

Chapitre 1 Généralités

1.1 Définitions

1.1.1 Définition d'un signal

On appelle un signal toute grandeur physique variable en fonction du temps et véhiculant une information.

- Dans la pratique un signal est généralement délivré par un capteur mesurant une grandeur physique (son, parole, température, pression...) sous forme d'un courant ou d'une tension électrique.
- Mathématiquement un signal est défini par une fonction du temps : $s(t)$

Où t : est une variable réelle représentant le temps et $s(t)$: est un nombre réel et parfois complexe.

Exemples de signaux :

- Ondes électromagnétiques captées par les récepteurs radio et télévisions
- onde lumineuse dans une fibre optique
- La tension électrique dans un fil téléphonique
- Onde acoustique
- Signaux physiologiques : ECG, EEG, EMG ...
- Variation de la température d'une pièce
- Signaux géophysiques : vibrations sismiques
- Intensité d'un courant électrique

1.1.2 Théorie du signal

La théorie des signaux est l'ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux émis par une source ou modifiés par un système de traitement.

1.1.3 Le traitement du signal

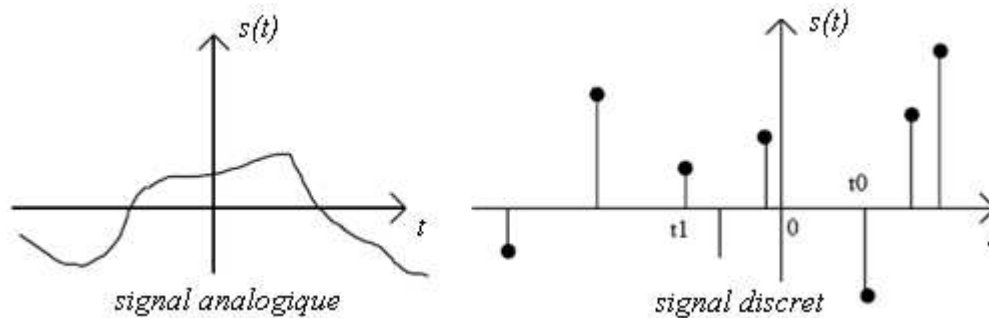
Est l'ensemble des opérations qui visent à modéliser, analyser, extraire, exploiter, transformer, restaurer, compresser, transmettre l'information contenue dans des signaux (amplification, modulation, démodulation, échantillonnage, conversion analogique-numérique (CAN) et Numérique-analogique (CNA)...). Toutes ces opérations doivent être effectuées sans que l'information soit dégradée ou à défaut que la dégradation soit la plus faible possible.

1.2 Classification des signaux

Il existe différents modes de classification :

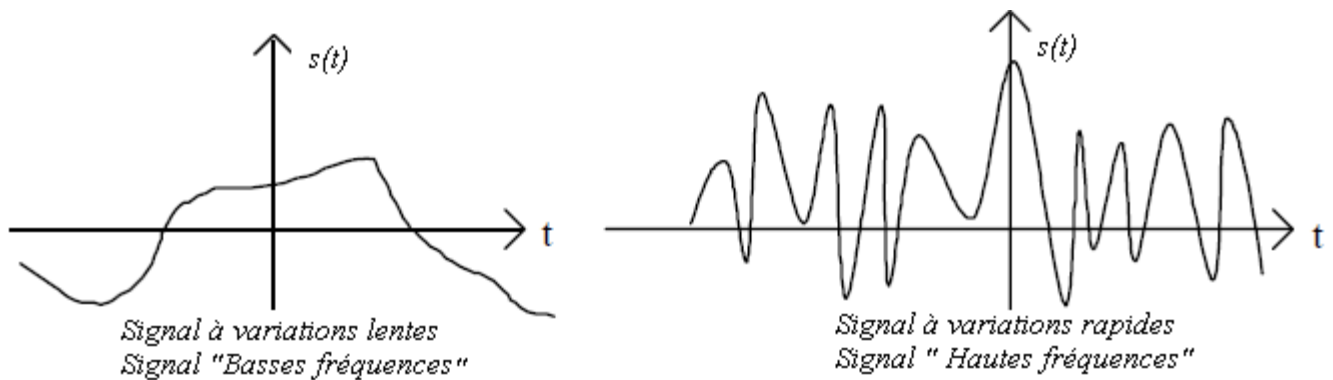
a) Classification morphologique :

On distingue ici les signaux qui prennent des valeurs à chaque instant t (signaux continus ou analogiques) et les signaux qui n'ont de valeurs qu'à certains instants t_i (signaux discrets).



b) Classification spectrale :

On classe les signaux suivant la bande de fréquence qu'ils occupent.



Un signal peut être classé selon la distribution de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre du signal). Le domaine de fréquence occupé par son spectre est aussi appelé la largeur de bande du signal.

$$\Delta F = F_{\max} - F_{\min}$$

Généralement on compare aussi la largeur de la bande spectrale du signal au domaine de fréquences dans lequel se situe cette bande. En considérant la fréquence moyenne.

$$F_{\text{moy}} = (F_{\max} + F_{\min})/2$$

- Pour $\Delta F/F_{\text{moy}}$ est petit ($F_{\max} \approx F_{\min}$), les signaux sont alors à bande étroite.
- Pour $\Delta F/F_{\text{moy}}$ est grand ($F_{\max} \gg F_{\min}$), les signaux sont alors à large bande.

Pour les signaux à bande étroite, il est possible de les classer par le domaine de variation de la fréquence moyenne F_{moy} en deux catégories:

- ✓ Signaux à basses fréquences (BF) : $F_{\text{moy}} < 300 \text{ kHz}$,
- ✓ Signaux hautes fréquences (HF) : $F_{\text{moy}} > 300 \text{ kHz}$.

c) Classification énergétique

Les signaux peuvent être à énergie finie ou à puissance moyenne finie

- **Les signaux à énergie finie**

Ces signaux vérifient la condition :

$$E_S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty$$

Ils sont dits aussi signaux de carré intégrable ou à carré sommables. Tous les signaux transitoires ou à support borné que ce soient déterministe ou aléatoires sont à énergie finie.

- **Les signaux à puissance moyenne finie non nulle**

Ce sont les signaux qui satisfont à la condition :

$$0 < P_S = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \right] < \infty$$

Tous les signaux périodiques sont de cette classe. Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance moyenne totale se calcule sur une période.

Remarque :

- ✓ Un signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle ($P_S = 0$),
- ✓ Un signal à puissance moyenne finie non nulle, possède une énergie infinie ($E_S = \infty$).

d) Classification phénoménologique (typologique)

Cette classification est basée sur l'évolution du signal en fonction du temps, elle fait apparaître deux types fondamentaux.

- **Signaux Déterministes ou Certains**

Leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement décrite et prédite par un modèle mathématique approprié (formule mathématique). On distingue deux sous classes :

- ✓ Les signaux périodiques

Un signal $s(t)$, périodique de période T_0 satisfait la relation

$$s(t) = s(t + kT_0)$$

Où k est un entier.

Un cas particulier des signaux périodiques, sont les signaux sinusoïdaux.

✓ Les signaux non périodiques.

- **Signaux Aléatoires ou incertains** (dites aussi probabilistes ou stochastiques)

Ces types de signaux ont un comportement temporel imprévisible et leur description se fait à base d'observations statistiques (densité de probabilité, moyenne, variance,...).

Exemple : Signaux physiologiques, le bruit affectant un signal, le signal de la parole.

e) Autres classifications

- **Signaux causaux**

Un signal (t) est dit causal si $(t) = 0$ pour $t < 0$

Expérimentalement, tous les signaux sont causaux, et c'est par commodité théorique que l'on définit les signaux sur tout l'axe des temps.

- **Signaux pairs et signaux impairs**

✓ Un signal $s(t)$ est dit pair si $s(-t) = s(t)$, Ex : signal $rect(t)$, $tri(t)$, $cos(t)$

✓ Un signal (t) est dit impair si $(-t) = -(t)$, Ex : signal (t) , $sin(t)$

✓ Un signal peut être ni pair ni impair : (t) , e^t .

✓ Tout signal réel $s(t)$ peut être décomposé en une partie paire $s_p(t)$ et une partie impaire $s_i(t)$.

$$s(t) = s_p(t) + s_i(t)$$

$$\text{Avec} \quad s_p(t) = \frac{s(t) + s(-t)}{2} \quad \text{et} \quad s_i(t) = \frac{s(t) - s(-t)}{2}$$

Remarque :

Les signaux physiques ont les caractéristiques suivantes :

- Causals,
- Temps continu,
- Amplitude bornée,
- Énergie bornée,
- Spectre borné (tend vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini).

Mais sur le plan théorique, pour la commodité du calcul et l'étude de certains phénomènes, les signaux sont généralement représentés par des fonctions :

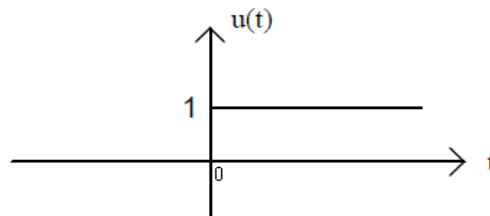
- Définies sur l'ensemble des réels (signaux non causals),
- A valeurs complexes,
- Avec des discontinuités (signal rectangulaire par ex.),
- A énergie théorique infinie,
- A spectre infini.

1.3 Signaux élémentaires

Les signaux élémentaires sont des signaux très utilisés en théorie et traitement du signal

1.3.1 Echelon unité (t)

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



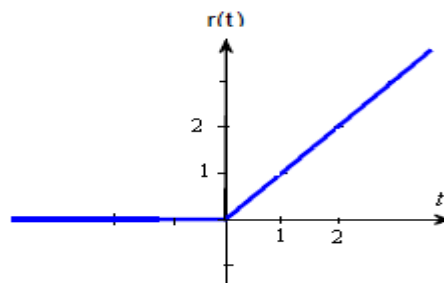
Exemple : une tension $v(t)$ continue de 10 Volts appliquée à un circuit électrique à l'instant $t=0$ s'écrit :

$$v(t) = 5 \cdot u(t)$$

1.3.2 Rampe unité

$$r(t) = \begin{cases} t, & \text{pour } t \geq 0 \\ 0, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

$$r(at) = a \cdot r(t)$$

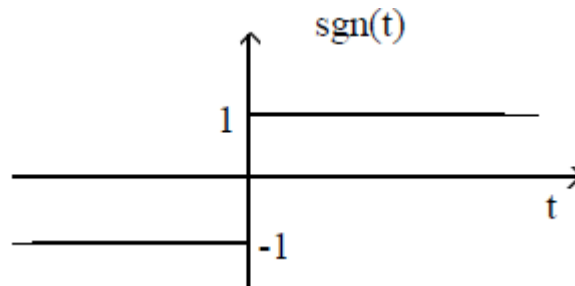


$r(t)$ exprime la vitesse de variation de la grandeur considérée.

Exemple : $r(t) = 0,5 \cdot t$ peut exprimer la croissance linéaire de la température d'un four.

1.3.3 Fonction signe $sgn(t)$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \\ -1, & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



On peut également définir $\text{sgn}(t)$ par :

$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad \text{pour } t \neq 0$$

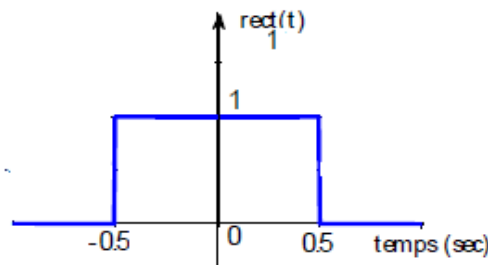
$$\text{sgn}(at) = \text{sgn}(t) \quad \forall a > 0$$

1.3.4 Signal porte ou impulsion rectangulaire

$$P_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$P_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| \leq T_0/2 \\ 0 & \text{pour } |t| > T_0/2 \end{cases}$$

Exemple : $s(t) = \text{rect}_1(t)$

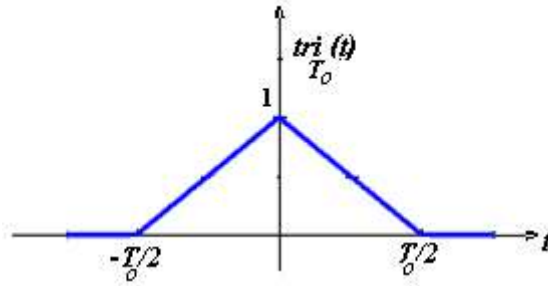


1.3.5 Signal impulsion triangulaire

Un signal triangulaire de durée T_0 est donné par l'expression suivante :

$$\text{tri}_{T_0}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2 \cdot |t|}{T_0} & \text{pour } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La représentation graphique de l'impulsion triangulaire est donnée par la figure suivante :



1.3.6 Signal sinus cardinal

Il est donnée par:

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

Sa valeur à l'origine est égale 1

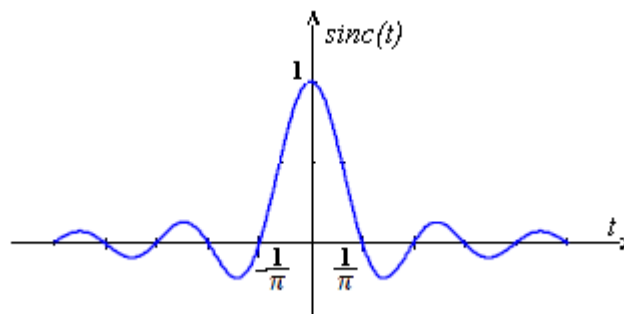
Il s'annule aux valeurs de $t = n.\pi$ (où n est un nombre entier et différent zéro).

Ce signal vérifie les relations suivantes :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} a. \text{sinc}(at) dt = 1 \quad \text{avec } a \text{ constante non nulle.}$$



1.3.7 Signal sinusoïdale

La forme générale d'un signal sinusoïdal est donné par :

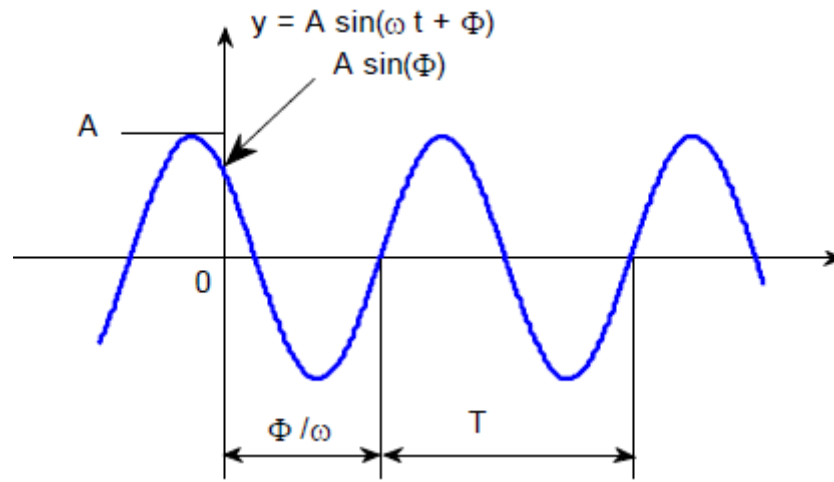
$$y = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin(\omega(t + \phi/\omega)) = A \sin(\omega(t + \tau))$$

avec $(0 \leq |\phi| \leq 2\pi)$ et $(A \in \mathbb{R})$

A : l'amplitude du signal,

ϕ : la phase du signal à l'origine (en rad),

τ : décalage temporel (en sec) entraîné par la phase ϕ .

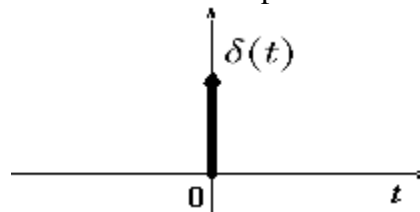


1.3.8 Fonction Impulsion de Dirac

Elle est définie par la relation suivante :

$$\delta(t) = \begin{cases} -\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Elle est représentée graphiquement par une flèche verticale placée à l'origine.



Elle peut être approximée par une fonction porte d'amplitude $\frac{1}{\tau}$ et de largeur τ ($\tau \rightarrow 0$). C'est-à-dire :

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \cdot \text{rect}_{\tau}(t)$$

- **Propriétés de l'impulsion de Dirac**

- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t) dt = s(0)$
- ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$
- ✓ $a \cdot \delta(t - t_1) \cdot b \cdot \delta(t - t_2) = 0$ si $t_1 \neq t_2$
- ✓ $a \cdot \delta(t - t_1) \cdot b \cdot \delta(t - t_2) = a \cdot b \cdot \delta(t - t_1) \cdot 0$ si $t_1 = t_2$
- ✓ $\delta(-t) = \delta(t)$ c'est un signal pair.
- ✓ $s(t) \cdot \delta(t) \equiv s(0) \cdot \delta(t)$
- ✓ $s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$

Remarque

Il y a une différence entre $s(t) = x(0)$ et $s(t) = x(0) \cdot \delta(t)$.

$$\checkmark \quad \delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$$

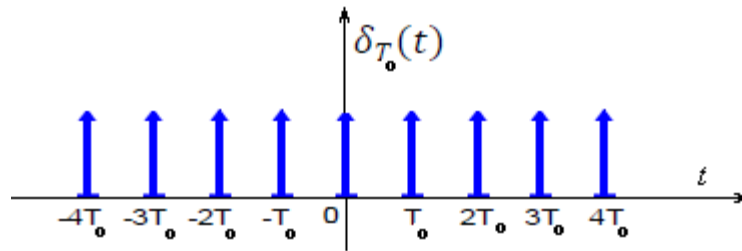
$$\checkmark \quad \delta(\omega t) = \delta(2\pi f t) = \frac{\delta(t)}{2\pi f}$$

1.3.9 Peigne de Dirac $\delta_{T_0}(t)$

Le signal peigne de Dirac $\delta_{T_0}(t)$ est une suite infinie d'impulsions de Dirac régulièrement espacées de T_0 . Il est défini par :

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

C'est la somme des impulsions de Dirac décalées aux instants kT_0 .



1.3.10 Quelques relations entre signaux

- ✓ Relation entre la rampe $r(t)$ et l'échelon $u(t)$:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = t \cdot u(t)$$

- ✓ Relation entre l'échelon $u(t)$ et l'impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

La dérivée au sens de distribution de $u(t)$ nous donne $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \quad \text{pour } t \neq 0$$

- ✓ Relation entre $\text{sgn}(t)$ et $u(t)$

$$\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \quad \forall t$$

- ✓ Relation entre $\text{rect}(t)$ et $u(t)$

$$\text{rect}_{T_0}(t) = u\left(t + \frac{T_0}{2}\right) - u\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

1.4 Domaine temporel et domaine fréquentiel

Il est souvent intéressant d'obtenir le contenu fréquentiel d'un signal. Par exemple, si on s'intéresse au déplacement d'une masse soumise à des contacts répétés, la représentation fréquentielle permet de mettre en évidence les fréquences sollicitées lors de l'impact. Cette information peut alors être utilisée par les concepteurs afin de dimensionner le système et d'éviter les phénomènes de résonance.

Jusqu'ici, on a représenté les signaux en fonction du temps, dans le domaine temporel. On peut aussi présenter l'information contenue dans le signal dans le domaine fréquentiel : il s'agit de représenter les fréquences, ou harmoniques, contenus dans le signal. Les représentations temporelles et fréquentielles sont bijectives ; il est possible de passer de l'une à l'autre directement.

On prend l'exemple du signal harmonique de la figure 1, constitué de quatre sinusoïdes, et dont l'expression est donnée par :

$$x(t) = \sum_{k=0}^3 A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k)$$

Tableau 1. Caractéristiques du signal harmonique $x(t)$ donné en exemple

Sinusoïde	Fréquence f_k (Hz)	Amplitude A_k	Phase φ_k (rad/s)
K=1	1	6	0
K=2	2	10	$\pi/4$
K=3	5	4	$\pi/2$
K=4	9	2	0

A partir du tableau 1, on peut écrire l'expression du signal et le représenter dans le domaine temporel, sur la figure a. Le tableau contient également toutes les informations permettant de représenter le signal dans le domaine fréquentiel : pour chaque fréquence, on connaît l'amplitude correspondante. On peut donc représenter les amplitudes en fonction des fréquences contenues dans le signal, c'est la figure b. Ce type de représentation est appelé spectre ; elle permet de mettre en évidence le contenu fréquentiel du signal. Ici, il s'agit plus particulièrement d'un spectre d'amplitude.

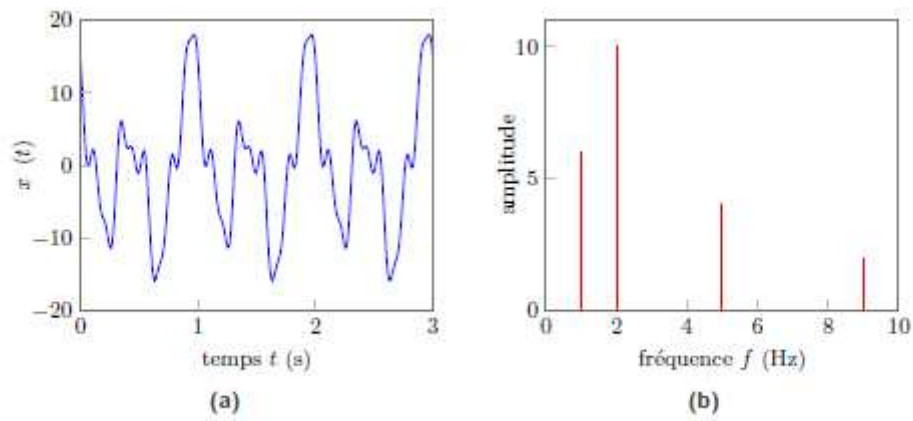


Figure 1. représentations temporelle (a) et fréquentielle (b) d'un signal harmonique (spectre d'amplitude)

Sur l'exemple simple traité ici, il est possible d'obtenir directement le spectre car le signal est un signal harmonique, écrit sous forme d'une somme de sinusoides. Pour un signal quelconque, dont on ne connaît pas nécessairement l'expression analytique, il est possible d'obtenir directement le spectre grâce à l'analyse de Fourier.