

EXERCICES

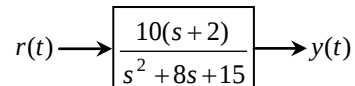
3.1

On connaît la réponse impulsionnelle d'un système : $g(t) = 0,725e^{-0,2t} - 0,833e^{-0,5t} + 0,109e^{-2,5t}$

Calculer sa réponse indicielle.

Réponse : $y(t) = 2 - 3,6e^{-0,2t} + 1,67e^{-0,5t} - 0,04e^{-2,5t}$

3.2 Trouver la réponse indicielle du système suivant :



3.3

Soit un système dont la représentation externe est donnée par : $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$

1. Trouver la réponse de ce système à une grandeur d'entrée en forme d'échelon unitaire.
2. Donner la valeur finale de $y(t)$.
3. Calculer la valeur de $y(t)$ pour $t = 5$ secondes.

3.4

Soit un système asservi représenté à la Figure 3.1. Le but de cet exercice est d'étudier le système en boucle ouverte et en boucle fermée.

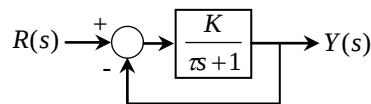


Figure 3.1

Si le système est excité par une grandeur d'entrée $r(t)$ sous forme d'échelon unitaire, donner :

1. la forme de la réponse
2. l'erreur en régime permanent
3. le temps de réponse à 5%

dans les trois cas suivants :

- A. $K = 1$ et $\tau = 0,2$
- B. K augmente de 50% et τ fixe
- C. τ augmente de 50% et K fixe

3.5 Pulsation de coupure à 0 dB d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert $G(s)$ avec :

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} ; \text{ avec } K > 1$$

Calculer en fonction de K, ω_n et ζ , dans les trois cas $\zeta < 1, \zeta = 1, \zeta > 1$, l'expression de la pulsation de coupure à 0 dB définie par : $|G(j\omega_{co})| = 1$

Montrer que si $K \gg 1$, on a, dans tous les cas : $\omega_{co} \approx \omega_n \sqrt{K}$.

3.6 Calcul du dépassement de la réponse indicielle d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert $G(s)$ à l'entrée duquel on injecte un échelon unitaire. Soit $s(t)$ le signal de sortie et s_∞ sa valeur finale.

On donne :

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

Calculer en fonction de ζ , en pourcentage de la valeur finale s_∞ et dans le cas où $\zeta < 1$, la valeur du dépassement D défini comme le rapport :

$$D = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$$

3.7 Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique

On considère un système de fonction de transfert $G(s)$ à l'entrée duquel on injecte une rampe unitaire. $e(t) = v(t) = t$ pour $t > 0$.

On donne :

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \quad \text{avec } \zeta = 1$$

Calculer l'expression du signal de sortie $s(t)$ et tracer son graphe.

EXERCICES avec SOLUTIONS

3.1

On connaît la réponse impulsionnelle d'un système : $g(t) = 0,725e^{-0,2t} - 0,833e^{-0,5t} + 0,109e^{-2,5t}$

Calculer sa réponse indicielle.

Réponse : $y(t) = 2 - 3,6e^{-0,2t} + 1,67e^{-0,5t} - 0,04e^{-2,5t}$

SOLUTION

La réponse impulsionnelle d'un système : $g(t) = 0,725e^{-0,2t} - 0,833e^{-0,5t} + 0,109e^{-2,5t}$

$$G(s) = R(s)H(s)$$

Pour une entrée : $R(s) = 1 \Rightarrow G(s) = H(s)$

$$H(s) = L^{-1}\{g(t)\} = L^{-1}\{0,725e^{-0,2t}\} - L^{-1}\{0,833e^{-0,5t}\} + L^{-1}\{0,109e^{-2,5t}\}$$

$$H(s) = \frac{0,725}{s+0,2} - \frac{0,833}{s+0,5} + \frac{0,109}{s+2,5}$$

La réponse indicielle se calcule pour $R(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = R(s)H(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{0,725}{s+0,2} - \frac{1}{s} \frac{0,833}{s+0,5} + \frac{1}{s} \frac{0,109}{s+2,5}$$

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+0,2} + \frac{c_3}{s} + \frac{c_4}{s+0,5} + \frac{c_5}{s} + \frac{c_6}{s+2,5}$$

$$c_1 = \frac{0,725}{s+0,2} \Big|_{s=0} = 3,625 \quad ; \quad c_2 = \frac{0,725}{s} \Big|_{s=-0,2} = -3,625$$

$$c_3 = -\frac{0,833}{s+0,5} \Big|_{s=0} = -1,666 \quad ; \quad c_4 = -\frac{0,833}{s} \Big|_{s=-0,5} = 1,666$$

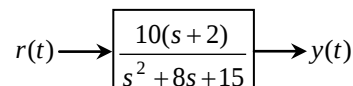
$$c_5 = \frac{0,109}{s+2,5} \Big|_{s=0} = 0,0436 \quad ; \quad c_6 = \frac{0,109}{s} \Big|_{s=-2,5} = -0,0436$$

$$Y(s) = \frac{3,625 - 1,666 + 0,0436}{s} - \frac{3,625}{s+0,2} + \frac{1,666}{s+0,5} - \frac{0,0436}{s+2,5}$$

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3,625}{s+0,2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1,666}{s+0,5}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{0,0436}{s+2,5}\right\}$$

$$y(t) = 2 - 3,6e^{-0,2t} + 1,67e^{-0,5t} - 0,044e^{-2,5t}$$

3.2 Trouver la réponse indicielle du système suivant :



SOLUTION

La réponse impulsionnelle d'un système : $g(t) = 0,725e^{-0,2t} - 0,833e^{-0,5t} + 0,109e^{-2,5t}$

$$Y(s) = R(s)G(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{10(s+2)}{s^2 + 8s + 15} = \frac{1}{s} \frac{10(s+2)}{(s+3)(s+5)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s+3)} + \frac{c_3}{(s+5)}$$

$$c_1 = \left. \frac{10(s+2)}{(s+3)(s+5)} \right|_{s=0} = \frac{20}{15} \quad ; \quad c_2 = \left. \frac{10(s+2)}{s(s+5)} \right|_{s=-3} = \frac{5}{3} \quad ; \quad c_3 = \left. \frac{10(s+2)}{s(s+3)} \right|_{s=-5} = -3$$

$$D'où : Y(s) = \frac{20}{15} \frac{1}{s} + \frac{5}{3} \frac{1}{(s+3)} - \frac{3}{(s+5)}$$

$$\text{Prenant la transformée inverse : } y(t) = \frac{20}{15} + \frac{5}{3} e^{-3t} - 3e^{-5t}$$

3.3

Soit un système dont la représentation externe est donnée par : $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$

1. Trouver la réponse de ce système à une grandeur d'entrée en forme d'échelon unitaire.
2. Donner la valeur finale de $y(t)$.
3. Calculer la valeur de $y(t)$ pour $t = 5$ secondes.

SOLUTION

$$1. \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

La réponse de ce système à une grandeur d'entrée en forme d'échelon unitaire, soit $R(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{s+3} + \frac{c_4}{s+4}$$

$$c_1 = \left. \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)} \right|_{s=0} = 5 \quad ; \quad c_2 = \left. \frac{6(s+2)(s+5)}{s(s+3)(s+4)} \right|_{s=-1} = -4$$

$$c_3 = \left. \frac{6(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+4)} \right|_{s=-3} = -2 \quad ; \quad c_4 = \left. \frac{6(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)} \right|_{s=-4} = 1$$

$$Y(s) = \frac{5}{s} - \frac{4}{s+1} - \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s+4}$$

Alors :

$$y(t) = 5 - 4e^{-t} - 2e^{-3t} + e^{-4t}$$

2. Valeur initiale de $y(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{6(s+2)(s+5)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 5$$

3.

$$y(t) = 5 - 4e^{-5} - 2e^{-3 \times 5} + e^{-4 \times 5} \approx 4,973$$

3.4

Soit un système asservi représenté à la Figure 3.1. Le but de cet exercice est d'étudier le système en boucle ouverte et en boucle fermée.

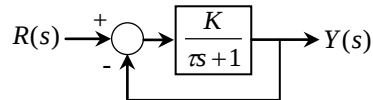


Figure 3.1

Si le système est excité par une grandeur d'entrée $r(t)$ sous forme d'échelon unitaire, donner :

1. la forme de la réponse
2. l'erreur en régime permanent
3. le temps de réponse à 5%

dans les trois cas suivants :

- A. $K = 1$ et $\tau = 0,2$
- B. K augmente de 50% et τ fixe
- C. τ augmente de 50% et K fixe

SOLUTION

Soit le système asservi de la Figure 3.1.

1.

Le système est excité par une grandeur d'entrée $r(t)$ sous forme d'échelon unitaire, soit $R(s) = \frac{1}{s}$:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\tau s + K + 1} \rightarrow Y(s) = R(s) \frac{K}{\tau s + K + 1} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K}{\tau s + K + 1} = \frac{K/\tau}{s \left(s + \frac{K+1}{\tau} \right)}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + \frac{K+1}{\tau}}$$

$$\rightarrow c_1 = \left. \frac{K/\tau}{s + \frac{K+1}{\tau}} \right|_{s=0} = \frac{K}{K+1} ; \quad c_2 = \left. \frac{K/\tau}{s} \right|_{s=-\frac{K+1}{\tau}} = -\frac{K}{K+1}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{K}{K+1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{K+1}{\tau}} \right)$$

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{K+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{K+1}{\tau}}\right)\right\}$$

$$y(t) = \frac{K}{K+1}\left(1 - e^{-\frac{K+1}{\tau}t}\right)$$

a. $K = 1$ et $\tau = 0,2$

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-10t})$$

b. K augmente de 50% et τ fixe

$$y(t) = 0,6(1 - e^{-10t})$$

c. τ augmente de 50% et K fixe

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-6,67t})$$

2. l'erreur en régime permanent :

$$e_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - T(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{K}{\tau s + K + 1}\right] = \frac{1}{K + 1}$$

a. $K = 1$ et $\tau = 0,2$

$$e_p = \frac{1}{2} = 0,5$$

b. K augmente de 50% et τ fixe

$$e_p = \frac{1}{1,5 + 1} = 0,4$$

c. τ augmente de 50% et K fixe

$$e_p = 0,5$$

3. le temps de réponse à 5%

$$y(t_r) = \frac{K}{K+1}\left(1 - e^{-\frac{K+1}{\tau}t_r}\right) = 0,95 \times \frac{K}{K+1} \Rightarrow t_r = \frac{3\tau}{K+1}$$

b. $K = 1$ et $\tau = 0,2$

$$t_r = \frac{3 \times 0,2}{1 + 1} = 0,3 \text{ s}$$

d. K augmente de 50% et τ fixe

$$t_r = \frac{3 \times 0,2}{1,5 + 1} = 0,24 \text{ s}$$

e. τ augmente de 50% et K fixe

$$t_r = \frac{3 \times 0,3}{1 + 1} = 0,45 \text{ s}$$

3.5 Calcul du dépassement de la réponse indicielle d'un système du second ordre

On considère un système de fonction de transfert $G(s)$ à l'entrée duquel on injecte un échelon unitaire. Soit $s(t)$ le signal de sortie et s_∞ sa valeur finale.

On donne :

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

Calculer en fonction de ζ , en pourcentage de la valeur finale s_∞ et dans le cas où $\zeta < 1$, la valeur du dépassement D défini comme le rapport :

$$D = \frac{s_{\max} - s_\infty}{s_\infty} \times 100$$

SOLUTION

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

Si $r(t)$ est l'échelon unité alors $R(s) = \frac{1}{s}$, ce qui donne :

$$Y(s) = \frac{K\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{a}{s} - \frac{bs + c}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{(a+b)s^2 + (2\zeta\omega_n a + c)s + a\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Par identification, on a : $a = K$, $b = -K$, $c = -2\zeta\omega_n K$

$$Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{K(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = K \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\beta\omega_n)^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\beta\omega_n)^2} \right]$$

$$Y(s) = K \left[\frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\beta\omega_n)^2} - \frac{\zeta}{\beta} \frac{\beta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\beta\omega_n)^2} \right]$$

$$y(t) = K - Ke^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \beta\omega_n t + \frac{\zeta}{\beta} \sin \beta\omega_n t \right), \text{ avec } \beta = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

On démontre alors que :

$$y(t) = K - Ke^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right)$$

Calculons la dérivée de cette équation :

$$\frac{dy}{dt} = K\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right) - Ke^{-\zeta\omega_n t} \left(-\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \zeta\omega_n \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t \right)$$

Soit :

$$\frac{dy}{dt} = K\omega_n e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \sqrt{1-\zeta^2} \right) \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t$$

Ou encore :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t$$

Cette dérivée s'annule pour : $\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t_k = k\pi \rightarrow t_k = \frac{k\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

Le maximum que l'on recherche à identifier correspond à la valeur : $t_1 = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$

Par conséquent : $y_{\max} = y(t_1) = y\left(\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Soit : $y_{\max} = K - Ke^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\pi \right)$

D'où : $y_{\max} = K + Ke^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$

de toute évidence : $y_{\infty} = K$

On en déduit donc :

$$D\% = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \times 100 = 100e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

3.6 Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique

On considère un système de fonction de transfert $G(s)$ à l'entrée duquel on injecte une rampe unitaire. $r(t) = v(t) = t$ pour $t > 0$.

On donne :

$$G(s) = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} \quad \text{avec } \zeta = 1$$

Calculer l'expression du signal de sortie $s(t)$ et tracer son graphe.

SOLUTION

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

Si $r(t)$ est l'échelon unité alors $R(s) = \frac{1}{s}$, ce qui donne :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{K}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1} = \frac{K}{s^2 \left(\frac{s}{\omega_n} + 1 \right)^2} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 (s + \omega_n)^2} = \frac{c_{11}}{s^2} + \frac{c_{12}}{s} + \frac{c_{21}}{(s + \omega_n)^2} + \frac{c_{22}}{s + \omega_n}$$

$$c_{11} = \left. \frac{K\omega_n^2}{s^2} \right|_{s=0} = K \quad ; \quad c_{22} = + \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{K\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right) \right|_{s=0} = -\frac{2K}{\omega_n}$$

$$c_{21} = \left. \frac{K\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \right|_{s=-\omega_n} = K \quad ; \quad c_{12} = + \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{K\omega_n^2}{s^2} \right) \right|_{s=-\omega_n} = \frac{2K}{\omega_n}$$

$$Y(s) = \frac{K}{s^2} - \frac{2K}{\omega_n} \frac{1}{s} + K \frac{1}{(s + \omega_n)^2} + \frac{2K}{\omega_n} \frac{1}{s + \omega_n}$$

Au final, on a donc :

$$y(t) = Kt - \frac{2K}{\omega_n} + K \left(t + \frac{2}{\omega_n} \right) e^{-\omega_n t}$$

Cette expression fait apparaître que le graphe de $y(t)$ possède une asymptote d'équation

$$y(t) = Kt - \frac{2K}{\omega_n} \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty.$$

Le graphe de $y(t)$ est présenté sur la Figure suivante :

