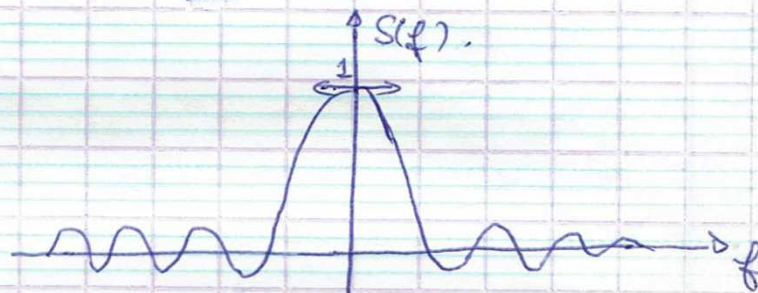
$$S(f) = 3\tau \cdot \text{sinc } \pi f \tau.$$

et on note : $3P_{\tau}(t) \xleftrightarrow{TF} 3\tau \text{ sinc } \pi f \tau.$

Ca d

$$P_{\tau}(t) \longleftrightarrow \tau \text{ sinc } (\pi f \tau)$$

$$P_{\text{durée}}(t) \longleftrightarrow \text{durée sinc } (\pi f \text{ durée})$$

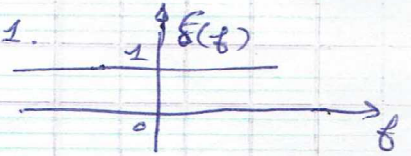


Cas particuliers

1) transformée de Fourier de la distribution de Dirac $\delta(t)$:

$$\text{T.F.}[\delta(t)] = \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1.$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} 1$$



2) transformée de Fourier d'un signal périodique:

$$\text{Signal Périodique} \rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad s(t) \longleftrightarrow S(f)$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{j2\pi n f_0 t} \right) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt}_{\delta(n f_0 - f)}.$$

$$\text{puisque : } \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

$$\text{et } \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi f t} df$$

$$\Rightarrow \delta(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} dt \rightarrow \delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi (f - f_0) t} dt.$$

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C(n f_0) \delta(f - n f_0).$$

Remarque: Cette relation confirme bien que le spectre d'un signal périodique est discret.

$$C(n f_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt}_{\text{T.F. sur une période}}$$

$$C(n f_0) = \frac{1}{T_0} (\text{T.F.}(s(t)) \text{ sur une période}).$$

Propriétés de la transformée de Fourier:

1) Linéarité (superposition)

$$\text{si } s_1(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_1(f)$$

$$s_2(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_2(f)$$

$$s_3(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_3(f)$$

alors

$$s_1(t) + s_2(t) + \dots + s_n(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S_1(f) + S_2(f) + \dots + S_n(f).$$

et si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des constantes alors:

$$a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t) + \dots + a_n s_n(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} a_1 S_1(f) + a_2 S_2(f) + \dots + a_n S_n(f)$$

Exemple:

$$s(t) = 5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)$$

$$a_1 = 5$$

$$s_1(t) = \delta(t)$$

$$a_2 = 2$$

$$s_2(t) = p_{\tau}(t)$$

$$S(f) = \text{T.F.}(s(t)) = \text{T.F.}(5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} [5 \delta(t) + 2 p_{\tau}(t)] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 5 \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 2 p_{\tau}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = 5 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\tau}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$S(f) = 5 \cdot 1 + 2 \cdot \tau \text{sinc} \pi f \tau = 5 + 2\tau \text{sinc} \pi f \tau$$

2) Symétrie:

$$\text{si } s(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f) \text{ alors}$$

$$S(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} s(-f)$$

Exemple:

$$s(t) = 3 p_{\tau}(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f) = 3\tau \text{sinc} \pi f \tau$$

$$S(t) = 3\tau \text{sinc} \pi \tau t \xleftrightarrow{\text{T.F.}} 3 p_{\tau}(-f) = 3 p_{\tau}(f) \text{ (Petite paire)}$$

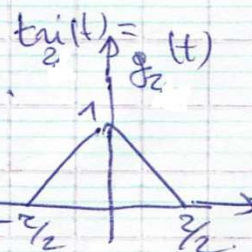
$$\tau \text{sinc} \pi \tau t \xleftrightarrow{\text{T.F.}} p_{\tau}(f)$$

le τ ici a une dimension de la fréquence

3) Similitude:

$$\text{si } s(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} S(f)$$

$$\text{alors } s(at) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right), \text{ a constante}$$



Exemple:

$$g_{\tau}(t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \tau \text{sinc}^2 2\pi f \left(\frac{\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2} \text{sinc}^2 \pi f \frac{\tau}{2}$$

$$g_{\tau}(5t) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{|5|} \tau \text{sinc}^2 \pi f \frac{\tau}{5} \cdot \frac{\tau}{2}$$

$$g_{\tau}(5t) \longleftrightarrow \frac{\tau}{10} \text{sinc}^2 \frac{\pi f \tau}{10}$$

4) translation en temps :

si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors,
 $s(t-t_0) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) e^{-j2\pi f t_0}$ t_0 : constante.

Exemple :

$$s(t) = \text{sgn}(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$$s(t-3) = \text{sgn}(t-3) \xleftrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{-j2\pi f \cdot 3} = \frac{1}{j\pi f} \cdot e^{j6\pi f}$$

5) translation en fréquence :

si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ Alors
 $s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{T.F.} S'(f-f_0)$ f_0 : constante

Exemple : $s(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

$$s(t) e^{j2\pi f_0 t} = u(t) e^{j2\pi f_0 t} = \frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)}$$

$$\begin{aligned} * T.F. [\text{sgn}(t)] &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 a t e^{-j2\pi f t} dt + \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} -a t e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} \right] = \frac{1}{j\pi f} \end{aligned}$$

6) Derivation en temps :

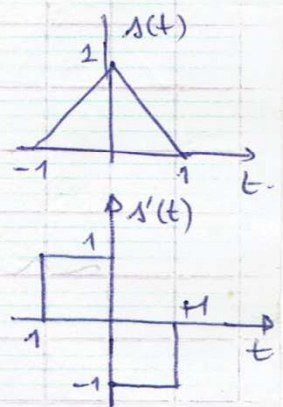
si $s(t) \xleftrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors
 $\frac{d^n}{dt^n} [s(t)] \xleftrightarrow{T.F.} (j2\pi f)^n S'(f)$

Exemple : on sait que : si $s(t) = g_2(t)$

$$s(t) = g_2(t) \longleftrightarrow \text{sinc}^2 \pi f$$

$$g_2'(t) = s'(t) \xleftrightarrow{T.F.} (j2\pi f) \cdot \text{sinc}^2 \pi f$$

2^{ème} méthode pour confirmation trouver la T.F. des deux porte décalés.



07) Dérivation en fréquence :

si $s(t) \xrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors

$$(-j2\pi t)^n s(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{d^n}{df^n} [S'(f)].$$

Exemple :

$$s(t) = \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{j\pi f}$$

$$(-j2\pi t) s(t) = (-j2\pi t) \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{d}{df} \left(\frac{1}{j\pi f} \right) = \frac{-1}{j\pi f^2}$$

$$t \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{-1}{-j2\pi \times j\pi f^2} = \frac{-1}{2\pi^2 f^2}$$

08) Modulation :

si $s(t) \xrightarrow{T.F.} S'(f)$ alors

$$s(t) \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} [S'(f+f_0) + S'(f-f_0)] \quad f_0 = \text{constante}$$

Exemple :

$$s(t) = u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t = u(t) \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \delta(f+f_0) + \frac{1}{j2\pi(f+f_0)} + \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)} \right]$$

$$s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \xrightarrow{T.F.} \frac{1}{4} \delta(f+f_0) + \frac{1}{j4\pi(f+f_0)} + \frac{1}{4} \delta(f-f_0) + \frac{1}{j2\pi(f-f_0)}$$

théorème de Parseval :

l'énergie d'un signal $s(t)$ est : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot s(t) dt$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi f t} df \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) S(f) e^{j2\pi f t} dt df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s^*(t) e^{j2\pi f t} dt \right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) S^*(f) df$$

$$\Rightarrow E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \quad \text{où } s(t) \xrightarrow{T.F.} S(f)$$

Càd : l'énergie dans le domaine temps = l'énergie dans le domaine fréquentiel

2.3 Produit de convolution

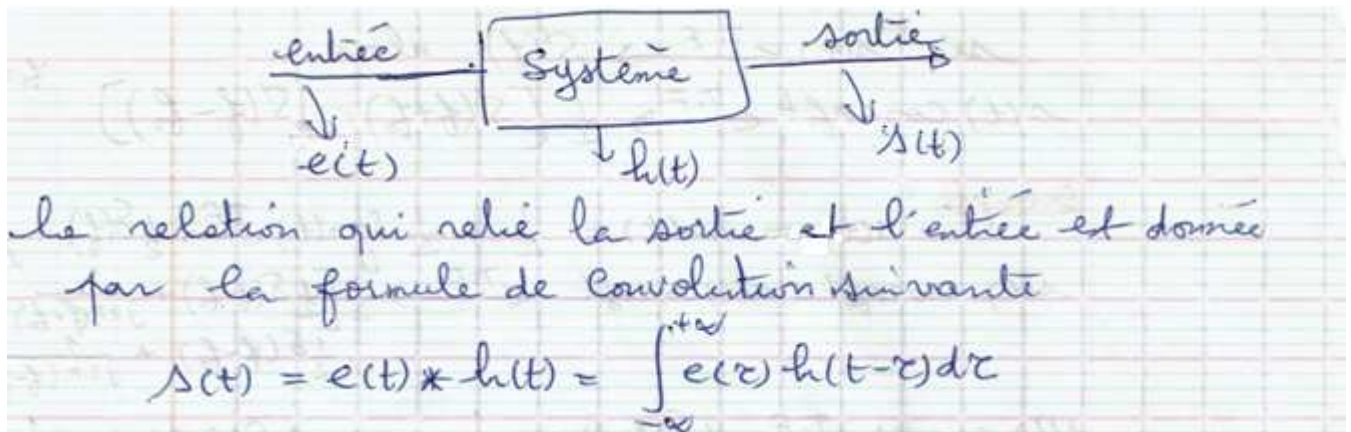
Le produit de convolution entre deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ est défini par la relation suivante :

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

Le produit de convolution est appelé aussi (composition de Schwartz).

2.3.1 Produit de convolution et système

Soit le système linéaire est invariant dans le temps défini par le schéma synoptique de la figure suivante :



Avec :

$h(t)$: réponse impulsionnelle
cà d la réponse en sortie à une entrée $\delta(t)$.

t : c'est le temps d'application, $t - \tau$: temps d'apparition.

si le système est linéaire causal $h(t - \tau) \equiv 0$ si $t < \tau$.

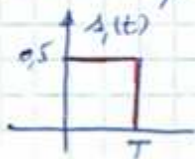
$$\Rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

si le signal est causal :

$$s(t) = \int_0^t e(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

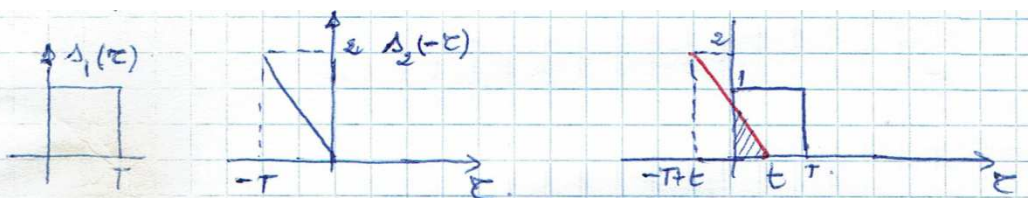
2.3.2 Interprétation graphique et évaluation de la convolution :

soit à composer :



$$s_1(t) * s_2(t) = ?$$

Solution

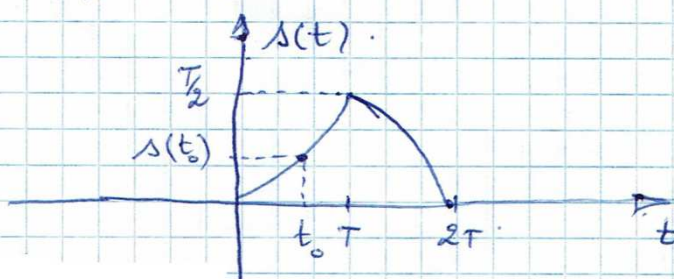


* $t < 0 \Rightarrow \Delta(t) = 0$

* $0 < t \leq T \Rightarrow \Delta(t) = \int_0^t 0,5 \cdot \left(-\frac{2\tau}{T} + \frac{2t}{T}\right) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t (-\tau + t) d\tau = \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau^2}{2} + t\tau\right) \Big|_0^t$
 $\Delta(t) = \frac{t^2}{2T}$

* $0 < -T+t \leq T \Rightarrow T \leq t \leq 2T \Rightarrow \Delta(t) = \frac{1}{T} \int_{-T+t}^T (-\tau + t) d\tau = \frac{1}{T} \left(-\frac{\tau^2}{2} + t\tau\right) \Big|_{-T+t}^T$
 $\Delta(t) = -\frac{1}{2T} + t$

* $-T+t > T \Rightarrow t > 2T \Rightarrow \Delta(t) = 0$



2.3.3 Propriétés de la convolution

1 - commutativité : $\Delta_1(t) * \Delta_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \Delta_2(t-\tau) d\tau$, on pose $v = t - \tau$
 $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_2(v) \Delta_1(t-v) dv = \Delta_2(t) * \Delta_1(t) \quad \Rightarrow dv = -d\tau$
 $\Delta_1(t) * \Delta_2(t) = \Delta_2(t) * \Delta_1(t)$

2 - Associativité : $\Delta_1 * [\Delta_2 * \Delta_3] = [\Delta_1 * \Delta_2] * \Delta_3$

3 - Distributivité :

$$\Delta_1(t) * [\Delta_2(t) + \Delta_3(t)] = \Delta_1(t) * \Delta_2(t) + \Delta_1(t) * \Delta_3(t)$$

4 - Dérivation de la convolution :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Delta_1(t) * \Delta_2(t)] &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \Delta_2(t-\tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_1(\tau) \frac{d\Delta_2(t-\tau)}{dt} d\tau \\ &= \Delta_1(t) * \frac{d\Delta_2(t)}{dt} = \frac{d\Delta_1(t)}{dt} * \Delta_2(t) \end{aligned}$$

5- l'aire de $s_1(t) * s_2(t) = A$.

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) * s_2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau dt$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t-\tau) dt \right) d\tau = \text{Aire de } s_1(t) \times \text{aire } s_2(t)$$

Aire $[s_1(t) * s_2(t)] = \text{aire } s_1(t) \cdot \text{aire } s_2(t)$

6 Élément neutre de la convolution

l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ représente l'élément neutre de la convolution. Càd :

$$s(t) * \delta(t) = \delta(t) * s(t) = s(t)$$

2.3.4 Théorème de la convolution :

Soit à calculer $TF[s_1(t) * s_2(t)] = ?$

$$TF[s_1(t) * s_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right] \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau$$

$$TF[s_1(t) * s_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot S_2(f) \cdot e^{-j2\pi f \tau} d\tau = S_1(f) \cdot S_2(f)$$

∴ $TF[s_1(t) * s_2(t)] = S_1(f) \cdot S_2(f)$

et $TF[s_1(t) \cdot s_2(t)] = S_1(f) * S_2(f)$

2.4 Notion de filtrage

2.4.1 Définition d'un filtre

Un **filtre** est système qui réalise une opération de traitement du signal. Autrement dit, il atténue certaines composantes fréquentielles d'un signal et en laisse passer d'autres.

D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes ; le rôle du filtre est de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes.

2.4.2 Filtres linéaires invariants par le décalage

En général, lorsque l'on parle de filtre en électronique, il s'agit d'un opérateur (ou circuit) possédant deux propriétés mathématiques bien précises :

- la linéarité : la somme de la réponse du filtre à deux signaux d'entrée est égale à sa réponse à la somme de ces deux signaux.
- l'invariance dans le décalage : la réponse d'un filtre à un signal donné est un signal identique mais retardé d'un temps T (on dit que le signal a subi un retard ou décalage). Ce dernier est invariable.

Lorsqu'un opérateur (ou circuit) possède ces deux propriétés de base, on montre facilement, par la théorie de Fourier, qu'on peut le caractériser par sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert.

Tout signal pouvant être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux de différentes fréquences (et qui constituent son spectre fréquentiel), un moyen simple de caractériser un filtre est de donner sa fonction de transfert, obtenue en comparant le spectre fréquentiel des signaux d'entrée et de sortie du filtre.

Un autre moyen de caractériser un filtre est sa réponse impulsionnelle, c'est-à-dire le signal en sortie du filtre lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, c'est-à-dire lorsque toutes les fréquences sont présentes à son entrée.

Lorsque le signal est discret, on utilise la transformée en Z plutôt que la transformée de Fourier.

2.4.3 Classification des filtres

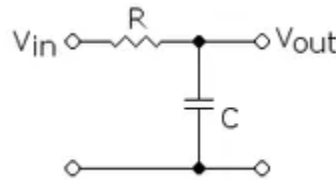
On peut classer les filtres à partir de la forme de leur fonction de transfert ou par le comportement des éléments passifs qui composent le filtre. Les filtres les plus courants sont de l'un des quatre types suivants : passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe bande ou réjecteur de bande.

- Un filtre passe-haut ne laisse passer que les fréquences au-dessus d'une fréquence déterminée, appelée fréquence de coupure. Il atténue les autres (basses fréquences). Autrement dit, il "laisse passer ce qui est haut".
- Un filtre passe-bas ne laisse passer que les fréquences au-dessous de sa fréquence de coupure. On pourrait l'appeler coupe-haut.
- Un filtre passe-bande ne laisse passer qu'une certaine bande de fréquences (et atténue tout ce qui est au-dessus ou en-dessous). Il est très utilisé dans les récepteurs radio, tv... pour isoler le signal que l'on désire capter.
- Un filtre coupe bande ou réjecteur de bande, est le complémentaire du passe-bande. Il atténue une plage de fréquences. Cela peut être utile pour diminuer certains parasites par exemple.

Techniquement, un filtre peut être réalisé de différentes manières : passive, active ou numérique.

a) Filtres passifs

Un filtre passif se caractérise par l'usage exclusif de composants passifs (résistances, condensateurs, bobines couplées ou non). Par conséquent, leur gain (rapport de puissance entre la sortie et l'entrée) ne peut excéder 1. Autrement dit, ils ne peuvent qu'atténuer en partie des signaux, mais pas les amplifier.

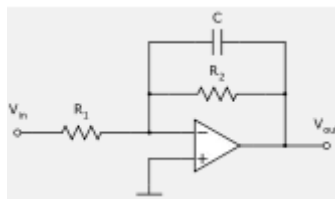


Filtre passe bas passif

Les réalisations les plus simples sont basées sur des circuits RC, RL, LC ou Circuit RLC. Mais il est bien sûr permis d'augmenter la complexité du filtre (et le nombre de composants)

b) Filtre actif

Les filtres actifs se caractérisent par l'usage d'au moins un composant actif (par exemple transistor, amplificateur opérationnel, ou autre circuit intégré...).



Filtre passe bas actif

Ces filtres ont l'avantage de pouvoir se passer de bobines qui sont chères, difficilement miniaturisables et imparfaites (angles de pertes, résonances propres, sensibilité aux parasites). De plus ils ont un gain qui peut être supérieur à 1 (ils peuvent amplifier).

c) Filtres numériques

Un filtre numérique se caractérise par le traitement entièrement numérique du signal. Au préalable, le signal est numérisé par un convertisseur analogique-numérique (CAN), c'est-à-dire qu'à intervalles réguliers (appelés période d'échantillonnage) l'amplitude instantanée du signal est observée puis quantifiée. On n'observe donc pas le signal en permanence et ces filtres réagissent donc assez mal face à des signaux (même parasites) de fréquence plus élevée que celle prévue.

Un filtre numérique traite un flot continu d'informations et calcule en temps réel un nouveau flot de données sortantes, qui correspondent au signal filtré désiré.

2.4.4 Autres technologies

a) Filtres piézoélectriques

Les qualités piézoélectriques de certains matériaux, comme le quartz, peuvent être utilisées dans la conception de filtres. Les filtres à quartz possèdent un facteur de qualité élevé et une très bonne stabilité en température.

b) Filtres SAW

Un filtre SAW (de l'anglais Surface Acoustic Wave, "onde acoustique de surface") est un système électromécanique utilisé généralement dans des applications utilisant les ondes radio. Les signaux électriques sont convertis en onde mécanique par un cristal piézoélectrique. Cette onde est retardée lors de sa propagation dans le cristal, puis reconvertie en signal électrique. Les sorties retardées sont recombinaées pour produire une implémentation d'un filtre à réponse impulsionnelle finie.

2.5 Notion de modulation

Le signal transportant une information doit passer par un moyen de transmission entre un émetteur et un récepteur. Le signal est rarement adapté à la transmission directe par le canal de communication choisi, hertzien, filaire, ou optique.

La **modulation** peut être définie comme le processus par lequel le signal est transformé de sa forme originale en une forme adaptée au canal de transmission, par exemple en faisant varier les paramètres d'amplitude et d'argument (phase/fréquence) d'une onde sinusoïdale appelée porteuse.

- Le dispositif qui effectue cette modulation, en général électronique, est un modulateur (voir modem).
- L'opération inverse permettant d'extraire le signal de la porteuse est la démodulation.