

Cet ouvrage s'adresse, en premier lieu, aux étudiants de 2^{ème} année du cycle universitaire qui y trouveront, essentiellement, une initiation au *Formalisme de Lagrange*, l'étude des *Oscillations Linéaires* et *l'anomalie entre système mécanique et circuits électrique*. Un rappel de cours, des exercices et des problèmes suivis de leurs solutions composent ce travail.



Bibliothèque
scientifique

www.biblio-scientifique.com



OPU 4486

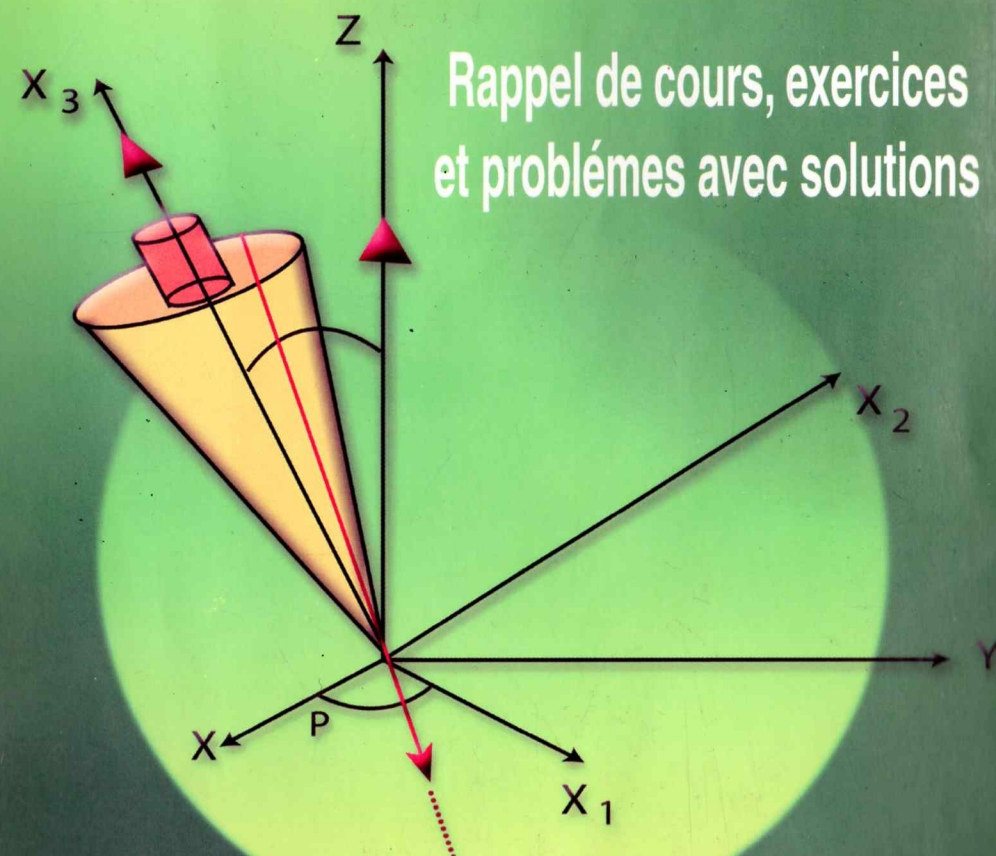
390 DA

FORMALISME DE LA GRANGE ET OSCILLATIONS LINEAIRES

C P O

www.biblio-scientifique.com

FORMALISME DE LAGRANGE ET OSCILLATIONS LINEAIRES



Office des Publications Universitaires



Bibliothèque
scientifique

www.biblio-scientifique.com

Ali Kamel ZINE
USTHB
FACULTÉ DE PHYSIQUE

FORMALISME DE LAGRANGE ET OSCILLATIONS LINÉAIRES

*Rappel de cours et exercices corrigés à l'intention
et des étudiants en technologie des universités
grandes écoles.*



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES
1, Place centrale de Ben-Aknoun (Alger)



*Bibliothèque
scientifique*

www.biblio-scientifique.com

© OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES: 11 - 2003

EDITION: 1.02.4486

I.S.B.N : 9961.0.0660.7

Dépôt légal : 2029/2003

PREFACE

Je suis très sensible à l'honneur, que me fait mon collègue Ali Kamel ZINE, de présenter cet ouvrage qui, j'en suis persuadé, rendra beaucoup de services aux étudiants en technologie des Universités et Ecoles d'ingénieurs. En effet, l'auteur, excellent pédagogue, possède une longue expérience dans l'enseignement de la physique.

L'ouvrage se compose de trois parties :

La première est consacrée à un rappel de cours .

La seconde comporte plus de 150 exercices, dont les énoncés ont été choisis avec beaucoup de soin, et qui couvrent la totalité du cours sur les oscillateurs linéaires, dispensé en deuxième année.

Dans la troisième partie, le lecteur trouvera les solutions.

Certaines solutions très détaillées, permettent à l'étudiant de mieux comprendre le cours exposé en amphithéâtre. D'autres, plus succinctes lui demandent de fournir un plus grand effort.

U S T H B - Professeur M . BENDAOU

SOMMAIRE

<u>I. Rappel</u>	<u>Page</u>
A - MATHS -----	6
B - MECANIQUE -----	18
C - ELECTRICITE -----	33
D - OSCILLATEUR LINEAIRE -----	37
E - TABLEAU DE CORRESPONDANCE -----	43
<u>II. Systèmes à un degré de liberté</u> -----	45
II.1 Systèmes libres non amortis	
exercices 1 à 22 -----	46
II.2 Systèmes libres amortis	
exercices 23 à 31 -----	59
II.3 Systèmes forcés amortis	
exercices 32 à 40 -----	65
<u>III. Systèmes à plusieurs degrés de liberté</u> -----	75
III.1 Systèmes libres et forcés - Transducteurs	
exercices 41 à 72 -----	76
III.2 Analogie électromécanique - Impédances	
exercices 73 à 83 -----	105
<u>IV. Complément d'exercices divers</u> -----	117
exercices 84 à 153 -----	118
<u>V. Réponses</u> -----	165
exercices 1 à 153 -----	166
<u>Bibliographie</u> -----	326
<u>Formulaire</u> (maths) -----	327

INTRODUCTION

Ce recueil d'exercices est le fruit de plusieurs années d'enseignement des TD à l'USTHB.

Il s'adresse, en premier lieu, aux étudiants de 2^{ème} année technologie du cycle universitaire. On y trouvera un choix de plus d'une centaine d'exercices accompagnés soit de leur solution détaillée, à titre d'exemple, soit d'indications brèves et de réponses que l'étudiant pourra consulter à la fin de ce document. Il lui est alors laissé le soin d'en faire la démonstration avec l'aide de son assistant de TD que cet ouvrage ne peut remplacer.

Une initiation de l'étudiant au formalisme de LAGRANGE, l'étude des oscillations linéaires et l'analogie entre systèmes mécaniques et circuits électriques sont parmi les buts poursuivis dans ce premier chapitre du programme. Pour cette raison, il lui est demandé de rechercher la solution des exercices qui lui sont proposés en ayant recours de préférence au formalisme de LAGRANGE, excepté pour quelques uns dont les numéros sont soulignés et où sera utilisé la relation fondamentale de la dynamique, la loi des mailles de KIRCHOFF ainsi que d'autres lois de la Physique avec lesquelles il s'est familiarisé en 1^{ère} année. Et, afin que l'étudiant puisse profiter au mieux de cet outil pédagogique nous lui recommandons de tenir compte des avertissements qui suivent :

- sauf avis contraire, la coordonnée généralisée indiquée donne la position du système comptée à partir de la position d'équilibre statique prise pour origine et rapportée à un repère absolu.

- l'énergie potentielle U et le Lagrangien L du système sont des fonctions définies à une constante près qui souvent sera omise dans leur expression car elle se simplifie dans les calculs ultérieurs.

- même si cela n'est pas signalé, il sera toujours fait appel à l'approximation des oscillations de faible amplitude pour simplifier les expressions de T , U et L (formes quadratiques) et ramener les équations du mouvement à des équations linéaires que l'étudiant pourra ainsi résoudre.

En effet, on se limitera aux cas qui sont susceptibles d'être ramenés à des systèmes linéaires. Dans les cas contraires, l'exercice s'arrêtera au calcul de L ou aux équations différentielles du mouvement du système.

- nous avons jugé utile de joindre à ce recueil un rappel sur quelques éléments de Mathématiques et de Physique indispensables à la résolution de certains exercices ainsi que quelques anciens sujets d'examens à titre indicatif.

Quant à l'éventuelle utilisation de ce document par l'enseignant qui pourra y puiser des exemples d'illustration de son cours, nous avons tenté, par le classement d'une partie des exercices, de respecter l'ordre traditionnel des différents chapitres traités dans le programme.

Cependant, pour ne pas paraître imposer cet ordre, nous avons attribué à chaque exercice un numéro indépendant du chapitre concerné et avons ajouté un chapitre IV contenant des exercices en option. L'enseignant pourra ainsi recommander à l'étudiant des exercices qu'il jugera en rapport avec le thème choisi, bien qu'éloignés dans leur classement.

Ce travail étant perfectible, nous serons très reconnaissant à tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs critiques et suggestions.

USTHB Octobre 1999



**Bibliothèque
scientifique**

www.biblio-scientifique.com

I. RAPPEL



Séries de FOURIER

Une fonction de période T peut être développée en une série trigonométrique partout convergente dite série de FOURIER et définie par :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

dont les coefficients constants a_n et b_n sont calculés par les formules :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos n\omega t \, dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin n\omega t \, dt$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Remarques :

1) Pour être développable en série de FOURIER, la fonction périodique $F(t)$ doit satisfaire aux conditions du théorème de DIRICHLET (MATHS).

2) la série peut aussi s'écrire :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

$$\text{avec } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} ; \quad \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

3) l'intégration peut se faire sur tout intervalle égal à une période T .

4) pour une fonction paire : $F(-t) = F(t)$

Le graphe de $F(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Sa série de FOURIER ne comprend que des termes en cosinus, par conséquent il est inutile de calculer les coefficients b_n car ils sont tous nuls : $b_n = 0 \quad \forall n$

5) pour une fonction impaire : $F(-t) = -F(t)$

Son graphe est symétrique par rapport à l'origine et sa série de FOURIER ne comprend que des sinus. Il est inutile de calculer les coefficients a_n car ils sont tous nuls : $a_n = 0 \quad \forall n$.

6) si la fonction est soit paire soit impaire le calcul des coefficients peut se faire en intégrant sur une demi période seulement et en multipliant le résultat par 2.

7) dans certains cas le terme a_0 ne peut être déduit du résultat obtenu pour n , il doit alors être calculé à l'aide de la formule générale donnée précédemment en y posant $n=0$ dès le début des calculs.

8) aux points de discontinuité de la fonction $F(t)$ la somme S de la série de FOURIER est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite.

Pour la fonction de l'exemple 3 qui suit et, en $t = T/2$, on a :

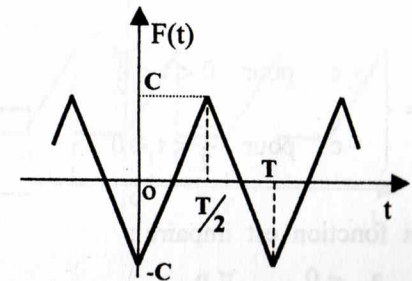
$$S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{F\left(\frac{T}{2}+0\right) + F\left(\frac{T}{2}-0\right)}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

EXEMPLE 1

$$F(t) = \begin{cases} -\frac{4c}{T}t - c & \text{pour } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ \frac{4c}{T}t - c & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

La fonction étant paire :

$$b_n = 0, \quad \forall n$$



8

calculons les coefficients a_n :

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} F(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{4c}{T} t - c \right) dt = 0$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{4c}{T} t - c \right) \cos n\omega t dt =$$

$$= \frac{16c}{T} \int_0^{T/2} t \cos n\omega t dt - \frac{4c}{T} \int_0^{T/2} \cos n\omega t dt$$

La première intégrale étant calculée par parties :

$$a_n = \frac{16c}{T^2} \left[\frac{\cos n\omega t}{n^2 \omega^2} \right]_0^{T/2} - \frac{4c}{T} \left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{4c}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1]$$

$$\rightarrow \begin{cases} n = 2p & a_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & a_{2p+1} = -\frac{8c}{(2p+1)^2 \pi^2} \end{cases}$$

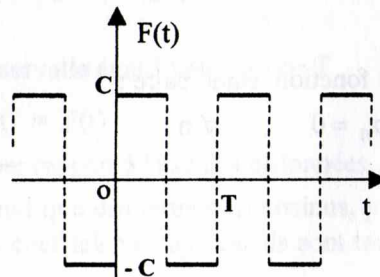
$$\text{soit } F(t) = \underbrace{-\frac{8c}{\pi^2} \cos \omega t}_{\text{Fondamental}} - \underbrace{\frac{8c}{9\pi^2} \cos 3\omega t}_{\text{3ième harmonique}} - \underbrace{\frac{8c}{25\pi^2} \cos 5\omega t}_{\text{5ième harmonique}} + \dots$$

EXEMPLE 2

$$F(t) = \begin{cases} +c & \text{pour } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -c & \text{pour } -\frac{T}{2} < t < 0 \end{cases}$$

la fonction est impaire :

$$a_n = 0, \quad \forall n$$



9

Calculons les coefficients b_n :

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega t dt = \frac{4c}{T} \left[\frac{-\cos n\omega t}{n\omega} \right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{2c}{n\pi} [1 - \cos n\pi] = \frac{2c}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$\rightarrow \begin{cases} n = 2p & b_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & b_{2p+1} = \frac{4c}{(2p+1)\pi} \end{cases}$$

$$\text{soit } F(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4c}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\omega t$$

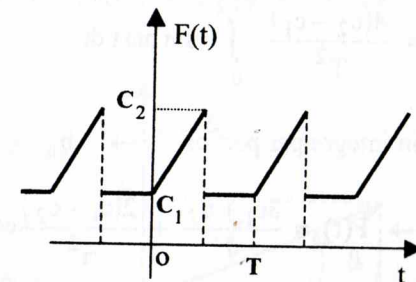
$$F(t) = \underbrace{\frac{4c}{\pi} \sin \omega t}_{\text{Fondamental}} + \underbrace{\frac{4c}{3\pi} \sin 3\omega t}_{\text{3ième harmonique}} + \underbrace{\frac{4c}{5\pi} \sin 5\omega t}_{\text{5ième harmonique}} + \dots$$

EXEMPLE 3

$$F(t) = \begin{cases} c_1 & \text{pour } -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ \frac{2(c_2 - c_1)}{T} t + c_1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

la fonction n'est ni paire ni impaire.

Sa série de FOURIER
comprendra donc des termes
en cosinus et en sinus :



10

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 c_1 \cos n\omega t dt + \\ + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{2(c_2 - c_1)}{T} t + c_1 \right) \cos n\omega t dt = \frac{4(c_2 - c_1)}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos n\omega t dt$$

qu'on intègre par parties pour obtenir :

$$a_n = \frac{4(c_2 - c_1)}{T^2} \left[\frac{\cos n\omega t}{n^2 \omega^2} \right]_0^{T/2} = \frac{(c_2 - c_1)}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \\ \rightarrow \begin{cases} n = 2p & a_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & a_{2p+1} = \frac{2(c_1 - c_2)}{(2p+1)^2 \pi^2} \end{cases}$$

Le coefficient a_0 devant être calculé à part :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 c_1 dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left[\frac{2(c_2 - c_1)}{T} t + c_1 \right] dt$$

soit $a_0 = \frac{3c_1 + c_2}{2}$ Calculons maintenant les b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 c_1 \sin n\omega t dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left[\frac{2(c_2 - c_1)}{T} t + c_1 \right] \sin n\omega t dt \\ = \frac{4(c_2 - c_1)}{T^2} \int_0^{T/2} t \sin n\omega t dt$$

qu'on intègre par parties $\rightarrow b_n = (-1)^n \frac{(c_1 - c_2)}{n\pi}$

$$\rightarrow F(t) = \frac{3c_1 + c_2}{4} + \frac{2(c_1 - c_2)}{\pi^2} \cos \omega t + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(c_1 - c_2)}{(2p+1)^2 \pi^2} \cos(2p+1)\omega t + (-1)^p \frac{(c_1 - c_2)}{p\pi} \sin p\omega t$$

11

Valeur moyenne d'une fonction

On appelle valeur moyenne d'une fonction $F(t)$ sur un intervalle T la grandeur notée $\langle F \rangle$ et donnée par :

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Dans le cas d'une fonction développable en série de FOURIER, la valeur moyenne sur sa période est représentée par le terme $\frac{a_0}{2}$ de sa série; pour le même exemple 3 qui précède, on a :

$$\langle F(t) \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{3c_1 + c_2}{4}$$

Développement de TAYLOR au voisinage de x_0 :

$$F(x) = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Souvent les approximations utilisées ne sont que les premiers termes du développement de l'expression correspondante, les termes suivants, supposés petits, sont négligés.

Ainsi, lorsqu'une grandeur ε prend des valeurs très faibles, on néglige parfois les termes de degrés supérieurs : $\varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \varepsilon^3 \gg \dots$

Nombre complexe

$$z = a + jb = |z| \cos \vartheta + j |z| \sin \vartheta = |z| e^{j\vartheta}$$

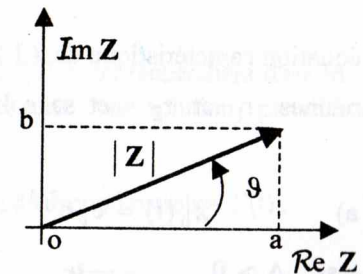
avec :

$$a = |Z| \cos \vartheta \text{ partie réelle de } z$$

$$b = |Z| \sin \vartheta \text{ partie imaginaire de } z$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{module de } z$$

$$\vartheta = \arctg(b/a) \text{ argument de } z$$



Notation complexe

Souvent, lorsqu'une grandeur physique varie sinusoïdalement :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

On préfère, au stade des calculs, l'exprimer sous la forme complexe :

$$x(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{ou} \quad x(t) = A^* e^{j\omega t}$$

avec $A^* = A e^{j\varphi}$: amplitude complexe ; φ : déphasage

A : amplitude maximale (réelle) ; ω : pulsation

Car des opérations de dérivation (ou d'intégration) de cette fonction se ramènent à une simple multiplication par le facteur $j\omega$ (ou $1/j\omega$) permettant ainsi de passer d'équations différentielles à des équations algébriques.

Une fois le résultat final obtenu, on l'exprime en ne retenant que la partie réelle, la partie imaginaire étant omise.

Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

I) équation homogène (ou sans second membre)

elle est de la forme : $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ (I)

p et q sont des coefficients constants et :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} ; \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation caractéristique de (I) est : $r^2 + pr + q = 0$

de racines r_1 et r_2 et sa solution $x_h(t)$ s'écrit :

$$a) \quad x_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

si $\Delta > 0 \longrightarrow r_1 \neq r_2$ réelles

$$b) \quad x_h(t) = e^{rt} (c_1 t + c_2)$$

si $\Delta = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 = r$ réelle

$$c) \quad x_h(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega_a t + c_2 \sin \omega_a t)$$

$$= C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)$$

si $\Delta < 0 \longrightarrow r_{1,2} = -\delta \pm j\omega_a$

en posant : $p = 2\delta$; $q = \omega_0^2$; $\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

avec $c_1 = C \sin \psi$; $c_2 = C \cos \psi$

Ce dernier cas est très important car il correspond à des oscillations du système autour de sa position d'équilibre.

Les constantes c_1 et c_2 ou C et ψ peuvent être déterminées par la connaissance des conditions initiales du problème. (voir partie exercices).

II) équation non homogène (ou avec second membre)

elle est de la forme : $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = F(t)$ (II)

sa solution générale $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ est la somme :

- de la solution $x_h(t)$ de l'équation homogène correspondante (I).
- d'une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation avec second membre (II).

Donc pour trouver la solution générale de (II) on recherchera d'abord la solution $x_h(t)$ de l'équation (I) ensuite une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation (II).

Cette dernière dépend de l'expression du second membre $F(t)$.

Nous nous intéresserons au cas particulier mais très important où $F(t)$ est de la forme :

$$F(t) = e^{at} [P_m(t) \cos bt + Q_n(t) \sin bt]$$

$P_m(t)$ et $Q_n(t)$ étant des polynômes respectivement de degré m et n en t . La solution particulière $x_p(t)$ de (II) sera recherchée dans ce cas sous la forme :

a) $x_p(t) = e^{at} S_M(t)$

si $b=0$ et a n'est pas racine de l'équation caractéristique :

b) $x_p(t) = t^\ell e^{at} S_M(t)$

si $b=0$ et a est racine de l'équation caractéristique :

ℓ étant la multiplicité de la racine.

$\ell = 1$ si a est racine simple de l'équation caractéristique.

$\ell = 2$ si a en est une racine double.

c) $x_p(t) = e^{at} [S_M(t) \cos bt + T_M(t) \sin bt]$

si $b \neq 0$ et $a \pm jb$ n'est pas racine de l'équation caractéristique

d) $x_p(t) = t e^{at} [S_M(t) \cos bt + T_M(t) \sin bt]$

avec $M = \max(m, n)$.

si $b \neq 0$ et $a \pm jb$ est racine de l'équation caractéristique :

Les coefficients des polynômes $S_M(t)$ et $T_M(t)$ sont déterminés par identification, après injection de l'expression de $x_p(t)$ dans (II)

Remarque : la solution particulière $x_p(t)$ doit être recherchée sous la forme indiquée précédemment (deux termes, l'un en cosinus l'autre en sinus) même si l'expression de $F(t)$ n'en comporte qu'un seul.

Exemple 1

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 2x = 0 \rightarrow x(t) = e^{2t} (c_1 e^{t\sqrt{2}} + c_2 e^{-t\sqrt{2}})$$

Exemple 2

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \rightarrow x(t) = e^{-t} (c_1 t + c_2)$$

Exemple 3

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 8 \sin 2t$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[c_1 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{7}}{2} t \right] + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{ou } x(t) = C e^{-\frac{t}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{7}}{2} t + \psi \right) + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right)$$

CALCUL MATRICIEL

Multiplication

Soient deux matrices carrées à s lignes et s colonnes :

$$A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij})$$

L'élément c_{ij} de la matrice C , produit de A par B ,

$C = A \cdot B$, est égal à la somme des produits des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^s a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj}$$

Matrice Transposée

C'est la matrice A^t dont les éléments de la i ème colonne sont ceux de la i ème ligne de A pour tout i allant de 1 à s .

Matrice Adjointe

La matrice $A^* = (A_{ij})$ est appelée matrice adjointe de A si ses éléments A_{ij} sont les cofacteurs des éléments a_{ij} de A^t .

C'est à dire que les A_{ij} sont obtenus en multipliant par $(-1)^{i+j}$ le déterminant d'ordre $s-1$ après avoir supprimé la j ème ligne et la i ème colonne dans A^t .

Matrice Inverse

Une matrice A^{-1} est dite inverse de la matrice A si :

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

où I est la matrice unité.

Pour qu'une matrice carrée soit inversible il faut que son déterminant soit différent de zéro : $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}$ existe

dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 17 & -1 & -3 \\ 18 & 6 & -6 \\ -10 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 24$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = \begin{pmatrix} \frac{17}{24} & -\frac{1}{24} & -\frac{3}{24} \\ \frac{18}{24} & \frac{6}{24} & -\frac{6}{24} \\ -\frac{10}{24} & \frac{2}{24} & \frac{6}{24} \end{pmatrix}$$

- B - M E C A N I Q U E

Position et vitesse

La position d'un point matériel peut s'exprimer selon plusieurs types de coordonnées.

L'adoption d'un type de coordonnées se fait en fonction de leur commodité pratique dans l'analyse et le calcul relatifs à l'étude du système considéré.

a) en coordonnées cartésiennes

Après avoir fait le choix d'un repère, la position d'un point matériel mobile est déterminée par le vecteur position :

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3$$

où x , y et z sont les coordonnées cartésiennes du point (fonctions du temps).

son vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{e}_1 + \dot{y} \vec{e}_2 + \dot{z} \vec{e}_3 \quad \text{de sorte que} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

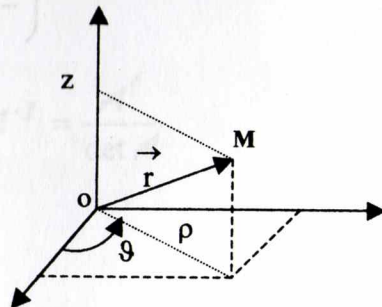
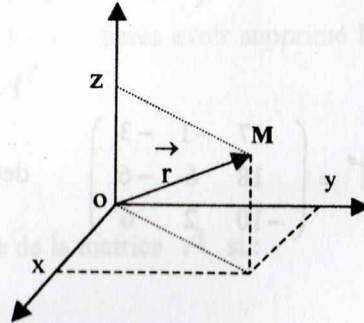
b) en coordonnées cylindriques

ρ , ϑ et z

$$\text{telles que} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$

et de sorte que :

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2$$



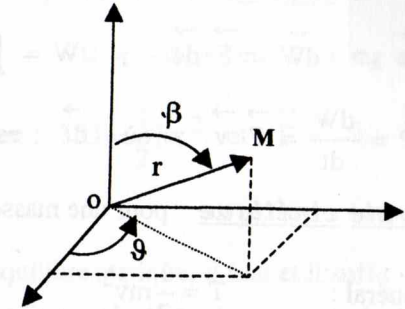
c) en coordonnées sphériques

r , ϑ et β

$$\text{telles que} : \begin{cases} x = r \sin \beta \cos \vartheta \\ y = r \sin \beta \sin \vartheta \\ z = r \cos \beta \end{cases}$$

et de sorte que :

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \beta \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\beta}^2$$



Nombre de degrés de liberté

On appelle nombre de degrés de liberté le nombre s de coordonnées généralisées (ou paramètres indépendants) nécessaires et suffisantes pour déterminer la "position du système".

Si N est le nombre total de particules constituant le système et n le nombre des liaisons géométriques restreignant son mouvement, alors $s = 3N - n$.

Principe de l'action et de la réaction

Si un corps 1 exerce sur un corps 2 une force $\vec{F}_{12}$ alors le second corps exerce aussi une force $\vec{F}_{21}$ sur le premier de sorte que :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Relation fondamentale de la Dynamique

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = m \vec{\gamma} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\vec{F}$ est la résultante de toutes les forces $\vec{F}_i$ appliquées au point matériel m ; $\vec{p} = m \vec{v}$ étant sa quantité de mouvement.

Travail et Puissance

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \quad ; \quad W = \int dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

et $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ où $d\vec{\ell}$ est un déplacement élémentaire.

Energie cinétique pour une masse ponctuelle m :

en général : $T = \frac{1}{2}mv^2$

et en coordonnées cartésiennes uniquement : $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

(pour une masse non ponctuelle, voir plus loin)

Energie Potentielle

C'est une grandeur physique scalaire fonction du point, donc de ses coordonnées (et parfois du temps), dont la dimension est celle d'une énergie.

Dans la suite, exception faite de quelques cas, nous ne considérerons que les systèmes dont l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps :

$$U = U(q_i) = U(x_\ell, y_\ell, z_\ell)$$

$$1 \leq i \leq s \quad 1 \leq \ell \leq N$$

Exemples: énergie potentielle de pesanteur ; énergie potentielle d'élasticité d'un ressort ; énergie potentielle d'un système de charges électriques ; etc. ...

Force dérivant d'un potentiel

$$\text{Si } \text{Rot } \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\text{Grad } U$$

Soit en coordonnées cartésiennes :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

On dira que la force $\vec{F}$ dérive du potentiel U . **Exemples :**

Poids d'un corps : $U = -mgz$ et $\vec{P} = mg \vec{e}_3$

Force de rappel d'un ressort : $U = \frac{1}{2}kx^2$ et $\vec{F} = -kx \vec{e}_1$

Conditions d'équilibre

Pour qu'un système soit en équilibre statique, il faut et il suffit que :

- la résultante de toutes les forces ainsi que le moment résultant qui s'exercent sur lui soient nuls :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{et} \quad \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = 0$$

- cas particulier important :** Si le système est soumis uniquement à des forces dérivant d'un potentiel il faut et il suffit que son énergie potentielle U soit extrémale à la position (x_n, y_n, z_n) dite d'équilibre :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{x_n, y_n, z_n} = 0$$

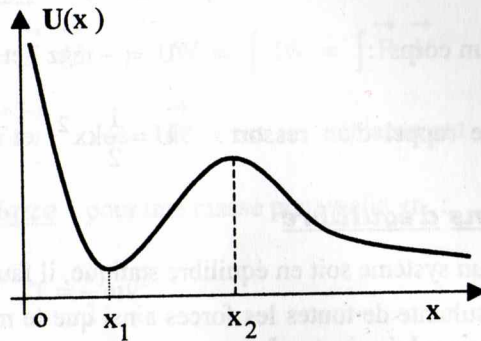
équilibre Stable et équilibre Instable

- Une position d'équilibre est dite **stable** si le point légèrement écarté de celle-ci tend à y revenir, dans ce cas :

$$U \text{ est minimale} \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_1} > 0$$

- Une position d'équilibre est dite **instable** si le point légèrement écarté de celle-ci a tendance à s'en écarter davantage, dans ce cas :

$$U \text{ est maximale} \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x_2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x_2} < 0$$



Conditions d'existence d'oscillations libres

Pour qu'un système effectue des oscillations libres autour d'une position, il faut que celle-ci soit une position d'équilibre stable.

Coordonnées Cartésiennes du centre de gravité

Système discret

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Système continu

$$x_G = \frac{\int x \, dm}{\int \rho \, dv}$$

$$y_G = \frac{\int y \, dm}{\int \rho \, dv}$$

$$z_G = \frac{\int z \, dm}{\int \rho \, dv}$$

Moments d'inertie

D'une masse ponctuelle

$$J = m r^2$$

D'un cylindre ou disque plein et homogène par rapport à son axe de symétrie

$$J = \frac{1}{2} M R^2$$

D'une jante ou cylindre creux par rapport à son axe de symétrie

$$J = M R^2$$

D'une barre par rapport à un axe perpendiculaire et passant par son centre de gravité G

$$J_G = \frac{m \ell^2}{12}$$

D'une barre par rapport à un axe perpendiculaire et passant par son extrémité

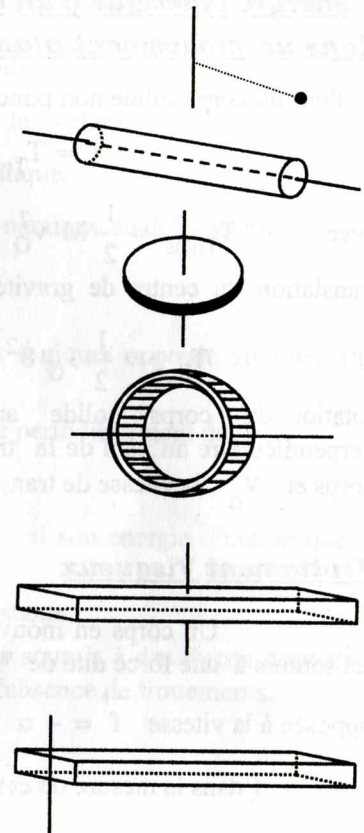
$$J = \frac{m \ell^2}{3}$$

Théorème d'HUYGENS

Lorsque la rotation du corps se fait autour d'un axe Δ le moment d'inertie J_Δ du corps relativement à cet axe Δ est égal au moment d'inertie J_G du corps, relatif à un axe parallèle à Δ et passant par G augmenté de la quantité Ma^2 où a est la distance séparant ces deux axes :

$$J_\Delta = J_G + Ma^2$$

remarque : La valeur d'un moment d'inertie n'a de signification que si l'axe de rotation par rapport auquel elle a été calculée est précisé, c'est à dire qu'elle dépend du choix de cet axe. Pour cette raison, l'additivité des moments d'inertie n'est valable que si ceux-ci se rapportent au même axe de rotation.



Énergie cinétique d'un corps solide dans un mouvement plan

Pour un corps solide non ponctuel, l'énergie cinétique totale s'écrit :

$$T = T_{\text{Translation}} + T_{\text{Rotation}}$$

avec $T_{\text{Trans}} = \frac{1}{2} M v_G^2$ l'énergie cinétique de translation du centre de gravité G du corps.

et $T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$ l'énergie cinétique de rotation du corps solide autour de l'axe passant par G et perpendiculaire au plan de la trajectoire, M étant la masse totale du corps et v_G la vitesse de translation de G.

Frottement Visqueux

Un corps en mouvement dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis à une force dite de "frottement visqueux" proportionnelle et opposée à la vitesse $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$

(dans la mesure où cette vitesse n'est pas trop élevée).

Soit, à un degré de liberté par exemple :

$$f = -\alpha \dot{x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \Leftrightarrow D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

où D est la fonction dissipation d'énergie du système.

Frottement sec (ou solide -solide)

Un corps solide reposant sur une surface solide subit de la part de celle-ci une force $\vec{f}$ dite de "frottement sec" dont l'intensité est proportionnelle à la composante normale maintenant ce corps en contact avec la surface.

Souvent cette composante est le poids $P = mg$ du corps, dans ce cas :

$f = \mu_s mg$ si le corps est immobile.

$f = \mu_G mg$ si le corps glisse sur la surface.

μ_s est le coefficient de frottement statique.

μ_G est le coefficient de frottement dynamique ou de glissement.

avec : $\mu_G \leq \mu_s$

Lors d'un mouvement la force $\vec{f}$ est toujours opposée au sens de déplacement du corps.

En cas d'oscillations, elle changera donc périodiquement de sens.

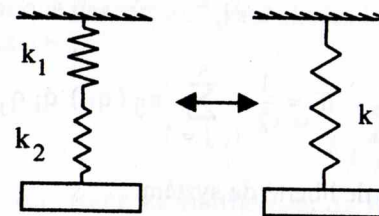
Système conservatif

Un système est dit conservatif si son énergie "mécanique" totale se conserve (reste constante) :

$$E = T + U = \text{constante}$$

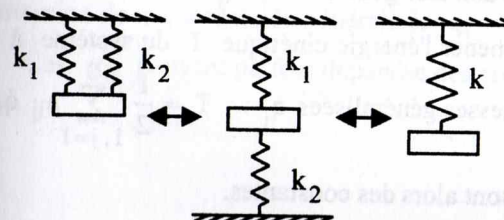
c'est le cas, par exemple, pour un corps soumis à des forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps et en l'absence de frottements.

Ressorts en série



$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

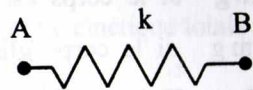
Ressorts en parallèle



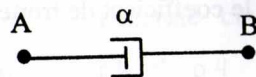
$$k = k_1 + k_2$$

Ressort et amortisseur avec deux extrémités mobiles

$$U = \frac{1}{2} k (x_B - x_A)^2$$



$$D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x}_B - \dot{x}_A)^2$$



où x_A et x_B sont les déplacements, comptés algébriquement, des extrémités par rapport à leur position à l'équilibre.

Energie cinétique d'un système de points matériels

Pour un système de N points matériels :

$$T = \sum_{\ell=1}^N T_{\ell} = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} m_{\ell} v_{\ell}^2$$

en coordonnées Cartésiennes :
$$T = \sum_{\ell=1}^N \frac{1}{2} m_{\ell} (\dot{x}_{\ell}^2 + \dot{y}_{\ell}^2 + \dot{z}_{\ell}^2)$$

et en coordonnées généralisées :
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij}(q_i) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

où s est le nombre de degrés de liberté du système.

Les coefficients $a_{ij}(q_i)$, appelés coefficients d'inertie, peuvent en général dépendre des coordonnées généralisées q_i .

Parfois, on peut ramener l'énergie cinétique T du système à une forme quadratique des vitesses généralisées $\dot{q}_i$:
$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

où les coefficients a_{ij} sont alors des constantes.

Dans une théorie matricielle du mouvement, ils représentent les éléments de la "matrice énergie cinétique" $\mathcal{T}$, i étant la ligne et j la colonne.

Energie potentielle d'un système de points matériels

Lorsqu'on reste au voisinage d'un extremum de la fonction U , son expression peut s'écrire comme une forme quadratique des coordonnées généralisées :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^S c_{ij} q_i q_j$$

(sauf exception, on ne considérera que les systèmes dont l'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps.)

Les c_{ij} sont appelés **coefficients de rigidité** du système.

Ils représentent les éléments de "la matrice énergie potentielle" $\mathcal{U}$, i étant la ligne et j la colonne et on a : $c_{ij} = c_{ji}$

fonction Dissipation d'énergie

Pour des frottements de type visqueux, c'est aussi une forme quadratique des vitesses généralisées lorsque ces vitesses ne sont pas trop importantes :

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^S \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

les α_{ij} étant les **coefficients de frottement visqueux** de sorte que $-\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$ représente la composante de la "force de frottement" dans la direction de la coordonnée généralisée q_i .

Ces α_{ij} peuvent parfois dépendre des coordonnées q_i .



Lagrangien et équations de LAGRANGE

C'est une fonction des coordonnées et des vitesses généralisées du système :

$$L = T - U = L(q_i, \dot{q}_i)$$

On en déduit les équations de LAGRANGE qui sont les équations différentielles du " mouvement " du système :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t) \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, s$$

(pour des systèmes holonomes)

$Q_i(t)$ est la "force généralisée" ne dérivant pas d'un potentiel et agissant sur le système suivant le degré de liberté q_i .

On obtient un système de s équations différentielles du second ordre qui, en général, ne sont pas linéaires.

Cependant, dans la mesure où l'amplitude des oscillations peut être considérée comme faible, certaines approximations sont possibles.

(à moins que la nature du problème posé ne justifie pas celles-ci)

Les expressions de T , U et L peuvent alors être ramenées à des formes quadratiques et les équations différentielles qui en découlent sont linéaires, donc plus simples à résoudre.

On s'est limité à ces cas dans ce document.

La solution de ce système de s équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants s'exprimera à l'aide de s pulsations propres ω_ℓ (avec $1 \leq \ell \leq s$) et de $2s$ constantes d'intégration.

Une valeur nulle de la pulsation propre ω correspond à un mouvement de translation :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \text{constante}$$

$$\text{et} \quad x(t) = \dot{x} t + x_0$$

Méthode matricielle

La détermination de la position d'un point matériel libre, en mouvement dans l'espace réel à 3 dimensions, nécessite la donnée de 3 coordonnées qui représentent les composantes de son vecteur position (voir plus haut).

Par analogie, la connaissance de l'état (ou position) d'un système (en mouvement dans un espace fictif à s dimensions appelé espace de configuration) nécessite s paramètres (ou coordonnées généralisées) q_i représentant les composantes de son vecteur position qui, selon la notation de DIRAC, s'écrit comme un vecteur uni colonne :

$$|x\rangle = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} \quad \text{appelé vecteur Ket}$$

Pour des oscillations sinusoïdales libres, les équations du mouvement s'écrivent sous forme matricielle :

$$\mathcal{L}|x\rangle = \omega^2|x\rangle \quad \text{ou} \quad (\mathcal{L} - \omega^2 \mathcal{I})|x\rangle = 0$$

où $\mathcal{I}$ est la matrice unité et $\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{U}$ la matrice Lagrangien du système.

$\mathcal{T}$ étant sa matrice énergie cinétique dont les éléments sont les coefficients de la forme quadratique T (énergie cinétique).

$\mathcal{U}$ sa matrice énergie potentielle dont les éléments sont les coefficients de la forme quadratique U (énergie potentielle).

Soit un système de s équations algébriques qui n'a de solution que si son déterminant est nul : $|\mathcal{L} - \omega^2 \mathcal{I}| = 0$.

Ce qui donne une équation caractéristique à s racines ω_ℓ qui, si elles sont réelles et positives, représenteront les **pulsations propres** du système considéré ($\ell = 1, 2, 3, \dots, s$).

Il est important de retenir que la pulsation ω_2 , par exemple, n'est pas celle de la seule masse 2 du système mais la *deuxième pulsation propre de l'ensemble du système*.

Mode propre

Un **mode propre** relatif à une pulsation propre donnée peut être défini comme le « mouvement » particulier dans lequel tous les degrés de liberté (coordonnées généralisées) du système vibrent à cette même pulsation.

On dira aussi (MATHS) **direction propre** ou **vecteur propre**.

Couplage

Pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté, il peut parfois apparaître dans les expressions de leurs énergies potentielle, cinétique ou de dissipation, des termes en $q_i q_j$ ou en $\dot{q}_i \dot{q}_j$ ($i \neq j$).

On les appelle **termes rectangles** (ou croisés) ou plus généralement **termes de couplage**.

Ils traduisent un éventuel couplage entre les degrés de liberté i et j .

L'existence (ou non) d'un couplage se remarque également par la présence (ou non) au niveau :

✓ Des équations différentielles du « mouvement » du système, d'un terme « étranger », c'est à dire relatif au degré j dans l'équation relative au degré de liberté i .

✓ Des matrices associées, de termes non diagonaux différents de zéro.

Un couplage peut être

- Soit de nature physique : influence entre deux parties d'un système par l'intermédiaire d'un élément concret (dit élément de couplage : ressort, amortisseur, condensateur ...) ou non matériel (inertie, mutuelle induction, ...).

- Soit de nature mathématique, c'est à dire dû uniquement au choix particulier des coordonnées généralisées utilisées dans l'étude de ce système.

L'existence de termes de couplage dans les calculs ne préjuge pas de celle d'un couplage réel entre les différents degrés de liberté d'un système. Seule une bonne observation de la structure du système pourrait permettre de faire la différence.

Inversement, même dans le cas d'un couplage réel, il est toujours possible de trouver un choix judicieux de coordonnées généralisées telles qu'il n'y ait pas :

- ✓ de termes rectangles dans les expressions de T , U , L ou D .
- ✓ de termes « étrangers » dans les équations différentielles.

(on dira alors que les équations sont découplées)

- ✓ de termes non diagonaux différents de zéro dans les matrices associées (dans ce cas les termes diagonaux de la matrice Lagrangien $\mathcal{L}$ sont les pulsations propres du système).

Les coordonnées généralisées qui permettent un tel découplage sont appelées **coordonnées normales** du système.

Elles sont combinaison linéaire des coordonnées généralisées quelconques et peuvent être trouvées à partir de celles-ci par une transformation linéaire adéquate.

Lorsque l'étude d'un système se fait au moyen de ses coordonnées normales, chacune d'elles exprime un mode propre relatif à une pulsation propre donnée de ce système.

On distingue différents types de couplages

- **élastique** : termes de couplage proportionnels à la coordonnée généralisée.
- **résistif** : termes de couplage proportionnels à la vitesse généralisée (avec dissipation de l'énergie du système).
- **inertiel** : termes de couplage proportionnels à l'accélération.
- **gyroscopique** : termes de couplage proportionnels à la vitesse généralisée, de signes contraires et en absence de perte d'énergie (cas notamment du gyroscope).

Les trois premiers sont dits **couplages symétriques**, le quatrième **couplage antisymétrique**.

- **non symétrique** : présence d'un terme de couplage dans une seule équation différentielle (cas de la portance d'une aile d'avion, non traité dans ce polycopié).

Cette distinction peut aussi s'avérer tout à fait arbitraire puisqu'elle dépend du choix des coordonnées généralisées (exemple : exercice 59, benne de camion → couplage inertiel ou élastique).

Coefficient de couplage

L'étude théorique d'un couplage se fait souvent par l'introduction dans les calculs d'un coefficient de couplage Γ défini de sorte qu'il tende vers 0 pour une absence de couplage et vers 1 pour un couplage très ferme.

Il est défini, par exemple, comme un rapport entre des énergies.

Pour un couplage élastique, il exprime l'importance de l'énergie d'interaction ou d'échange par rapport aux autres énergies du système.

Pour un couplage par mutuelle induction, il exprimera le rapport de l'énergie transférée à l'énergie des mailles du circuit.

Conséquences d'un couplage

Un couplage entraîne l'écartement des valeurs des pulsations propres.

Types de vibrations

Certains systèmes à plusieurs degrés de liberté peuvent s'étendre dans une direction plus que dans les deux autres : cylindre, tube, barre ou barreau, chaîne, corde ...

Cette direction particulière, dite longueur du système, est souvent axe de symétrie.

Lorsque ce système est le siège de vibrations, celles-ci peuvent se faire :

✓ Dans la même direction que sa longueur ou axe ; on aura des déplacements longitudinaux ou des *vibrations longitudinales*.

✓ Dans la direction perpendiculaire à sa longueur ou axe ; on aura des déplacements transversaux ou des *vibrations transversales*.

Pour certains systèmes, seul un de ces types de vibrations peut exister (colonne gazeuse : vibration longitudinale, corde : vibrations transversales).

Pour d'autres systèmes, les deux types peuvent coexister et même s'induire l'un l'autre (molécule linéaire : vibrations longitudinales et transversales).

Enfin, il existe d'autres types de vibrations (de torsion, de flexion, ...).

- C -**ELECTRICITE**

Courant électrique $i = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$

où q est la charge électrique

Capacité d'un condensateur plan et force s'exerçant entre ses armatures

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad F = \frac{1}{2} \frac{q^2}{\epsilon S} = \frac{1}{2} \frac{C v^2}{d} \quad (\text{attraction})$$

Tension aux bornes

✓ d'une résistance $v = R i \rightarrow i = \frac{v}{R}$

✓ d'une self $v = L \frac{di}{dt} \rightarrow i = \frac{1}{L} \int v dt$

✓ d'une capacité $v = \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow i = C \frac{dv}{dt}$

Puissance électrique

$$P = v i$$

Energie électrique

$$W_e = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Energie magnétique

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

LOIS DE KIRCHOFF

1) loi des mailles : $\sum_j v_j = 0$

On choisit arbitrairement un sens de courant fictif que l'on prendra pour sens positif. On parcourt toute la maille en comptant positivement les tensions qui tendent à engendrer un courant dans ce sens et négativement les autres.

2) loi des nœuds : $\sum_j i_j = 0$

On comptera positivement les courants qui arrivent au nœud et négativement ceux qui le quittent.

Impédance des circuits R L C :

- ✓ Impédance d'une résistance pure $Z_R = R$ (réelle)
- ✓ Impédance d'une inductance idéale $Z_L = jL\omega$ (complexe)
- ✓ Impédance d'une capacité idéale $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ (complexe)

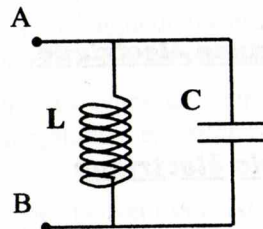
L en parallèle avec C :

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}$$

$$\rightarrow Z_{AB} = j \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}$$

Si $\omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow Z_{AB} \rightarrow \infty$

On dit alors que L et C constituent un **circuit bouchon** (impédance très grande)

**L en série avec C**

$$Z_{AB} = Z_L + Z_C$$

$$= j \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \right)$$

Si $\omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow Z_{AB} \rightarrow 0$

On dit que L et C constituent un **court-circuit** (impédance nulle).

Impédance de trois éléments R, L et C en série

$$Z = \frac{E(t)}{i(t)} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = R + j \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \right)$$

Admittance de trois éléments R, L et C en parallèle

$$Y = \frac{i(t)}{v(t)} = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \frac{1}{R} + j \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega} \right)$$

Flux de $\vec{B}$ au travers d'une surface S $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

f.e.m induite $e = - \frac{d\phi}{dt}$ (loi de FARADAY - LENZ)

Self-inductance $\phi = Li$ étant le flux qui traverse un circuit parcouru par un courant i , créant ainsi un champ d'induction $\vec{B}$.

Le coefficient de proportionnalité L est l'auto-inductance ou self-inductance de ce circuit.

Inductance mutuelle

La f.e.m induite dans un circuit 1 par le champ d'induction magnétique $\vec{B}$ créé par un second circuit 2 est :

$$e_{12} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{et réciproquement} \quad e_{21} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

avec $M_{12} = M_{21} = M$ coefficient d'inductance mutuelle qui ne dépend que de la géométrie des deux circuits et de leurs positions relatives.

Force agissant sur une charge électrique

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{force de LORENTZ})$$

Force magnétique agissant sur un élément conducteur parcouru par un courant i

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad (\text{Force de LAPLACE})$$

Couple magnétique agissant sur un circuit

fermé parcouru par un courant i et placé dans $\vec{B}$

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{m} = i S \vec{n}$ est le moment magnétique du circuit, orienté suivant la normale $\vec{n}$ à la surface du circuit.

De même sur un aimant permanent, de moment magnétique $\vec{m}$ et placé dans un champ $\vec{B}$, s'exerce un couple : $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

Energie potentielle magnétique

$$U = - \vec{m} \cdot \vec{B}$$

-D- OSCILLATEUR LINEAIRE

A UN DEGRE DE LIBERTE

On appelle oscillateur linéaire à un degré de liberté un système dont les oscillations sont régies par l'équation différentielle :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F(t)$$

(avec une équation caractéristique à discriminant Δ négatif)

N B A titre d'exemple nous avons pris le cas d'un oscillateur mécanique simple (masse , ressort , amortisseur , force) , pour un autre type d'oscillateur il faudra remplacer les paramètres (m , k , α , F) en conséquence.

Les propriétés caractéristiques de l'oscillateur linéaire sont :

✓ La période est indépendante de l'amplitude des oscillations tant que cette dernière reste faible.

✓ On peut appliquer le principe de superposition aux effets de plusieurs forces excitatrices.

1) Régime libre non amorti ($F(t) = 0$; $\alpha = 0$)

$$m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow x(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ est la pulsation propre de l'oscillateur.

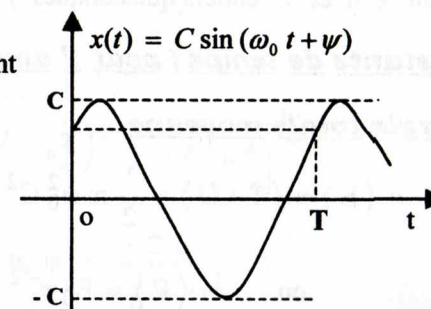
C'est le cas, par exemple, d'une masse soumise uniquement à une force de rappel :

$F = -kx = -m\omega_0^2 x$ dérivant d'une énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

Le système est conservatif

$$E = T + U = \text{constante.}$$



2) Régime libre amorti

$$(F(t) = 0 ; \alpha \neq 0)$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{avec } \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{facteur d'amortissement}$$

$$\text{l'équation caractéristique} \quad r^2 + 2\delta r + \omega_0^2 = 0$$

$$\text{a un } \Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 < 0$$

si l'amortissement est faible

$$\rightarrow x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)$$

$$\text{avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{2\pi}{T_a}$$

pseudo-pulsation

des oscillations libres amorties

le système est dissipatif de l'énergie

Nous conviendrons partout d'appeler α *coefficient d'amortissement* et δ *facteur d'amortissement*, pour différencier ces deux paramètres.

Décrément Logarithmique : $D = \frac{1}{\ell} \log \frac{x_n}{x_{n+\ell}} = \delta T_a$

(ne pas confondre avec la fonction Dissipation de l'énergie du système)

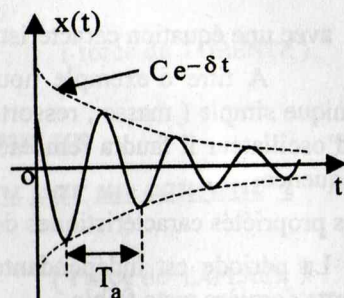
Où x_n est l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ max et $x_{n+\ell}$ celle du $\ell^{\text{ième}}$ max suivant (n et ℓ entiers quelconques).

Constante de temps (pour l' amplitude) : $\tau_1 = \frac{1}{\delta}$

Energie totale moyenne :

$$\langle E \rangle = \langle T + U \rangle \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 e^{-2\delta t}$$

$$\text{ou} \quad \langle E \rangle \approx E_0 e^{-2\delta t} = E_0 e^{-t/\tau_2}$$

**Constante de temps (pour l'énergie)** (ou la puissance) :

$$\tau_2 = \frac{1}{2\delta} \quad \text{c'est le temps de chute de l'énergie moyenne à } E_0/e$$

La grandeur τ_2 est parfois dénommée *temps de relaxation* du système.

3) Régime amorti forcé ($F(t) \neq 0 ; \alpha \neq 0$)

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

dans le cas d'une force extérieure appliquée sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \sin \omega t \rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$\rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = \underbrace{C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)}{m}}_{\text{régime permanent}}$$

Les constantes C et ψ seront déterminées par les conditions initiales du problème.

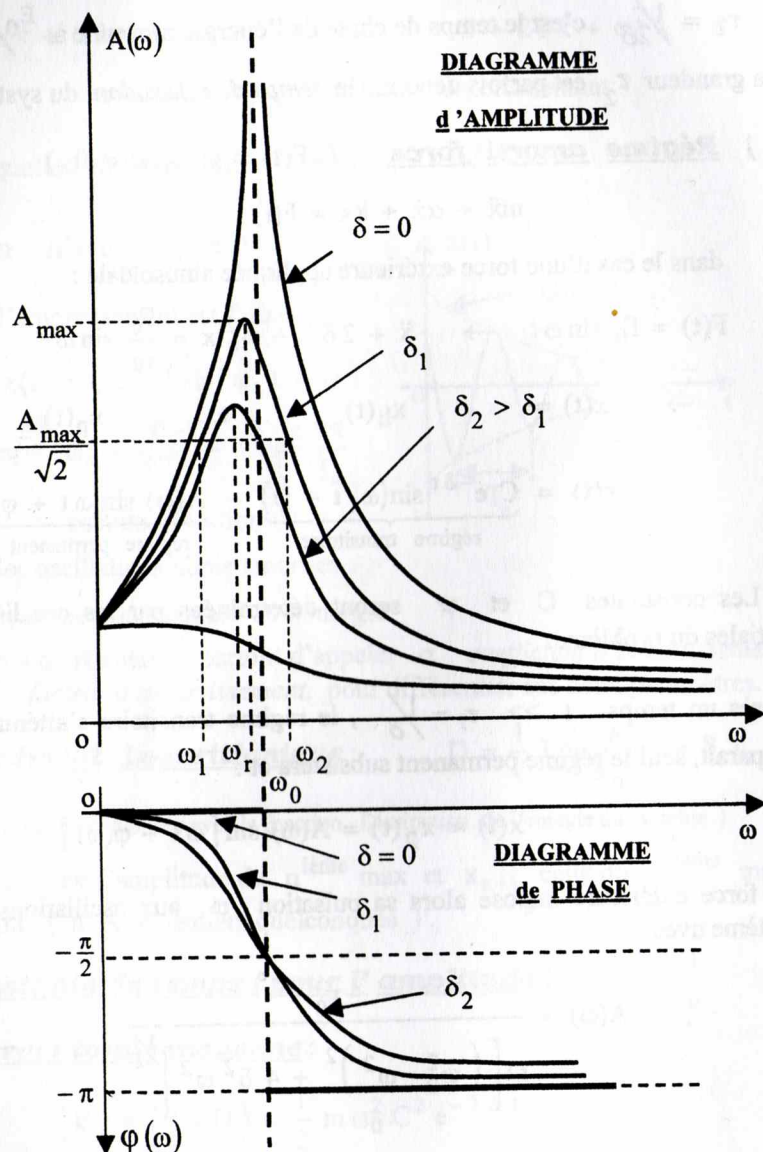
Après un temps $t \gg \tau_1 = 1/\delta$, le régime transitoire s'atténue et disparaît, seul le régime permanent subsistera et :

$$x(t) \approx x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

La force extérieure impose alors sa pulsation ω aux oscillations du système avec :

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^{1/2}}$$

$$\text{et} \quad \tan \varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Les résultats obtenus ainsi que les graphes ne sont évidemment valables que dans la mesure où les amplitudes restent de faibles valeurs.

Pulsation de résonance (pour l'amplitude)

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$

ω_1 et ω_2 étant deux pulsations définies par :

$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \frac{A_{\text{MAX}}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \langle P(\omega_1) \rangle = \langle P(\omega_2) \rangle \approx \frac{\langle P \rangle_{\text{MAX}}}{2}$$

Facteur de qualité

En électricité on lui donne aussi le nom

$$\text{de « coefficient de surtension » } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta} \approx \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{\pi}{D}$$

Energie et puissance totale moyenne (en régime permanent)

$$\langle E \rangle = \frac{1}{4} m (\omega_0^2 + \omega^2) A^2(\omega)$$

et $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \alpha \omega^2 A^2(\omega)$ puissance moyenne dissipée par les frottements ou fournie par la force appliquée.

La résonance en puissance se produit pour $\omega = \omega_0$ et :

$$\langle P \rangle_{\text{MAX}} = \langle P(\omega_0) \rangle = \frac{F_0^2}{4m\delta}$$

$$\langle E \rangle_{\text{MAX}} = \langle E(\omega_0) \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\text{MAX}}}{2\delta}$$

Echelle décibels

$$\text{Pour l'amplitude} \quad A(\omega) = 20 \text{ Log}_{10} \frac{A(\omega)}{A_{\text{MAX}}}$$

$$\text{Pour la puissance} \quad P(\omega) = 10 \text{ Log}_{10} \frac{P(\omega)}{P_{\text{MAX}}}$$

L'unité de $A(\omega)$ et $P(\omega)$ étant le décibel ou dB

Analogie

Il arrive parfois que les oscillations de courants qui ont lieu dans un circuit électrique (R, L, C) et les vibrations d'un système mécanique soient régies par les mêmes équations différentielles .

On dit alors que les deux systèmes sont équivalents.

Il en découle une certaine analogie dans leur comportement et une correspondance entre leurs éléments constitutifs (tableau page 43).

Un même système mécanique peut avoir deux circuits électriques équivalents (force / tension et force / courant) mais il existe des systèmes mécaniques qui ne possèdent pas d'équivalent électrique et réciproquement (cas du couplage par mutuelle induction).

Lorsqu'un système mécanique possède un circuit électrique équivalent, on peut exploiter ce fait en faisant l'étude mathématique et l'expérience de simulation pour le circuit électrique pour ensuite extrapoler les résultats obtenus au système mécanique.

Cependant, pour que cette façon de procéder puisse donner des conclusions fiables, il est nécessaire de s'assurer que les valeurs numériques des diverses grandeurs physiques (mécaniques et électriques) vérifient les relations sans dimensions suivantes :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{L_1}{L_2} ; \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{C_2}{C_1}$$

$$\frac{F}{k x} = \frac{E C}{q} ; \quad \frac{\alpha^2}{k m} = \frac{R^2 C}{L}$$

$$\frac{\omega_{\text{méca}}}{\omega_{\text{élect}}} = \sqrt{LC} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Pour cette raison, même s'il existe théoriquement, un circuit électrique équivalent peut s'avérer irréalisable ou sans utilité pratique.

Dans le tableau qui suit on trouvera, suivant une même ligne, la correspondance entre les termes au niveau des équations.

L'équivalence entre éléments du système mécanique et composants du circuit électrique s'en déduit aisément.

On parlera indifféremment d'analogie m / L ou Force / Tension et d'analogie m / C ou Force / Courant .

ANALOGIE ELECTROMECHANIQUE
TABEAU DE CORRESPONDANCE

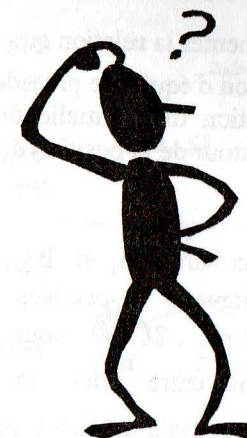
Systèmes mécaniques		Circuits électriques	
<u>rotation</u>	<u>translation</u>	<u>analogie m / L</u>	<u>analogie m / C</u>
angle ϑ	déplacement x	charge q	$u = \int v dt$
vitesse $\dot{\vartheta}$	$\dot{x}$	courant $\dot{q} = i$	tension v
moment d'inertie J	masse m	inductance L	capacité C
constante de torsion c	raideur k	$1/C$	$1/L$
coefficient de frottement		résistance	admittance
β	α	R	$1/R$
énergie cinétique			
$T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2$	$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$T = \frac{1}{2} L i^2$	$T = \frac{1}{2} C v^2$
énergie potentielle			
$U = \frac{1}{2} c \vartheta^2$	$U = \frac{1}{2} k x^2$	$U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$	$U = \frac{1}{2} \frac{1}{L} u^2$
fonction de Dissipation			
$D = \frac{1}{2} \beta \dot{\vartheta}^2$	$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$	$D = \frac{1}{2} R i^2$	$D = \frac{1}{2} \frac{1}{R} v^2$
Lagrangien $L = T - U$			
équations de LAGRANGE			
$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t)$			
"Force généralisée" appliquée			
moment appliqué $Q(t) = M(t)$	force appliquée $Q(t) = F(t)$	tension appliquée $Q(t) = E(t)$	courant imposé $Q(t) = I(t)$
nombre de degrés de liberté		nombre de mailles	nombre de nœuds
élément de couplage		élément commun à 2 mailles	élément commun à 2 nœuds
impédance			
$Z = \frac{M(t)}{\dot{\vartheta}(t)}$	$Z = \frac{F(t)}{\dot{x}(t)}$	$Z = \frac{E(t)}{i(t)}$	admittance $Y = \frac{I(t)}{v(t)}$



Bibliothèque
scientifique

www.biblio-scientifique.com

II . SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

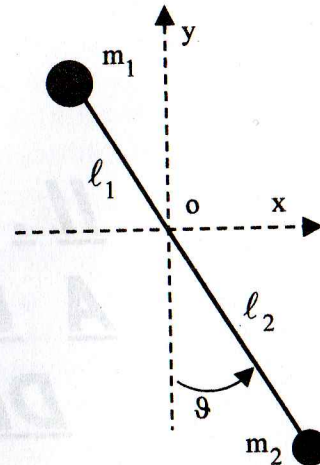


II.1 SYSTEMES LIBRES NON AMORTIS

EXERCICE 1

Métronome

Une tige rigide sans masse et de longueur $\ell_1 + \ell_2$, porte à ses extrémités deux masses m_1 et m_2 . Elle est articulée au point O situé à ℓ_1 de m_1 et occupe au repos une position verticale.

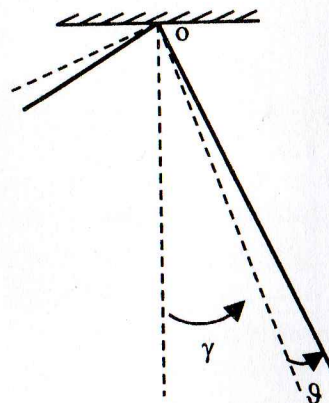


- 1) écrire l'énergie potentielle de pesanteur des deux masses et en déduire la condition d'équilibre stable du système.
- 2) calculer son Lagrangien et en tirer l'équation différentielle de son mouvement.
- 3) commenter la relation qui existe entre la condition d'équilibre précédemment établie et la condition pour que l'équation différentielle du mouvement soit celle de petites oscillations autour de la position de repos de la tige.

EXERCICE 2

Deux barres B_1 et B_2 de masse et de longueur respectives (m_1, ℓ) et $(m_2, 2\ell)$ sont solidaires et forment entre elles un angle droit.

L'ensemble est suspendu et peut osciller autour d'un axe O .

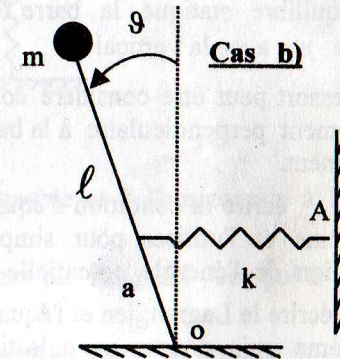
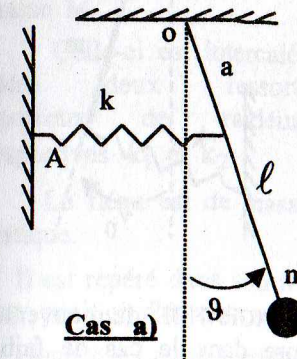


- 1) calculer l'angle γ que fait B_2 avec la verticale, à l'équilibre statique.
- 2) calculer le Lagrangien de ce système.
- 3) en déduire la période de ses petites oscillations.

- 4) donner la valeur de cette période si les deux barres ont été obtenues à partir d'un même barreau homogène.

EXERCICE 3

On considère les systèmes représentés sur les figures suivantes :



Tige de masse négligeable oscillant sans frottement dans un plan vertical.

La position d'équilibre statique, donnée par la ligne pointillée, est prise pour origine ($\vartheta = 0$).

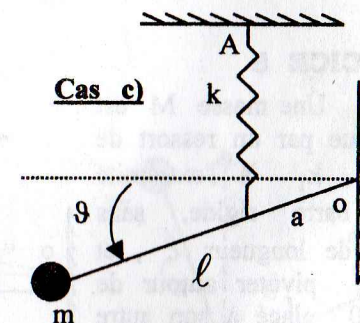
- 1) quelle est la déformation du ressort à l'équilibre statique.
- 2) quelle est la condition d'oscillation du système ?

Dans le cas où cette condition n'est pas satisfaite, quel sera le mouvement du système ?

- 3) établir l'équation différentielle des faibles oscillations du système et en déduire leur période.

Dans quel cas la période est elle indépendante de g et pourquoi ?

- 4) calculer l'effort exercé par le ressort sur son point d'attache A du mur, le sens positif étant celui pris pour ϑ sur la figure.



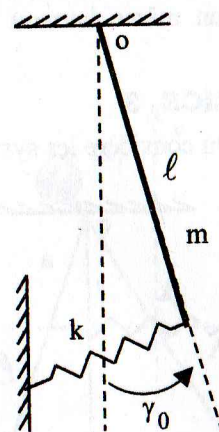
EXERCICE 4

Une barre rigide de masse m et de longueur ℓ est articulée à l'une de ses extrémités O .

À sa seconde extrémité est attaché un ressort de raideur k de sorte qu'à l'équilibre statique la barre forme un angle γ_0 avec la verticale.

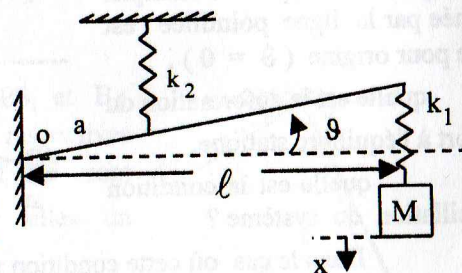
Le ressort peut être considéré comme pratiquement perpendiculaire à la barre à tout moment.

- 1) écrire la condition d'équilibre du système et l'utiliser pour simplifier l'expression de l'énergie potentielle.
- 2) écrire le Lagrangien et l'équation de LAGRANGE du mouvement du système puis donner sa pulsation propre dans le cas de faibles oscillations autour de la position d'équilibre ainsi définie.



EXERCICE 5

Une masse M est suspendue par un ressort de raideur k_1 à l'extrémité d'une barre rigide, sans masse, de longueur ℓ , et pouvant pivoter autour de l'axe O placé à son autre extrémité. Elle est elle-même retenue par un ressort de raideur k_2 fixé à une distance a de l'axe O .

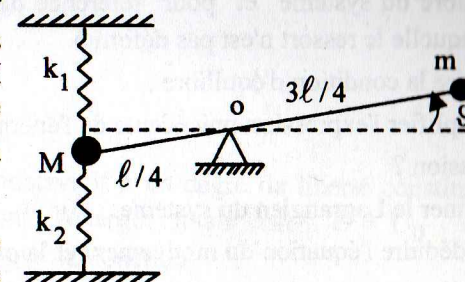


- 1) montrer que le système est à un degré de liberté en établissant une relation entre θ et x .
- 2) déterminer la fréquence propre des oscillations de la masse M .
- 3) quelle est la raideur k du ressort équivalent à k_1 et k_2 .

EXERCICE 6

Un fléau de longueur ℓ portant à ses extrémités deux masses m et M est articulé autour d'un axe O distant de $\ell/4$ de la masse M .

Celle-ci est intercalée entre deux ressorts verticaux de raideurs respectives k_1 et k_2 .



Le fléau est de masse négligeable et à l'horizontale à l'équilibre statique.

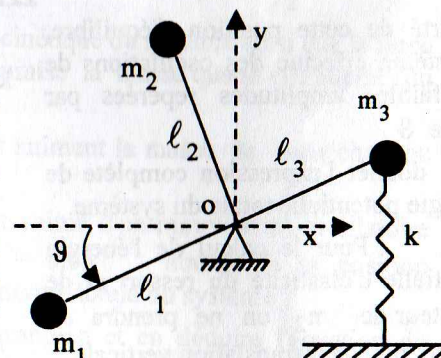
Il est repéré dans son mouvement par l'angle θ compté à partir de cette position d'équilibre.

Donner le Lagrangien du système et sa pulsation propre.

EXERCICE 7

Trois tiges rigides, sans masse et solidaires à l'une de leur extrémité O où elles présentent un angle droit entre elles, forment ainsi un T renversé articulé autour d'un axe horizontal fixe situé en O .

Chacune de ces tiges porte à son extrémité libre une masse ponctuelle, la tige 3 étant attachée à un ressort de raideur k de sorte qu'à l'équilibre statique la tige 2 soit verticale.



Sa position au cours du mouvement étant donnée par l'angle θ .

- 1) trouver l'expression complète de l'énergie potentielle U du système.

Pour cela on choisira pour origine des angles θ la position d'équilibre du système et pour référence des U ($U=0$) la position pour laquelle le ressort n'est pas déformé.

- 2) écrire la condition d'équilibre.
- 3) simplifier l'expression précédente de l'énergie potentielle.

Conclusion ?

- 4) donner le Lagrangien du système.
- 5) en déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre.
- 6) quelle est la condition pour qu'il y ait oscillations ? la comparer avec la condition d'équilibre stable.

EXERCICE 8

Deux tiges de masses négligeables et de longueurs respectives ℓ_1 et ℓ_2 sont soudées à angle droit par l'une de leurs extrémités tandis que l'autre porte une masse m_1 et m_2 .

L'ensemble peut pivoter autour d'un axe fixe O situé à une distance d de la soudure et un ressort de raideur k est attaché à la masse m_2 de sorte qu'à l'équilibre statique le système se trouve avec la tige ℓ_1 verticale.

Ecarté de cette position d'équilibre, le système effectue des oscillations de très faibles amplitudes repérées par l'angle θ .

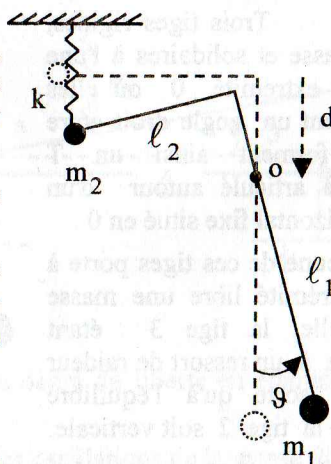
- 1) donner l'expression complète de l'énergie potentielle totale du système.

Pour le calcul de l'énergie potentielle d'élasticité du ressort et de pesanteur de m_2 on ne prendra en compte que leur translation verticale.

- 2) en déduire la condition d'équilibre.

- 3) utiliser cette relation pour simplifier le Lagrangien et faire les

approximations pour le donner sous une forme quadratique.



- 4) trouver l'équation différentielle du mouvement et la fréquence propre de ce système.

EXERCICE 9

Soit un système oscillant conservatif à un degré de liberté constitué d'une masse ponctuelle m dont l'énergie totale est $E = U_0$ et l'énergie potentielle est donnée par la fonction :

$$U(x) = U_0 \left[2 \left(\frac{x}{\ell} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \right]$$

et le graphe représenté par la figure ci-contre.

ℓ étant une longueur constante caractéristique du problème.

- 1) quelles sont les positions d'équilibre du système ?

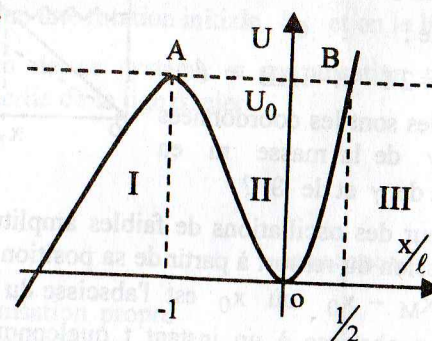
A quel type d'équilibre correspond chaque position ?

- 2) calculer l'énergie cinétique du système ainsi que la force (sens et module) à laquelle est soumise la masse quand elle atteint l'un ou l'autre des points A et B.

- 3) quels types de mouvement animent la masse m dans chacune des régions I, II ou III ?

- 4) on veut que le système soit animé d'un mouvement oscillatoire linéaire de faible amplitude $a = 0,03 \ell$ autour de sa position d'équilibre stable, quelle est alors l'énergie totale du système ?

- 5) calculer, dans ce cas, son Lagrangien et en déduire l'équation du mouvement et la période propre.



EXERCICE 10

Le système ci-contre est constitué de deux tiges rigides et sans masse OA et AB perpendiculaires entre elles, d'une masse ponctuelle m solidaire de B et d'un ressort de raideur k reliant un bâti fixe et vertical Oy au milieu M de la tige OA. Cette tige peut pivoter librement autour de l'axe fixe O et, à l'équilibre, elle fait un angle γ avec l'axe horizontal Ox.

à partir de cette position d'équilibre en pointillés sur la figure, on fait pivoter le système qui, relâché, effectue des petites oscillations repérées par l'angle ϑ .

On donne :

$$OA = 2\ell \text{ et } AB = \ell$$

1) quelles sont les coordonnées x et y de la masse m en fonction de γ et de ϑ ?

2) pour des oscillations de faibles amplitudes, on supposera qu'une compression du ressort à partir de sa position d'équilibre est donnée par : $\Delta x = x_M - x_0$ où x_0 est l'abscisse du point M à l'équilibre et x_M son abscisse à un instant t quelconque.

Montrer que cette compression peut se mettre sous la forme :

$$\Delta x = -\ell \vartheta \sin \gamma \quad (\text{spécialement pour cette question on fera l'approximation } \cos \vartheta \cong 1 ; \sin \vartheta \cong \vartheta)$$

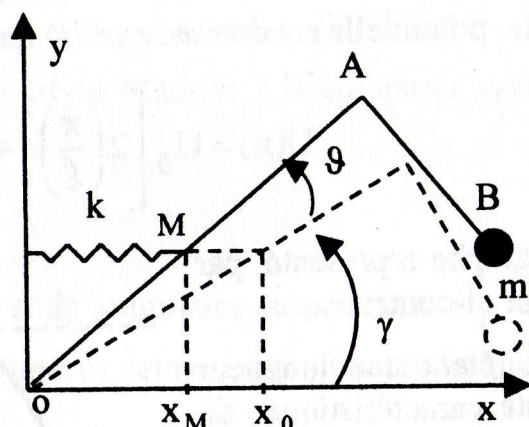
3) quelle est l'énergie potentielle $U(\vartheta)$ du système ?

4) trouver la condition d'équilibre et donner la forme quadratique de $U(\vartheta)$.

5) quelle est l'énergie cinétique du système ?

6) former le Lagrangien du système et en déduire l'équation qui gouverne son mouvement libre.

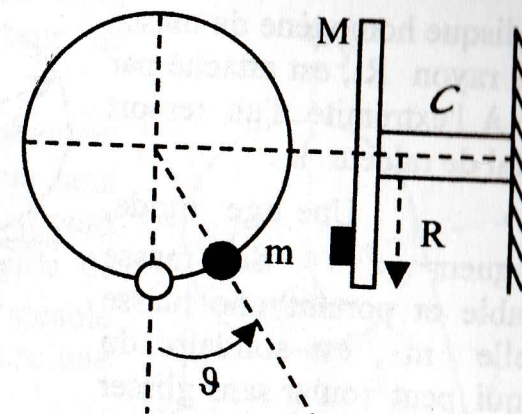
7) quelle est la relation qui doit relier k , m , ℓ et γ pour que le système oscille ? quelle est dans ce cas sa période propre T_0 ?



EXERCICE 11

Une tige d'acier horizontale et de constante de torsion C a une extrémité fixée au centre d'un disque homogène de masse M et de rayon R et solidaire de celle-ci.

La seconde extrémité de la tige est solidement ancrée à un bâti et, une petite masse m est soudée au point le plus bas du disque.



On imprime à ce système une rotation initiale ϑ_0 et on le lâche.

Trouver le Lagrangien de ce système et sa pulsation propre, en négligeant le moment d'inertie de la tige d'acier.

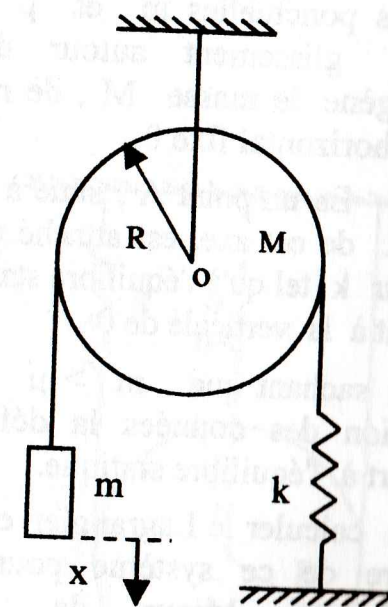
EXERCICE 12

Calculer la pulsation propre du système représenté sur la figure.

La poulie homogène est de masse M et de rayon R , le ressort de raideur k et le corps suspendu de masse m .

Le fil inextensible passe sur la poulie sans glisser.

On négligera la masse du ressort et du fil ainsi que le frottement sur l'axe de la poulie.

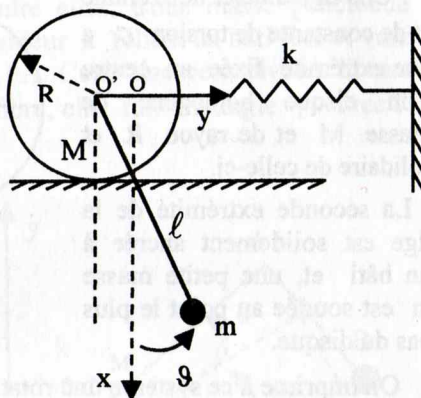


EXERCICE 13

Un disque homogène de masse M et de rayon R , est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k .

Une tige rigide, de longueur ℓ , de masse négligeable et portant une masse ponctuelle m , est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un bâti horizontal.

Trouver le Lagrangien puis la pulsation propre du système.

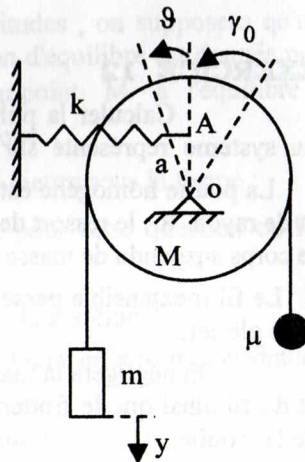
**EXERCICE 14**

Un fil inextensible, portant à chacune de ses deux extrémités deux masses ponctuelles m et μ , s'enroule sans glissement autour d'un disque homogène de masse M , de rayon R et d'axe horizontal fixe O .

En un point A , situé à une distance $a < R$ de cet axe, est attaché un ressort de raideur k tel qu'à l'équilibre statique le point A soit à la verticale de O .

1) sachant que $m > \mu$, calculer en fonction des données la déformation du ressort à l'équilibre statique.

2) calculer le Lagrangien et la pulsation propre de ce système pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre.

**EXERCICE 15**

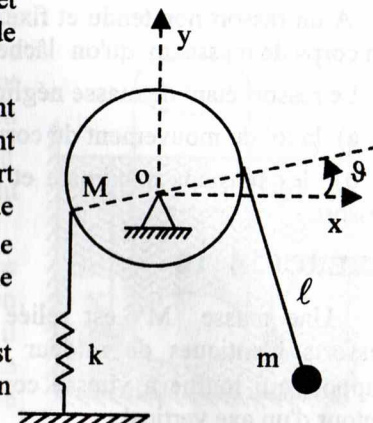
Un disque homogène, de masse M et de rayon R , peut pivoter autour de son axe O horizontal et fixe.

A deux points diamétralement opposés du contour de ce disque sont fixés, d'une part l'extrémité d'un ressort k , d'autre part une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable mais portant à son extrémité libre une masse ponctuelle m .

A l'équilibre statique la tige qui est solidaire du disque occupe une position verticale.

1) analyser cet équilibre, écrire l'énergie potentielle du système et en déduire la condition d'équilibre.

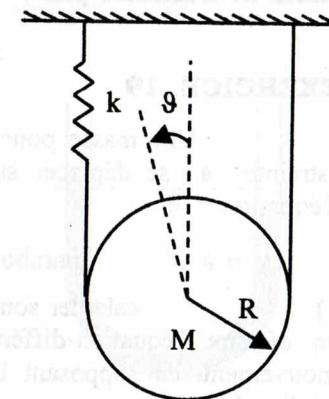
2) donner le Lagrangien du système et sa pulsation propre.

**EXERCICE 16**

Un disque homogène de masse M et de rayon R est suspendu par un câble inextensible qui s'enroule autour sans glisser.

L'une des extrémités du câble est prolongée par un ressort de raideur k .

Trouver la pulsation propre de ce système.



EXERCICE 17

A un ressort non tendu et fixé par son extrémité supérieure, on accroche un corps de masse m qu'on lâche ensuite sans vitesse initiale.

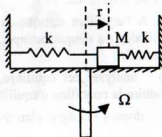
Le ressort étant de masse négligeable et de raideur k , déterminer :

- la loi du mouvement du corps.
- les tensions maximale et minimale que subit le point d'attache du ressort

EXERCICE 18

Une masse M est reliée par deux ressorts identiques de raideur k à un support qui tourne à vitesse constante Ω autour d'un axe vertical.

La masse peut se déplacer sans frottements sur le support et selon l'horizontale.



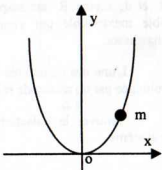
- calculer le Lagrangien du système.
- Quelle remarque peut-on faire sur certains termes de ce Lagrangien ?
- calculer la période des petites oscillations de la masse M .
 - pour quelle valeur de la vitesse de rotation Ω du support, la masse M n'oscillera plus ?

EXERCICE 19

Une masse ponctuelle m est astreinte à se déplacer sur une courbe d'équation :

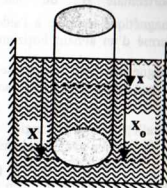
$$y = ax^2 \quad (\text{parabole})$$

- calculer son Lagrangien et en déduire l'équation différentielle de son mouvement, en supposant les frottements négligeables.
- faire l'approximation des déplacements de faibles amplitudes pour linéariser cette équation et la résoudre ; donner alors la période de ce mouvement.



EXERCICE 20

Un cylindre homogène, de section constante S et de hauteur h , plonge dans un liquide et s'y maintient en équilibre dans une position droite en ayant une partie immergée donnée par X_0 comptée à partir de la surface du liquide.



Si on écarte légèrement, dans le sens vertical, ce corps de sa position d'équilibre statique et qu'on le relâche il effectue des oscillations verticales de faibles amplitudes dont on demande de déterminer la période sachant que la

densité relative du cylindre par rapport au liquide est $d < 1$.

On repérera le corps par la coordonnée x comptée de la surface libre du liquide à sa ligne de flottaison à l'équilibre statique.

On négligera l'effet de la viscosité du liquide et on supposera que le niveau de sa surface libre ne varie pas au cours du mouvement du cylindre.

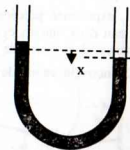
EXERCICE 21

Un manomètre a la forme d'un tube en U de section constante S et le liquide de masse volumique ρ correspond à une longueur de tube ℓ .

1) calculer la période des petites oscillations de cette colonne de liquide lorsqu'elle est écartée de son niveau d'équilibre.

2) rechercher l'expression de cette période pour le cas où la branche droite du tube serait inclinée d'un angle γ par rapport à la verticale.

Retrouve-t-on le résultat pour $\gamma = 0$?



EXERCICE 22

On veut mesurer la composante horizontale B_H du champ d'induction magnétique terrestre à l'aide d'un pendule formé d'un aimant horizontal de moment magnétique $\vec{m}$ et masse M , suspendu en son milieu O à un fil sans torsion.

L'aimant a la forme d'un parallélépipède rectangle de longueur ℓ et de section transversale très petite.

On fait tourner le pendule, autour de l'axe vertical OO' , d'un angle ϑ_0 et on l'abandonne à lui-même.

1) Ecrire l'équation du mouvement dans le cas où les forces de frottement sont négligeables.

En déduire la période d'oscillation du pendule lorsque l'amplitude des oscillations est faible.

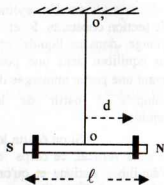
2) calculer B_H si $T_0 = 8,2 \text{ s}$; $m = 2 \text{ A m}^2$

$M = 80 \text{ gr}$; $\ell = 10 \text{ cm}$; $\sin \vartheta \approx \vartheta$

3) Afin d'éliminer dans les formules le moment d'inertie qui ne peut être déterminé avec une grande précision, on procède autrement dans la pratique :

L'expérience précédente étant achevée, on la répète en plaçant sur le barreau deux masses cylindriques en cuivre de masse $m = 15 \text{ gr}$ à une distance $d = 4 \text{ cm}$ de part et d'autre de l'axe OO' .

La nouvelle valeur de la période est alors $T'_0 = 10,7 \text{ s}$. calculer B_H .



II. 2 SYSTEMES LIBRES AMORTIS

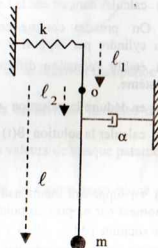
EXERCICE 23

Une tige rigide, sans masse, de longueur $\ell_1 + \ell$ porte une masse ponctuelle m à l'une de ses extrémités et constitue un pendule d'axe O fixe et situé à une distance ℓ de m .

De part et d'autre de cet axe O et à des distances respectives ℓ_1 et ℓ_2 sont fixés un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient α .

A l'équilibre statique la tige est verticale, la masse m en bas. Donner :

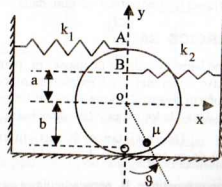
- 1) le Lagrangien du système.
- 2) l'équation différentielle de son mouvement.
- 3) sa pseudo-période.
- 4) quel changement qualitatif interviendrait dans le Lagrangien si tout le système était pivoté de $\pi/2$ de sorte qu'à l'équilibre statique la tige soit horizontale ?



EXERCICE 24

Un cylindre homogène de masse m , de rayon R , sur lequel est attachée à une distance b du centre O une masse ponctuelle μ , peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.

Deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 sont fixés, en position d'équilibre, à la verticale et à des distances respectives R et a du centre O .



60

On se propose d'étudier le mouvement vibratoire du cylindre dans le cas d'oscillations linéaires de faible amplitude pouvant ainsi considérer que les points A et B ont des trajectoires pratiquement rectilignes et horizontales.

1) calculer dans ce cas le Lagrangien du système.

On prendra comme coordonnée généralisée l'angle de rotation ϑ du cylindre par rapport à sa position d'équilibre.

2) établir l'équation différentielle qui régit les petites oscillations du système.

3) en déduire la pulsation ω_0 des oscillations non amorties.

4) calculer la solution $\vartheta(t)$ sachant que pour $t = 0$:

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 ; \dot{\vartheta}(0) = 0$$

5) en supposant maintenant qu'il existe une force de frottement dont le moment par rapport au point 0 est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation ($M = -\beta \dot{\vartheta}$), établir l'équation différentielle qui régit les petites oscillations amorties.

EXERCICE 25

Un circuit électrique RLC série comprend une résistance $R = 1 \Omega$, une self $L = 0,1 \text{ mH}$ et une capacité $C = 4 \mu\text{F}$.

Quelle est la valeur de son facteur de qualité Q ?

Peut-on conclure, à partir de cette valeur de Q , si des oscillations électriques sont possibles ou non dans ce circuit?

EXERCICE 26

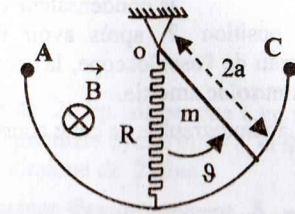
Une barre métallique de masse m peut osciller, tel un pendule, autour d'un axe horizontal 0. L'extrémité inférieure de la barre glisse sur un conducteur ayant la forme d'un arc de cercle AC de centre 0 et de rayon égal à la longueur $2a$ de la barre.

Une résistance R est intercalée entre l'axe 0 et le milieu de ce conducteur. L'ensemble de ce dispositif est placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au plan des oscillations.

61

La barre étant écartée d'un petit angle ϑ_0 , on l'abandonne sans vitesse initiale.

On négligera le frottement de la barre au niveau de l'axe et du conducteur AC ainsi que la résistance électrique de la barre, du conducteur et de leur contact.



1) donner les expressions du Lagrangien et de la fonction dissipation du système.

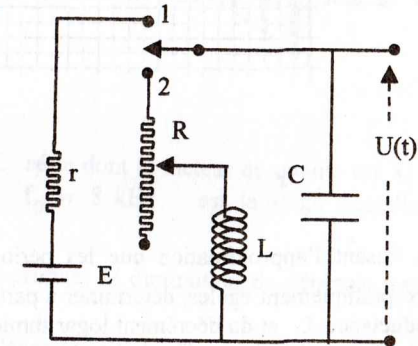
2) en déduire l'équation différentielle des oscillations amorties de la barre.

3) écrire sa solution $\vartheta(t)$ en précisant les valeurs de chaque paramètre en fonction des données.

4) préciser pour quelle valeur de l'intensité du champ magnétique ces oscillations sont possibles.

EXERCICE 27

Le circuit électrique, représenté sur la figure ci-contre, est composé d'un générateur de f.e.m. constante E , d'une résistance fixe $r = 50 \Omega$, d'un condensateur de capacité $C = 1425 \text{ nF}$, d'une résistance variable R , d'une bobine de self L et d'un inverseur.



Les bornes du condensateur sont reliées à l'entrée d'un oscilloscope.

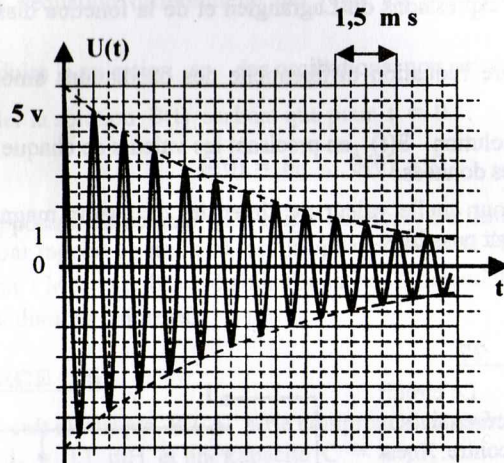
1) montrer que $\Gamma = \frac{1}{RC}$ a la dimension d'un temps. Calculer Γ .

2) l'inverseur est fermé sur la position 1, on charge le condensateur :

Quelle est, par rapport à sa valeur maximale q_M , la charge q au bout d'un temps $t = \Gamma$, puis au bout de $t = 10\Gamma$?

3) le condensateur étant ainsi chargé, on place l'inverseur sur la position 2 après avoir réglé la résistance R de façon que, sur l'écran de l'oscilloscope, la courbe $U(t)$ se présente sous la forme d'une sinusoïde amortie.

La photographie de cette courbe est donnée ci-dessous.



En faisant l'approximation que les périodes T_0 et T_a sont de valeurs pratiquement égales, déterminer à partir de ce graphe les valeurs de l'inductance L et du décrément logarithmique D .

En déduire la valeur de R .

Quelle valeur R_c de R permet d'avoir le régime critique ?

- 4) Déterminer la constante de temps τ (pour l'amplitude).
Que représente l'inverse du décrément logarithmique D ?

EXERCICE 28

Lors des oscillations d'une masse de 20 kg suspendue à un ressort, on a noté que la masse effectue les 10 premiers cycles en 9 s et qu'après ces 10 cycles la déviation maximale diminue de 2 fois.

Calculer les valeurs du facteur d'amortissement δ et de la raideur k du ressort.

EXERCICE 29

Pour un oscillateur libre amorti l'élongation est donnée par :

$$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)$$

en faisant l'approximation que le terme $e^{-\delta t}$ reste pratiquement constant sur une période d'oscillation (δ très petit).

- 1) établir l'expression de son énergie moyenne totale.
- 2) quelle est la constante de temps τ en énergie de cet oscillateur, temps au bout duquel son énergie ne vaut plus que $1/e$ fois sa valeur initiale ?

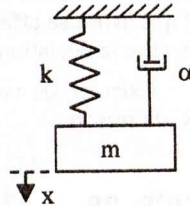
EXERCICE 30

Un circuit $R L C$ série dont le facteur de qualité est $Q = 72$ et la fréquence propre $f_0 = 8 \text{ kHz}$ est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

- a) rappeler la loi exprimant la diminution de l'énergie totale E emmagasinée par le circuit.
- b) quelle partie de l'énergie initiale E_0 reste-t-il dans le circuit 1 ms après le début des oscillations ?

EXERCICE 31

Le dispositif mécanique, représenté sur la figure ci-contre, se compose d'une masse $m = 1,2 \text{ kg}$ suspendue à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k = 200 \text{ N/m}$ et d'un amortisseur de coefficient α .



L'équation du mouvement en régime libre est : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

Le déplacement $x(t)$ de la masse m est enregistré à l'aide d'un appareil.

1) l'amortisseur étant rempli d'un fluide peu visqueux, à l'instant $t = 0$, on déplace m de $X_0 = 5 \text{ cm}$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.

La courbe $x(t)$ enregistrée est une sinusoïde amortie sur laquelle on note que l'amplitude diminue de 30 % au bout de 5 pseudo-périodes :

Calculer le décrément logarithmique et la perte d'énergie entre $t = 0$ et $t = 5T_a$.

2) quelle erreur commet-on en assimilant la pseudo-période T_a à la période propre T_0 de l'oscillateur.

3) calculer le coefficient de frottement visqueux α de l'amortisseur.

4) on change le fluide de l'amortisseur, la courbe enregistrée correspond alors au régime critique avec les conditions initiales suivantes :

$$\text{à } t = 0 \quad x(0) = X_0 = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = 0$$

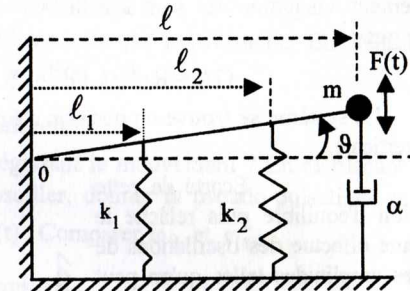
Calculer la position de la masse m à l'instant $t = 0,1 \text{ s}$ et l'énergie dissipée par ce dispositif à cet instant.

(2^{ème} exercice de la première épreuve Décembre 1989)

11.3 SYSTEMES FORCES AMORTIS**EXERCICE 32**

Une tige rigide, de longueur ℓ , de masse négligeable et articulée à l'une de ses extrémités 0, porte à son autre extrémité libre une masse ponctuelle m .

A des distances respectives ℓ_1 et ℓ_2 de 0, deux ressorts verticaux de raideurs k_1 et k_2 sont attachés à cette tige.



Un amortisseur de coefficient α est également fixé à la masse m et la tige se trouve, au repos, dans une position horizontale.

La masse m du système ainsi constitué est soumise à l'action d'une force verticale et harmonique : $F(t) = F_0 \cos \omega t$

1) écrire l'expression complète de l'énergie potentielle $U(\theta)$ de ce système.

2) en déduire la condition d'équilibre statique et s'en servir pour simplifier l'expression précédente de $U(\theta)$.

3) trouver le Lagrangien du système et écrire l'équation différentielle de son mouvement.

4) donner la solution de cette équation en précisant la partie qui correspond au régime transitoire et celle qui correspond au régime permanent

EXERCICE 33

Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. Le bras GC , sans masse, solidaire du cylindre M , porte à son extrémité C une masse m .

Deux ressorts de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α sont attachés en A et B selon la figure et de sorte que :

$$GA = R ; \quad GC = \ell \quad \text{et} \quad GB = GC / 2$$

Le système se trouve en position d'équilibre statique lorsque la tige est verticale.

Ecarté de cette position d'équilibre puis relâché le système effectue des oscillations de faibles amplitudes telles qu'on peut supposer les points d'attache A et B de déplacement pratiquement horizontal.

1) établir l'équation différentielle du mouvement du système libre non amorti en prenant pour coordonnée généralisée $\vartheta(t)$.

2) en déduire sa pulsation propre ω_0 .

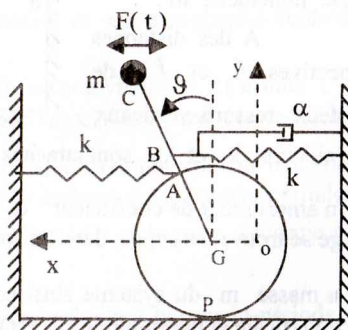
3) écrire l'équation différentielle du mouvement du système libre amorti.

4) indiquer les trois mouvements possibles, solutions de cette équation différentielle selon l'importance de α .

5) montrer que, pour de petites oscillations, on peut retrouver l'expression de l'énergie cinétique du système calculée précédemment en supposant que celui-ci effectue de faibles rotations autour du point de contact P du disque avec le sol, à la position d'équilibre.

6) on applique maintenant, sur la masse m , une force horizontale et sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

Trouver l'équation différentielle de ce mouvement forcé du système et en donner la solution.

**EXERCICE 34**

Un vibreur dont la masse m a un mouvement périodique est relié à un ressort de raideur k . L'amortisseur de coefficient α représente les divers frottements de type visqueux.

1) étude du système libre non amorti :

Donner l'équation différentielle du mouvement. En déduire la fréquence propre ω_0 et la solution $y(t)$.

2) étude du système libre amorti :

Quelle est l'équation régissant le mouvement ? En se plaçant dans le cas où le système peut osciller, donner la pseudo-pulsation ω_a du système et l'expression de $y(t)$. Comparer ω_0 et ω_a .

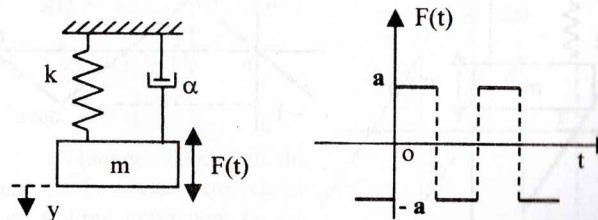
3) étude du système forcé amorti :

a) la force agissant sur m est verticale et sinusoïdale $F(t) = F_0 \sin \omega t$, quelle est l'équation du mouvement ?

Trouver, pour le régime permanent, l'expression du déplacement $y(t)$ et tracer sur un même graphe les courbes d'amplitude $A(\omega)$ et de déphasage $\varphi(\omega)$ dans le cas où α est nul et dans le cas où α est différent de zéro.

En déduire la fréquence de résonance en amplitude et la bande passante à -3 dB.

b) la force $F(t)$ se présente sous la forme d'une impulsion périodique :



Ecrire la nouvelle équation du mouvement, et dans le cas où l'amortissement est négligeable et $T = 6\pi/\omega_0$, montrer que l'influence de $F(t)$ sur le système est équivalente à celle de son harmonique 3.

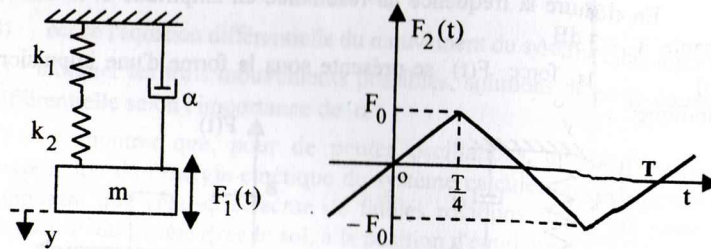
EXERCICE 35

Une masse m est suspendue par deux ressorts de raideur k_1 et k_2 selon la figure. Les frottements étant représentés par l'amortisseur de coefficient α .

- 1) calculer la pulsation ω_0 des petites oscillations libres non amorties du système.
- 2) calculer la pulsation ω_a des petites oscillations amorties.
- 3) on veut réaliser la condition : $\frac{\omega_0 - \omega_a}{\omega_0} = 1\%$

Calculer dans ce cas le coefficient de frottement α , le facteur de qualité Q et le décrement logarithmique D .

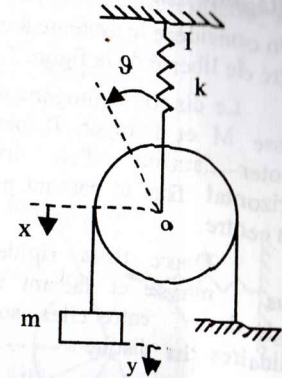
- 4) une force sinusoïdale $F_1(t) = F_0 \sin \omega t$ est appliquée à la masse m , déterminer la solution de l'équation différentielle obtenue.
- 5) une force $F_2(t)$ périodique mais non sinusoïdale est maintenant appliquée sur la masse m . En s'aidant d'un développement en série de FOURIER pour la fonction $F_2(t)$ dont on utilisera les trois premiers termes seulement (les suivants étant considérés comme négligeables) donner l'expression du déplacement $y(t)$ de la masse en régime permanent.



EXERCICE 36

Une poulie homogène de masse M et de rayon R est suspendue par son axe à l'extrémité libre d'un ressort de raideur k .

Un fil inextensible, de masse négligeable et dont une extrémité est fixe, s'enroule sans glissement sur la poulie et retient par sa seconde extrémité une masse ponctuelle m . Le mouvement vertical de translation de la petite masse est donné par y , celui de l'axe de la poulie par x tandis que la rotation de celle-ci est notée par l'angle θ , toutes comptées à partir de la position d'équilibre.



- 1) vérifier que le système est à un degré de liberté en établissant la relation qui existe entre x , y et θ .
- 2) calculer le Lagrangien du système en fonction de la coordonnée généralisée y et de la vitesse correspondante.
- 3) donner l'expression de la pulsation propre ω_0 du système.
- 4) supposer maintenant que l'extrémité I du ressort n'est plus fixe mais subit un déplacement vertical imposé selon la loi :

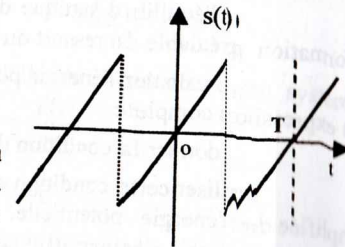
$$s(t) = a \cdot t$$

$$\text{pour } -T/2 < t < T/2$$

$$\text{avec } a > 0$$

Donner l'équation du mouvement de la masse m et sa solution en régime permanent en ne retenant que les deux premiers termes de la série de FOURIER de la

fonction périodique $s(t)$ de période T différente de $T_0 = 2\pi/\omega_0$.



EXERCICE 37**I- Régime libre non amorti**

On considère le système à un degré de liberté de la figure 1.

Le disque homogène de masse M et de rayon R peut pivoter autour d'un axe horizontal fixe et passant par son centre.

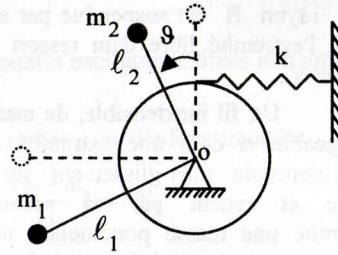
Deux tiges rigides, sans masse et faisant un angle droit entre elles, sont solidaires du disque.

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 sont attachées à leur extrémité de sorte que $Om_1 = \ell_1$ et $Om_2 = \ell_2$.

Un ressort sans masse et dont une extrémité est fixe, est relié au disque comme indiqué sur la figure. Le système est en équilibre statique lorsque la tige ℓ_2 est verticale et sa position au cours du mouvement est repérée par un angle $\vartheta(t)$ compté à partir de cette position d'équilibre prise pour origine. On pourra, dès le début, considérer le cas des oscillations de faibles amplitudes et faire l'approximation :

$$\sin \vartheta \cong \vartheta \quad ; \quad \cos \vartheta \cong 1 - (\vartheta^2/2)$$

- 1) l'équilibre statique du système est-il obtenu avec une déformation préalable du ressort ou sans déformation de celui-ci ?
- 2) calculer l'énergie potentielle totale du système et donner son expression complète.
- 3) donner la condition d'équilibre stable.
- 4) utiliser cette condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.
- 5) calculer l'énergie cinétique du système.
- 6) écrire le Lagrangien et en déduire l'équation différentielle du mouvement du système.

**Figure 1**

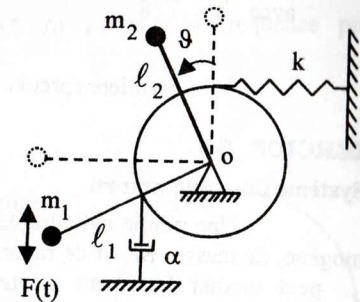
- 7) quelle est la condition pour qu'il y ait des oscillations autour de la position d'équilibre ?
- 8) donner l'expression de la fréquence propre et celle de l'équation du mouvement du système, solution de l'équation différentielle, si à l'instant $t = 0$, on avait :

$$\vartheta(0) = 0,1 \text{ rad} \quad ; \quad \dot{\vartheta}(0) = 0$$

II- Régime amorti forcé

En réalité le système subit un frottement de type visqueux qui peut être représenté par un amortisseur de coefficient α et placé selon la figure 2.

De plus, on soumet le système à une force $F(t)$ périodique verticale appliquée à la masse m_1 .

**Figure 2**

- 9) donner alors la nouvelle équation différentielle du mouvement pour ce système amorti forcé.

- 10) sachant que : $m_1 = m_2 = m = M/8$; $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

$$k = \frac{2mg\ell}{R^2} \quad ; \quad R = \ell/2$$

Montrer que l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit :

$$\ddot{\vartheta} + 2\delta\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = \frac{F(t)}{3m\ell}$$

en précisant les expressions de δ et de ω_0 .

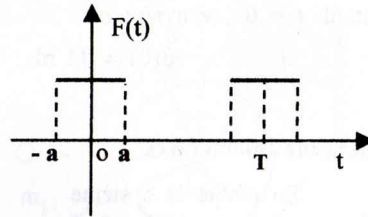
Dans la suite on utilisera cette équation différentielle simplifiée.

- 11) sachant que $F(t)$ est donnée par le graphe ci-dessous, quel est son développement en série de FOURIER ?

12) Reprendre l'équation différentielle précédente en y remplaçant la force $F(t)$ par sa série de FOURIER et donner la solution de celle-ci, équation du mouvement $\vartheta(t)$ du système, si on ne retient que les trois premiers termes (jusqu'à $n=2$) du développement.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 < t < a \\ 0 & a < t < T-a \\ F_0 & T-a < t < T \end{cases}$$

avec $a = T/8$



(première épreuve Novembre 1986)

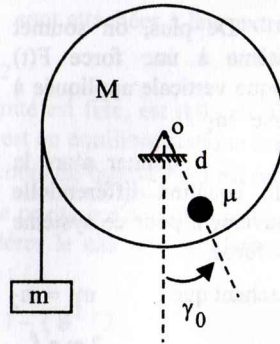
EXERCICE 38

I- Système libre non amorti

Une poulie cylindrique homogène, de masse M et de rayon R , peut tourner librement autour d'un axe horizontal et fixe O .

Sur la poulie est enroulé un fil inextensible dont une extrémité est solidaire du pourtour de la poulie et l'autre extrémité libre porte une masse m .

Une autre masse μ est fixée sur le cylindre à la distance d du centre O .



A l'équilibre la direction $O\mu$ fait un angle γ_0 avec la verticale.

On prendra pour tout le problème : $M = \mu = 2m$.

1) on communique à la poulie une rotation d'angle ϑ petit autour de γ_0 .

a) calculer en fonction de ϑ l'énergie potentielle U du système.

b) trouver la condition d'équilibre, relation entre γ_0 , R et d .

c) en déduire la forme quadratique de l'énergie potentielle U du système. On rappelle pour cela que $\sin \vartheta \cong \vartheta$ et $\cos \vartheta \cong 1 - (\vartheta^2/2)$.

d) soit E l'énergie totale du système, tracer sur le même graphe $U(\vartheta)$ et E pour $0 < \gamma_0 < \pi/2$.

y représenter l'énergie cinétique T du système quand il passe par sa position d'équilibre.

Refaire le graphe pour $\pi/2 < \gamma_0 < \pi$.

Dans lequel de ces deux cas avons nous un mouvement vibratoire ?

2) calculer le Lagrangien du système et en déduire l'équation différentielle qui régit $\vartheta(t)$.

En précisant la condition sur γ_0 , donner la fréquence propre ω_0 du système.

II- Système amorti forcé

3) la masse μ est soumise à une force de frottement linéaire $f = -\alpha \dot{y}$ comme indiqué sur la figure tandis qu'une force d'excitation $F(t) = F_0 \sin \omega t$ est appliquée à la masse m suivant la verticale.

a) donner l'équation de Lagrange qui régit $\vartheta(t)$ sous la forme :

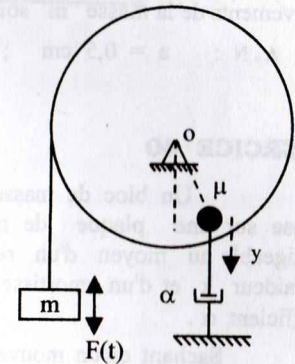
$$\ddot{\vartheta} + 2\delta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = S \sin \omega t$$

en précisant l'expression de δ et de S ainsi que les dimensions de chacun des termes de cette équation.

b) montrer que cette équation admet une solution particulière sous la forme: $\vartheta(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$ et donner l'expression de $A(\omega)$ et de φ en fonction de ω , ω_0 et δ .

c) si $\tau = 1/\delta$ est la constante de temps, la solution particulière, ci-dessus obtenue, est-elle valable pour $t \gg \tau$ ou $t \ll \tau$?

(1^{er} problème, synthèse 1989)



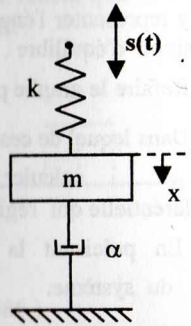
EXERCICE 39

Une masse m , suspendue à un ressort de raideur k , a un mouvement amorti par un frottement visqueux tandis que le point d'attache du ressort est soumis à un déplacement forcé :

$$s(t) = a \cos \omega t$$

- 1) calculer le Lagrangien de ce système.
- 2) en déduire son équation différentielle du mouvement.
- 3) donner l'expression de sa solution particulière représentant le régime permanent.
- 4) calculer le facteur d'amortissement δ pour que, lorsque $\omega = \omega_0$ (pulsation propre du système), l'amplitude des mouvements de la masse m soit égale à $20 a$.

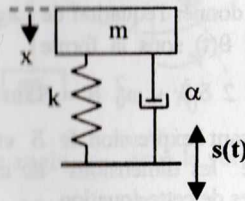
A.N : $a = 0,5 \text{ cm}$; $k = 10^3 \text{ N/m}$; $m = 0,1 \text{ kg}$

**EXERCICE 40**

Un bloc de masse m repose sur une plaque de masse négligeable au moyen d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient α .

Sachant qu'un mouvement sinusoïdal vertical $s(t) = S_0 \sin \omega t$

est imposé en permanence à la plaque, on demande d'établir l'équation différentielle du mouvement de vibration vertical du bloc m et d'en déduire la solution $x(t)$ relative au régime permanent.



III . SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE



III.1 SYSTEMES LIBRES ET FORCES

TRANSDUCTEURS

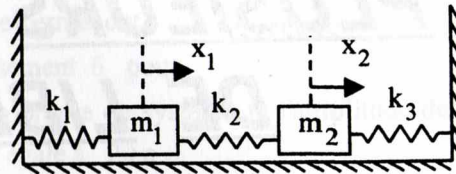
EXERCICE 41

Couplage d'oscillateurs accordés

Deux masses m_1 et m_2 se déplacent sans frottement sur un plan horizontal et sont reliées à trois ressorts de raideurs respectives k_1 , k_2 et k_3 .

Les extrémités de l'ensemble sont maintenues fixes.

On désignera par x_1 et x_2 les écarts de ces deux masses de leur position d'équilibre.



Première partie

- 1) on fixe la masse m_2 . Calculer la pulsation propre ω_{01} de la masse m_1 .
- 2) on fixe la masse m_1 . Calculer la pulsation propre ω_{02} de la masse m_2 .
- 3) les masses sont toutes deux libres : écrire les équations différentielles du mouvement du système.
- 4) rechercher les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système que l'on exprimera en fonction de ω_{01} , ω_{02} et du coefficient de couplage :

$$\Gamma = \frac{k_2}{\sqrt{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}} \quad (\text{couplage élastique})$$

- 5) montrer que Γ varie entre certaines valeurs limites.
- 6) comparer ω_{01} , ω_{02} , ω_1 et ω_2 . Conclusion ?

Deuxième partie

Simplifier le problème en considérant dans toute la suite le cas particulier où le système est symétrique :

$$m_1 = m_2 = m \quad ; \quad k_1 = k_3 = k \quad ; \quad k \neq k_2$$

(on dit que l'on a affaire à un couplage d'oscillateurs accordés)

- 7) rechercher deux nouvelles variables X_1 et X_2 , combinaisons linéaires de x_1 et x_2 , qui découplent les équations différentielles (coordonnées normales).

Puis résoudre ce système d'équations différentielles découplées afin de retrouver les pulsations propres ω_1 et ω_2 ainsi que la solution générale du mouvement en $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

8)

- a) on dit que le couplage est très serré lorsque $\Gamma = 1$:
que deviennent, dans ce cas, les pulsations propres ? Discuter le type d'oscillations obtenues alors.

- b) on dit que le couplage est très lâche lorsque $\Gamma \approx 0$:
que deviennent les pulsations propres du système ? Discuter.

trouver la solution générale du mouvement sachant qu'à $t = 0$ la masse m_2 était au repos alors que la masse m_1 était écartée de X_0 puis abandonnée sans vitesse initiale. Montrer qu'un phénomène de battements apparaît en représentant les variations d'amplitudes $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

- c) le couplage est dit lâche si $\Gamma \ll 1$:

par des approximations, déterminer les relations entre les pulsations propres $\omega_{1,2}$, la période de battement T_B , la période d'oscillation T_{osc} et le coefficient de couplage Γ .

- d) établir l'expression de l'énergie totale moyenne de chaque masse (on négligera l'énergie stockée par le ressort de couplage).

En déduire une définition de la période de battements T_B .

EXERCICE 42

La poulie, assimilée à un cylindre homogène de rayon R et de masse M tourne sans frottement autour d'un axe horizontal fixe.

Le contact entre la poulie et le câble se fait sans glissement.

1) quel est le nombre de degrés de liberté du système ?

2) trouver les fréquences propres du système dans le cas particulier où :

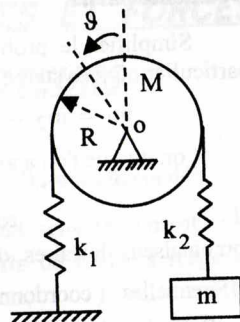
$$M = 2m \quad \text{et} \quad k_1 = k_2 = k$$

3) déterminer les modes propres et donner la solution générale.

4) on fixe la masse m . Calculer la pulsation propre ω_{01} du mouvement de M .

5) on fixe la masse M . Calculer la pulsation propre ω_{02} du mouvement de m .

6) comparer ω_{01} et ω_{02} aux pulsations propres du système couplé.
Conclusion ?

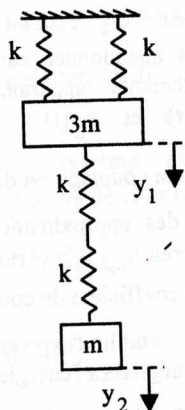
**EXERCICE 43**

Deux masses $3m$ et m sont reliées entre elles et à un support fixe par quatre ressorts identiques de raideur k .

Elles se déplacent verticalement et y_1 et y_2 donnent leurs abscisses par rapport à la position d'équilibre.

1) trouver les pulsations propres de ce système.

2) donner la solution générale des équations différentielles de son mouvement.

**EXERCICE 44**

Une tige rigide, sans masse et de longueur 2ℓ porte à chacune de ses extrémités une masse ponctuelle m et peut pivoter autour d'un axe horizontal fixe situé en son milieu.

L'une des masses m est attachée à un ressort

vertical de raideur k_1 dont une extrémité est fixe.

L'autre masse m est couplée par un ressort de raideur k_2 à une troisième masse ponctuelle M laquelle est elle-même attachée à un troisième ressort vertical de raideur k_3 .

À l'équilibre statique la tige est horizontale et au cours du mouvement elle est repérée par l'angle θ tandis que la position de la masse M est donnée par y . Les frottements sont négligeables et les oscillations de faibles amplitudes.

1) donner le Lagrangien du système.

2) donner les équations différentielles du mouvement.

3) quelles seront les pulsations propres dans le cas particulier :

$$M = 2m \quad ; \quad k_1 = k_2 = k \quad ; \quad k_3 = 2k$$

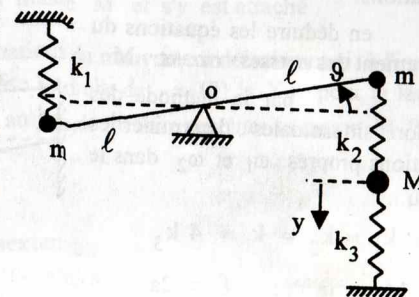
4) donner les modes propres et les équations générales du mouvement.

EXERCICE 45

Le système mécanique présenté sur la figure est constitué d'une barre sans masse, de longueur ℓ , mobile autour d'un axe fixé à l'une de ses extrémités A. Une masse m et un ressort de raideur k_1 sont fixés à l'autre extrémité B.

Au milieu de la barre est suspendue, par l'intermédiaire d'un ressort k_2 , une masse M sur laquelle on fixe un ressort de raideur k_3 .

En position d'équilibre la barre est horizontale.



1) calculer le Lagrangien de ce système dans le cas des petites oscillations.

2) en déduire les équations du mouvement des masses m et M .

3) par la méthode des solutions sinusoïdales, déterminer les pulsations propres ω_1 et ω_2 dans le cas où :

$$k_1 = k_2 = k = 4k_3$$

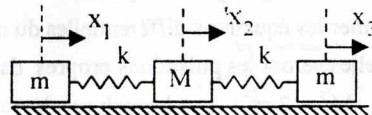
$$M = m ; \quad \ell = 2a$$

4) déterminer les rapports d'amplitude pour chaque mode propre associé à ces pulsations et en déduire les solutions $\vartheta(t)$ et $y(t)$ sachant qu'à l'instant $t=0$ on avait :

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 ; \quad \dot{\vartheta}(0) = 0 ; \quad y(0) = 0 ; \quad \dot{y}(0) = 0$$

EXERCICE 46

Deux masses identiques m , situées de part et d'autre d'une troisième masse M , sont reliées à celle-ci par deux ressorts de raideur k et de masse négligeable.

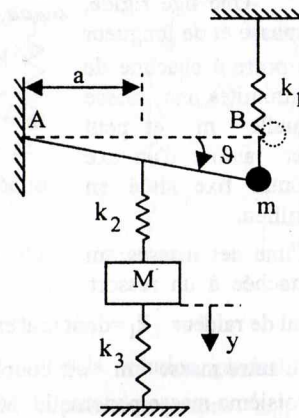


Les trois masses peuvent être considérées comme ponctuelles, se déplaçant sans frottement sur le bâti horizontal et repérées par leurs abscisses respectives x_1 , x_2 et x_3 comptées à partir de leurs positions de repos.

On pourra supposer les oscillations d'amplitudes faibles.

1) écrire le Lagrangien de ce système et en déduire les équations différentielles de son mouvement de vibration.

2) en faisant l'hypothèse que les solutions sont de forme sinusoïdale, trouver les pulsations propres et les modes propres correspondants.



3) donner les expressions des solutions générales sachant qu'à l'instant initial la masse m de droite est venue, avec le ressort, percuter à la vitesse V_0 la masse M et s'y est attaché.

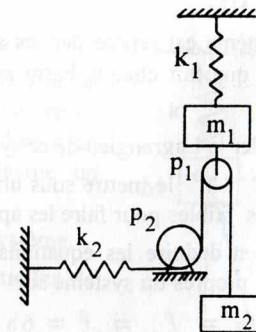
4) quelles seraient les équations du mouvement des masses si à l'instant initial on avait écarté la masse de droite de $x_3(0) = X_0$ pour la lâcher ensuite sans vitesse initiale au lieu de lui faire percuter la masse M ?

EXERCICE 47

Un fil inextensible s'enroule sans glisser sur deux poulies identiques, de masses négligeables P_1 et P_2 .

Il a une extrémité attachée à un support par l'intermédiaire d'un ressort k_2 , l'autre portant une masse m_2 .

La poulie P_2 est montée sur un axe horizontal fixe tandis que la poulie P_1 est suspendue par son axe à un ressort k_1 portant également une masse m_1 .



1) quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

2) faire un choix de coordonnées généralisées indépendantes permettant de repérer la position du système et donner son Lagrangien.

3) en déduire les équations différentielles du mouvement.

4) donner les pulsations propres du système dans le cas particulier où :

$$k_1 = k_2 = k ; \quad m_1 = m_2 = m$$

5) donner les modes propres associés à ces pulsations et la solution générale de l'équation du mouvement.

6) trouver les conditions initiales du mouvement sachant que les oscillations se font uniquement selon le second mode, correspondant à la pulsation la plus grande.

EXERCICE 48

Deux barres, de masses et longueurs respectives m_1 , ℓ_1 et m_2 , ℓ_2 sont assemblées selon la figure.

La première est articulée à l'une de ses extrémités, en O_1 , tandis que la seconde peut pivoter autour d'un axe O_2 attaché à une distance a de son centre de gravité G_2 .

Le système est repéré par les angles ϑ_1 et ϑ_2 que fait chaque barre avec la verticale.

- 1) calculer le Lagrangien de ce système.
- 2) le mettre sous une forme quadratique en supposant les amplitudes faibles pour faire les approximations nécessaires.
- 3) en déduire les équations différentielles du mouvement et les pulsations propres du système si :

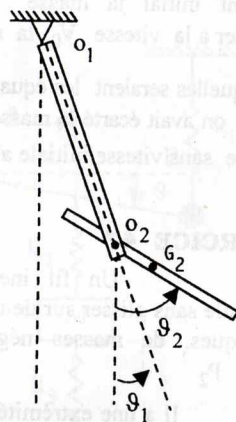
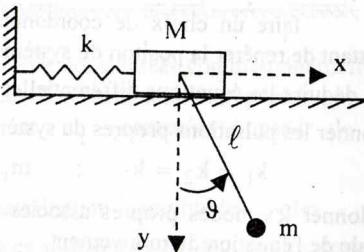
$$\ell_1 = \ell_2 = \ell = 6a \quad ; \quad m_2 = 4m_1 = m$$

EXERCICE 49

Une masse M pouvant se déplacer sans frottement sur un bâti horizontal est attachée à l'extrémité libre d'un ressort de raideur k .

Une tige rigide, de longueur ℓ , de masse négligeable, porte à son extrémité une masse ponctuelle m et constitue un pendule

dont l'articulation est solidaire du centre de gravité de M .



La translation de celui-ci est notée par X et la rotation du pendule par ϑ .

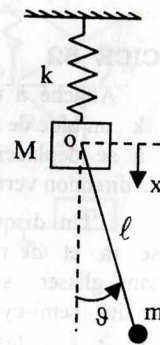
- 1) calculer le Lagrangien de ce système.
- 2) faire l'approximation des faibles oscillations et donner les équations différentielles du mouvement
- 3) en faisant l'hypothèse des solutions sinusoïdales trouver les pulsations propres de ce système puis les modes propres qui leur sont associés dans le cas particulier où : $M = 2m$; $k = \frac{mg}{\ell}$.

En déduire $X(t)$ et $\vartheta(t)$.

EXERCICE 50

Une tige rigide, sans masse, de longueur ℓ porte une masse ponctuelle m et constitue un pendule dont l'axe O passe par le centre de gravité d'une autre masse M , attachée à un ressort de raideur k , et qui effectue un mouvement vertical uniquement.

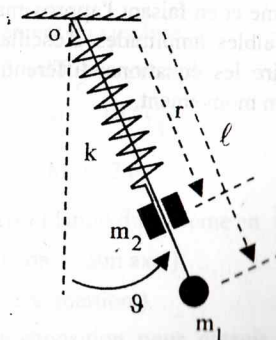
- 1) calculer le Lagrangien de ce système.
- 2) donner les équations différentielles de son mouvement.
- 3) faire les approximations de très faibles amplitudes pour linéariser ces équations et donner leurs solutions, équations du mouvement. Conclusion ?

**EXERCICE 51**

Une masse m_1 est attachée à l'extrémité d'une tige rigide, sans masse et de longueur ℓ , constituant ainsi un pendule.

Une autre masse m_2 glisse sans frottement le long de cette tige en restant solidaire de l'extrémité d'un ressort de raideur k .

L'ensemble oscille dans un plan vertical.



Les masses m_1 et m_2 peuvent être considérées comme ponctuelles.

On notera par ℓ_0 la longueur naturelle du ressort et par r_e la position de la masse m_2 à l'équilibre statique.

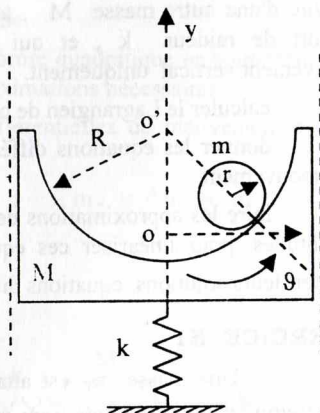
- 1) donner l'énergie cinétique du système
- 2) donner son énergie potentielle.
- 3) en déduire la condition d'équilibre statique stable.
- 4) écrire les équations différentielles du mouvement de ce système.

EXERCICE 52

Attaché à un ressort de raideur k un bloc de masse M est astreint à se déplacer uniquement suivant la direction verticale Oy .

Un disque homogène de masse m et de rayon r peut rouler sans glisser sur le contour d'une cavité semi-cylindrique, de rayon $R > r$, taillée dans le bloc M .

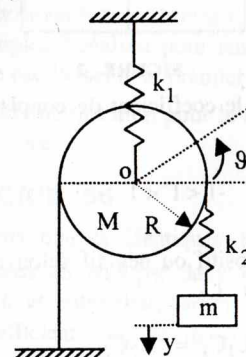
Calculer le Lagrangien de ce système et en faisant l'approximation des faibles amplitudes d'oscillation, déduire les équations différentielles de son mouvement.



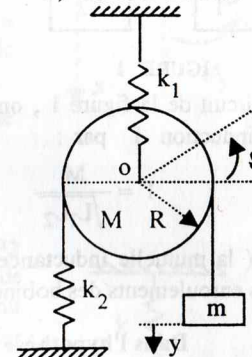
EXERCICE 53

Un disque homogène de rayon R et de masse M est suspendu par son axe à un ressort de raideur k_1 . Un fil inextensible s'enroule sans glisser sur cette poulie, une de ses extrémités étant fixée à un bâti l'autre attachée à une masse m . Un second ressort, de raideur k_2 est inséré dans le prolongement du fil :

a) du côté de la masse m



b) du côté du bâti



trouver dans chacun des cas :

- 1) le Lagrangien du système.
- 2) les équations différentielles du mouvement.
- 3) les pulsations propres du système.
- 4) la solution générale donnant le mouvement du système a).

Pour simplifier la résolution des questions 3 et 4, on prendra :

- pour le système a) $k_1 = k_2 = k$; $M = 10 \frac{m}{3}$
- pour le système b) $k_1 = k_2 = k$; $M = 2 m$

Indication : décomposer le mouvement d'oscillation du système en :

- ❖ une rotation de la poulie (sans translation de son axe)
- ❖ une translation de l'axe de la poulie (sans rotation)

Appliquer ensuite le principe de superposition pour obtenir un mouvement général.

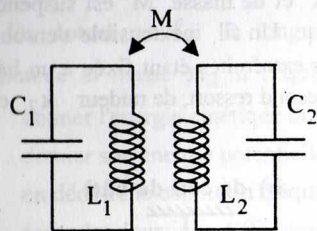
EXERCICE 54**Couplage par mutuelle induction**

FIGURE 1

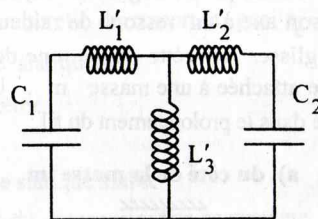


FIGURE 2

Pour le circuit de la figure 1, on définit le coefficient de couplage par mutuelle induction Γ par :

$$\Gamma = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad \text{avec} \quad -1 < \Gamma < 1$$

où M (la mutuelle inductance) est positif ou négatif selon le sens relatif des enroulements des bobines L_1 et L_2 .

Dans l'hypothèse où $L_1 C_1 = L_2 C_2$

1) déterminer, en fonction de Γ , les pulsations propres du circuit 1 dans les cas suivants :

$$\Gamma = 0 \quad (\text{selfs éloignées}) \quad \text{et} \quad |\Gamma| = 1 \quad (\text{selfs rapprochées})$$

2) si $L_1 = 1 \text{ mH}$ et $C_1 = 1 \mu\text{F}$

pour quelle valeur de L'_1 , L'_2 et L'_3 le circuit de la figure 2 aura-t-il les mêmes pulsations propres que le précédent ?

EXERCICE 55

Le système représenté sur la figure consiste en deux pendules simples identiques de masse m et de longueur ℓ mis bout à bout.

- calculer le Lagrangien exact du système.
- on ne considère maintenant que les petits mouvements autour de la position d'équilibre :

donner l'expression du Lagrangien approché.

3) établir les équations différentielles du mouvement en $\vartheta_1(t)$ et $\vartheta_2(t)$.

4) calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système. Donner les deux modes propres associés et la solution générale du mouvement du système.

5) trouver les conditions initiales les plus simples à réaliser pour lesquelles le système oscille selon le premier mode.

Même question pour le deuxième mode propre.

EXERCICE 56

Deux masses identiques m_1 et m_2 sont reliées au bâti par deux ressorts de raideur k et, entre elles, par un amortisseur de coefficient α de façon à osciller verticalement.

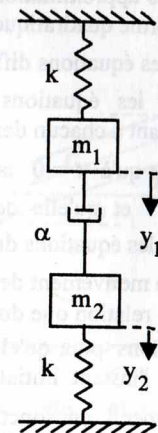
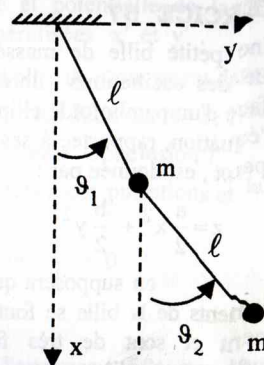
En utilisant deux combinaisons linéaires $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ des déplacements des masses m_1 et m_2 déterminer :

- les deux équations différentielles découplées en $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ qui régissent le mouvement.
- les pulsations propres du système.
- les solutions générales $y_1(t)$ et $y_2(t)$ du mouvement des masses m_1 et m_2 .

4) déterminer complètement ce mouvement si à $t = 0$:

$$y_1(0) = y_0 ; \quad y_2(0) = y_0 ; \quad \dot{y}_1(0) = 0 ; \quad \dot{y}_2(0) = 0$$

5) donner un exemple de conditions initiales telles que les deux masses effectuent des oscillations libres amorties en opposition de phase et de pseudo-pulsation ω_a .

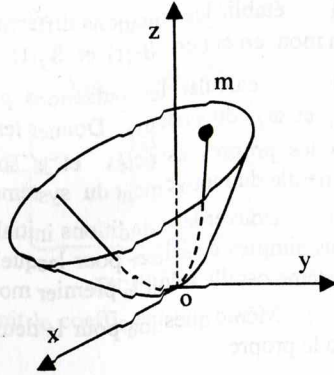


EXERCICE 57

Une petite bille de masse m effectue des oscillations libres sur la surface d'un parabolôïde elliptique dont l'équation, rapportée à ses axes principaux, est donnée par :

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}y^2$$

on supposera que les déplacements de la bille se font sans frottement et sont de très faibles amplitudes, particulièrement suivant l'axe z , c'est à dire que la surface du parabolôïde est de forme très aplatie.



- 1) écrire l'énergie potentielle et cinétique de la bille.
- 2) faire les approximations nécessaires pour en déduire son Lagrangien sous une forme quadratique.
- 3) écrire les équations différentielles du mouvement.
- 4) trouver les équations du mouvement et les pulsations propres, correspondant à chacun des deux degrés de liberté.
- 5) sachant qu'à $t = 0$ la bille se trouvait à la position $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$ et qu'elle débute son mouvement sans vitesse initiale, déterminer les équations du mouvement de celle-ci.
- 6) si ce mouvement de la bille se fait en l'absence de tout frottement, trouver la relation que doivent vérifier les deux périodes T_1 et T_2 de ses oscillations pour qu'elle repasse exactement par la même position occupée à l'instant initial $t = 0$. Quelle conclusion peut-on faire ?

Exprimer, en fonction de T_1 et T_2 , l'instant t_0 de premier passage de la bille par cette même position initiale (x_0, y_0) en supposant $b > a$.

- 7) si le parabolôïde elliptique précédent avait été rapporté à un système d'axes $OX'Y'Z'$ tel que OZ' soit parallèle à Oz et que OX' et OY' fassent un angle γ avec les axes OX et OY , que deviendrait son équation ?

- 8) trouver alors l'énergie cinétique et potentielle de la bille en fonction des nouvelles coordonnées généralisées x' et y' .

- 9) que deviennent les équations différentielles du mouvement dans ce cas.
- 10) de quelle nature est le couplage entre les deux degrés de liberté.
- 11) trouver les pulsations propres du système. Conclusion ?
- 12) déterminer les modes propres associés à ces pulsations et la solution générale du mouvement.
- 13) retrouve-t-on le résultat du 4) pour $\gamma = 0$?

EXERCICE 58

Reprendre l'étude du système de l'exercice 55 par la méthode matricielle et :

- 1) donner les matrices T , U et L du système.
- 2) retrouver ses pulsations propres. Conclusion ?

EXERCICE 59

La figure schématise un camion avec sa suspension mais sans les amortisseurs.

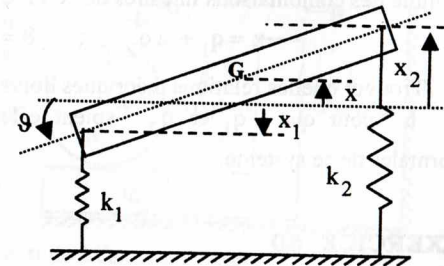
On suppose que les ressorts restent verticaux au cours du mouvement.

La masse du camion est M et son moment d'inertie, par rapport à un

axe Δ horizontal passant par le centre de gravité G et perpendiculaire à la direction de la marche, est J .

Le déplacement vertical du centre de gravité G , par rapport à l'équilibre, est repéré par x (pompage). L'angle que fait le châssis avec le sol, par rotation autour de Δ est θ (tangage) ; il sera supposé petit.

L'inclinaison sur les côtés (roulis) est supposée nulle.



- 1) en prenant pour coordonnées généralisées le couple x et ϑ , donner les matrices $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \cdot \mathcal{U}$ du système.
- 2) la matrice $\mathcal{U}$, est-elle diagonale ? de quelle nature est le couplage ? Quelle condition doit on satisfaire pour que ce couplage disparaisse ?
- 3) trouver dans ce cas les pulsations propres du système et les équations de son mouvement. (tangage et pompage).
- 4) en choisissant maintenant pour coordonnées généralisées le couple x_1 et x_2 , donner les nouvelles matrices $\mathcal{T}'$, $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{L}'$.
- 5) la matrice $\mathcal{T}'$, est-elle diagonale ? quelle est la nature du couplage ? Quelle condition doit on satisfaire pour que ce couplage disparaisse ? conclusion.
- 6) trouver dans ce deuxième cas les pulsations propres du système. Conclusion.
- 7) On recherche des coordonnées généralisées q_1 et q_2 telles qu'aucun couplage n'apparaisse dans les résultats même dans le cas où aucune modification pratique n'est opérée dans le système. On les définit comme des combinaisons linéaires de x et ϑ par :

$$x = q_1 + a q_2 \quad ; \quad \vartheta = q_2 + b q_1$$

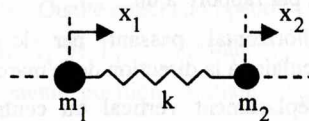
Trouver quelles relations théoriques doivent vérifier les coefficients a et b pour que q_1 et q_2 soient effectivement les coordonnées normales de ce système.

EXERCICE 60

Deux masses ponctuelles m_1 et m_2 reliées par un ressort de raideur k peuvent se déplacer librement de sorte que le ressort garde une direction fixe que l'on représentera par un axe Ox .

Soient x_1 et x_2 les abscisses de ces masses par rapport à la position d'équilibre du système (masses au repos et ressort non déformé).

- 1) calculer les énergies cinétique et potentielle de ce système.



- 2) en déduire les matrices $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$.
- 3) trouver les pulsations propres et leurs modes propres associés.
- 4) écrire la solution générale du mouvement de ce système.
- 5) dans le cas où le système serait libre, montrer qu'on aurait pu en utilisant les coordonnées de son centre de gravité G et le principe de la conservation de sa quantité de mouvement :

 - a) trouver les deux modes propres calculés en 3).
 - b) conclure que, pour le mode propre correspondant à la pulsation propre non nulle, les deux masses ne peuvent pas osciller en phase.

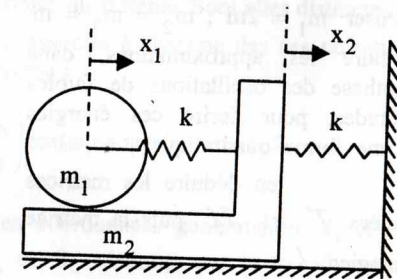
- 6) à partir du résultat établi en 4) donner les coordonnées normales X_1 et X_2 combinaisons linéaires de x_1 et x_2 .
- 7) vérifier que X_1 et X_2 découplent les équations différentielles et diagonalisent les matrices $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$.

EXERCICE 61

Un cylindre homogène de masse m_1 et de rayon R peut rouler sans glisser au dessus d'un plateau de masse m_2 qui peut lui même coulisser sans frottement sur un bâti horizontal.

Un ressort k relie le plateau à un support fixe

alors qu'un deuxième ressort le relie à l'axe du cylindre.



Ecarté de sa position d'équilibre puis relâché, le système effectue des oscillations de très faibles amplitudes.

- 1) calculer l'énergie potentielle U de ce système.
- 2) démontrer que son énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3m}{2} \right) \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{5m}{2} \right) \dot{x}_2^2$$

pour $m_1 = m$ et $m_2 = 2m$.

3) en prenant pour vecteur Ket : $|X\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices

$\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L}$ du système.

4) écrire, sous forme matricielle, les équations du mouvement et en déduire les pulsations propres.

5) trouver les modes propres associés à chacune de ces pulsations propres.

6) écrire la solution générale régissant le mouvement du système.

(1^{er} exercice, 2^{ème} épreuve JANVIER 1989)

EXERCICE 62

Trois pendules de masses m_1 , m_2 et m_3 sont couplés selon la figure. Les trois masses peuvent être considérées comme ponctuelles et les fils, tous de longueur ℓ , de masse négligeable.

1) trouver les énergies cinétique et potentielle de ce système.

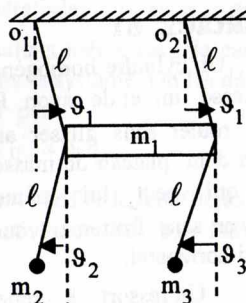
2) Poser $m_1 = 2m$; $m_2 = m_3 = m$ et faire les approximations, dans l'hypothèse des oscillations de faibles amplitudes, pour écrire ces énergies sous une forme quadratique.

3) en déduire les matrices associées $\mathcal{T}$ et $\mathcal{U}$ puis la matrice Lagrangien $\mathcal{L}$.

4) calculer les pulsations propres du système et les modes propres qui leur correspondent.

5) représenter ces différents modes.

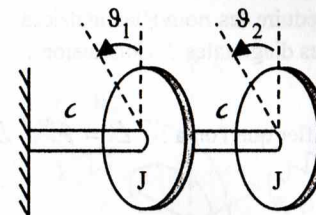
6) donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie M/L.



EXERCICE 63

Un arbre, encastré à l'une de ses extrémités, porte deux disques homogènes de même moment d'inertie J .

Les constantes de torsion des deux parties de l'arbre sont égales à $\mathcal{C}$.



En prenant pour coordonnées

généralisées ϑ_1 et ϑ_2 et en ne considérant que les oscillations de faibles amplitudes :

1) trouver les matrices $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{U}$ du système.

Sont elles diagonales ? quelle est la nature du couplage ?

2) écrire, sous forme matricielle, les équations du mouvement de ce système conservatif dans l'hypothèse des solutions sinusoïdales.

3) trouver les pulsations propres du système. Sont elles distinctes ?

4) trouver les modes propres, associés à chacune des ces pulsations propres, que l'on écrira sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vartheta_2(t) \end{pmatrix}_{\omega_i} = \vartheta_{0i} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \cos(\omega_i t + \psi_i) \quad i = 1, 2$$

5) rechercher deux nouvelles coordonnées généralisées X_1 et X_2 combinaisons linéaires de ϑ_1 et ϑ_2 obtenues par la transformation telle que :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{-1} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

où α_1 , β_1 et α_2 , β_2 sont respectivement les composantes des directions propres associées à chaque pulsation propre du système.

6) écrire les nouvelles expressions T' et U' de l'énergie cinétique et

potentielle du système, fonctions des nouvelles coordonnées généralisées X_1 et X_2 .

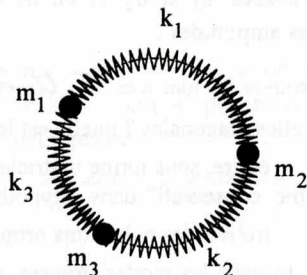
7) en déduire les nouvelles matrices T' , U' et $L' = T'^{-1} \cdot U'$. Sont-elles diagonales ? Conclusion.

8) vérifier que l'on a : $L' = P^{-1} L P$ et $L' = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$

EXERCICE 64

Trois masses reliées entre elles par des ressorts peuvent se déplacer sans frottement sur un guide circulaire.

On repérera la position des masses sur l'anneau par s_1, s_2, s_3 où s_j est la longueur de l'arc mesuré à partir d'une origine arbitraire mais fixe.



Pour chaque masse, on utilisera comme coordonnée généralisée la déviation : $x_j = s_j - s_{j0}$, où s_{j0} est sa position d'équilibre.

1) exprimer le Lagrangien de ce système en fonction des coordonnées x_j et des vitesses $\dot{x}_j$.

2) en déduire les équations différentielles du mouvement de ces masses.

3) en recherchant les solutions sous la forme : $x_j = A_j e^{j\omega t}$, trouver les pulsations propres du système dans le cas où :

$$m_1 = 10m ; m_2 = m_3 = m ; k_2 = k ; k_1 = k_3 = 5k$$

4) trouver les modes propres associés à ces pulsations et les interpréter par une représentation schématique.

5) donner l'expression du mouvement général des masses.

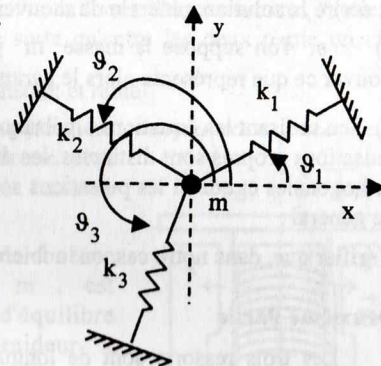
EXERCICE 65

oscillateur linéaire à 2 dimensions

Dans un plan horizontal, une masse m est reliée à trois ressorts k_n faisant des angles θ_n ($n = 1, 2, 3$) avec l'axe des x .

A l'équilibre, elle se trouve à l'origine des axes et les ressorts de longueur naturelle ℓ_{no} ne sont pas déformés.

On écarte cette masse jusqu'au point (x_0, y_0) et on la lâche sans vitesse initiale, elle se met alors à osciller dans le plan xOy .



Au cours du mouvement on peut considérer que les coordonnées x et y de la masse restent très petits devant les longueurs des ressorts.

Première Partie

1) en utilisant un développement limité au voisinage de l'origine, exprimer la déformation $\Delta \ell_n$, du ressort correspondant, comme une fonction des coordonnées x et y de la masse : $\Delta \ell_n = f(x, y)$.

2) en déduire l'énergie potentielle du système sous la forme quadratique :

$$U_{\text{Totale}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 k_{ij} q_i q_j \quad \text{avec} \quad q_1 = x \quad q_2 = y$$

3) écrire les équations de LAGRANGE du mouvement de m .

4) calculer les pulsations propres du système en fonction des coefficients de rigidité k_{ij} et de m .

5) donner les relations algébriques auxquelles doivent satisfaire les amplitudes d'oscillation A_1, B_1 et A_2, B_2 des différents modes associés aux pulsations propres.

6) en déduire les rapports d'amplitudes :

$$\beta_1 = \frac{B_1}{A_1} \quad , \quad \beta_2 = \frac{B_2}{A_2}$$

et écrire la solution générale du mouvement.

7) si l'on suppose la masse m vibrer selon un seul mode propre, trouver ce que représente alors le paramètre β_1 correspondant.

8) en utilisant les équations algébriques établies en 5) montrer que si les pulsations propres sont distinctes, les directions propres de vibration sont orthogonales et que si les pulsations sont égales, on ne peut rien conclure de général.

Vérifier que, dans notre cas, on a bien $1 + \beta_1\beta_2 = 0$.

Deuxième Partie

Les trois ressorts sont de longueur naturelle ℓ_0 et de raideur k identiques et leurs points d'attache fixes sont aux sommets d'un triangle équilatéral HIJ avec H en $(0, \ell_0)$.

L'origine des axes (et position de repos de m) étant alors au point d'intersection des médianes du triangle.

9) appliquer les résultats généraux précédents à ce cas particulier pour trouver les pulsations propres du système.

Que remarque-t-on ? Pouvaient-on s'attendre à ce résultat ?

10) Que remarque-t-on également au niveau de l'expression de l'énergie potentielle U du système et de ses équations du mouvement ? Que représentent alors x et y pour ce système ?

11) déterminer les constantes d'intégration sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, on a :

$$x(0) = x_0 \quad ; \quad y(0) = y_0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad ; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

12) démontrer que, dans le cas général, la trajectoire de m est une ellipse.

13) quelles doivent être les conditions initiales pour que la trajectoire de m dans le plan xoy soit :

- a) une droite ? b) un cercle ?

EXERCICE 66

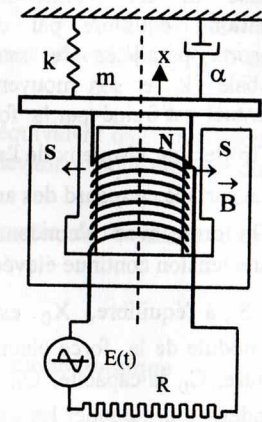
haut-parleur électrodynamique

Le haut-parleur électrodynamique est constitué d'un aimant permanent dont les pôles ont, l'un la forme d'une couronne, l'autre celle d'un cylindre concentrique, de sorte qu'entre les deux règne un champ

d'induction magnétique $\vec{B}$ constant et radial.

Entre ces deux pôles une bobine solidaire d'une membrane peut se déplacer parallèlement à l'axe de symétrie OX .

L'ensemble bobine membrane de masse m , est maintenu dans une position d'équilibre moyenne par un ressort de raideur k et subit au cours de son mouvement, en plus du freinage électromagnétique, un freinage, dû à l'air ambiant, de coefficient α . La bobine en série avec une résistance R est reliée électriquement à un générateur délivrant une tension $E(t)$.



Son inductance est L et la longueur totale de son fil ℓ .

1) écrire les équations différentielles du mouvement de l'ensemble bobine membrane en négligeant l'inertie de la masse d'air déplacée.

2) dans le cas d'un régime sinusoïdal : $E(t) = E_0 \cos \omega t$.

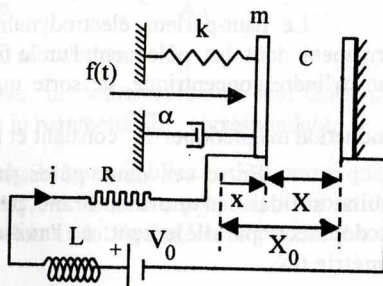
Déterminer l'expression de l'impédance $Z = \frac{E(t)}{i(t)}$ de ce système en mettant en évidence l'impédance électrique Z_e et l'impédance motionnelle Z_m .

3) représenter dans le plan complexe l'impédance motionnelle Z_m en faisant varier ω de 0 à l'infini.

EXERCICE 67**microphone électrostatique**

On considère un condensateur plan à air dont une armature est mobile par rapport à l'autre.

L'armature mobile de masse m est maintenue en position d'équilibre par deux ressorts parallèles de raideur globale k et son mouvement éventuel est freiné par la force



de frottement visqueux de l'air de constante de proportionnalité α .

La surface en regard des armatures est S et la permittivité de l'air ϵ_0 .

On forme, avec ce condensateur, un circuit RLC série que l'on soumet à une tension continue élevée V_0 .

1) Si, à l'équilibre, X_0 est la distance séparant les deux armatures, F_0 le module de la force électrique d'attraction qu'elles exercent l'une sur l'autre, C_0 la capacité, Q_0 la charge et V_0 la ddp aux bornes de ce condensateur ; donner les expressions reliant ces différentes grandeurs en régime stationnaire.

2) lorsque l'onde sonore de surpression incidente $p(t)$ agit sur l'armature mobile, elle lui applique une force $f(t) = S p(t)$ supposée sinusoïdale. Celle-ci provoque la mise en vibration forcée de l'armature mobile à la fréquence ω de l'onde. Cette armature vibrant, la capacité C varie et cette variation du paramètre capacité va provoquer une variation du courant électrique dans le circuit RLC. Ainsi le circuit électrique se trouve couplé au système mécanique par l'intermédiaire du paramètre capacité. On dira que l'on a affaire à un couplage paramétrique symétrique car ce système peut aussi fonctionner en haut-parleur.

On prendra pour axe des x la normale aux armatures et l'on choisira leur origine à la position d'équilibre de l'armature mobile, le sens positif vers l'armature fixe.

La distance entre les armatures devenant $X = X_0 - x$ et la charge $Q = Q_0 + q$ avec x très petit devant X_0 et q devant Q_0 .

trouver en régime variable les expressions de :

- la nouvelle capacité $C = f(x)$.
- la nouvelle ddp aux bornes du condensateur : $V = g(x, q)$.
- la nouvelle force électrique $F = h(q)$.

3) écrire les équations différentielles régissant les degrés de liberté x et q . Quel est le terme de couplage ?

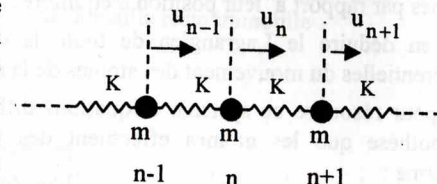
4) écrire l'impédance du système $Z = f(t)/\dot{x}(t)$ en régime sinusoïdal en mettant en évidence l'impédance électrique Z_e et l'impédance motionnelle Z_m .

5) donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie force-tension en précisant la correspondance devant chaque élément du circuit.

Dans tous ces calculs, on négligera l'inertie de la masse d'air déplacée et le terme en $x \cdot q$ devant les autres.

EXERCICE 68**chaîne monoatomique**

Soit la suite infinie de masses identiques m couplées par des ressorts identiques de raideur K .



1) trouver l'expression du Lagrangien de ce système.

2) écrire l'équation différentielle du mouvement de la masse de rang n .

3) on applique sur la masse de rang $n=0$ une force $F(t)$ horizontale et sinusoïdale de sorte que chaque masse du système ait un mouvement sinusoïdal horizontal dont on donnera l'expression.

4) établir la relation de dispersion $\omega(k)$ où $k = 2\pi/\lambda$ est le module du vecteur d'onde.

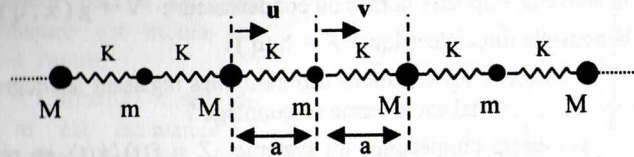
5) représenter graphiquement cette loi de dispersion $\omega = \omega(k)$.

6) en déduire la vitesse de propagation de l'énergie et la vitesse de phase.

7) quelles valeurs prennent ces vitesses aux fréquences de coupure ?

EXERCICE 69

chaîne diatomique



Deux types d'atomes de masses M et m ($M > m$) sont disposés, en très grand nombre, suivant une droite et de façon alternée (figure).

La liaison entre deux atomes voisins est symbolisée par un ressort de raideur K et à l'équilibre statique, la distance inter atomique est a .

La chaîne infinie ainsi constituée est dite : " chaîne diatomique " .

1) diviser cette chaîne en cellules ou " mailles élémentaires " toutes identiques et comportant chacune deux atomes différents puis attribuer à chaque maille un rang dans la chaîne .

2) calculer l'énergie cinétique T_n et l'énergie potentielle U_n de la maille de rang n si u_n et v_n sont les déplacements respectifs de ses atomes par rapport à leur position d'équilibre .

3) en déduire le Lagrangien de toute la chaîne puis les équations différentielles du mouvement des atomes de la maille de rang n .

4) pour résoudre ce système d'équations différentielles couplées, faire l'hypothèse que les atomes effectuent des vibrations harmoniques de la forme :

$$u_n(t) = A_n e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad v_n(t) = B_n e^{j\omega t}$$

avec
$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{B_n}{B_{n-1}} = e^{-j\varphi} = \text{constante} \quad \forall n$$

et en déduire la " relation de dispersion " $\omega(\varphi)$ de la chaîne diatomique.

5) montrer que la périodicité du graphe de $\omega(\varphi)$ permet d'en limiter l'étude à l'intervalle $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ et qu'il comporte deux branches qu'on notera $\omega_{BA}(\varphi)$ ou branche acoustique et $\omega_{BO}(\varphi)$ ou branche optique respectivement pour la branche inférieure et supérieure de $\omega(\varphi)$.

6) préciser les valeurs remarquables de $\omega(\varphi)$ et interpréter son graphe.

7) en supposant que l'atome M de la maille de rang zéro (que l'on choisira pour origine des abscisses) est le siège de vibrations forcées, $u_0(t) = A_0 e^{j\omega t}$, qui se transmettent de proche en proche aux atomes de rang supérieur, le long de la chaîne à la vitesse V :

a) exprimer la vibration d'un atome de rang n quelconque en fonction de son abscisse x :

$$x = 2na \quad \text{pour } M \quad \text{ou} \quad x = (2n+1)a \quad \text{pour } m$$

b) que représente alors φ ?

c) montrer que cette vibration est doublement périodique :

- ✓ dans le temps avec une période $T = 2\pi / \omega$
- ✓ dans l'espace avec une période $\lambda = VT$

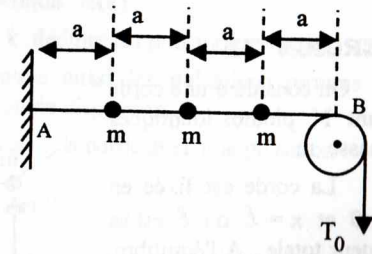
8) donner l'expression de $u(x, t)$ et de ω en fonction du paramètre $k = 2\pi / \lambda$ appelé " module du vecteur d'onde " .

9) en déduire les modes de vibration correspondant à chaque branche pour $k = 0$ puis pour $k = \pi / 2a$ et montrer que pour l'un de ces modes le centre de gravité de la maille reste immobile .

EXERCICE 70

Trois masses m ponctuelles et identiques sont fixées à une corde.

Cette corde est attachée par une extrémité à un point fixe A et à son autre extrémité B , qui passe par une petite poulie, une tension T_0 est exercée.



Au repos, la corde est horizontale et toutes les distances entre les masses et les extrémités sont égales à a .

On considère les petits déplacements u_1, u_2, u_3 des masses, par rapport à la position d'équilibre, verticalement dans le plan de la figure.

- 1) montrer que l'allongement total de la corde entre les points A et B est égal à :

$$\Delta \ell = \frac{1}{2a} \left[u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + (u_3 - u_2)^2 + u_3^2 \right]$$

- 2) en supposant tous les segments de corde soumis à une même tension et en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur des masses, calculer le Lagrangien de ce système.

- 3) montrer que le système d'équations différentielles du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{u}_1 + h \cdot (2u_1 - u_2) = 0$$

$$\ddot{u}_2 + h \cdot (2u_2 - u_1 - u_3) = 0$$

$$\ddot{u}_3 + h \cdot (2u_3 - u_2) = 0$$

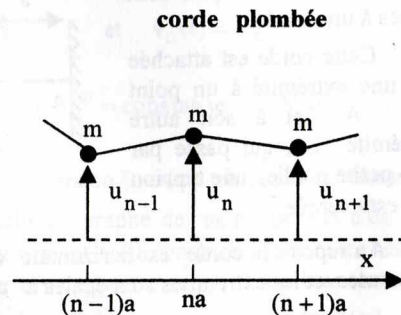
dans lequel h est une constante que l'on calculera.

- 4) calculer les pulsations propres du système.
5) déterminer ses modes propres et en donner une représentation.
6) donner l'expression de la solution générale du mouvement.

EXERCICE 71

On considère une corde portant N plombs identiques de masse m .

La corde est fixée en $x = 0$ et $x = \ell$ où ℓ est sa longueur totale. A l'équilibre, l'ensemble du système occupe une position horizontale et les segments sont identiques, de longueur a et soumis à une même tension T_0 .



On étudie le cas des oscillations transversales de faibles amplitudes.

- 1) calculer l'énergie potentielle du segment de corde relié à la masse de rang n .
2) en déduire l'équation différentielle du mouvement de cette masse.
3) si, pour un mode de pulsation ω , on peut écrire :

$$u_{n-1}(t) = A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_n(t) = A_n \cos(\omega t + \varphi)$$

$$u_{n+1}(t) = A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi)$$

en déduire la relation entre les amplitudes A_{n-1} , A_n et A_{n+1} .

- 4) si les rapports d'amplitudes sont tels que pour tout n on peut écrire $A_n = A \sin(nka)$ où k est un autre paramètre (module du vecteur d'onde) caractérisant le mode considéré, établir en utilisant le résultat du 3) la relation entre ω et k , appelée relation de dispersion.

- 5) en écrivant que la corde est fixée en $x = 0$ et $x = \ell = (N+1)a$, donc que son amplitude y est nulle, déterminer les valeurs possibles de k .

- 6) dans le cas où la corde est limitée à cinq plombs ($N = 5$) :

- a) quelles sont les valeurs possibles de k .
b) représenter les 5 modes correspondants.
c) tracer la courbe de dispersion $\omega(k)$.
d) à partir des valeurs de k déduire les pulsations propres.

- e) montrer qu'on retrouve aussi les pulsations propres de l'exercice 70 à l'aide de la relation de dispersion.

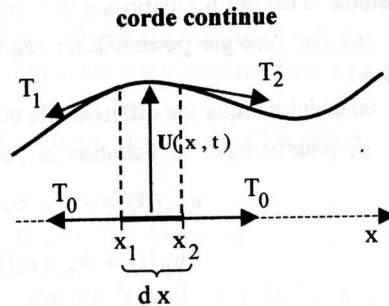
- f) on excite une des masses de la corde avec une pulsation

$$\omega = 4 \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \quad \text{que se passe-t-il alors ?}$$

- 7) on se place maintenant dans le cas de la corde continue (a très petit) : à partir de la relation de dispersion déjà établie, déduire celle de la corde continue et tracer cette courbe sur le graphe précédent.

EXERCICE 72

Soit une corde vibrante de longueur ℓ , de masse linéique μ et soumise à une tension T_0 .



- 1) Elle est fixée à ses extrémités en $x = 0$ et en $x = \ell$. Donner l'équation différentielle qui régit les déplacements transversaux

$u(x, t)$ de la corde en fonction de ses caractéristiques.

- 2) montrer que la solution stationnaire de l'équation de propagation peut se mettre, pour un mode de vibration, sous la forme :

$$u(x, t) = f(x) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

et déterminer l'expression de $f(x)$.

- 3) en tenant compte de ce que la corde est fixée en $x = 0$ et $x = \ell$ exprimer alors $u(x, t)$ pour un mode.

- 4) en déduire sous forme de série de FOURIER la solution générale du mouvement de cette corde.

- 5) sachant qu'à l'instant $t = 0$, $\dot{u}(x, 0) = 0$, comment se simplifie cette expression ?

- 6) la forme de la corde à $t = 0$ étant : $f(x) = a \sin\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right)$

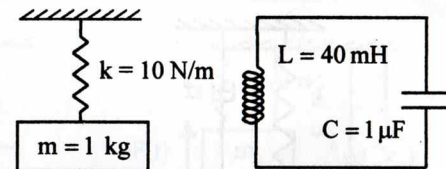
quelle est alors la solution générale du mouvement de cette corde ?

III.2 ANALOGIE ELECTROMECHANIQUE

IMPEDANCES

EXERCICE 73

Soient les deux systèmes mécanique et électrique suivants :



- 1) en utilisant la théorie de LAGRANGE, déterminer l'équation différentielle du mouvement de m .

- 2) en utilisant la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle de variation de la charge q du condensateur.

- 3) trouver une correspondance entre le système mécanique et le circuit électrique. Donner l'équivalent électrique du Lagrangien.

- 4) donner les solutions des équations différentielles sachant qu'à $t = 0$:
 $x(0) = 1 \text{ Cm}$; $\dot{x}(0) = 0 \text{ m/s}$; $q(0) = 2 \mu\text{C}$; $i(0) = 0 \text{ A}$

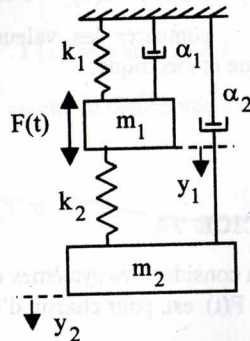
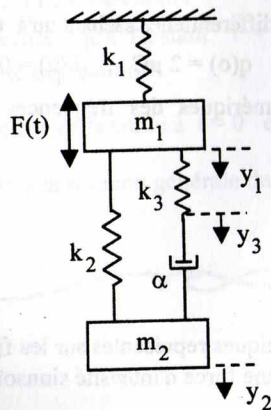
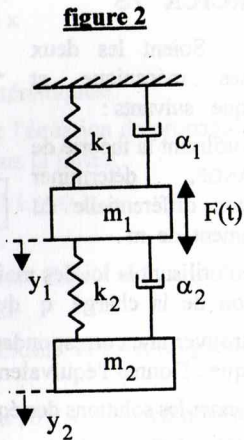
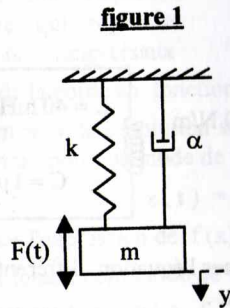
- 5) comparer les valeurs numériques des fréquences propres mécanique et électrique.

EXERCICE 74

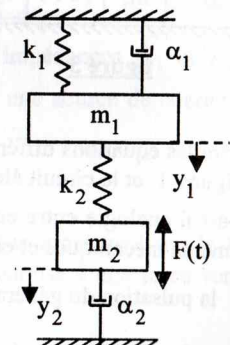
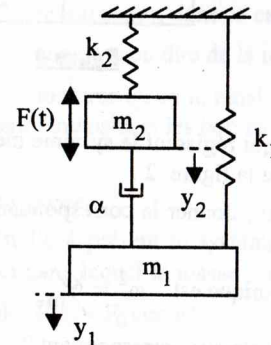
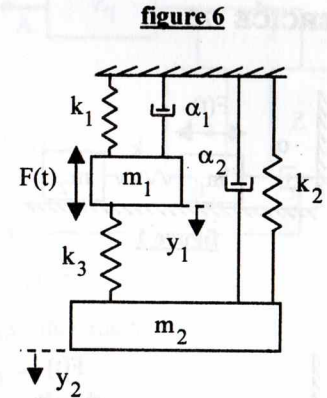
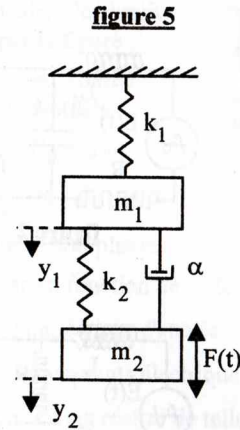
On considère les systèmes mécaniques représentés sur les figures 1 à 8 où $F(t)$ est, pour chacun d'eux, une force d'intensité sinusoïdale.

A) pour les systèmes de 1 à 4 :

- 1) établir les équations différentielles du système mécanique.
- 2) écrire les équations des circuits électriques analogues (analogie M/L et M/C) et représenter les schémas de ces circuits.
- 3) calculer l'impédance d'entrée vitesse du système mécanique; l'impédance d'entrée du circuit électrique analogue (force-tension) et l'admittance d'entrée du circuit analogue (force-courant).

**B) pour les systèmes de 5 à 8 :**

- 1) établir les équations différentielles du mouvement des masses m_1 et m_2
- 2) déterminer l'impédance d'entrée vitesse $Z_e = F(t)/v_e(t)$
- 3) déterminer l'impédance de transfert $Z_T = F(t)/v_s(t)$



4) que devient cette impédance :

- pour les systèmes 5, 7 et 8 si $\omega^2 = k_1/m_1$
- pour le système 6 si $\omega^2 = k_2/m_2$

en déduire l'expression de la vitesse de sortie, en amplitude et en phase.

5) donner un schéma électrique équivalent (analogie M/L).

EXERCICE 75

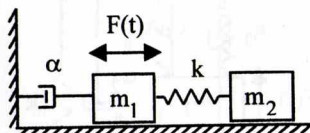


figure 1

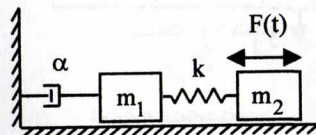


figure 3

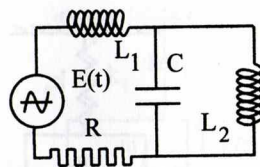


figure 2

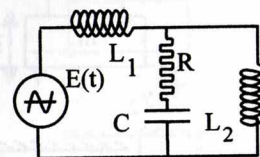


figure 4

1) écrire les équations différentielles qui régissent le système mécanique de la figure 1 et le circuit électrique de la figure 2.

2) y a-t-il analogie entre eux ? Si oui, donner la correspondance entre les éléments mécaniques et électriques.

3) la pulsation du générateur mécanique est $\omega^2 = k/m_2$

quelle est la pulsation du générateur électrique correspondant ?

comment se comportent les deux systèmes à ces pulsations ?

4) le système mécanique de la figure 3 est-il équivalent au circuit électrique de la figure 2 ? sinon donner le circuit électrique analogue (M/L).

5) trouver le système mécanique équivalent au circuit électrique de la figure 4.

EXERCICE 76

Première partie :

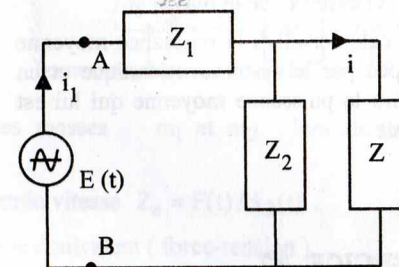
On considère le circuit représenté par la figure.

$E(t)$ est une source de tension sinusoïdale :

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

et Z_1 , Z_2 et Z sont

des impédances complexes.



1) calculer en fonction de Z_1 , Z_2 et Z :

- l'impédance d'entrée Z_{AB} du circuit.
- les courants électriques i_1 et i .

2) si le circuit est réalisé de telle sorte que $Z_1 + Z_2 = 0$

- montrer que, dans ce cas, i est indépendant de Z .
- que peut-on dire de la nature des impédances Z_1 et Z_2 ?
- montrer qu'on a, ainsi, construit une source de courant dont on précisera l'intensité et les bornes.

Deuxième partie :

On étudie à présent le système mécanique représenté par la figure suivante et dans lequel la masse m_1 est soumise à une force verticale sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

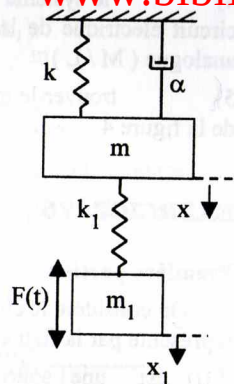
3) en donner une représentation électrique dans l'analogie force / tension.

4) en comparant cette représentation électrique avec le circuit précédent et en utilisant les résultats de la 1^{ère} partie :

a) calculer la pulsation Ω pour laquelle la vitesse de la masse m est indépendante de m, k et α .

b) donner, dans ce cas, l'expression de la vitesse $\dot{x}$ de la masse m .

c) calculer alors la puissance moyenne dissipée par le système mécanique et en déduire la puissance moyenne qui lui est fournie.



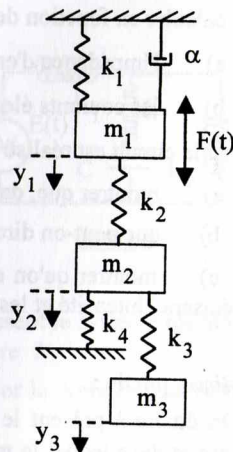
EXERCICE 77

1) établir les équations différentielles régissant le fonctionnement du système représenté par la figure suivante.

2) en déduire, dans l'analogie force-tension, les équations électriques et le circuit électrique équivalents.

3) dans le cas où la pulsation de la force extérieure $F(t)$ appliquée prend la valeur particulière $\omega^2 = k_3/m_3$, en déduire le comportement du système mécanique à cette pulsation.

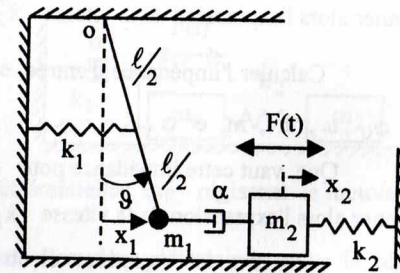
4) retrouver vos conclusions en utilisant cette fois le circuit électrique analogue M/C.



EXERCICE 78

Soit le système mécanique représenté sur la figure où la masse m_2 est soumise à une force $F(t) = F_0 \cos \omega t$

1) écrire les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$ qui régissent les



déplacements horizontaux des masses m_1 et m_2 lors de petites oscillations.

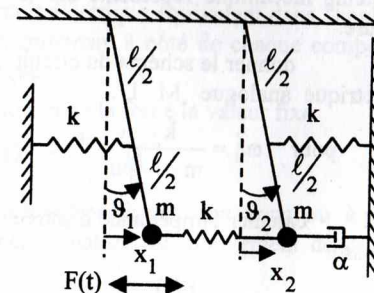
2) calculer l'impédance d'entrée vitesse $Z_e = F(t)/\dot{x}_2(t)$.

3) donner le schéma électrique équivalent (force-tension).

EXERCICE 79

On considère les deux pendules P_1 et P_2 couplés selon la figure.

Le pendule P_1 est soumis à une force d'excitation $F(t) = F_0 \cos \omega t$ horizontale et le pendule P_2 à un frottement visqueux proportionnel à sa vitesse linéaire.



1) établir les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$ régissant le mouvement des petites oscillations des deux pendules.

2) calculer l'impédance de transfert vitesse : $Z_T = F(t)/\dot{x}_2(t)$ en fonction de ω_0, ω, k, m et α .

$$\text{On posera } \omega_0^2 = \left(\frac{5k}{4m} + \frac{g}{\ell} \right)$$

3) Que vaut cette impédance pour $\omega = \omega_0$?

Donner alors l'expression de la vitesse $\dot{x}_2(t)$ pour $\omega = \omega_0$.

4) Calculer l'impédance d'entrée $Z_e = F(t) / \dot{x}_1(t)$ en fonction de ω_0 , ω , k , m et α .

5) Que vaut cette impédance pour $\omega = \omega_0$?

Donner alors l'expression de la vitesse $\dot{x}_1(t)$ pour $\omega = \omega_0$.

6) Donner les équations électriques et le schéma électrique équivalent (force-tension), en indiquant en face de chaque élément électrique son analogue mécanique.

EXERCICE 80

1) établir les équations différentielles régissant le fonctionnement du système mécanique représenté sur la figure.

2) donner le schéma du circuit électrique analogue M/L .

3) pour $\omega_0^2 = \frac{k_2}{m_2 + \frac{M}{2}}$

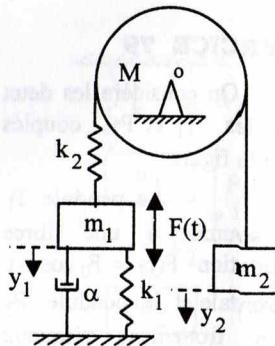
a) calculer l'impédance d'entrée vitesse:

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)}$$

b) en déduire les déplacements y_1 , y_2 et les vitesses $\dot{y}_1$, $\dot{y}_2$.

4) refaire toutes les questions en se plaçant dans l'analogie M/C .

5) les deux circuits électriques (M/L) et (M/C) présentent-ils une différence quant à leur réalisation pratique ?

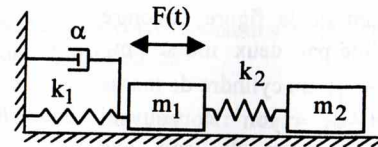


EXERCICE 81

On considère le système de la figure ci-contre.

Sur la masse m_1 agit une force horizontale sinusoïdale.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$



1) établir les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

2) en utilisant la notation complexe déterminer, pour le régime permanent, les vitesses $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ des deux masses.

3) pour quelles valeurs de fréquence les masses oscillent elles en phase ?

4) calculer l'impédance d'entrée $Z_e = F(t) / \dot{y}_1(t)$ et de transfert vitesse $Z_T = F(t) / \dot{y}_2(t)$ du système.

5) donner le schéma du circuit électrique équivalent dans l'analogie force-tension (ou M/L) en mentionnant à côté de chaque composant électrique son équivalent mécanique.

On donne à la pulsation de la force la valeur fixe

$$\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

6) par des déductions que l'on fera à partir des équations ou à partir du schéma électrique, déterminer la nature du mouvement de chaque masse.

7) donner la valeur de l'impédance Z_e et l'expression, en notation réelle, des vitesses $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$.

8) quelle est la force transmise par le ressort k_2 à la masse m_1 . En déduire la résultante des forces qui s'exercent sur elle pour justifier son comportement à cette pulsation particulière.

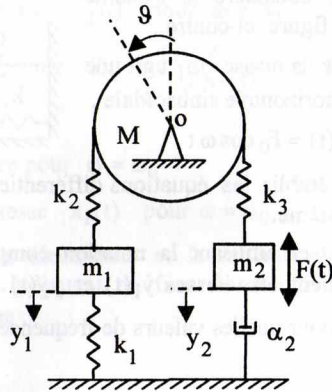
(1^{er} exercice 2^{ème} épreuve Mars 1995)

EXERCICE 82

On considère le système oscillant de la figure ci-contre constitué par deux masses m_1 et m_2 et un cylindre de masse M et de rayon R pouvant tourner autour de son axe horizontal et fixe O .

Le ressort k_1 relie la masse m_1 au bâti.

Le cylindre entraîne sans glissement un fil inextensible et de masse négligeable reliant les deux ressorts k_2 et k_3 .



On repère ce système à trois degrés de liberté par les déplacements y_1 , y_2 et $y_3 = R\theta$ que font respectivement les masses m_1 , m_2 et un point de la périphérie du cylindre par rapport à la position d'équilibre et on ne s'intéresse qu'aux petites oscillations.

première partie : système libre non amorti

1) trouver la matrice $\mathcal{L}$ associée à son Lagrangien en respectant l'ordre y_1 , y_2 , y_3 .

2) trouver les pulsations propres du système dans le cas où :

$$M = 4m ; m_1 = 2m ; m_2 = m ; k_1 = k_2 = k_3 = k$$

deuxième partie : système amorti forcé

On excite le système en appliquant en permanence une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \sin \omega t$ agissant verticalement sur m_2 .

Pour tenir compte du frottement on ajoute sur m_2 un amortisseur de coefficient α_2 et on suppose le cylindre soumis à une force de frottement dont α_3 est le coefficient de proportionnalité à la vitesse $\dot{y}_3 = R\dot{\theta}$.

3) donner les équations différentielles en $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$ qui régissent le mouvement.

4) donner les équations électriques correspondantes et le schéma électrique équivalent dans l'analogie force-tension.

5) le système mécanique étant excité à la pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$

- ✓ en déduire le nouveau schéma électrique.
- ✓ que peut-on conclure quant au mouvement de la masse m_1 ?
- ✓ donner le nouveau schéma mécanique.

(1^{ère} partie de l'examen de synthèse de Juin 1987)

EXERCICE 83

On donne $J = MR^2/2$ pour les systèmes représentés par les figures ci-dessous où J est le moment d'inertie de la poulie, M sa masse et R son rayon, l'axe de la poulie étant fixe. x_1 et x_2 sont les positions des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre.

On prendra : $M = 2(m_2 - m_1)$; $k_0 = k_1 = k_2 = k$ et $m_2 = m$

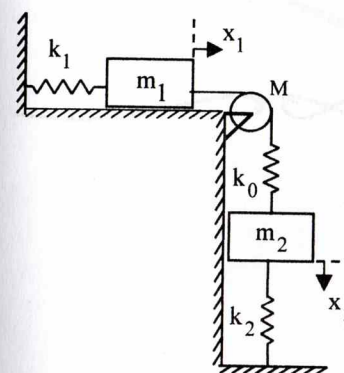


figure 1

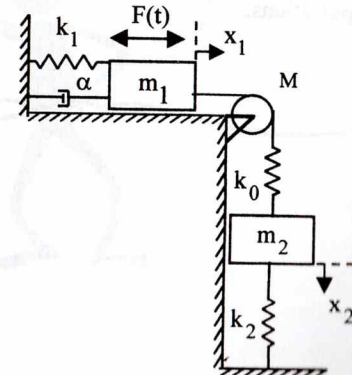


figure 2

- 1) pour le système libre représenté par la figure 1 :
- déterminer les pulsations propres en fonction de k et m .
 - trouver les modes propres relatifs à ces pulsations.
- 2) On considère le système de la figure 2 en régime permanent avec $F(t) = F_0 \cos \omega t$:

- établir les équations différentielles régissant le fonctionnement du système.
- calculer l'impédance d'entrée $Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)}$.
- calculer les vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ des masses m_1 et m_2 .
- donner le schéma électrique équivalent (M/L).
- à quelle pulsation ω_0 la masse m_1 reste-t-elle immobile ?

Quelle est dans ce cas l'amplitude des oscillations de m_2 ?

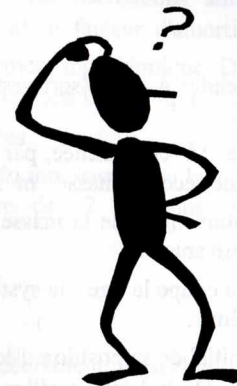
- à quelles pulsations la vitesse de la masse m_1 est-elle en phase avec la force $F(t)$?
 - en comparant ces pulsations à celles calculées au 1) a).
- déduire le déphasage de $\dot{x}_2$ par rapport à $F(t)$ pour chacune des pulsations.



IV . COMPLEMENT

D'EXERCICES

DIVERS



EXERCICE 84

A une masse m suspendue par un ressort de raideur k et au repos, on applique une force verticale $F(t)$.

1) trouver l'équation du mouvement de cette masse dans chacun des cas suivants :

- a) $F(t) = F_0 = \text{constante}$ c) $F(t) = F_0 e^{-at}$
 b) $F(t) = at$ d) $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \beta)$

2) en déduire le mouvement de la masse si la force qui lui est appliquée est donnée par $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

3) calculer la valeur de la masse m sachant que le ressort a subi un allongement statique $c = 20 \text{ mm}$ et que les vibrations de la masse, entretenues par une force $F(t) = 10 \cos 20 t$, ont une amplitude maximale $A = 5 \text{ mm}$.

4) quelle sera l'expression des vibrations de la masse m si $\omega = \omega_0$?

EXERCICE 85

Une masse M est suspendue à un ressort vertical sans masse et de raideur k .

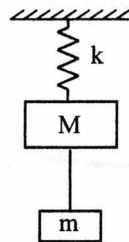
A cette première masse M est attachée, par une tige rigide et très légère, une seconde masse m .

établir l'équation du mouvement de la masse M dans les deux situations suivantes :

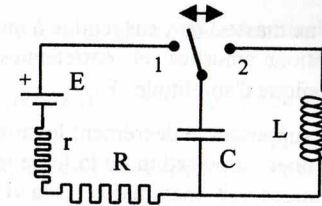
1) à l'équilibre statique on coupe la tige ; le système se met à osciller de lui même.

2) on écarte le système initial de sa position d'équilibre statique et on le lâche sans vitesse initiale. On le laisse osciller puis à l'instant t_0 on brûle la tige de liaison des deux masses.

On exprimera la position de la masse M par la coordonnée $x(t)$ comptée à partir de la position d'équilibre qu'occuperait la masse M suspendue seule au ressort et on choisira l'origine des temps au moment du début des oscillations.

**EXERCICE 86**

Dans le circuit de la figure l'interrupteur est d'abord placé en position (1) pendant un temps t_0 permettant au condensateur C de se charger grâce à la source de tension continue E de résistance interne r .



On bascule ensuite cet interrupteur en position (2).

1) exprimer la loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps et des paramètres indiqués sur la figure.

2) que devient l'expression de $q(t)$ si la résistance R , supposée de faible valeur, est placée en série avec la self L .

EXERCICE 87

Une masse $m = 5 \text{ kg}$, suspendue à un ressort de raideur $k = 2000 \text{ N/m}$, effectue des oscillations amorties par le frottement visqueux d'un milieu dont le facteur d'amortissement est δ .

1) déterminer le décrément logarithmique D de l'amortissement et la période T_a de ces oscillations sachant que l'amplitude a diminué de 12 fois au bout de 4 périodes.

2) donner l'équation du mouvement de la masse m si on l'a écartée de sa position d'équilibre de 2 cm puis on l'a lâchée sans vitesse initiale.

EXERCICE 88

Déterminer le décrément logarithmique d'amortissement d'un pendule simple de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$ sachant que son énergie mécanique totale diminue de $n = 40$ fois au bout de $t = 30 \text{ s}$ sous l'action du frottement visqueux de l'air.

On prendra $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et $T_a \approx T_0$

EXERCICE 89

Une masse m , suspendue à un ressort de raideur k , effectue des oscillations amorties et entretenues par l'action d'une force extérieure harmonique d'amplitude F_0 .

En supposant le décrément logarithmique d'amortissement D connu, déterminer la pulsation de la force telle que l'amplitude du déplacement de la masse soit maximale et, la valeur de cette amplitude maximale en fonction de m , k , D et F_0 .

EXERCICE 90

Une courbe donne la variation de l'amplitude des vibrations d'un oscillateur harmonique, de décrément logarithmique $D = 0,2$, en fonction de la pulsation ω de la force excitatrice.

Pour cet oscillateur, évaluer, en faisant des approximations justifiées, le rapport n de l'amplitude maximale à l'amplitude pour une très faible pulsation ω .

EXERCICE 91

Pour un circuit $R L C$ série avec $L = 0,1 \text{ mH}$ et soumis à une source de tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \cos \omega t$ dont on fait varier la fréquence, on observe :

✓ aux bornes de la résistance une résonance de tension pour $f' = 2252 \text{ kHz}$.

✓ aux bornes de la capacité une résonance de tension pour $f'' = 2245 \text{ kHz}$.

- quelle est la valeur de la capacité C ?
- quel est l'ordre de grandeur de la valeur de la résistance R en série avec L et C ?

EXERCICE 92

Le facteur de qualité Q d'un circuit oscillant est égal à 10. Evaluer l'écart relatif entre la pulsation propre et la pulsation de ses oscillations amorties.

EXERCICE 93

Un circuit $R L C$ est soumis à une tension sinusoïdale dont on peut ajuster la pulsation ω .

Quelle condition doit satisfaire le facteur de qualité Q de ce circuit pour que :

- la tension aux bornes de la capacité présente un maximum (résonance) ?
- la fréquence correspondant à la résonance de courant ne diffère pas de celle de la résonance de tension de plus de 1 % ?

EXERCICE 94

Trois éléments R , L et C sont branchés en série et le circuit est soumis à une tension sinusoïdale.

La mesure de la tension aux bornes de la résistance montre qu'une résonance se produit pour un certain ω_0 et on relève un facteur de qualité pour le circuit de 78,5.

- quelle est la fréquence de résonance en courant de ce circuit sachant que : $R = 20 \Omega$ et $L = 0,1 \text{ H}$
- que devient cette fréquence de résonance et le facteur de qualité si l'on branche les mêmes éléments R , L et C en parallèle aux bornes d'une source de courant sinusoïdal ?
- quelle conclusion peut-on faire quant à la différence entre les deux montages et à la variation de Q avec R ?

EXERCICE 95

Un point effectue simultanément deux oscillations de même direction données par :

$$x_1(t) = a \cos \omega t ; \quad x_2(t) = a \cos 2 \omega t$$

Déterminer la vitesse maximale de ce point si :

$$a = 50 \text{ mm} ; \quad \omega = 10^3 \text{ rad/s}$$

EXERCICE 96

Les amplitudes des oscillations harmoniques amorties forcées d'un système à 1 degré de liberté sont égales entre elles pour les pulsations : $\omega' = 400 \text{ rd/s}$ et $\omega'' = 600 \text{ rd/s}$.

Déterminer la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale.

EXERCICE 97

Pour les pulsations ω' et ω'' d'une force excitatrice harmonique la vitesse d'une particule vaut la moitié de sa valeur maximale.

Déterminer en fonction de ω' et ω'' :

- la pulsation correspondant à la résonance de vitesse.
- le facteur d'amortissement δ et la pulsation ω_a des oscillations amorties de la particule.

EXERCICE 98

L'oscillation résultant de la superposition de deux oscillations harmoniques de même direction a pour expression :

$$x(t) = A \cos 2,1 t \cos 50 t$$

Déterminer les pulsations des oscillations composantes et la période des battements de l'oscillation résultante.

EXERCICE 99

Une bille suspendue à un ressort effectue des oscillations harmoniques d'une pulsation donnée.

En communiquant au point de suspension des oscillations harmoniques de direction verticale, de fréquence 20 Hz ou 24 Hz, on obtient, dans les deux cas, des battements de même fréquence.

Pour quelle fréquence du point de suspension celle des battements doublera-t-elle ?

EXERCICE 100

Un circuit R L C série est soumis à une tension sinusoïdale $E(t) = E_0 \sin \omega t$. En faisant varier la pulsation ω , on note qu'il se produit une résonance pour la tension aux bornes de la capacité inconnue C. Sachant que :

$$V_{\text{CMAX}} = 60 \text{ V} ; E_0 = 3 \text{ V} ; R = 75 \Omega ; L = 0,8 \text{ mH}$$

- déterminer le "coefficient de surtension" Q.
- évaluer la capacité C et la fréquence propre f_0 du circuit.
- donner la bande passante Δf (à -3 dB) et ses limites f_1 et f_2 .
- calculer en dB, l'atténuation par rapport au courant $I(f_0)$ lorsque la fréquence de la source diffère de f_0 de 4 kHz.
- trouver la puissance que la source doit fournir au circuit pour y entretenir des oscillations dont l'amplitude maximale de l'intensité du courant est $I_0 = 30 \text{ mA}$?

EXERCICE 101

Sous l'action d'une force extérieure verticale $F(t) = F_0 \sin \omega t$, un corps suspendu à un ressort effectue des oscillations amorties forcées définies par : $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Déterminer :

- le décrement logarithmique de l'amortissement en fonction de ω_0 , ω et φ .
- le travail de la force $\vec{F}$ pendant une période et montrer que ce travail est accompli pour vaincre les forces de frottement.
- la puissance moyenne $\langle P \rangle$, de la force $\vec{F}$, mise en jeu en une période d'oscillation.

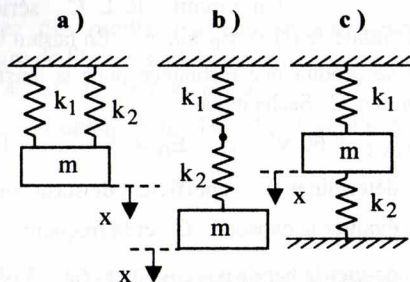
Le résultat est-il conforme à celui de la question précédente ?

- la pulsation de la force $\vec{F}$ pour laquelle $\langle P \rangle$ est maximale (résonance de puissance). Quelle est la valeur de $\langle P \rangle_{\text{MAX}}$?

A.N : $m = 50 \text{ g} ; k = 20 \text{ N/m} ; A = 1,3 \text{ cm}$
 $\omega = 25 \text{ rd/s} ; \varphi = 3\pi/4$

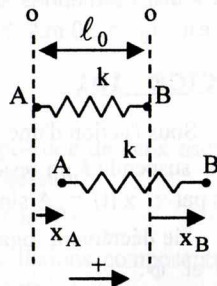
EXERCICE 102

En utilisant le principe de l'égalité de l'action et de la réaction ainsi que la règle de composition des forces, déterminer la raideur du ressort équivalent dans les cas de figures suivantes :

**EXERCICE 103**

On considère un ressort de raideur k dont les deux extrémités A et B se déplacent simultanément.

En prenant pour origines les deux positions des points A et B pour lesquelles le ressort peut être considéré à sa longueur naturelle ℓ_0 et, après le choix d'un sens positif, on note par x_A et x_B les déplacements algébriques de ces points.



Montrer que l'on peut recenser quatre situations distinctes et que pour tous ces cas on peut écrire :

$$F = -k(x_B - x_A) \quad ; \quad U = \frac{1}{2} k (x_B - x_A)^2$$

où x_A et x_B sont comptées algébriquement et F représente la force de rappel exercée par le ressort sur son extrémité B.

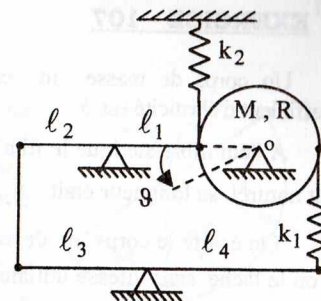
EXERCICE 104

Le système de la figure ci-contre effectue des oscillations de faibles amplitudes données par la coordonnée généralisée $\vartheta(t)$ repérant le cylindre homogène, de masse M , de rayon R et d'axe fixe O .

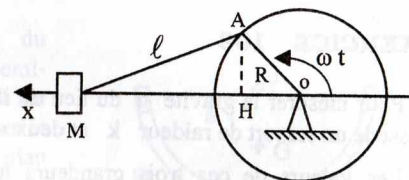
1) appliquer la formule établie à l'exercice précédent pour calculer son énergie potentielle $U(\vartheta)$.

2) en déduire la pulsation propre de ses oscillations libres si :

$$\ell_2 = 2\ell_1 \quad \text{et} \quad \ell_4 = 3\ell_3$$

**EXERCICE 105**

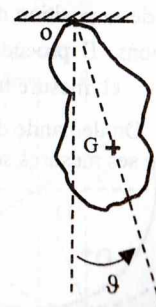
Montrer que la transformation du mouvement de rotation uniforme d'un volant en mouvement de translation d'un piston par le biais d'une simple bielle donne un mouvement de piston qui est oscillatoire mais non sinusoïdal.

**EXERCICE 106**

Un corps solide peut effectuer des oscillations autour d'un axe horizontal O . Sachant que sa masse est M et son moment d'inertie par rapport à cet axe est $J_{/O}$:

1) rappeler l'expression donnant la période d'un pendule composé pour de faibles oscillations de celui-ci.

2) utiliser cette formule pour retrouver les résultats des exercices 1, 2 et 109.



EXERCICE 107

Un corps de masse m est suspendu à un fil élastique dont le coefficient d'élasticité est k .

A l'équilibre statique le fil a une longueur ℓ_e tandis que dans son état naturel sa longueur était ℓ_0 .

On écarte le corps m de sa position d'équilibre, de x_0 vers le bas, et on le lâche sans vitesse initiale.

Il se met alors à osciller harmoniquement suivant la verticale.

- 1) donner l'expression de la longueur totale du fil en fonction du temps.
- 2) quelle est la longueur maximale qu'on peut donner au fil, à l'instant initial, pour qu'en oscillant il reste tendu ?

Pouvait-on deviner ce dernier résultat sans faire de calcul ?

EXERCICE 108

Pour mesurer la gravité g du lieu où il se trouve, un expérimentateur possède un ressort de raideur k et deux masses m_1 et m_2 .

Les valeurs de ces trois grandeurs lui sont inconnues et, pour la mesure, il ne dispose que d'une bonne règle et d'un chronomètre.

Voulant faire une estimation de g , il procède comme suit :

Il suspend m_1 au ressort et mesure son allongement x_1 puis il l'écarte de sa position d'équilibre statique et mesure la période T_1 de ses oscillations. Il procède à nouveau de la même façon en remplaçant m_1 par m_2 et mesure un allongement x_2 et une période T_2 .

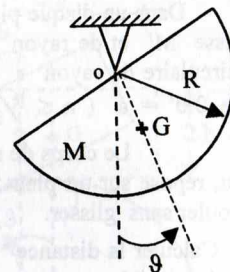
On demande d'établir la formule qu'il a utilisé pour trouver g à partir de ses mesures seulement.

EXERCICE 109

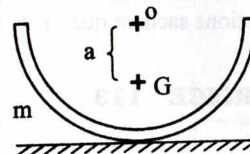
Un demi disque homogène de rayon R et de masse M peut pivoter autour d'un axe passant par son centre, constituant ainsi un pendule composé de centre de gravité G .

On repère la position de ce pendule par l'angle θ fait par le rayon OG avec la verticale et on néglige les frottements.

Donner la période des petites oscillations de ce système.

**EXERCICE 110**

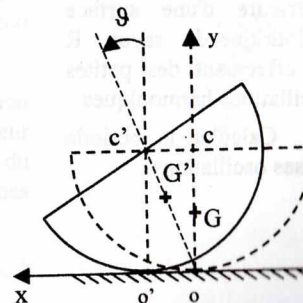
- 1) calculer la distance a du centre de gravité d'une jante semi-circulaire de masse m et de rayon R qui roule sans glisser et sans frottement sur un plan horizontal.



- 2) déterminer la fréquence propre des petites oscillations de celle-ci.

EXERCICE 111

Déterminer la période des petites oscillations d'un demi-disque circulaire homogène de rayon R et de masse M posé sur un plan horizontal rugueux sur lequel il peut rouler sans glisser.

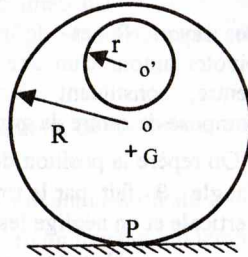


EXERCICE 112

Dans un disque plein de centre O , de masse M' et de rayon R on creuse un trou circulaire de rayon r et de centre O' tel que $OO' = a$ ($a \leq R/2$, $r \leq R/2$).

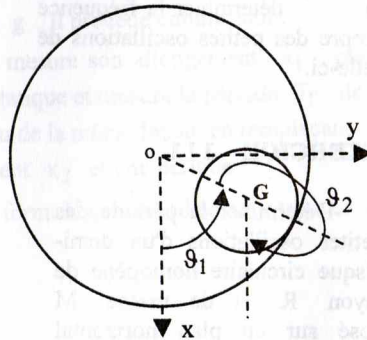
Le corps de masse M , ainsi obtenu, repose sur un plan horizontal où il peut rouler sans glisser.

- 1) Calculer la distance $b = OG$ de son centre de gravité.
- 2) Calculer son moment d'inertie J_G par rapport à un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre de gravité G .
- 3) Très légèrement écarté de sa position d'équilibre stable puis relâché le corps se met à osciller librement. On demande d'utiliser le concept d'axe instantané de rotation pour déterminer la période propre de ses oscillations sachant que $r = a = R/2$.

**EXERCICE 113**

Un cylindre plein, homogène, de rayon r roule sans glisser sur la face intérieure d'une surface cylindrique de rayon R en effectuant des petites oscillations harmoniques.

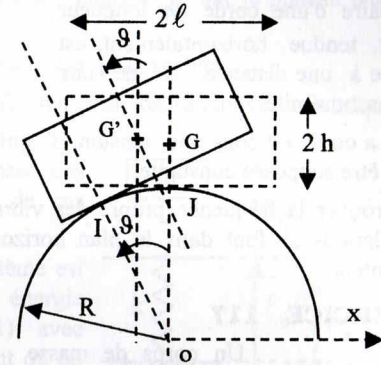
Calculer la période de ses oscillations.

**EXERCICE 114**

Sur un demi-cylindre de rayon R se trouve, en équilibre, un bloc de hauteur $2h$ et de section rectangulaire.

Légèrement écarté de cette position d'équilibre il se met à osciller.

Trouver la pulsation propre de ses oscillations et analyser l'équilibre du système.

**EXERCICE 115**

Un corps de masse m se trouve sur un plan lisse et horizontal.

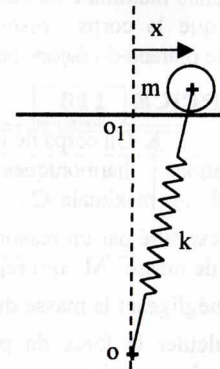
On lui attache un ressort de raideur k dont l'autre extrémité est articulée en O .

La longueur du ressort non déformé est ℓ_0 .

Dans la position d'équilibre du corps, le ressort est vertical, tendu et de longueur $\ell_e = 0,01$.

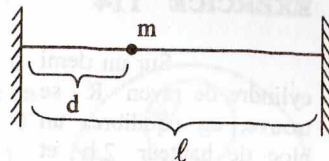
1) en ne prenant en considération que les termes en x d'ordre inférieur ou égal à 2 dans l'expression du Lagrangien, calculer la période des petites oscillations du corps.

2) a-t-on le même résultat si, à l'équilibre, le ressort n'est pas tendu ?



EXERCICE 116

Une bille de masse m , solidaire d'une corde de longueur ℓ et tendue horizontalement, est située à une distance d de l'une de ses extrémités.



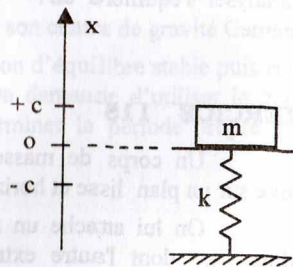
La corde est sous une tension T qui, pour de faibles déplacements, peut être supposée constante.

Trouver la fréquence propre des vibrations de la masse m , si les oscillations se font dans le plan horizontal et qu'on peut négliger la pesanteur.

EXERCICE 117

Un corps de masse m est posé sur un plateau de masse négligeable qui effectue des oscillations harmoniques verticales d'amplitude maximale C .

On demande de trouver la fréquence maximale de ces oscillations pour que le corps reste en contact avec le plateau de façon permanente.

**EXERCICE 118**

Un corps de masse m effectue des oscillations harmoniques verticales libres d'amplitude maximale C .

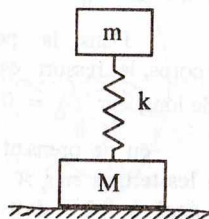
Il est relié par un ressort de raideur k à un socle de masse M qui repose sur le sol.

En négligeant la masse du ressort :

1) calculer la force de pression maximale et minimale exercée par ce système sur le plan support.

2) en déduire qu'à partir d'une certaine valeur d'amplitude maximale des vibrations le corps M se décolle du sol.

A.N. : $m = 1 \text{ kg}$; $M = 4,1 \text{ kg}$; $k = 625 \text{ N/m}$; $C = 1,6 \text{ cm}$

**EXERCICE 119**

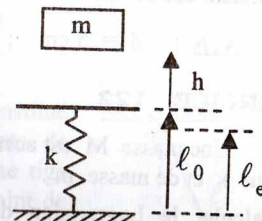
Un corps de masse m tombe d'une hauteur h sur le plateau d'une balance à ressort de raideur k .

Les masses du plateau et du ressort sont négligeables.

Collé au plateau, le corps effectue des oscillations harmoniques suivant la verticale.

1) calculer l'amplitude et la phase des oscillations ainsi que l'énergie de ces dernières.

2) en considérant que le système est conservatif, comparer son énergie mécanique totale calculée en 1) avec son énergie potentielle à l'instant où on lâche la masse m de la hauteur h .



Comment expliquer la différence apparente entre ces deux valeurs ?

EXERCICE 120

Une planche portant un corps de masse m a un mouvement vertical suivant la loi :

$$y(t) = c(1 - \cos \omega t)$$

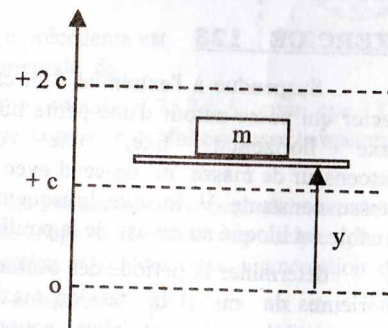
où y représente la position de la planche.

1) Déterminer le module F , de la force de pression exercée par le corps sur la planche, en fonction du temps. Tracer le graphe de cette fonction.

Sachant que $\omega = 11 \text{ rd/s}$, calculer :

2) l'amplitude minimale des oscillations de la planche pour laquelle le corps commence à se détacher de celle-ci.

3) l'amplitude des oscillations de la planche pour laquelle le corps sautera à une hauteur $h = 50 \text{ cm}$ par rapport à la position initiale.



EXERCICE 121

Les ressorts de suspension d'un wagon immobile sont comprimés de d et la longueur des tronçons de rails est ℓ .

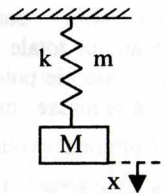
Trouver la vitesse critique de translation uniforme pour laquelle le wagon se met à galoper si aux joints de rails il reçoit des secousses provoquant des oscillations verticales forcées non amorties.

A.N : $d = 5 \text{ cm}$; $\ell = 12 \text{ m}$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

EXERCICE 122

Une masse M est accrochée à un ressort de raideur k et de masse m .

- 1) calculer le Lagrangien de ce système et en déduire sa pulsation propre.
- 2) si $M = 50 \text{ m}$, quelle est l'erreur relative commise sur la période de ce pendule lorsqu'on ne tient pas compte de la masse de son ressort.

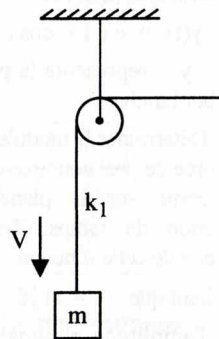
**EXERCICE 123**

Suspendue à l'extrémité d'un câble d'acier qui passe autour d'une petite poulie d'axe horizontal fixe, une cage d'ascenseur de masse m descend avec une vitesse constante V lorsque, brusquement, le câble est bloqué au niveau de la poulie.

- 1) déterminer la période des oscillations ultérieures de m et la tension maximale F_{IMAX} à laquelle est alors soumis le câble dont la rigidité est k_1 et la masse négligeable.

On supposera l'absence de frottements.

- 2) sachant que la tension de rupture F_r du câble est inférieure à ce F_{IMAX} ($F_r < F_{\text{IMAX}}$) et pour éviter que le câble casse, on intercale, entre l'extrémité du câble et la cage d'ascenseur, un ressort dont la raideur est k_2 et la longueur négligeable devant celle du câble.



Montrer que la nouvelle force de tension maximale $F_{2\text{MAX}}$ subie par le câble est plus faible que $F_{1\text{MAX}}$ et F_r .

A.N : $m = 850 \text{ kg}$; $k_1 = 1,7 \cdot 10^6 \text{ N/m}$; $V = 2 \text{ m/s}$
 $F_r = 75 \cdot 10^3 \text{ N}$; $k_2 = 0,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

EXERCICE 124

Un pendule est constitué d'un récipient sphérique à parois minces de rayon R , rempli d'eau et fixé à une tige rigide et très légère. La distance du point de suspension O au centre du récipient est égale à ℓ et la masse d'eau est M .

- 1) calculer la période T de ce pendule composé en négligeant les frottements et la viscosité de l'eau.

- 2) on constate que la formule précédente est conforme à la mesure expérimentale de

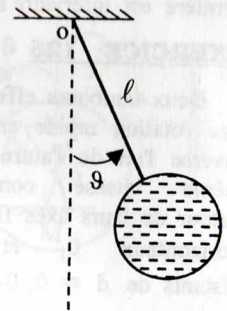
la période effectuée à température ordinaire (25°C) mais que T est légèrement plus élevée lorsque sa mesure est faite à basse température et que l'eau gèle.

Si des vérifications ont montré que cette augmentation n'est pas due à une variation de longueur de la tige ou de volume du récipient, montrer qu'on peut envisager une explication et évaluer cette augmentation de la période en faisant un calcul considérant que l'eau est de viscosité pratiquement nulle à température ordinaire mais très élevée à basse température.

Indication : Sans restreindre la généralité du problème, imaginer le récipient rempli en partie seulement, et :

- ✓ considérer la position relative de la surface libre de l'eau pour en déduire son type de mouvement dans les deux situations (à 25°C et inférieure à 0°C).

- ✓ appliquer le théorème d'HUYGENS sur les moments d'inertie.



EXERCICE 125

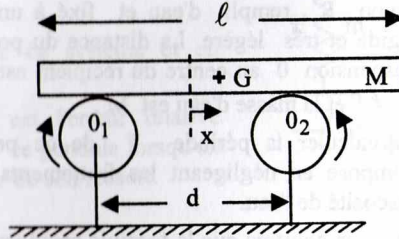
Un corps de masse m est posé sur une planche qui exécute des oscillations harmoniques horizontales d'amplitude maximale :

$$a = 10 \text{ cm}$$

Déterminer le coefficient de frottement entre la planche et le corps si celui-ci se met à glisser lorsque la période des oscillations de cette dernière est inférieure à 1 s.

EXERCICE 126

Deux tambours effectuent une rotation rapide en sens inverse l'un de l'autre, à la même vitesse constante, autour de leurs axes fixes et horizontaux O_1 et O_2 distants de $d = O_1 O_2$.



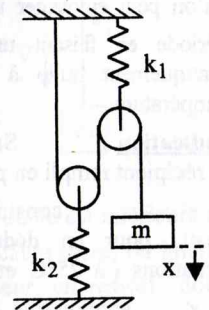
Sur ces deux tambours on pose doucement une planche pesante et homogène de longueur $\ell = n d$ et de masse M .

Sachant que le coefficient de frottement entre la planche et les tambours est μ , montrer que la planche effectue des oscillations harmoniques, et calculer leur période.

EXERCICE 127

Un fil inextensible dont une extrémité est fixe et l'autre porte une masse m s'enroule sans glisser autour de deux poulies sans masse, dont les axes sont attachés par des ressorts respectifs k_1 et k_2 à des supports opposés.

1) montrer que le système est à un degré de liberté.



- 2) en prenant pour coordonnée généralisée l'abscisse x de la masse m comptée à partir de sa position de repos, calculer son Lagrangien.
- 3) trouver la pulsation propre du système.
- 4) montrer que ce système est équivalent à un oscillateur simple dont on précisera la raideur k du ressort.

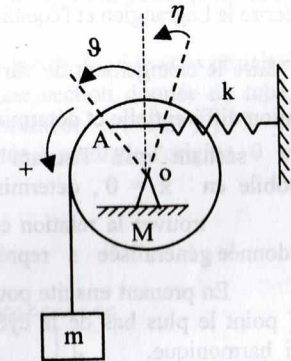
EXERCICE 128

Un fil inextensible a une extrémité solidaire d'un disque homogène de masse M et de rayon R .

Sa seconde extrémité porte une masse ponctuelle m .

En un point A situé à une distance $a < R$ de l'axe fixe O du disque est accroché un ressort de raideur k .

A l'équilibre statique le système est tel que le point A se trouve à la verticale de l'axe O .



- 1) établir la condition d'équilibre.
- 2) calculer le Lagrangien du système.
- 3) en déduire l'équation différentielle de ses petites oscillations et donner l'expression de $\theta(t)$ sachant qu'à $t = 0$ on avait :

$$\theta(0) = 5^\circ \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

- 4) retrouver les résultats des questions 1 et 3 à l'aide du formalisme de NEWTON.
- 5) au bout de 5 périodes d'oscillation du système, la masse m se détache :
 - a) établir la nouvelle équation horaire $\theta(t)$ du système et donner sa nouvelle période.
 - b) autour de quelle position se font ces dernières oscillations ?
 - c) tracer le graphe représentant les variations de $\theta(t)$.

EXERCICE 129

Une masse ponctuelle m est astreinte à se déplacer sans frottement sur une courbe ayant la forme d'une cycloïde contenue dans un plan vertical et donnée par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = a(\vartheta - \sin \vartheta) \\ y(t) = a(1 - \cos \vartheta) \end{cases}$$

où a est une constante et ϑ une fonction de t .

- 1) écrire le Lagrangien et l'équation différentielle du mouvement de m .
- 2) faire le changement de variable $\cos \frac{\vartheta}{2} = u$ pour résoudre cette équation différentielle et déterminer la période de ce mouvement.
- 3) sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, la masse m était immobile en $x = 0$, déterminer les constantes d'intégration.
- 4) trouver la relation entre la coordonnée généralisée u et la coordonnée généralisée s représentant la longueur de l'arc $0m$.

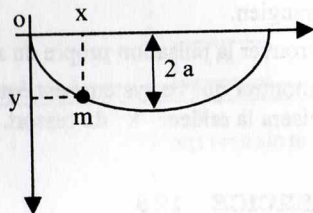
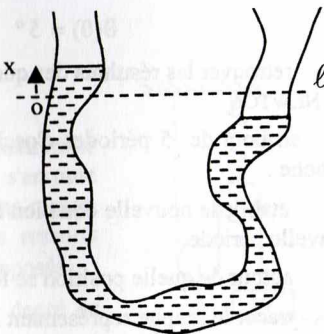
En prenant ensuite pour origine le point d'équilibre statique de m (point le plus bas de la cycloïde), montrer que le mouvement est aussi harmonique.

EXERCICE 130

Dans un tube coudé à section S continûment variable, un liquide, de masse volumique ρ , est le siège d'oscillations de faibles amplitudes.

A l'équilibre statique le liquide occupe une longueur ℓ du tube.

- 1) calculer le Lagrangien de ce système.



Quelle est la dimension de la coordonnée généralisée utilisée pour exprimer ce Lagrangien ?

En déduire la dimension de la force généralisée extérieure que l'on appliquerait à ce système pour avoir un régime forcé.

- 2) trouver l'équation différentielle et la fréquence propre de ces oscillations libres non amorties.
- 3) retrouve-t-on le résultat établi pour un tube à section constante (exercice 21) ?

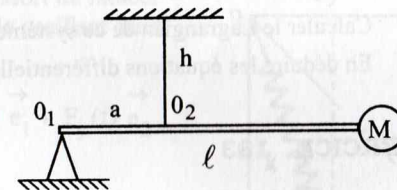
Indications :

a) on pourra négliger la viscosité du liquide et considérer que, sur une amplitude d'oscillation, la section du tube reste pratiquement constante.

b) en se basant sur l'incompressibilité du liquide et le principe de conservation de la masse, établir, pour une section donnée du tube, la relation entre son aire $s(X)$ et son déplacement $x(X, t)$; X étant la position de la section considérée comptée à partir de l'origine 0 et le long de la ligne médiane du tube.

EXERCICE 131

Une barre rigide de longueur ℓ peut osciller librement autour d'une articulation sphérique à son extrémité O_1 et supporte une masse M à l'autre extrémité.



La barre est maintenue en position horizontale par un fil inextensible, vertical, de longueur h et attaché en O_2 tel que $O_1 O_2 = a$.

Si on dévie la masse M perpendiculairement au plan de la figure et qu'on l'abandonne, le système commence à osciller.

- 1) montrer que le système est à un degré de liberté. La masse M étant repérée dans son mouvement par sa translation horizontale X .
- 2) déterminer la période des petites oscillations du système en négligeant la masse de la barre.

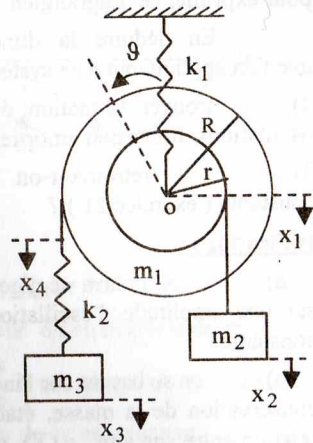
EXERCICE 132

Une poulie homogène de masse m_1 et de rayon R est suspendue par son axe O à un ressort vertical k_1 .

Deux fils inextensibles sont solidaires de la poulie.

L'un s'enroule sur une petite gorge d'épaisseur négligeable de rayon $r = R/2$ et porte une masse m_2 .

Le second s'enroule sur toute la poulie et retient, par un ressort k_2 qui le prolonge, une masse m_3 .



- 1) Donner les deux relations (conditions d'équilibre) que doit vérifier ce système pour exister.
- 2) Exprimer les paramètres θ et x_4 en fonction des trois autres x_1 , x_2 , x_3 que l'on choisira comme coordonnées généralisées pour repérer ce système dans la suite.
- 3) Calculer le Lagrangien de ce système à 3 degrés de liberté.
- 4) En déduire les équations différentielles du mouvement.

EXERCICE 133

Une masse m est suspendue par un ressort de raideur k au plafond d'un wagon en translation uniforme mais soumis à des trépidations verticales et harmoniques $X(t)$.

- 1) sachant que l'amplitude maximale des vibrations de la masse relativement au wagon est a et leur période T ; en ne prenant en considération que la solution particulière de l'équation différentielle du mouvement et en supposant le frottement si faible qu'il peut être négligé :

déterminer l'accélération verticale maximale du wagon ainsi que l'amplitude maximale X_0 de ses vibrations.

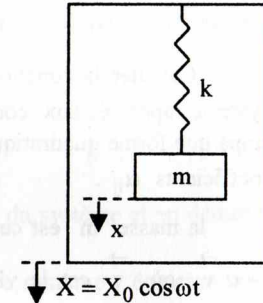
On donne :

$$T = 0,65 \text{ s} ; a = 27 \text{ mm}$$

$$m = 0,15 \text{ kg} ; k = 15,6 \text{ N/m}$$

- 2) utiliser le déplacement relatif $x_r = x - X$ ainsi que la vitesse relative correspondante pour exprimer le Lagrangien de la masse m et en déduire l'équation différentielle du mouvement en x_r .

Calculer l'amplitude et la phase de la coordonnée relative x_r et montrer qu'on retrouve le résultat de 1).

**EXERCICE 134**

Une masse ponctuelle m est suspendue en un point fixe O par un ressort de raideur k constituant ainsi un pendule oscillant dans le plan vertical xOy .

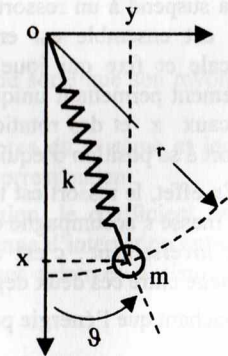
Une force $\vec{F}(t) = F_x(t) \vec{e}_1 + F_y(t) \vec{e}_2$ agit sur la masse m .

- 1) calculer le travail fourni par cette force lors d'un déplacement élémentaire :

$$d\ell = dx \vec{e}_1 + dy \vec{e}_2 \text{ de la masse } m.$$

En déduire les composantes de la force généralisée $Q(t)$ rapportées aux coordonnées généralisées (r, θ) et donner la dimension de chacune de ces composantes.

- 2) retrouver ces résultats à l'aide de la relation (vue en cours) entre $F(t)$ et $Q(t)$.



140

3) la masse m est soumise à un frottement horizontal donné par :

$$\vec{f} = -\alpha \dot{y} \vec{e}_2$$

Calculer la fonction de dissipation $D = D(r, \vartheta, \dot{r}, \dot{\vartheta})$ du système rapportée aux coordonnées généralisées r et ϑ et, en temps que forme quadratique des vitesses généralisées $\dot{q}_i$, déduire ses coefficients α_{ij} .

4) la masse m est cette fois soumise à un frottement visqueux

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} \quad \text{où } \vec{v} \text{ est la vitesse de la masse dans le plan } xOy :$$

a) calculer l'expression correspondante de la fonction de dissipation.

b) quelle est la dimension de D ?

c) trouver les composantes f_r et f_ϑ de la force de frottement.

EXERCICE 135

Une masse m a la forme d'un cylindre de rayon r percé suivant son axe.

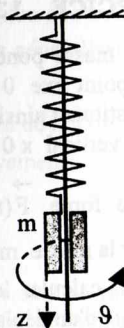
On la suspend à un ressort à spires non jointives et dans cet ensemble est enfilée une très fine tige verticale et fixe qui joue le rôle de guide sans frottement permettant uniquement des déplacements verticaux z et des rotations ϑ de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique.

En effet, le ressort est tel que toute translation z de la masse s'accompagne d'une rotation ϑ de celle-ci et inversement ; c'est à dire qu'il introduit un couplage entre ces deux degrés de liberté.

1) Sachant que l'énergie potentielle d'élasticité du ressort s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 c_{ij} q_i q_j \quad (\text{forme quadratique})$$

avec $q_1 = z$; $q_2 = \vartheta$ et pour les coefficients de rigidité :



$c_{11} = k$ raideur (telle que $F = -kz$ pour une translation en absence de rotation).

$c_{22} = C$ constante de torsion (telle que $M = -C\vartheta$ pour une rotation en absence de translation).

Ainsi que, par définition :

$$\Gamma = \frac{c_{12}}{\sqrt{kC}} \quad \text{coefficient de couplage} \quad 0 \leq \Gamma \leq 1$$

donner l'expression du Lagrangien du système et en déduire ses équations différentielles du mouvement.

2) Etablir l'équation caractéristique de ce système (équation aux pulsations propres) en fonction du coefficient de couplage Γ et des pulsations :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

$$J = \frac{1}{2} m r^2 \quad \text{étant le moment d'inertie de la masse .}$$

3) Si, après avoir choisi le ressort (k et C données et connues), on désire se placer dans la situation particulière :

$$\omega_1 = \omega_2 = \Omega$$

montrer que la masse doit, pour cela, être taillée de sorte que son rayon vérifie une certaine relation .

4) trouver dans ce cas les pulsations propres du système et les rapports d'amplitudes des modes propres qui leur correspondent.

5) montrer que, par sa relation de définition, le coefficient de couplage Γ exprime le rapport de l'énergie moyenne d'interaction entre les deux degrés de liberté aux énergies moyennes relatives à chaque degré ; plus précisément :

$$\Gamma^2 = \frac{\langle E_{\text{échange}} \rangle^2}{\langle E_{\text{translation}} \rangle \langle E_{\text{rotation}} \rangle}$$

EXERCICE 136

Une masse m est fixée à trois ressorts selon la figure.

Dans sa position d'équilibre statique les ressorts sont non déformés.

A partir de l'expression de la résultante des forces exercées sur m :

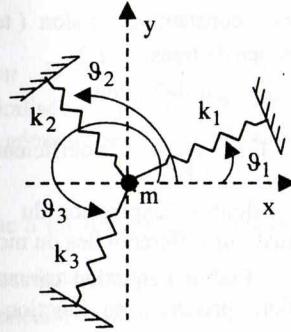
1) calculer la raideur k_x du ressort équivalent lorsque la masse oscille suivant l'axe des X dans des guides parfaitement lisses.

2) trouver la raideur k_y dans le

cas où les guides sont disposés suivant l'axe des Y .

On supposera le déplacement de la masse et les déformations des ressorts très petits devant leur longueur.

3) Vérifier que l'on retrouve le résultat de l'exercice 65.

**EXERCICE 137**

Quelles transformations faut-il opérer sur les équations différentielles du Haut-Parleur (EX 66) :

$$\begin{cases} m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx - B \ell i = 0 & (1) \\ L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt + B \ell \dot{x} = E(t) & (2) \end{cases}$$

afin d'en déduire les équations correspondantes d'un circuit électrique analogue ?

A-t-on la même correspondance, que celle donnée par le tableau (page 43), entre éléments du système H P et ceux de son circuit électrique équivalent ?

Indication: Après transformation, déduire les équations électriques équivalentes en utilisant l'analogie M/C pour la première équation et l'analogie M/L pour la seconde équation. Le circuit recherché étant alors la synthèse des deux circuits correspondant à chaque équation.

EXERCICE 138

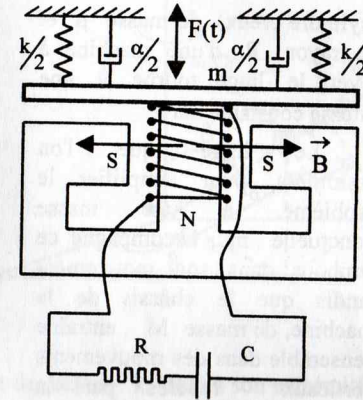
microphone électrodynamique

Une bobine L est placée entre les fers d'un aimant permanent dont le champ magnétique $\vec{B}$ est radial et constant.

Electriquement, elle est branchée en série avec une résistance R et une capacité C .

Mécaniquement, elle est solidaire d'une masse m reliée à un ressort de raideur k .

La longueur totale de son fil est ℓ .



Sous l'effet d'une force extérieure appliquée $F(t) = F_0 \cos \omega t$ la masse et la bobine effectuent ensemble, par rapport à leur position d'équilibre et dans la direction de l'axe de la bobine, un mouvement de vibration amorti forcé.

Le frottement dû à l'air ambiant est caractérisé par un coefficient d'amortissement α .

1) le circuit électrique est-il traversé par un courant lorsque :

- a) $B = 0$ et $F_0 = 0$; c) $B \neq 0$ et $F_0 = 0$
b) $B = 0$ et $F_0 \neq 0$; d) $B \neq 0$ et $F_0 \neq 0$

2) donner les équations intégrales-différentielles régissant le fonctionnement de ce système.

en déduire son impédance $Z = F(t)/\dot{x}(t)$.

3) calculer le rendement du système si la puissance utile délivrée par celui-ci est supposée être consommée uniquement par effet JOULE dans la résistance R .

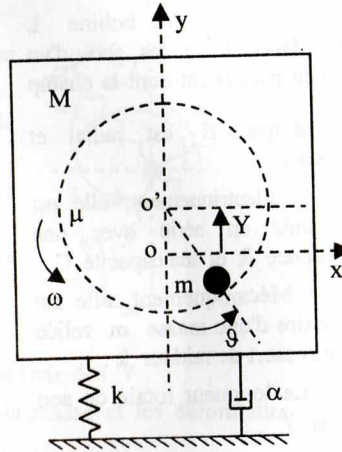
4) trouver la valeur ω_0 que doit prendre la pulsation de la force pour que ce système ait un rendement maximum ?

donner la valeur de ce rendement maximal théorique.

EXERCICE 139

Le tambour (cylindre creux), de masse μ et de rayon R , d'une machine à laver le linge, tourne à une vitesse constante ω .

Le linge que l'on assimilera, pour simplifier le problème, à une masse ponctuelle m , accompagne ce tambour dans son mouvement tandis que le châssis de la machine, de masse M , entraîne l'ensemble dans des mouvements verticaux repérés par la coordonnée Y .

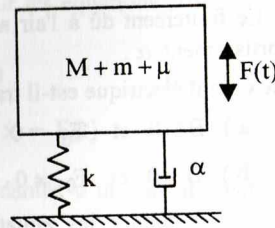


- 1) établir l'expression du Lagrangien de ce système.

Quelle est sa particularité ?

- 2) montrer, en donnant l'équation différentielle de ses mouvements, qu'un tel système peut être ramené au schéma simplifié ci-contre.

Quelle différence faites-vous cependant avec l'oscillateur forcé habituel.



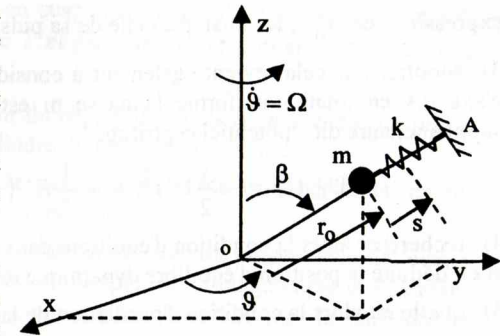
- 3) établir l'expression de l'amplitude maximale de ses vibrations verticales ainsi que la pulsation de résonance.

Quelle est la valeur de cette amplitude maximale à la résonance ?

EXERCICE 140

Une tige OA rigide et sans masse est solidaire d'un axe OZ vertical faisant avec elle un angle β constant et tournant à une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \Omega$.

θ étant l'angle formé par le plan contenant l'axe OZ et la tige OA avec le plan OXZ.



Cette tige porte un ressort de raideur k fixé à son extrémité A et, accrochée à ce ressort, une masse m peut coulisser le long de celle-ci.

La position d'équilibre statique de la masse correspond à $0m = r_0$.

La masse étant "maintenue" par un dispositif (électroaimant) à cette position d'équilibre statique, tout le système, d'abord immobile, se met très rapidement en rotation pour atteindre la vitesse angulaire constante Ω .

On lâche alors la masse m .

Pour l'étude de ce système on choisira comme coordonnée généralisée le déplacement $s(t)$ de la masse le long de la tige compté positivement dans la direction OA, à partir de la position d'équilibre statique de m et avec :

$$\text{à } t = 0 \quad s(0) = 0 \quad \dot{s}(0) = 0$$

Première partie ($\Omega = 0$)

- 1) Exprimer l'énergie potentielle $U(s)$ du système pour en déduire la condition d'équilibre statique et la déformation initiale du ressort.

Deuxième partie ($\dot{\theta} = \Omega \neq 0$)

- 2) En utilisant les coordonnées sphériques de m dans le repère Galiléen OXYZ puis son déplacement $s(t)$, donner l'expression de son Lagrangien $L(s, \dot{s})$ pour en déduire son équation différentielle du mouvement et montrer que, si une certaine condition est vérifiée,

ce mouvement sera celui d'un oscillateur soumis à une force constante F_0 et dont la raideur du ressort est K en précisant les expressions de F_0 , K ainsi que celle de sa pulsation propre ω_0 .

3) Montrer que cela revient également à considérer que, dans le repère d'axe OA en rotation uniforme, la masse m est placée dans un potentiel supplémentaire dit "potentiel centrifuge" :

$$U_C(s) = -\frac{1}{2}K'r^2 = -\frac{1}{2}K'(r_0 + s)^2$$

4) rechercher alors la condition d'équilibre dans ce système non Galiléen et en déduire la position d'équilibre dynamique de la masse m .

5) quelle est alors la condition d'oscillation de la masse m .

6) donner l'équation de son mouvement compte tenu des conditions initiales.

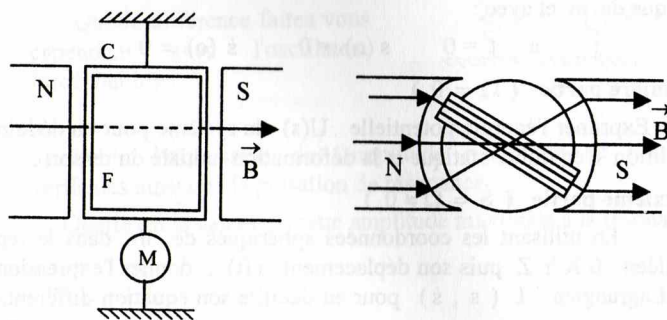
7) autour de quelle position se font ces oscillations et avec quelle amplitude maximale ?

8) la masse est soumise à un frottement visqueux proportionnel à sa vitesse linéaire $\dot{s}$ de déplacement le long de la tige OA , établir sa nouvelle équation du mouvement si les conditions initiales restent les mêmes.

9) dans quelle position finit par se "maintenir" la masse m dans le repère OA ?

EXERCICE 141

galvanomètre à cadre mobile



Dans un champ d'induction magnétique $\vec{B}$ constant, radial et produit par un aimant permanent, on suspend par un fil de torsion un cadre C mobile, de moment d'inertie J et parcouru par un courant continu i_0 que l'on désire mesurer.

Pour augmenter la valeur du champ d'induction magnétique on place, à l'intérieur du cadre, un cylindre F en fer doux et fixe.

Un petit miroir M , de masse négligeable et solidaire du cadre, permet de suivre le mouvement de celui-ci.

Lorsque le cadre est traversé par un courant en présence de champ magnétique, il s'exerce sur lui un couple électromagnétique indépendant de θ mais proportionnel au courant total qui le traverse ; la constante de proportionnalité ne dépendant que de la géométrie du cadre.

Le cadre dévie de sa position d'équilibre initiale jusqu'à ce que le couple électromagnétique soit compensé par le couple de rappel du fil dont la constante de torsion est c .

De plus, le cadre est soumis au cours de son mouvement à deux couples de freinage de type visqueux : l'un dû au frottement de l'air environnant (de coefficient d'amortissement β), le second de nature électromagnétique est dû à la f.e.m induite dans le cadre.

1) si le cadre comporte n spires rectangulaires identiques, de largeur a et de longueur b , trouver la f.e.m induite lors d'une rotation de celui-ci.

2) le cadre est en série avec un circuit extérieur qui lui impose un courant continu i_0 , la résistance totale de l'ensemble est R . Donner l'expression des deux couples électromagnétiques, moteur et de freinage.

3) en déduire l'équation différentielle du mouvement du cadre.

4) écrire la condition d'équilibre statique du cadre (un courant continu i_0 le parcourant).

5) comparer avec la solution particulière de l'équation différentielle.

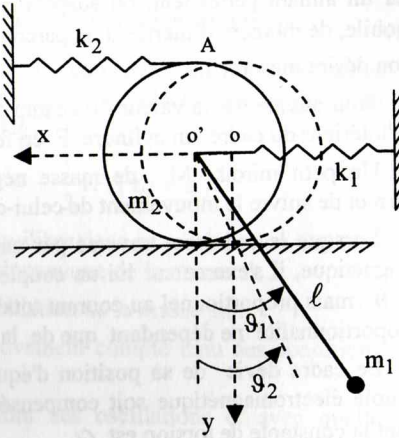
6) écrire la solution générale $\theta(t)$ de cette équation en étudiant, en fonction de l'importance relative du frottement, les différents cas de mouvements possibles du cadre.

EXERCICE 142

Un cylindre homogène de masse m_2 et de rayon R , roule sans glisser sur une plate-forme horizontale.

Une tige de masse négligeable et de longueur ℓ , pivote librement autour du point O à une extrémité et comporte une masse ponctuelle m_1 à son autre extrémité.

Les points O et A sont reliés aux bâtis respectivement par un ressort de raideur k_1 et un ressort de raideur k_2 .



Ce système à deux degrés de liberté est repéré par les coordonnées ϑ_1 et ϑ_2 . A l'équilibre, $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$.

Dans le cas des petites oscillations et pour :

$$k_1 + 4k_2 = \frac{m_1 g}{\ell} = k \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{3}{2} m_2$$

- 1) trouver les pulsations propres du système.
- 2) si le bâti de gauche vibre à une pulsation ω avec une amplitude a , calculer les pulsations de résonance et d'anti-résonance.
- 3) donner le schéma électrique équivalent (M/L) et vérifier qu'on retrouve les trois pulsations précédemment demandées à l'aide de ce schéma.
- 4) quelle remarque pratique peut vous inspirer la valeur particulière de la pulsation d'antirésonance ?

EXERCICE 143

Les masses m_1 et m_2 du système à deux degrés de liberté de la figure ci-contre effectuent des oscillations forcées de faibles amplitudes.

La résistance de l'air étant représentée par un amortisseur de coefficient α .

1) écrire les équations différentielles du mouvement de ce système.

2) On donne :

$$k_1 = k_2 = k = 250 \text{ N/m} ; \quad m_1 = m_2 = m = 2 \text{ kg}$$

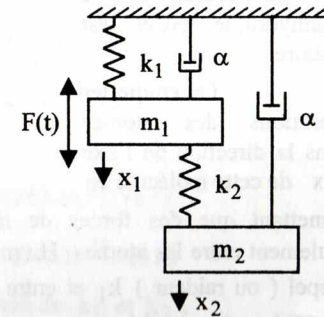
$$\omega = 10 \text{ rd/s} ; \quad F_0 = 100 \text{ N} ; \quad \alpha = 5 \text{ N.m}^{-1}\text{s}$$

trouver les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en régime permanent et dans l'hypothèse des solutions sinusoïdales :

$$x_1(t) = A^* e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad A^* = A_0 e^{j\varphi_1}$$

$$x_2(t) = B^* e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad B^* = B_0 e^{j\varphi_2}$$

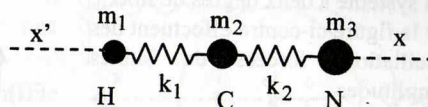
3) vérifier que l'on retrouve ces expressions des déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en passant par la notion d'impédance.



EXERCICE 144

La molécule d'acide cyanhydrique HCN est linéaire.

On étudie les vibrations des atomes dans la direction de l'axe $x'x$ de cette molécule en



admettant que des forces de liaison quasi élastiques s'exercent seulement entre les atomes H (m_1) et C (m_2) avec un coefficient de rappel (ou raideur) k_1 et entre les atomes C et N (m_3) avec un coefficient de rappel k_2 .

- 1) Etablir les équations différentielles du mouvement de ce système.
- 2) Considérer les vibrations des atomes des deux paires (m_1, m_2) et (m_2, m_3) séparées en supposant leurs deux atomes reliés par le même « ressort » que dans la molécule HCN et trouver leurs pulsations propres respectives (non nulles) ω_1 et ω_2 en fonction de leurs masses réduites μ_1 et μ_2 et des raideurs k_1 et k_2 .
- 3) Ecrire l'équation caractéristique correspondant au système d'équations différentielles trouvées en 1), en fonction des pulsations ω_1 et ω_2 des deux oscillateurs précédents et de leur coefficient de couplage Γ défini par :

$$\Gamma^2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{m_2^2}$$

- 4) en déduire les deux pulsations propres (non nulles) Ω_1 et Ω_2 de la molécule HCN.

- 5) Que devient ce résultat :

- a) pour le cas d'une molécule symétrique telle que CO_2 avec

$$m_1 = m_3 = m \quad \text{et} \quad k_1 = k_2 = k$$

- b) pour la molécule HCN si l'on peut considérer que

$$\Gamma \omega_1 \omega_2 < \omega_1^2 - \omega_2^2$$

- 6) Calculer Γ en utilisant les valeurs (1, 12 et 14 g) des masses atomiques respectives de HCN.

- 7) Si l'expérience (absorption des radiations infrarouges) a donné :

$$\text{pour HCN} \quad \begin{cases} \Omega_1 \approx 39,5 \cdot 10^{13} \text{ rd/s} \\ \Omega_2 \approx 62,5 \cdot 10^{13} \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$\text{pour CO}_2 \quad \begin{cases} \Omega_1 \approx 4,165 \cdot 10^{13} \text{ rd/s} \\ \Omega_2 \approx 7,047 \cdot 10^{13} \text{ rd/s} \end{cases}$$

trouver l'ordre de grandeur des valeurs de k_1 et k_2 .

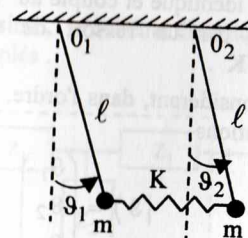
- 8) si l'on peut considérer comme fiables les mesures expérimentales des pulsations propres Ω_1 et Ω_2 de la molécule CO_2 , quelle discordance note-on dans la réponse à la dernière question ? à quoi peut-on attribuer cela ?

EXERCICE 145

suite de pendules

Première partie :

On considère un système mécanique à deux degrés de liberté constitué par 2 pendules identiques, de masse m attachée au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ et reliés entre eux par un ressort de raideur K .



Dans le cas des petites oscillations :

- 1) trouver le système d'équations différentielles couplées en $\vartheta_1(t)$ et $\vartheta_2(t)$.

- 2) par des combinaisons linéaires de ces coordonnées trouver les deux pulsations propres du système.

On désignera par ω_1 la plus petite et par ω_2 la plus grande ($\omega_1 < \omega_2$).

3) à partir des solutions donnant ϑ_1 et ϑ_2 en fonction du temps, trouver les directions propres associées aux pulsations propres et expliquer physiquement comment vibre le système pour les pulsations $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$.

4) si on applique maintenant une force horizontale et sinusoïdale $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$ sur la masse du premier pendule :

✓ écrire le système d'équations aux vitesses linéaires en $\ell \dot{\vartheta}_1$ et $\ell \dot{\vartheta}_2$ qui régit le fonctionnement du système.

✓ en déduire les équations électriques équivalentes dans l'analogie force-tension.

✓ donner alors le schéma électrique équivalent en précisant pour chaque composant électrique l'élément mécanique correspondant.

✓ comment se transforme le schéma électrique si $\omega = \omega_1$; interpréter le résultat.

Deuxième partie :

On ajoute maintenant au système précédent un 3^{ème} pendule identique et couplé au 2^{ème} pendule par un ressort de même raideur K .

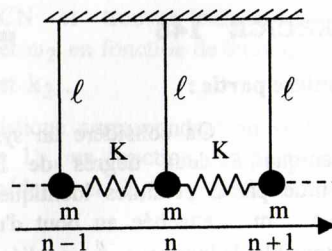
En considérant, dans l'ordre, le ket des solutions

$$|\vartheta\rangle = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}$$

5) calculer la matrice $\mathcal{L}$ associée à son Lagrangien.

6) en déduire les trois pulsations propres. On notera par ω_1 la plus petite et par ω_3 la plus grande ($\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$).

7) trouver les directions propres associées aux pulsations propres ω_1 , ω_2 et ω_3 .



8) expliquer physiquement les vibrations du système dans chacun de ces modes propres.

Troisième partie:

On considère maintenant une suite infinie de pendules identiques couplés.

On fait agir sur le 1^{er} pendule une force sinusoïdale horizontale :

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

9) trouver l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule n^0 , le premier pendule correspondant à $n = 0$.

10) en supposant qu'il n'existe pour les ondes progressives non atténuées qu'un déphasage de φ entre deux élongations angulaires successives :

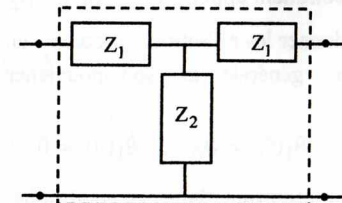
$$\frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} = e^{-j\varphi}$$

✓ calculer les pulsations des ondes non atténuées susceptibles de se propager dans le système.

✓ tracer la courbe $\varphi = f(\omega)$ donnant la valeur du déphasage entre deux pendules consécutifs en fonction de la pulsation des ondes non atténuées se propageant dans ce système.

11) donner, dans l'analogie force - tension, le schéma électrique équivalent à cette suite infinie de pendules couplés.

12) le système électrique, en dehors de la première impédance, peut être considéré comme constitué d'une infinité de quadripôles identiques dont on donnera le schéma en précisant la correspondance entre ses éléments électriques et les éléments du système mécanique.



13) calculer l'impédance caractéristique de cette chaîne de quadripôles électriques, c'est à dire l'impédance Z_C qui branchée à la sortie du quadripôle Q_n entraîne :

$$\frac{v_n}{i_n} = \frac{v_{n+1}}{i_{n+1}} = Z_C$$

✓ en déduire la valeur de l'impédance caractéristique mécanique du système constitué par une infinité de pendules identiques couplés.

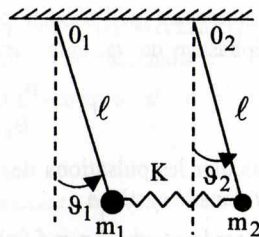
✓ sur quel élément mécanique doit-on brancher un ensemble fini de N pendules couplés pour n'obtenir qu'une seule onde progressive.

(épreuve de Synthèse de Juin 1983)

EXERCICE 146

Couplage d'oscillateurs non accordés

Deux pendules de même longueur ℓ mais de masses différentes ($m_1 > m_2$) oscillent autour de leurs axes respectifs O_1 et O_2 en étant couplés par un ressort de raideur K disposé selon la figure.



1) établir les équations différentielles du mouvement de ce système, en l'absence de frottement.

2) pour les résoudre faire le changement de variables :

$$\theta_1 = \beta_1 + \beta_2 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \beta_1 - \frac{m_1}{m_2} \beta_2$$

a) comment appelle-t-on β_1 et β_2 ?

b) donner les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système ainsi que la solution générale de son mouvement sachant qu'à l'instant initial, on avait :

$$\theta_1(0) = \theta_0 ; \quad \dot{\theta}_1(0) = 0 ; \quad \theta_2(0) = 0 ; \quad \dot{\theta}_2(0) = 0$$

c) montrer que, dans ces conditions, elles expriment un phénomène de battements dont on précisera la période. On posera : $\Gamma = \frac{K\ell}{\mu g} \ll 1$

Γ représente alors le coefficient de couplage, de faible valeur, μ étant la "masse réduite" définie par :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

3) en déduire les expressions des énergies moyennes en fonction du temps $\langle E_1 \rangle$ et $\langle E_2 \rangle$ de chaque pendule et préciser leur particularité.

4) en utilisant un diagramme de FRESNEL, montrer que les battements se font avec des minima non nuls et qu'un oscillateur ne cède pas la totalité de son énergie à l'autre.

EXERCICE 147

Dégénérescence des pulsations propres

1) trouver la matrice Lagrangien du système ci-contre ($m_1 = m_2 = m_3 = m$).

Est-elle symétrique? Est-elle diagonale?

2) vérifier que $\frac{k}{m}$ et $\frac{4k}{m}$ sont bien racines de l'équation caractéristique correspondante.

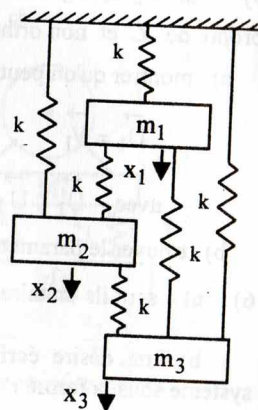
Que peut-on dire de l'une d'elles?

3) en écrivant les modes propres sous la forme :

$$|X_i\rangle = \vec{X}_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_i(t) \cdot \vec{V}_i$$

$$\text{avec } C_i(t) = A_i e^{j(\omega_i t + \psi_i)} \quad \text{et} \quad \vec{V}_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

où A_i est l'amplitude des vibrations et $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sont les composantes (relativement à la base quelconque $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) du



vecteur propre $\vec{V}_i$ associé à la pulsation propre ω_i .

Trouver quelles relations doivent vérifier les composantes des vecteurs propres associés à chacune des pulsations propres du système et montrer que le choix de ces vecteurs propres n'est pas unique.

Quelle particularité physique présentent les modes propres qui se font à la seconde pulsation propre, c'est à dire qui vérifient la seconde relation.

4) après avoir fait un choix de façon simple, vérifier si les vecteurs propres ainsi déterminés sont orthogonaux ? unitaires ?

5) si $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont des vecteurs propres associés à la même valeur propre de $\mathcal{L}$ et non orthogonaux,

a) montrer qu'on peut faire un autre choix de ces vecteurs tel que :

$$\vec{U}_1 = \vec{V}_1 \quad ; \quad \vec{U}_2 = \vec{V}_2 \quad \text{et} \quad \vec{U}_3 = \vec{V}_2 + a \vec{V}_3$$

avec $\vec{U}_1, \vec{U}_2$ et $\vec{U}_3$ mutuellement orthogonaux

b) trouver le paramètre a et les composantes de ces vecteurs.

6) a) sont ils unitaires ?

b) on désire écrire la solution générale $\vec{S}$ du mouvement du système sous la forme :

$$\vec{S} = C_1(t) \vec{u}_1 + C_2(t) \vec{u}_2 + C_3(t) \vec{u}_3$$

où $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont trois vecteurs propres de $\mathcal{L}$ formant une base orthonormée. Donner ces vecteurs.

c) comment appelle-t-on les composantes de $\vec{S}$ dans cette base.

7)

a) quelle est la matrice de passage $\mathcal{P}$ de la base des vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de $\mathcal{L}$ à la base initiale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

b) vérifier que l'on a : $\mathcal{P}^{-1} \mathcal{L} \mathcal{P} = \mathcal{L}'$ où $\mathcal{L}'$ est une matrice diagonale dont les éléments non nuls sont les pulsations propres du système.

c) à l'aide de cette matrice exprimer les coordonnées généralisées x_i en fonction des nouvelles q_i .

Utiliser alors ces dernières pour recalculer les énergies cinétique et potentielle du système et vérifier qu'elles ne comportent pas de termes rectangles et que les équations différentielles qui en découlent sont découplées.

EXERCICE 148

Moteur sur châssis

Un moteur de masse M_1 est monté sur un châssis qui n'est pas fixe et peut être assimilé à une masse M_2 reposant sur une suspension dont la raideur de l'ensemble est k_2 .

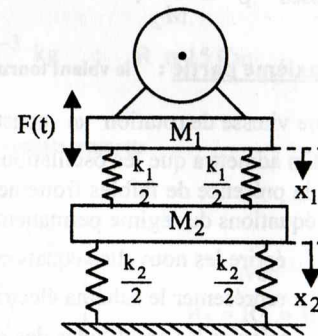
Si la machine M_1 était fixée directement à la fondation M_2 cette dernière subirait des vibrations trop importantes.

Pour y remédier on peut

l'en « isoler » par des ressorts (ou des caoutchoucs) dont l'ensemble a une raideur k_1 .

Le moteur M_1 comporte un volant qui n'est pas parfaitement équilibré et développe une force tournante à la vitesse ω .

Dans cette étude on ne considérera que les déplacements verticaux x_1 et x_2 des masses M_1 et M_2 ainsi que la seule projection verticale sinusoïdale de la force centrifuge du volant.



Première partie : le moteur est à l'arrêt ($\omega = 0$)

- 1) déterminer ω_{01} , pulsation de M_1 lorsque M_2 est maintenue immobile à sa position d'équilibre.
- 2) déterminer ω_{02} , pulsation de M_2 lorsque M_1 est maintenue immobile à sa position d'équilibre.
- 3) M_1 et M_2 peuvent toutes deux se déplacer verticalement, calculer le Lagrangien du système et en déduire les équations différentielles du mouvement.
- 4) on appelle ω_1 et ω_2 les pulsations propres du système :

exprimer ω_1^2 et ω_2^2 en fonction de ω_{01}^2 , ω_{02}^2 et le rapport des masses $\rho^2 = \frac{M_1}{M_2}$.

Deuxième partie : le volant tourne ($\omega \neq 0$)

à une vitesse de rotation ω constante de fonctionnement habituel.

On admettra que les oscillations transitoires sont rapidement éliminées par la présence de faibles frottements dont on ne tiendra pas compte dans les équations du régime permanent.

- 5) écrire les nouvelles équations du mouvement.
- 6) représenter le schéma électrique équivalent dans l'analogie M/L .
- 7) calculer les amplitudes des déplacements x_1 et x_2 des deux masses si le volant présente un balourd de masse m situé à une distance R de l'axe de rotation.
- 8) en dehors de sa valeur habituelle de fonctionnement, la vitesse de rotation ω du volant peut varier (lors de la mise en route par exemple). Montrer qu'elle peut passer par deux valeurs dangereuses.
- 9) pour quelle vitesse ω , l'amplitude de vibration de M_1 est elle nulle ?
- 10) pour quelle vitesse ω_{ar} aura-t-on une amplitude minimale pour M_2 (antirésonance) ? Quelle sera alors cette amplitude minimale ?

en déduire les précautions à prendre lors de la réalisation du montage du système.

- 11) on désire obtenir l'antirésonance à la même vitesse ω_{ar} pour les deux amplitudes de vibration : $A_1 = 0$ et $A_2 = A_{2MIN}$.

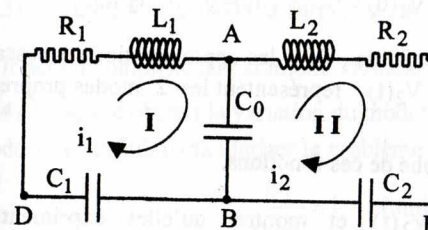
quelle condition doit vérifier pour cela le rapport ρ^2 des masses ?

- 12) sachant que cette condition est réalisée avec $M_1 = 125$ kg et $M_2 = 750$ kg, montrer à partir de l'expression de A_{2MIN} qu'on a intérêt à choisir $k_1 > k_2$.

quelle doit être la valeur de k_1 si $k_2 = 80$ kN/m ?

- 13) en déduire les valeurs de ω_{01} , ω_{02} , ω_1 , ω_2 , ω_{ar} et A_{2MIN} .
- 14) donner le diagramme de variation des amplitudes A_1 et A_2 en fonction de ω .

Données numériques : $m \cong 50.10^{-3}$ kg ; $R \cong 15$ Cm

EXERCICE 149**Battements amortis**

avec

$$R_1 = R_2 = R$$

$$L_1 = L_2 = L$$

$$C_1 = C_2 = C$$

- 1) si v_1 et v_2 sont respectivement les d.d.p aux bornes des capacités C_1 et C_2 du circuit électrique ci-dessus, montrer que les variations électriques libres dans ce circuit sont régies par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{v}_1 + 2\delta \dot{v}_1 + \frac{1}{1-\Gamma} \omega_0^2 v_1 - \frac{\Gamma}{1-\Gamma} \omega_0^2 v_2 = 0 \\ \ddot{v}_2 + 2\delta \dot{v}_2 + \frac{1}{1-\Gamma} \omega_0^2 v_2 - \frac{\Gamma}{1-\Gamma} \omega_0^2 v_1 = 0 \end{cases}$$

où $\delta = \frac{R}{2L}$ est le facteur d'amortissement,

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ la pulsation propre d'une seule maille non couplée

et $\Gamma = \frac{C}{C+C_0}$ le coefficient de couplage des deux mailles.

2) entre quelles valeurs théoriques peut varier Γ ? à quelles situations correspondent ses valeurs extrêmes ?

3) introduire les nouvelles coordonnées généralisées $V_1 = v_1 + v_2$ et $V_2 = v_2 - v_1$ et donner les équations différentielles correspondantes : remarque ?

en déduire les pulsations propres du circuit et de là les expressions de $V_1(t)$ et $V_2(t)$. Peut-on leur attribuer une signification physique ?

4) les conditions initiales de l'état du circuit étant :

$$v_1(0) = U_0 ; \quad v_2(0) = 0 ; \quad i_1 = 0 ; \quad i_2 = 0$$

et dans la mesure où δ est faible, faire les approximations nécessaires pour montrer que $V_1(t)$ et $V_2(t)$ représentent les 2 modes propres du circuit.

donner l'allure du graphe de ces fonctions.

5) trouver $v_1(t)$ et $v_2(t)$ et montrer qu'elles expriment un phénomène de battements amortis.

en donner une représentation graphique.

6) quelles sont les périodes d'oscillation T_{osc} et de battements T_B , notamment pour $\Gamma \ll 1$? en déduire le coefficient de couplage Γ en fonction de T_{osc} et T_B .

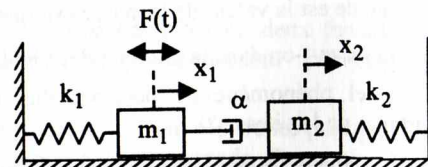
EXERCICE 150

On considère le système de la figure ci-contre.

La masse m_1 est soumise à une force :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

La masse m_2 est une masse de valeur ajustable.



1) établir les équations différentielles en x_1 et x_2 qui régissent les mouvements de m_1 et m_2 .

2) des équations en $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$, déduire l'expression de l'impédance d'entrée vitesse : $Z_e = F(t) / \dot{x}_1(t)$.

et dans le cas où $\omega = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \omega_1$

3) mettre Z_e sous la forme $Z_e = \alpha \left[1 - \left(\frac{1}{W} \right) \right]$ où W est une fonction complexe du paramètre variable m_2 .

4) afin d'obtenir la variation du module de Z_e lorsque m_2 varie de 0 à l'infini, particulariser le problème en posant :

$$\frac{k_2}{\alpha \omega_1} = 1 \quad (\text{unités S.I.})$$

et construire dans le plan complexe :

$$W ; \quad 1/W ; \quad -1/W ; \quad 1 - (1/W) \text{ puis } Z_e \text{ et } |Z_e|$$

5) en déduire la variation du module de la vitesse d'entrée en fonction de m_2 .

6) trouver l'expression de l'impédance transfert : $Z_T = \frac{F(t)}{\dot{x}_2(t)}$
Que devient Z_T pour $\omega = \omega_1$?

7) représenter Z_T dans le plan complexe lorsque m_2 varie.

8) en déduire la variation de son module $|Z_T|$ et de celui de la vitesse $|\dot{x}_2|$. Conclusion ?

9) quelle est la valeur de la masse critique m_{2C} ?

10) observe-t-on dans la pratique des vitesses infinies ?

Quel phénomène ne peut-on plus négliger compte tenu de l'importance de la vitesse ?

Le modèle proposé au départ est-il correct pour rendre compte du phénomène physique observé ?

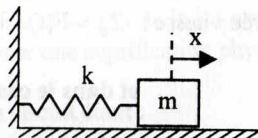
Quelle modification apporteriez-vous pour améliorer le modèle ?

EXERCICE 151

frottement sec

Une masse m reliée à un bâti par un ressort de raideur k peut effectuer des oscillations horizontales, libres et amorties

par une force de frottement $\vec{f}(t)$ qui apparaît entre le sol et la masse.



Cette force de frottement est horizontale, opposée au mouvement du corps et d'intensité constante $|\vec{f}| = f_0$ telle que :

$$f_0 = \mu_s mg \quad \text{quand le corps est au repos}$$

$$f_0 = \mu_g mg \quad \text{quand le corps est en mouvement}$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique et μ_g le coefficient de frottement de glissement, ($\mu_g < \mu_s$).

Sachant qu'à l'instant initial ($t = 0$) on a écarté la masse de $+X_0$ par rapport à sa position d'équilibre puis relâché sans vitesse initiale :

1) trouver l'équation différentielle du mouvement d'oscillation du système et rechercher sa solution $x(t)$ de deux manières :

a) en décomposant le mouvement en plusieurs étapes de durée égale à $T/2$ chacune.

b) en décomposant en série de FOURIER cette force de frottement sec $f(t)$ qui alors sera considérée comme une force extérieure appliquée au système.

2) bien que le résultat ainsi trouvé s'exprime de deux façons apparemment différentes, en déduire que le mouvement s'amortit linéairement avec le temps.

Pour cela, montrer que les enveloppes de $x(t)$ sont des droites puis que le maximum d'amplitude diminue à chaque demie période d'une même quantité.

3) tracer les graphes de l'énergie totale $E_n(n \frac{T}{2})$ et de sa diminution $\Delta E_n(n \frac{T}{2})$ sur la demie période qui suit.

Quelle remarque peut-on faire sur les ΔE_n ?

4) vérifier que le mobile repasse par sa position d'équilibre à un instant t différent de $T/4$.

5) trouver les expressions donnant la position d'arrêt x_a , le temps d'arrêt t_a et le nombre N de mouvements, de durée $T/2$ chacun, avant arrêt total.

On donne :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)} = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p(p+1)(2p+1)} = 3 - \pi$$

EXERCICE 152

Un corps de masse $m = 0,5 \text{ kg}$ reposant sur un plan horizontal est relié à un bâti fixe par un ressort de raideur $k = 245 \text{ N/m}$.

Ecarté de $X_0 = 3 \text{ cm}$ de sa position d'équilibre puis relâché sans vitesse initiale, il effectue des oscillations libres amorties par un frottement sec de coefficient $\mu = 0,1$.

1) calculer la période de ces oscillations.

2) quel est le nombre de mouvements, de durée $T/2$ chacun, effectués par ce corps et à quelle position s'arrête-t-il ?

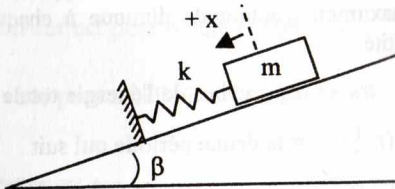
3) quelle distance totale aura-t-il parcouru ?

En déduire le travail résistant de la force de frottement.

4) comparer les énergies potentielles du ressort avant et après ces oscillations, conclusion ?

EXERCICE 153

Une masse $m = 0,5 \text{ kg}$ est attachée à un ressort de raideur $k = 250 \text{ N/m}$ et peut se déplacer sur un plan incliné d'un angle $\beta = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale.



1) si le coefficient de frottement statique est $\mu_s = 0,28$, quel est l'intervalle possible pour l'équilibre du système ?

2) la masse étant immobile à la position d'équilibre médiane, que l'on prendra pour origine, on lui donne une vitesse initiale $v_0 = 1,25 \text{ m/s}$ dans le sens positif, choisi vers le bas, et on la laisse osciller librement :

quelle sera la période de ces mouvements sachant qu'ils se font avec un coefficient de glissement $\mu_g = 0,24$?

3) à quel instant t_0 atteindra-t-elle sa position X_0 la plus éloignée de la position d'équilibre et quelle sera la valeur de ce X_0 ?

4) en déduire le temps d'arrêt t_a , la position d'arrêt x_a , le nombre N de mouvements de durée $T/2$ chacun, effectués par la masse ainsi que l'amplitude de chacun d'eux.

V. REPONSES



EXERCICE 1

$$1) \quad U = -(m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2) g \cos \vartheta$$

Condition d'équilibre stable :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} > 0 \quad \longrightarrow \quad m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2 > 0$$

$$2) \quad L = \frac{1}{2} (m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2) \dot{\vartheta}^2 + (m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2) g \cos \vartheta$$

$$\longrightarrow (m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2) \ddot{\vartheta} + (m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2) g \sin \vartheta = 0$$

3) Si l'équilibre est stable, on peut poser :

$$\omega_0^2 = \frac{m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2} g$$

et avec l'approximation des faibles amplitudes $\sin \vartheta \approx \vartheta$:

$\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$ équation différentielle linéaire des petites oscillations.

Dans le cas contraire, on pose :

$$\frac{m_1 \ell_1 - m_2 \ell_2}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2} g = -\xi^2$$

$\longrightarrow \ddot{\vartheta} - \xi^2 \vartheta = 0$ équation différentielle linéaire mais ne correspondant pas à des oscillations du système.

EXERCICE 2

$$1) \quad \tan \gamma = \frac{m_1}{2m_2}$$

$$2) \quad L = \frac{(4m_1 + m_2)}{6} \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \sqrt{4m_1^2 + m_2^2} g \ell \cos \vartheta$$

$$3) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{4m_1 + m_2}{\sqrt{4m_1^2 + m_2^2}}} \frac{2\ell}{3g}$$

$$4) \quad \text{avec } m_2 = 2m_1 : \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{6\ell}{\sqrt{17}g}}$$

$$\text{et } \tan \gamma = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad \gamma \approx 14^\circ$$

EXERCICE 3Cas a)

- 1) Pas de déformation du ressort à l'équilibre statique.
- 2) Pas de conditions pour les oscillations : l'équilibre est stable

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} > 0 \quad \forall m, k, a, \ell$$

$$3) \quad m\ell^2 \ddot{\vartheta} + (ka^2 + mg\ell)\vartheta = 0 \quad \longrightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{\ell^2} \frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}}}$$

- 4) force exercée par le ressort sur son point d'attache A : $F = k a \vartheta$

Cas b)

- 1) Pas de déformation du ressort à l'équilibre statique.
- 2) L'équilibre est stable et il y aura oscillations si :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} = ka^2 - mg\ell > 0$$

$$3) \quad \text{Dans ce cas : } m\ell^2 \ddot{\vartheta} + (ka^2 - mg\ell)\vartheta = 0$$

$$\longrightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{\ell^2} \frac{k}{m} - \frac{g}{\ell}}}$$

si $ka^2 - mg\ell \leq 0$ pas d'oscillations, le système écarté de sa position d'équilibre instable s'écroule d'un seul mouvement, donné par :

$$\ddot{\vartheta} - \xi^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \xi^2 = mg\ell - ka^2 > 0$$

$$\rightarrow \vartheta(t) = C_1 e^{\xi t} + C_2 e^{-\xi t} = \vartheta_0 \cosh \xi t$$

- 4) Force exercée sur le point d'attache A : $F = k a \vartheta$

Cas c)

- 1) Le ressort est allongé de $a \gamma_0$ et :

$$U(\vartheta) = \frac{1}{2} ka^2 \sin^2(\gamma_0 + \vartheta) - mg\ell \sin(\gamma_0 + \vartheta)$$

- 2) Condition d'équilibre et d'oscillation du système :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = ka^2 \gamma_0 - mg\ell = 0$$

L'équilibre étant alors stable : $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} > 0$

$$3) m\ell^2 \ddot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = 0 \quad \rightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2}{\ell^2} \frac{k}{m}}}$$

indépendante de g car l'action de la pesanteur, force dérivant d'un potentiel, est exactement compensée par la partie de la force de rappel du ressort due à la déformation antérieure au mouvement, conformément à la condition d'équilibre. Toutes les deux n'apparaissent pas dans l'équation différentielle du mouvement.

La comparaison permet de conclure qu'un même système peut parfois se comporter différemment selon sa disposition relative.

- 4) Force exercée sur le point A : $F = k a \vartheta + mg \ell / a$

EXERCICE 4

(e) Position d'équilibre, prise pour origine des angles ϑ .

(n) position de la barre pour laquelle le ressort est neutre (ni allongé ni comprimé)

(t) position de la barre à un instant t quelconque du mouvement, repérée par l'angle $\vartheta(t)$.

G centre de gravité de la tige à $\frac{\ell}{2}$ de 0 :

1) La position d'équilibre statique de G étant prise pour référence et avec ϑ petit :

$$\rightarrow U = U_m + U_k \cong \frac{1}{2} (k\ell^2 + \frac{1}{2} mg\ell \cos \gamma_0) \vartheta^2 + (\frac{1}{2} mg\ell \sin \gamma_0 - k\ell^2 \sin \gamma') \vartheta + \text{constante}$$

Condition d'équilibre : $\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0$

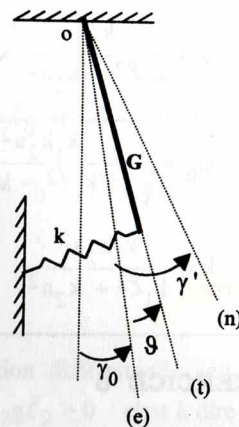
$$\rightarrow \frac{1}{2} mg\ell \sin \gamma_0 - k\ell^2 \sin \gamma' = 0$$

où γ' donne la déformation du ressort à l'équilibre statique

$$U \cong \frac{1}{2} (k\ell^2 + \frac{1}{2} mg\ell \cos \gamma_0) \vartheta^2 + \text{constante}$$

$$2) L = \frac{1}{2} \left(\frac{m\ell^2}{3} \right) \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} (k\ell^2 + \frac{1}{2} mg\ell \cos \gamma_0) \vartheta^2$$

$$\rightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{3g}{2\ell} \cos \gamma_0}$$



EXERCICE 5

$$1) \quad \vartheta = \frac{k_1 \ell}{k_1 \ell^2 + k_2 a^2} x$$

$$2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2 a^2}{M(k_1 \ell^2 + k_2 a^2)}}$$

$$3) \quad k = \frac{k_1 k_2 a^2}{k_1 \ell^2 + k_2 a^2}$$

o o o o

EXERCICE 6

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{M \ell^2}{16} + \frac{9m \ell^2}{16} \right) \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2) \ell^2}{16} \vartheta^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M + 9m}}$$

o o o o

EXERCICE 7

$$1) \quad U = \frac{1}{2} k \ell_3^2 (\sin \gamma_0 - \sin \vartheta)^2 + m_1 g \ell_1 (\sin \gamma_0 - \sin \vartheta) - m_2 g \ell_2 (\cos \gamma_0 - \cos \vartheta) - m_3 g \ell_3 (\sin \gamma_0 - \sin \vartheta)$$

où γ_0 représente l'angle dont a tourné le système avant d'atteindre sa position d'équilibre stable.

$$2) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = k \ell_3^2 \sin \gamma_0 + m_1 g \ell_1 - m_3 g \ell_3 = 0$$

$$3) \quad U(\vartheta) = \frac{1}{2} k \ell_3^2 \sin^2 \vartheta + m_2 g \ell_2 \cos \vartheta + \text{constante}$$

Contrairement à la masse m_2 , les masses m_1 et m_3 n'apparaissent pas explicitement dans $U(\vartheta)$.

4)

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 + m_3 \ell_3^2) \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} k \ell_3^2 \sin^2 \vartheta - m_2 g \ell_2 \cos \vartheta$$

$$5) \quad \text{avec} \quad \cos \vartheta \approx 1 - (\vartheta^2 / 2) \longrightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$$

$$\text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k \ell_3^2 - m_2 g \ell_2}{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 + m_3 \ell_3^2}}$$

6) La condition pour que l'équation différentielle soit celle de mouvements d'oscillations est $k \ell_3^2 - m_2 g \ell_2 > 0$ c'est à dire la même

que celle d'un équilibre stable du système: $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} = k \ell_3^2 - m_2 g \ell_2 > 0$

o o o o

EXERCICE 8

$$1) \quad U = \frac{1}{2} k \ell_2^2 \vartheta^2 + \frac{1}{2} m_1 g (\ell_1 - d) \vartheta^2 + (k \ell_2^2 \gamma_0 - m_2 g \ell_2) \vartheta$$

$$2) \quad k \ell_2^2 \gamma_0 - m_2 g \ell_2 = 0$$

$$3) \quad L = \frac{1}{2} [m_1 (\ell_1 - d)^2 + m_2 (\ell_2^2 + d^2)] \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} [k \ell_2^2 + m_1 g (\ell_1 - d)] \vartheta^2$$

$$4) \quad \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k \ell_2^2 + m_1 g (\ell_1 - d)}{m_1 (\ell_1 - d)^2 + m_2 (\ell_2^2 + d^2)}}$$

o o o o

EXERCICE 9

1) positions d'équilibre : $\frac{dU}{dx} = 0 \longrightarrow x = 0 \text{ et } x = -\ell$

en $x = 0$ on a $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} > 0 \longrightarrow$ équilibre stable

en $x = -\ell$ on a $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=-\ell} < 0 \longrightarrow$ équilibre instable

2)

au point A d'abscisse $x = -\ell \longrightarrow U(x = -\ell) = U_0$

et $E = U_0$ d'où $T = E - U = 0$

la masse étant en tout point soumise à une force :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{dU}{dx} \vec{e}_1 = -\frac{6U_0}{\ell} \left[\left(\frac{x}{\ell} \right)^2 + \frac{x}{\ell} \right] \vec{e}_1$$

soit au point A : $\vec{F}_A = \vec{F}(x = -\ell) = \vec{0}$

C'est un point d'arrêt, le système s'arrête.

au point B d'abscisse $x = \frac{\ell}{2} \longrightarrow U(x = \frac{\ell}{2}) = U_0$

d'où $T = E - U = 0$ et $\vec{F}_B = \vec{F}(x = \frac{\ell}{2}) = -\frac{9U_0}{2\ell} \vec{e}_1 \neq 0$

donc au point B la masse "rebondit" sur la barrière de potentiel et rebrousse chemin : le point B est un point de rebroussement.

3)

Région I $x \in]-\infty, -1]$

$T > 0$ et croît indéfiniment : m s'éloigne indéfiniment du point A

Région II $x \in [-1, +\frac{1}{2}]$

$T > 0$ donc un mouvement est possible mais il s'interrompt, dès que m atteint le point A ; elle s'y immobilise.

Région III $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$

aucun mouvement n'est possible car cette région correspond à une énergie cinétique $T < 0$.

4) dans ce cas, en $x = a$: $E = U(a) \cong 27 \cdot 10^{-4} U_0$ et $T(a) = 0$

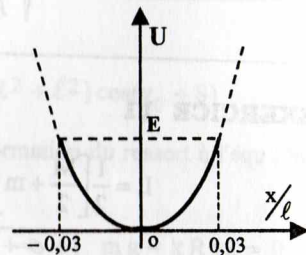
5) pour $x < a$ on peut faire l'approximation : $\left(\frac{x}{\ell} \right)^3 \ll \left(\frac{x}{\ell} \right)^2$

pour écrire $U(x) \cong \frac{3U_0}{\ell^2} x^2$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{3U_0}{\ell^2} x^2$$

$$\longrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\longrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m \ell^2}{6 U_0}}$$

**EXERCICE 10**

1)
$$\begin{cases} x = 2\ell \cos(\gamma + \vartheta) + \ell \sin(\gamma + \vartheta) \\ y = 2\ell \sin(\gamma + \vartheta) - \ell \cos(\gamma + \vartheta) \end{cases}$$

3) $U(\vartheta) = m g \ell [2 \sin(\gamma + \vartheta) - \cos(\gamma + \vartheta)]$

$$+ \frac{1}{2} k (a - \ell \vartheta \sin \gamma)^2$$

où a est l'allongement du ressort à l'équilibre statique.

4) $\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \longrightarrow m g \ell (2 \cos \gamma + \sin \gamma) - k a \ell \sin \gamma = 0$

$$\longrightarrow U(\vartheta) = \frac{1}{2} [m g \ell (\cos \gamma - 2 \sin \gamma) + k \ell^2 \sin^2 \gamma] \vartheta^2$$

5) $T = \frac{5}{2} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2$

$$6) \quad 5 m \ell^2 \ddot{\gamma} + [m g \ell (\cos \gamma - 2 \sin \gamma) + k \ell^2 \sin^2 \gamma] \gamma = 0$$

$$7) \quad \text{il y aura oscillations si : } \frac{g}{\ell} (\cos \gamma - 2 \sin \gamma) + \frac{k}{m} \sin^2 \gamma > 0$$

dans ce cas :

$$\ddot{\gamma} + \omega_0^2 \gamma = 0 \quad \text{et} \quad T_0 = \sqrt{\frac{5}{\frac{g}{\ell} (\cos \gamma - 2 \sin \gamma) + \frac{k}{m} \sin^2 \gamma}}$$

EXERCICE 11

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{2} + m \right] R^2 \dot{\gamma}^2 - \frac{1}{2} (C + mgR) \gamma^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C + mgR}{\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2}}$$

EXERCICE 12

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\frac{M}{2} + m}}$$

EXERCICE 13

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(\ell - R)^2 \right] \dot{\gamma}^2 - \frac{1}{2} [kR^2 + mg\ell] \gamma^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2 + mg\ell}{\frac{3}{2} MR^2 + m(\ell - R)^2}}$$

EXERCICE 14

$$1) \quad \text{à l'équilibre statique le ressort est comprimé de : } a \gamma_0 = \frac{(m - \mu)gR}{ka}$$

$$2) \quad L = \frac{1}{2} \left[\frac{M}{2} + m + \mu \right] \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k \frac{a^2}{R^2} y^2 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k a^2}{\left(\frac{M}{2} + m + \mu\right) R^2}}$$

EXERCICE 15

$$1) \quad U = \frac{1}{2} k R^2 \gamma^2 - k R^2 \gamma_0 \gamma - m g (R^2 + \ell^2) \cos(\gamma_0 + \gamma)$$

où γ_0 est l'angle correspondant à la déformation du ressort à l'équilibre statique.

$$\text{Condition d'équilibre : } \left. \frac{\partial U}{\partial \gamma} \right|_{\gamma=0} = 0 \quad \longrightarrow \quad m g - k R \gamma_0 = 0$$

$$2) \quad L = \frac{1}{2} \left[\frac{MR^2}{2} + m(R^2 + \ell^2) \right] \dot{\gamma}^2 - \frac{1}{2} [kR^2 + mg\ell] \gamma^2$$

$$\text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2 + mg\ell}{\frac{MR^2}{2} + m(R^2 + \ell^2)}}$$

EXERCICE 16

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8k}{3M}}$$

EXERCICE 17

$$a) \quad x(t) = x_0(1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{avec} \quad x_0 = \frac{mg}{k} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'origine étant prise au point où on lâche le corps.

$$b) \quad T_{\text{MAX}} = 2 mg \quad ; \quad T_{\text{MIN}} = 0$$

EXERCICE 18

$$1) \quad L = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} (M\Omega^2 - 2k)r^2$$

Pour un même Lagrangien L , la masse M peut être considérée :

✓ soit dans un repère absolu avec une énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} M (\dot{r}^2 + r^2 \Omega^2) \quad \text{et une énergie potentielle} \quad U = kr^2$$

✓ soit dans un repère tournant avec le système où elle aurait une énergie cinétique $T = \frac{1}{2} M \dot{r}^2$ et une énergie potentielle totale

$$U = kr^2 - \frac{1}{2} M \Omega^2 r^2, \quad \text{le terme} \quad U_c = -\frac{1}{2} M \Omega^2 r^2 \quad \text{représentant son "potentiel centrifuge".}$$

$$2) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2k - M\Omega^2}}$$

$$3) \quad \text{il n'y aura pas d'oscillations si : } \Omega \geq \sqrt{\frac{2k}{M}}$$

o o o o

EXERCICE 19

$$1) \quad L = \frac{1}{2} m(1 + 4a^2 x^2) \dot{x}^2 - mgax^2$$

$$\longrightarrow m(1 + 4a^2 x^2) \ddot{x} + 4ma^2 x \dot{x}^2 + 2mgax = 0$$

2) Pour des oscillations de très faibles amplitudes (x petit), on pourra négliger les termes d'ordre ≥ 2 dans l'équation différentielle qui devient alors linéaire :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = C \cos(\omega_0 t + \psi)$$

$$\text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{2ga}$$

o o o o

EXERCICE 20

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$\text{avec } m = \rho_s h S ; \quad k = \rho_\ell g S \quad \text{et} \quad d = \frac{\rho_s}{\rho_\ell} < 1$$

ρ_s la masse volumique du corps solide ; ρ_ℓ la masse

$$\text{volumique du liquide} \quad \longrightarrow \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{hd}{g}}$$

o o o o

EXERCICE 21

$$1) \quad L = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 - \frac{Mg}{\ell} x^2$$

$$\text{où } M = \rho S \ell \quad \text{est la masse totale du liquide :} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{2g}}$$

2) si l'une des branches du tube est inclinée d'un angle γ par rapport à la verticale, cette période aura pour expression :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g(1 + \cos \gamma)}}$$

o o o o

EXERCICE 22

$$1) \quad \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{m B_H}{J} \quad \longrightarrow \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m B_H}}$$

$$2) \quad B_H = \frac{\pi^2}{3} \frac{M \ell^2}{m T_0^2} \cong 1,955 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}$$

$$3) \quad B_H = \frac{8 \pi^2 m d^2}{m (T_0'^2 - T_0^2)} \cong 2,003 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla}$$

o o o o

EXERCICE 23

$$1) \quad L = \frac{1}{2} m \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} (k \ell_1^2 + m g \ell) \vartheta^2$$

$$2) \quad \ddot{\vartheta} + 2\delta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\alpha \ell_2^2}{2m \ell^2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k \ell_1^2}{m \ell^2} + \frac{g}{\ell}}$$

$$3) \quad T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k \ell_1^2}{m \ell^2} + \frac{g}{\ell} - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 \left(\frac{\ell_2}{\ell}\right)^4}}$$

$$4) \quad \text{le terme en } \frac{g}{\ell} \text{ disparaît des expressions de } L, \omega_0 \text{ et } T_a.$$

EXERCICE 24

$$1) \quad L = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m R^2 + \mu (R - b)^2 \right] \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} [4k_1 R^2 + k_2 (R + a)^2 + \mu g b] \vartheta^2$$

$$2) \quad \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$$

$$3) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4k_1 R^2 + k_2 (R + a)^2 + \mu g b}{\frac{3}{2} m R^2 + \mu (R - b)^2}}$$

$$4) \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \cos \omega_0 t$$

$$5) \quad \ddot{\vartheta} + 2\delta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\beta}{2 \left[\frac{3}{2} m R^2 + \mu (R - b)^2 \right]}$$

EXERCICE 25

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \cong 5$$

La condition d'oscillation $\delta < \omega_0$ correspond à $Q > \frac{1}{2}$.
Dans ce cas $Q = 5$, des oscillations sont donc possibles.

EXERCICE 26

$$1) \quad L = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} m g a \vartheta^2 \quad \text{avec} \quad J = \frac{m r^2}{3} = \frac{4 m a^2}{3}$$

$$D = \frac{1}{2} R i^2 = \frac{2 a^4 B^2}{R} \dot{\vartheta}^2$$

$$2) \quad \ddot{\vartheta} + 2\delta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$$

$$3) \quad \vartheta(t) = \frac{\omega_0}{\omega_a} \vartheta_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{4a}}$$

$$\delta = \frac{3 a^2 B^2}{2 m R} \quad ; \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{\delta}{\omega_a}$$

$$4) \quad \text{Les oscillations sont possibles si :} \quad B^4 < \left(\frac{m^2 R^2 g}{3 a^5} \right)$$

EXERCICE 27

$$1) \quad \Gamma = r C \approx 71,25 \mu s$$

$$2) \quad q(t) = q_M (1 - e^{-t/\Gamma}) \quad \text{avec} \quad q_M \approx C E$$

$$q(\Gamma) \cong 0,632 q_M \quad \text{et} \quad q(10\Gamma) \cong 0,999 q_M \cong q_M$$

$$3) \quad \text{dans l'hypothèse de l'existence d'oscillations électriques :}$$

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \longrightarrow q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi)$$

$$\text{avec} \quad \delta = \frac{R}{2L} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad ; \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Si l'on refait le choix de l'origine des temps $t = 0$ à l'instant où le commutateur est en position 2 (fin de charge du condensateur et début des oscillations), on a les conditions initiales :

$$q(0) \approx q_M = C u(0) \approx CE \quad ; \quad \dot{q}(0) = i(0) = 0$$

$$\longrightarrow u(t) = \frac{1}{C} q(t) = \frac{\omega_0}{\omega_a} E e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi)$$

$$\text{avec } \operatorname{tg} \psi = -\frac{\delta}{\omega_a}$$

à partir du graphe de $U(t)$ qui accompagne l'énoncé, on détermine :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx T_a \approx 750 \mu s \longrightarrow L \approx 10 \text{ mH}$$

du graphe : $u_n \approx 5,18 \text{ V}$ et $u_{n+5} \approx 2,5 \text{ V}$ (par exemple)

$$\longrightarrow D = \frac{1}{5} \operatorname{Log} \frac{5,18}{2,5} \approx 0,146 \approx \delta T_a \approx \delta T_0$$

$$\longrightarrow \delta = \frac{R}{2L} \approx 194,5 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad R \approx 3,9 \Omega$$

on aura le régime critique pour :

$$\delta_c = \frac{R_c}{2L} = \omega_0 \longrightarrow R_c = 2L\omega_0 \approx 167,5 \Omega$$

$$4) \quad \tau = \frac{1}{\delta} \approx 5,15 \text{ ms}$$

$$\text{de } \tau = \frac{1}{\delta} \text{ et } D = \delta T_a \longrightarrow \frac{1}{D} = \frac{\tau}{T_a} \equiv \text{nombre de pseudo-périodes}$$

pour que l'amplitude maximale décroît à $1/e$ de sa valeur initiale.

EXERCICE 28

$$\delta \approx 76.10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad k \approx 972 \text{ N/m}$$

EXERCICE 29

$$1) \quad \langle E \rangle = E_0 e^{-2\delta t} \quad \text{avec} \quad E_0 \approx \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 \quad \text{énergie totale initiale}$$

$$2) \quad \tau = \frac{1}{2\delta} \longrightarrow \langle E \rangle = E_0 e^{-t/\tau}$$

EXERCICE 30

$$a) \quad E(t) = E_0 e^{-2\delta t} \longrightarrow \Delta E = E_0 \left[e^{-2\delta t} - 1 \right]$$

$$b) \quad E(t = 1 \text{ ms}) \approx E_0/2$$

EXERCICE 31

$$1) \quad D \approx 7.10^{-2} \quad \Delta E \approx 127,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$2) \quad \frac{\Delta T}{T_0} \approx 6.10^{-5} \text{ (négligeable)}$$

$$3) \quad \alpha \approx 0,35 \text{ kg.s}^{-1}$$

$$4) \quad x(0,1) \approx 3,13 \text{ cm} \quad \Delta E \approx 121 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

EXERCICE 32

$$1) \quad U(\vartheta) = \frac{1}{2} [k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2] (\gamma_0 - \vartheta)^2 - mg \ell (\gamma_0 - \vartheta)$$

où γ_0 donne la position de la barre pour laquelle les deux ressorts sont neutres.

2) condition d'équilibre :

$$\frac{dU}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0 \longrightarrow (k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2) \gamma_0 - mg \ell = 0$$

$$\text{d'où } U(\vartheta) \approx \frac{1}{2} (k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2) \vartheta^2$$

$$L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2) \theta^2$$

$$3) \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{F_0}{m\ell} \cos \omega t$$

$$\text{avec } \delta = \frac{\alpha}{2m} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2}{m\ell^2}}$$

$$4) \quad \theta(t) = \underbrace{C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi)}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{\frac{F_0 \cos(\omega t + \varphi)}{m\ell[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{1/2}}}_{\text{régime permanent}}$$

EXERCICE 33

$$1) \quad \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2 \right] \ddot{\theta} + \left[4kR^2 + k(R + \frac{\ell}{2})^2 - mg\ell \right] \theta = 0$$

$$2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4kR^2 + k(R + \frac{\ell}{2})^2 - mg\ell}{\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2}}$$

$$3) \quad \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\alpha(R + \frac{\ell}{2})^2}{3MR^2 + 2m(R + \ell)^2}$$

4)

a) amortissement important : $\delta > \omega_0$

$$\theta(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{c'est le régime aperiodique}$$

$$\text{avec } r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

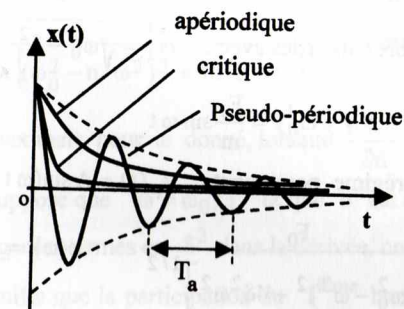
b) amortissement critique : $\delta = \omega_0$

$$\theta(t) = e^{-\delta t} (C_1 t + C_2) \quad \text{c'est le régime critique}$$

c) amortissement faible : $\delta < \omega_0$

$$\theta(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi) \quad \text{c'est le régime oscillatoire amorti}$$

$$\text{ou pseudo-périodique avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



5) Pour θ faible, on peut supposer que le mouvement du système est équivalent à une rotation de θ autour du point P de contact du cylindre avec le sol, appelé "axe instantané de rotation" et en utilisant le théorème de Huygens sur les moments d'inertie, on retrouve la même expression pour l'énergie cinétique T.

$$6) \quad \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{(R + \ell) F_0}{\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2} \cos \omega t$$

c'est le régime oscillatoire entretenu (ou forcé) :

$$\theta(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \psi) + \frac{(R + \ell) F_0}{\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2 \right] \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

EXERCICE 34

$$1) \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \longrightarrow \quad y(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$$

$$2) \quad \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

$$\text{pour } \delta < \omega_0 \quad \longrightarrow \quad y(t) = Ce^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)$$

$$\text{oscillations libres amorties avec : } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$$

$$3) \quad a) \quad \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

$$\longrightarrow \text{en régime permanent } y_p(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec :}$$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$A(\omega) \text{ admet un maximum (résonance) pour } \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

sur le graphe, les limites de la bande passante correspondent à :

$$A(\omega_1) = A(\omega_2) = A_{\text{MAX}} / \sqrt{2} \quad (\text{en unités naturelles})$$

et à -3 dB (en unités logarithmiques : décibels).

$$\longrightarrow \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} - \delta \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} + \delta$$

$$\longrightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta \quad (\text{voir rappel de cours})$$

$$b) \quad \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F(t)}{m}$$

$$\text{où } F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4a}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\omega t$$

$$\text{car } \begin{cases} n = 2p+1 \text{ entier impair : } b_n = b_{2p+1} = \frac{4a}{(2p+1)\pi} \\ n = 2p \text{ entier pair : } b_n = b_{2p} = 0 \end{cases}$$

l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{4a}{(2p+1)m\pi} \sin(2p+1)\omega t$$

relative au $n^{\text{ième}}$ harmonique de $F(t)$, admet pour solution particulière et partielle :

$$y_n(t) = A_n(\omega) \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad \text{avec :}$$

$$A_n(\omega) = \frac{4a}{nm\pi \left[(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\delta^2 n^2 \omega^2 \right]^{1/2}} \quad \text{laquelle amplitude}$$

$$A_n(\omega) \text{ est maximale, pour } \omega \text{ donné, lorsque } \frac{\partial A_n}{\partial n} = 0.$$

Ainsi, si on suppose que $\omega = \omega_0/3$ et que δ est assez faible pour qu'on puisse négliger les termes en δ^2 dans la dérivée, on trouve $n = 3$.

Cela signifie que la participation du 3^{ième} harmonique de $F(t)$, dans les oscillations forcées de la masse, est plus importante que celle des autres : $A_3(\omega_0/3) > A_n(\omega_0/3) \quad \forall n \neq 3$

EXERCICE 35

Les deux ressorts k_1 et k_2 étant en série, après leur remplacement par un ressort équivalent, le système devient alors identique à celui de l'exercice précédent.

$$1) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{où} \quad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$2) \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

3) en supposant ω_0 donnée (k et m fixés) on veut que :

$$\frac{\omega_0 - \omega_a}{\omega_0} \approx \frac{1}{100} \quad \longrightarrow \quad \omega_a = \frac{99}{100} \omega_0 \quad \longrightarrow \quad \alpha \approx 0,28 \sqrt{m k}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \approx 3,54 \quad ; \quad D = \delta T_a \approx 0,9$$

$$4) y(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi) +$$

$$+ \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$5) F_2(t) = \begin{cases} \frac{4F_0}{T} t & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -\frac{4F_0}{T} t + 2F_0 & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b_{2p} = \frac{(-1)^{p+1} 2F_0}{p\pi} & p = 1, 2, \dots \\ b_{2p+1} = \frac{(-1)^p 8F_0}{(2p+1)^2 \pi^2} & p = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$F_2(t) = \frac{8F_0}{\pi^2} \sin \omega t + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} 2F_0}{p\pi} \sin 2p\omega t + \frac{(-1)^p 8F_0}{(2p+1)^2 \pi^2} \sin(2p+1)\omega t$$

si l'on ne considère que les 3 premiers termes, il vient :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y \cong \frac{8F_0}{m\pi^2} \sin \omega t + \frac{2F_0}{m\pi} \sin 2\omega t - \frac{8F_0}{9m\pi^2} \sin 3\omega t$$

$$\rightarrow y_p(t) \cong \frac{8F_0}{m\pi^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$+ \frac{2F_0}{m\pi[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\delta^2\omega^2]^{1/2}} \sin(2\omega t + \varphi_2)$$

$$- \frac{8F_0}{9m\pi^2[(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\delta^2\omega^2]^{1/2}} \sin(3\omega t + \varphi_3)$$

(on a supposé ω_0 différent de ω , 2ω et 3ω)

o o o o

EXERCICE 36

1) a) Soit $00' = x$ le déplacement de translation du ressort ainsi que de l'axe de la poulie, $DD' = y$ la translation de la masse m et $AD = A'D' =$ longueur du câble inextensible = constante.

Après avoir choisi comme sens positifs :

✓ Vers le bas pour la translation de l'axe de la poulie.

✓ Selon la rotation trigonométrique en se déplaçant le long du câble.

On peut écrire : $\overline{AD} = \overline{A'D'} = \overline{AD'}$ et $\overline{B'B} = \overline{CC'} = \overline{OO'} = x$

la relation de CHASLES donne :

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$\overline{AD'} = \overline{AB'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'}$$

or $\overline{BC} = \overline{B'C'} = 1/2 \text{ tour} = +\pi R$

d'où : $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AB'} + \overline{C'D'}$

une nouvelle fois la relation

de CHASLES :

$$\overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{B'B} = \overline{AB'} + x$$

$$\overline{CD} = \overline{CC'} + \overline{C'D} = x + \overline{C'D}$$

$$\overline{C'D'} = \overline{C'D} + \overline{DD'} = \overline{C'D} + y$$

$$\rightarrow y = 2x$$

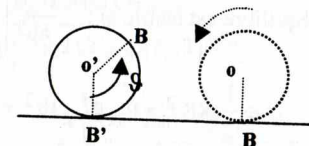
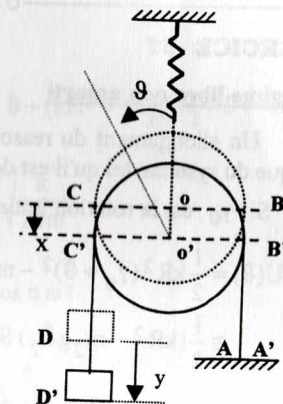
b) en inversant le dessin de $\pi/2$ et par analogie avec le cas d'un roulement sans glissement (le fil ne glisse pas sur la poulie) on écrit : $x = \overline{BB'} = R\theta$

$$\text{Donc } y = 2x = 2R\theta$$

$$2) L = \frac{1}{2} \left[\frac{3M}{8} + m \right] \dot{y}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{4} \right) y^2$$

$$3) \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M + 8m}}$$

$$4) \ddot{y} + \omega_0^2 y = 2\omega_0^2 s(t)$$



avec $s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a}{n\omega} \sin n\omega t$

dans le cas où ω_0 serait différent de ω et de 2ω et en ne retenant que les deux premiers termes ($n=1$ et $n=2$) de la série de FOURIER de $s(t)$, on aura pour le régime permanent :

$$y_p(t) \cong \frac{4a\omega_0^2}{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t - \frac{2a\omega_0^2}{\omega(\omega_0^2 - 4\omega^2)} \sin 2\omega t$$

o o o o

EXERCICE 37

I. Régime libre non amorti

1) Un allongement du ressort est nécessaire pour obtenir l'équilibre statique du système tel qu'il est décrit.

2) Si γ_0 est la rotation initiale pour atteindre la position d'équilibre :

$$U(\vartheta) = \frac{1}{2} kR^2 (\gamma_0 + \vartheta)^2 - m_1 g \ell_1 (\gamma_0 + \vartheta) + m_2 g \ell_2 (\cos \vartheta - \cos \gamma_0)$$

$$\cong \frac{1}{2} (kR^2 - m_2 g \ell_2) \vartheta^2 + (kR^2 \gamma_0 - m_1 g \ell_1) \vartheta + \text{constante}$$

3) Condition d'équilibre : $\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \longrightarrow kR^2 \gamma_0 - m_1 g \ell_1 = 0$

Cet équilibre est stable si : $\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \right|_{\vartheta=0} > 0 \longrightarrow kR^2 - m_2 g \ell_2 > 0$

4) $U \cong \frac{1}{2} (kR^2 - m_2 g \ell_2) \vartheta^2 + \text{constante}$

5) $T = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} MR^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 \right] \dot{\vartheta}^2$

6) $\left[\frac{MR^2}{2} + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 \right] \ddot{\vartheta} + [kR^2 - m_2 g \ell_2] \vartheta = 0$

7) Pour qu'il y ait oscillations, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif ou : $kR^2 - m_2 g \ell_2 > 0$ ce qui est aussi la condition d'équilibre stable.

8) $\ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2 - m_2 g \ell_2}{\frac{M}{2} R^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}}$

si à $t=0$: $\vartheta(0) = 0,1 \text{ rad}$ et $\dot{\vartheta}(0) = 0 \longrightarrow \vartheta(t) = 0,1 \cos \omega_0 t$

II. Régime amorti forcé

9) $\left[\frac{M}{2} R^2 + m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 \right] \ddot{\vartheta} + \alpha R^2 \dot{\vartheta} + (kR^2 - m_2 g \ell_2) \vartheta = \ell_1 F(t)$

10) $\delta = \frac{\alpha}{24m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{3\ell}} = \sqrt{\frac{k}{24m}}$

11) $F(t) = \frac{F_0}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2F_0}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{4} \right) \cos n\omega t$

12) $\vartheta(t) \cong C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi) + \frac{F_0}{12m\ell\omega_0^2} +$

$$+ \frac{\sqrt{2} F_0 \cos(\omega t + \varphi_1)}{3m\ell\pi [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

$$+ \frac{F_0 \cos(2\omega t + \varphi_2)}{3m\ell\pi [(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\delta^2 \omega^2]^{1/2}}$$

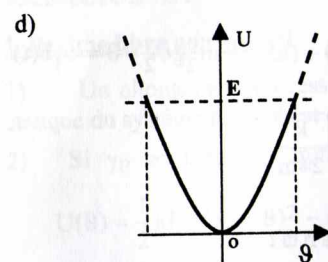
o o o o

EXERCICE 38

I. Système libre non amorti

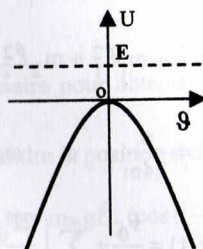
1) a) $U(\vartheta) = 2mgd [\cos \gamma_0 - \cos(\gamma_0 + \vartheta)] - mgR\vartheta$
 b) $\left. \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \rightarrow \sin \gamma_0 = \frac{R}{2d} > 0 \rightarrow 0 < \gamma_0 < \pi$

c) $\cos(\gamma_0 + \vartheta) \approx (1 - \frac{\vartheta^2}{2}) \cos \gamma_0 - \vartheta \sin \gamma_0$
 $\rightarrow U = mg(d \cos \gamma_0) \vartheta^2$



pour $0 < \gamma_0 < \frac{\pi}{2}$

(il y aura des vibrations)



pour $\frac{\pi}{2} < \gamma_0 < \pi$

(pas de vibrations)

2) $L = mR^2 \left[1 + \left(\frac{d}{R} \right)^2 \right] \dot{\vartheta}^2 - mg(d \cos \gamma_0) \vartheta^2$

si $\cos \gamma_0 > 0 \rightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{gd \cos \gamma_0}{R^2 + d^2}}$

II. Système amorti forcé

3) a) $\ddot{\vartheta} + 2\delta \dot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = S \sin \omega t$

avec $\delta = \frac{\alpha d^2}{4m(R^2 + d^2)}$ et $S = \frac{RF_0}{2m(R^2 + d^2)}$

δ s'exprimant en s^{-1} et S en s^{-2}

b) $\vartheta_p(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t \gg \tau$

où $A = \frac{S}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{1/2}}$ et $\tan \varphi = -\frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

EXERCICE 39

1) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k(x-s)^2$

2) $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos \omega t$ avec $\delta = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3) $x(t) = \frac{a \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{1/2}} \cos(\omega t + \varphi)$

4) $\delta = \frac{\omega_0}{40} = 2,5 s^{-1}$

EXERCICE 40

$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos(\omega t - \vartheta)$

où $C = S_0 \sqrt{\omega_0^4 + 4\delta^2 \omega^2}$ et $\tan \vartheta = \frac{\omega_0^2}{2\delta \omega}$

$\rightarrow x_p(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec :

$A = \frac{S_0 \sqrt{\omega_0^4 + 4\delta^2 \omega^2}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^{1/2}}$ et $\tan \varphi = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2}{2\delta \omega^3}$

EXERCICE 41**Première Partie**

$$1) \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \quad 2) \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_3 + k_2}{m_2}}$$

$$3) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 & (I) \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0 & (II) \end{cases}$$

On note que les équations différentielles obtenues, (I) et (II), sont couplées : présence d'un **terme de couplage** $k x_j$ dans l'équation relative à la coordonnée généralisée i ($i \neq j$). Ces termes découlent eux mêmes de la présence de **termes rectangles** (ou croisés) $k x_i x_j$ dans l'expression de l'énergie potentielle $\rightarrow$ couplage de type élastique.

$$4) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_{02}^2 - \omega_{01}^2}{2}\right)^2 + \Gamma^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}$$

$$5) \quad 0 \leq \Gamma \leq 1$$

6) $\omega_1 < \omega_{01} < \omega_{02} < \omega_2$ Le couplage des masses se traduit par un écartement des valeurs des pulsations propres.

Deuxième partie**système symétrique**

$$m_1 = m_2 = m \quad ; \quad k_1 = k_3 = k \quad ; \quad k_2 \neq k$$

$$\rightarrow \Gamma = \frac{k_2}{k + k_2} \quad \text{et} \quad \omega_{01}^2 = \omega_{02}^2 = \Omega_{\text{osc}}^2 = \frac{k + k_2}{m} = \frac{1}{1 - \Gamma} \omega_0^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = (1 - \Gamma) \Omega_{\text{osc}}^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \\ \omega_2^2 = (1 + \Gamma) \Omega_{\text{osc}}^2 = \frac{k + 2k_2}{m} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \omega_0^2 \end{cases}$$

$$\text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{est la pulsation propre d'une masse}$$

découplée effectuant des oscillations libres.

$$7) \quad X_1 = x_1 + x_2 \quad ; \quad X_2 = x_1 - x_2$$

En faisant l'addition (I) + (II) et la soustraction (I) - (II) des équations différentielles couplées précédentes, on obtient un nouveau système d'équations différentielles découplées en X_1 et X_2 dont la résolution plus aisée donne :

$$\begin{cases} X_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \\ X_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \underbrace{\frac{C_1}{2} \cos(\omega_1 t + \psi_1)}_{1^{\text{er}} \text{ MODE}} + \underbrace{\frac{C_2}{2} \cos(\omega_2 t + \psi_2)}_{2^{\text{ème}} \text{ MODE}} \\ x_2(t) = \underbrace{\frac{C_1}{2} \cos(\omega_1 t + \psi_1)}_{1^{\text{er}} \text{ MODE}} - \underbrace{\frac{C_2}{2} \cos(\omega_2 t + \psi_2)}_{2^{\text{ème}} \text{ MODE}} \end{cases}$$

8)

$$a) \quad k_1 = k_3 \ll k_2 \quad ; \quad \Gamma \cong 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \sqrt{2} \Omega_{\text{osc}} \end{cases}$$

le comportement du système est proche de celui de l'exercice 60.

$$b) \quad k_1 = k_3 \gg k_2 \quad ; \quad \Gamma \cong 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = \omega_2 = \Omega_{\text{osc}} \cong \omega_0$$

chacune des deux masses constitue un système indépendant oscillant à la pulsation ω_0 . Le mouvement est ainsi équivalent au 1^{er} mode précédent.

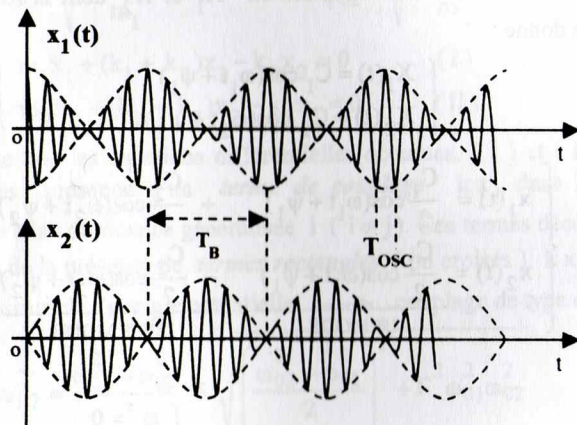
c)

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(X_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ x_2(t) = \left(X_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{c'est le} \\ \text{phénomène} \\ \text{des battements} \end{array}$$

avec $T_{osc} = \frac{2\pi}{\Omega_{osc}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ et $T_B = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$

Période des oscillations

période des battements



et par des approximations :

$$\Gamma \ll 1 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 \cong \omega_0 \\ \omega_2 \cong (1 + \Gamma) \omega_0 \end{cases}$$

$$\Omega_{osc} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cong (1 + \frac{\Gamma}{2}) \omega_0$$

$$\Omega_B = \omega_2 - \omega_1 \cong \Gamma \omega_0$$

$$T_{osc} = \frac{2\pi}{\Omega_{osc}} \cong \frac{2}{2 + \Gamma} T_0$$

$$\text{et } T_B = \frac{2\pi}{\Omega_B} \cong \frac{1}{\Gamma} T_0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Gamma} = \frac{T_B}{T_0}$$

$$\rightarrow \frac{T_{osc}}{T_B} \cong \frac{2\Gamma}{2 + \Gamma} \quad \text{ou} \quad \Gamma \cong \frac{2T_{osc}}{2T_B - T_{osc}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1(t) = (X_0 \cos \frac{\Gamma}{2} \omega_0 t) \cos(1 + \frac{\Gamma}{2}) \omega_0 t \\ x_2(t) = (X_0 \sin \frac{\Gamma}{2} \omega_0 t) \sin(1 + \frac{\Gamma}{2}) \omega_0 t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \langle E_1 \rangle &= \frac{E_0}{2} [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t] = \frac{E_0}{2} [1 + \cos \Omega_B t] \\ \langle E_2 \rangle &= \frac{E_0}{2} [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t] = \frac{E_0}{2} [1 - \cos \Omega_B t] \end{aligned}$$

$$\text{avec } E_0 = E_{\text{totale}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 X_0^2 = \text{constante}$$

Il y a échange d'énergie entre les oscillateurs couplés et la période de battements T_B est donc l'intervalle de temps nécessaire à l'énergie totale du système pour quitter un oscillateur et lui revenir.

EXERCICE 42

1) Le système est à deux degrés de liberté car deux coordonnées généralisées sont nécessaires et suffisantes pour déterminer l'état du système :

La rotation θ du cylindre et le déplacement y de m .

$$2) \quad \omega_1^2 = (3 - \sqrt{5}) \frac{k}{M} \quad \omega_2^2 = (3 + \sqrt{5}) \frac{k}{M}$$

$$3) \quad \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2R} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2R} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$4) \quad \omega_{01}^2 = \frac{2k}{M} \quad 5) \quad \omega_{02}^2 = \frac{4k}{M}$$

$$6) \quad \omega_1 < \omega_{01} < \omega_{02} < \omega_2$$

Le couplage des deux masses à la propriété d'éloigner encore les valeurs des 2 pulsations propres du système par rapport à celles relatives à chaque masse.

EXERCICE 43

- 1) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3m}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- 2) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$

EXERCICE 44

- 1) $L = m\ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \ell^2 \vartheta^2 - \frac{1}{2} k_2 y^2 + k_2 \ell \vartheta y - \frac{1}{2} k_3 y^2$
- 2) $\begin{cases} 2m\ell^2 \ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2) \ell^2 \vartheta - k_2 \ell y = 0 \\ M \ddot{y} + (k_2 + k_3) y - k_2 \ell \vartheta = 0 \end{cases}$
- 3) $\omega_1^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \frac{k}{M}$; $\omega_2^2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \frac{k}{M}$
- 4) $\begin{pmatrix} \vartheta \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\ell}{1 + \sqrt{5}} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\ell}{1 - \sqrt{5}} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$

EXERCICE 45

- 1) $L = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \vartheta^2 - \frac{1}{2} k_2 (y - a\vartheta)^2 - \frac{1}{2} k_3 y^2$
- 2) $\begin{cases} m\ell^2 \ddot{\vartheta} + (k_1 \ell^2 + k_2 a^2) \vartheta - k_2 a y = 0 \\ M \ddot{y} + (k_2 + k_3) y - k_2 a \vartheta = 0 \end{cases}$
- 3) $\omega_1^2 = \frac{3}{4} \frac{k}{m}$; $\omega_2^2 = \frac{7}{4} \frac{k}{m}$
- 4) $\begin{pmatrix} \vartheta \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \ell \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\ell \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$

selon les conditions initiales du mouvement :

$$\rightarrow \begin{cases} \vartheta(t) = \frac{\vartheta_0}{2} [\cos \omega_2 t + \cos \omega_1 t] \\ y(t) = \frac{\ell \vartheta_0}{2} [\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t] \end{cases}$$

EXERCICE 46

- 1) $L = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_3^2 + k x_1 x_2 + k x_2 x_3$

$$\rightarrow \begin{cases} m \ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0 \\ M \ddot{x}_2 + 2k x_2 - k x_1 - k x_3 = 0 \\ m \ddot{x}_3 + k x_3 - k x_2 = 0 \end{cases}$$

- 2) $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} M \\ \circ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$\begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} M \\ \circ \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_3} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \psi_3)$$

$$\begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix} \rightarrow \leftarrow \begin{matrix} M \\ \circ \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m \\ \circ \end{matrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{mV_0}{M+2m} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{V_0}{2\omega_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_2 t + \frac{MV_0}{2\omega_3(M+2m)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \sin \omega_3 t$$

4)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{mX_0}{M+2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{X_0}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t + \frac{MX_0}{2(M+2m)} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_3 t$$

○○○

1) Pour ce système, on peut dénombrer 4 coordonnées généralisées possibles, les déplacements x_1 et x_2 des masses et les rotations ϑ_1 et ϑ_2 des poulies. Cependant seules deux ne sont pas combinaison linéaire l'une de l'autre, x_1 et x_2 par exemple :

Le système est donc à deux degrés de liberté. (voir ex 53.b).

$$2) \quad L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} (k_1 + 4k_2) x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + 2k_2 x_1 x_2$$

$$3) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + 4k_2) x_1 - 2k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - 2k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$4) \quad \omega_1^2 = (3 - 2\sqrt{2}) \frac{k}{m} ; \quad \omega_2^2 = (3 + 2\sqrt{2}) \frac{k}{m}$$

$$5) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)}_{\text{mode I}} + \underbrace{C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)}_{\text{mode II}}$$

6) Les conditions les plus simples à réaliser pour que le système oscille selon le mode II uniquement sont, à $t = 0$:

$$x_1(0) = C_2 ; \quad \dot{x}_1(0) = 0 ; \quad x_2(0) = (1 - \sqrt{2}) C_2 ; \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

○○○

EXERCICE 48

$$1) \quad L = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 \ell_1^2}{3} + m_2 \ell_1^2 \right] \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 \ell_2^2}{12} + m_2 a^2 \right] \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 a \ell_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g \ell_1 \cos \vartheta_1 + m_2 a g \cos \vartheta_2$$

○○○

$$2) \quad L \approx \frac{1}{2} \left[\frac{m_1}{3} + m_2 \right] \ell_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{\ell_2^2}{12} + a^2 \right] \dot{\vartheta}_2^2 + m_2 a \ell_1 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{2} + m_2 \right) g \ell_1 \vartheta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 a g \vartheta_2^2$$

$$3) \quad \begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + \frac{81}{78} \frac{g}{\ell} \vartheta_1 + \frac{12}{78} \ddot{\vartheta}_2 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \vartheta_2 + \frac{3}{2} \ddot{\vartheta}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_1^2 = \frac{33 - \sqrt{279}}{20} \frac{g}{\ell} = 0,814 \frac{g}{\ell}$$

$$\omega_2^2 = \frac{33 + \sqrt{279}}{20} \frac{g}{\ell} = 2,485 \frac{g}{\ell}$$

EXERCICE 49

$$1) \quad L = \frac{1}{2} (M+m) \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + m \ell \dot{X} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + m g \ell \cos \vartheta - \frac{1}{2} k X^2$$

$$2) \quad \begin{cases} (M+m) \ddot{X} + kX + m \ell \ddot{\vartheta} = 0 \\ m \ell \ddot{\vartheta} + m g \vartheta + m \ddot{X} = 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \omega^4 - \left[\frac{k}{M} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{\ell} \right] \omega^2 + \frac{k}{M} \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\left(\frac{k}{M} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{\ell} \right)}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{M} + \frac{M+m}{M} \frac{g}{\ell} \right)^2 - 4 \frac{k}{M} \frac{g}{\ell}}$$

$$\text{si } M = 2m \text{ et } k = \frac{mg}{\ell}$$

$$\omega_1^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{g}{\ell} ; \quad \omega_2^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \frac{g}{\ell}$$

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}-1}{\ell} \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{\ell} \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

EXERCICE 50

$$1) \quad L = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} m g \ell \vartheta^2 - m \ell \dot{x} \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

$$2) \quad \begin{cases} (M+m) \ddot{x} - (m \ell \sin \vartheta) \ddot{\vartheta} - (m \ell \cos \vartheta) \dot{\vartheta}^2 + kx = 0 \\ m \ell^2 \ddot{\vartheta} + m g \ell \vartheta - (m \ell \sin \vartheta) \ddot{x} = 0 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} (M+m) \ddot{x} + kx = 0 \\ \ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \vartheta = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ \vartheta(t) = C_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \end{cases}$$

remarque : les approximations faites ont occulté le couplage des deux masses en rendant les équations différentielles indépendantes et les solutions de celles-ci peuvent ne pas refléter correctement le mouvement du système.

EXERCICE 51

- 1) $T = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2)$
- 2) $U = \frac{1}{2} k r^2 - (k \ell_0 + m_2 g \ell \cos \vartheta) r - m_1 g \ell \cos \vartheta$
- 3) $k(r_e - \ell_0) - m_2 g = 0$
- 4)
$$\begin{cases} m_2 \ddot{r} + (k - m_2 \dot{\vartheta}^2) r - m_2 g \cos \vartheta = k \ell_0 \\ (m_1 \ell^2 + m_2 r^2) \ddot{\vartheta} + m_2 r \dot{\vartheta}^2 + (m_1 g \ell + m_2 g r) \sin \vartheta = 0 \end{cases}$$

○○○

EXERCICE 52

$$L = \frac{1}{2} M \dot{Y}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{Y}^2 + \frac{3}{2} (R-r)^2 \dot{\vartheta}^2 + 2(R-r) \dot{Y} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \right] - \frac{1}{2} k Y^2 - mg(R-r)(1 - \cos \vartheta)$$

$$\begin{cases} (M+m) \ddot{Y} + kY + m(R-r) \vartheta \ddot{\vartheta} = 0 \\ \frac{3}{2} (R-r) \ddot{\vartheta} + g \vartheta + \vartheta \ddot{Y} = 0 \end{cases}$$

○○○

EXERCICE 53

système a)

- 1)
$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{3}{4} M R^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} k_1 R^2 \vartheta^2 - 2k_2 R^2 \vartheta^2 - \frac{1}{2} k_2 y^2 + 2k_2 R \vartheta y$$
- 2)
$$\begin{cases} m \ddot{y} + k_2 y - 2k_2 R \vartheta = 0 \\ \frac{3}{2} M R^2 \ddot{\vartheta} + (k_1 R^2 + 4k_2 R^2) \vartheta - 2k_2 R y = 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \omega_1^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}} \frac{k}{m} ; \quad \omega_2^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \frac{k}{m}$$

$$4) \quad \begin{pmatrix} y(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{R\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{R\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

système b)

- 1)
$$L = \frac{1}{2} (M+m) \dot{y}^2 + \frac{3}{4} M R^2 \dot{\vartheta}^2 + M R \dot{y} \dot{\vartheta} - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) y^2 - \frac{1}{2} (k_1 + 4k_2) R^2 \vartheta^2 - (k_1 + 2k_2) R \vartheta y$$
- 2)
$$\begin{cases} (M+m) \ddot{y} + M R \ddot{\vartheta} + (k_1 + k_2) y + (k_1 + 2k_2) R \vartheta = 0 \\ \frac{3}{2} M R^2 \ddot{\vartheta} + M R \ddot{y} + (k_1 + 4k_2) R^2 \vartheta + (k_1 + 2k_2) R y = 0 \end{cases}$$
- 3)
$$\omega_1^2 = \frac{9-\sqrt{61}}{10} \frac{k}{m} ; \quad \omega_2^2 = \frac{9+\sqrt{61}}{10} \frac{k}{m}$$

○○○

EXERCICE 54

Après avoir établi les équations différentielles du circuit et fait l'hypothèse que les solutions sont de forme sinusoïdale, on obtient l'équation séculaire ou caractéristique suivante :

$$(1 - \Gamma^2) \omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \omega^2 + \omega_{02}^2 \omega_{01}^2 = 0$$

$$\text{avec } \omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} ; \quad \omega_{02}^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$$

d'où les pulsations propres du circuit 1 :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \mp \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\Gamma^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2(1 - \Gamma^2)}$$

dans le cas particulier où : $\omega_{01}^2 = \omega_{02}^2 = \omega_0^2$ (système symétrique)

$$1) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{1+|\Gamma|} \omega_0^2 \\ \omega_2^2 = \frac{1}{1-|\Gamma|} \omega_0^2 \end{cases}$$

Pour $|\Gamma| \approx 0$ (selfs très éloignés) : $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2$

on retrouve les pulsations propres ω_{01} et ω_{02} des mailles séparées.

Pour $|\Gamma| \approx 1$ (selfs très rapprochées), il faut revenir à

l'équation caractéristique précédente $\rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

2) Pour ce second cas, la comparaison des équations relatives aux deux circuits donne :

$$L'_1 = L_1 + M \quad ; \quad L'_2 = L_2 + M \quad ; \quad L'_3 = -M$$

Comme $L'_3 > 0$; seul le circuit correspondant à $\Gamma = -1$, donc à $M < 0$, est analogue à ce circuit 2.

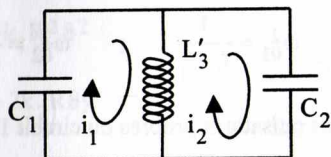
Pour $L_1 = 1 \text{ mH}$; $C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}$

$$\omega_0^2 = 10^9 \text{ (rd/s)}^2$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \approx 22360,7 \text{ rd/s}$$

$$L'_3 = 1 \text{ mH}$$

$$L'_1 = L'_2 = 0$$



EXERCICE 55

$$1) \quad L = m\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m\ell^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + 2mg\ell \cos \vartheta_1 + mg\ell \cos \vartheta_2$$

$$2) \quad L \approx m\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 + m\ell^2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 - mg\ell \vartheta_1^2 - \frac{1}{2} mg\ell \vartheta_2^2$$

$$3) \quad \begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + \frac{g}{\ell} \vartheta_1 + \frac{1}{2} \ddot{\vartheta}_2 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + \frac{g}{\ell} \vartheta_2 + \ddot{\vartheta}_1 = 0 \end{cases}$$

$$4) \quad \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{\ell}$$

$$\text{mode 1 : } \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$

$$\text{mode 2 : } \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$5) \quad \text{pour obtenir} \quad \vartheta_1(0) = \vartheta_0 \quad ; \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{2} \vartheta_0$$

$$\text{le mode 1 seul} \quad \dot{\vartheta}_1(0) = 0 \quad ; \quad \dot{\vartheta}_2(0) = 0$$

$$\text{pour obtenir} \quad \vartheta_1(0) = \vartheta_0 \quad ; \quad \vartheta_2(0) = -\sqrt{2} \vartheta_0$$

$$\text{le mode 2 seul} \quad \dot{\vartheta}_1(0) = 0 \quad ; \quad \dot{\vartheta}_2(0) = 0$$

EXERCICE 56

- 1) avec $Y_1 = y_1 + y_2$; $Y_2 = y_2 - y_1$
- $$\begin{cases} m\ddot{Y}_1 + kY_1 = 0 \\ m\ddot{Y}_2 + 2\alpha\dot{Y}_2 + kY_2 = 0 \end{cases}$$
 équations découplées
- Y_1 et Y_2 sont les coordonnées normales du système

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$; $\delta = \frac{\alpha}{m}$

3)
$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{C_1}{2} \sin(\omega_0 t + \psi_1) - \frac{C_2}{2} e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi_2) \\ y_2(t) = \frac{C_1}{2} \sin(\omega_0 t + \psi_1) + \frac{C_2}{2} e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi_2) \end{cases}$$

- 4) Dans ce cas les masses oscilleront selon le :

Mode 1
$$\begin{cases} y_1(t) = y_0 \cos \omega_0 t \\ y_2(t) = y_0 \cos \omega_0 t \end{cases}$$

5) Si à $t=0$
$$\begin{cases} y_1(0) = -y_0 ; \dot{y}_1(0) = \delta y_0 \\ y_2(0) = y_0 ; \dot{y}_2(0) = -\delta y_0 \end{cases}$$

→ Mode 2
$$\begin{cases} y_1(t) = -y_0 e^{-\delta t} \cos \omega_a t \\ y_2(t) = y_0 e^{-\delta t} \cos \omega_a t \end{cases}$$

○ ○ ○ ○ ○

EXERCICE 57

- 1) $U = mgz$; $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
- 2) dans le cas des oscillations de très faibles amplitudes, on peut négliger les termes d'ordre supérieur à 2 :

$$L \approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{1}{2}mgax^2 - \frac{1}{2}mgby^2$$

3)
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_1^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y = 0 \end{cases}$$
 système d'équations découplées

x et y sont donc des coordonnées normales pour le système.

4)
$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \\ y(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

avec $\omega_1^2 = ag$; $\omega_2^2 = bg$

5)
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_2 t$$

- 6) On doit avoir $n_1 T_1 = n_2 T_2$ avec n_1 et n_2 entiers.

Pour $b > a$ → $n_2 > n_1$ et si l'on considère les plus petits entiers vérifiant la relation avec par exemple $n_2 = n_1 + 1$, il vient :

$$\frac{T_2}{T_1 - T_2} = n_1 \quad (n_1 \in \mathbf{N}) \text{ d'où } t_0 = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$$

On peut conclure que le mouvement oscillatoire quelconque, bien qu'exprimé par une solution générale somme de cosinus ou sinus, n'est périodique que si les périodes T_1 et T_2 des deux modes sont commensurables.

7)
$$z' = \frac{A}{2}x'^2 + \frac{B}{2}y'^2 - Cx'y'$$

$$A = a \cos^2 \gamma + b \sin^2 \gamma$$

avec les coefficients constants :

$$B = a \sin^2 \gamma + b \cos^2 \gamma$$

$$C = (a - b) \cos \gamma \sin \gamma$$

- 8) En refaisant les mêmes approximations :

$$U = mgz' ; \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2)$$

$$9) \quad \begin{cases} \ddot{x}' + Ag x' - Cg y' = 0 \\ \ddot{y}' + Bg y' - Cg x' = 0 \end{cases} \quad \text{équations couplées}$$

10) Le terme de couplage apparaît dans l'énergie potentielle du système, le couplage est donc élastique.

C'est de plus un couplage qui apparaît lorsqu'on prend des coordonnées généralisées x' et y' quelconques.

Par contre, on l'a vu précédemment, si on choisit des coordonnées généralisées x et y relatives à un système d'axes $Oxyz$ coïncidant avec les axes principaux du paraboloïde, le couplage disparaît :

x et y sont dites coordonnées normales du système.

11) On retrouve les mêmes pulsations propres, elles sont indépendantes du choix des axes et des coordonnées utilisées.

$$12) \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\operatorname{tg}\gamma \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi'_1) + C'_2 \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi'_2)$$

13) Oui, on retrouve le résultat de 4) en posant $\gamma = 0$.

Remarque : Sans les approximations précédentes, le problème est plus difficile (non linéaire) et la solution s'exprimerait par des intégrales elliptiques.

EXERCICE 58

$$1) \quad T = m\ell^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot{\theta}_2^2 + m\ell^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2$$

$$U = mg\ell \theta_1^2 + \frac{1}{2} mg\ell \theta_2^2$$

$$\rightarrow \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & m\ell^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2mg\ell & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \frac{2g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} \\ -\frac{2g}{\ell} & \frac{2g}{\ell} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad |\mathcal{L} - \omega^2 \mathcal{I}| = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{\ell} \\ \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{\ell} \end{cases}$$

Les pulsations propres d'un système sont indépendantes des coordonnées généralisées et de la méthode mathématique adoptées pour l'étude de celui-ci ; d'où leur nom.

EXERCICE 59

$$1) \quad x = \frac{\ell_2 x_1 + \ell_1 x_2}{\ell} ; \quad y = \frac{x_2 - x_1}{\ell}$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1 \\ k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1 & k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{M} & \frac{k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1}{M} \\ \frac{k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1}{J} & \frac{k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2}{J} \end{pmatrix}$$

2) $\mathcal{U}$ n'est pas diagonale $\rightarrow$ couplage élastique.

Il disparaîtra si : $k_2 \ell_2 - k_1 \ell_1 = 0$ (I)

$$3) \quad \omega_p^2 = \frac{k_1 + k_2}{M} ; \quad \omega_t^2 = \frac{k_1 \ell_1^2 + k_2 \ell_2^2}{J}$$

ℓ_1 et ℓ_2 représentent les distances du centre de gravité G du camion aux points d'attache des ressorts sur celui-ci, $\ell = \ell_1 + \ell_2$ étant la distance séparant ces points.

Donc en absence de couplage $\begin{cases} x(t) = C_1 \sin(\omega_p t + \psi_1) \\ \vartheta(t) = C_2 \sin(\omega_t t + \psi_2) \end{cases}$

$$4) \quad \mathcal{T}' = \begin{pmatrix} \frac{M\ell_2^2 + J}{\ell^2} & \frac{M\ell_1\ell_2 - J}{\ell^2} \\ \frac{M\ell_1\ell_2 - J}{\ell^2} & \frac{M\ell_1^2 + J}{\ell^2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{U}' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \frac{k_1(M\ell_1^2 + J)}{MJ} & -\frac{k_2(M\ell_1\ell_2 - J)}{MJ} \\ -\frac{k_1(M\ell_1\ell_2 - J)}{MJ} & \frac{k_2(M\ell_2^2 + J)}{MJ} \end{pmatrix}$$

5) $\mathcal{T}'$ n'est pas diagonal $\longrightarrow$ couplage inertiel.

Ce couplage n'existera pas si : $M\ell_1\ell_2 - J = 0$ (II)

(condition différente de la précédente)

On note que la nature du couplage peut dépendre non seulement de la structure physique du système mais aussi des coordonnées généralisées utilisées pour son étude :

Couplage élastique avec x et ϑ ; couplage inertiel avec x_1 et x_2

$$6) \quad \omega_1^2 = \frac{k_1(M\ell_1^2 + J)}{MJ} ; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2(M\ell_2^2 + J)}{MJ}$$

Les pulsations propres du système sont indépendantes du choix des coordonnées généralisées.

Si, dans cet exercice, leurs valeurs sont différentes en 3) et en 6) cela est dû aux conditions physiques différentes de leur obtention :

Les systèmes vérifiant les conditions (I) ou (II) ne sont pas identiques.

7) On peut toujours trouver des coordonnées généralisées dites « coordonnées normales » telles que le couplage n'apparaisse pas, sans avoir à réaliser une condition physique. Il suffit de faire l'étude du système à l'aide de celles-ci. Dans ce cas par exemple, on n'aura pas de terme de couplage

en $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ si : $Ma + Jb = 0$

ni en $q_1 q_2$ si :

$$(k_1 + k_2)a + (k_1\ell_1^2 + k_2\ell_2^2)b + (k_2\ell_2 - k_1\ell_1)(1 + ab) = 0$$

— o o o —

EXERCICE 60

$$1) \quad T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 ; \quad U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$2) \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m_1} & -\frac{k}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & \frac{k}{m_2} \end{pmatrix}$$

$$3) \quad \omega_1 = 0 ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ μ étant la « masse réduite »

1^{er} mode $\omega_1 = 0$

$$m_1 \xrightarrow{G} m_2 \rightarrow 0 \rightarrow$$

translation uniforme

2^{ème} mode $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

$$\begin{matrix} m_1 & & m_2 \\ 0 & \rightarrow & G & \leftarrow & 0 \end{matrix}$$

oscillations en opposition de phase

$$4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C'_1 + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$6) \text{ de } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \text{On en déduit :}$$

$$X_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} ; \quad X_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (x_1 - x_2)$$

$$7) \begin{cases} \ddot{X}_1 = 0 & 1^{\text{er}} \text{ mode (translation uniforme)} \\ \ddot{X}_2 + \omega_2^2 X_2 = 0 & 2^{\text{ème}} \text{ mode (oscillations)} \end{cases}$$

$$\mathcal{T}' = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2) \frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^2 k \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{L}' = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices $\mathcal{T}'$; $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{L}'$ sont diagonales.

EXERCICE 61

$$1) \quad U = \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$2) \quad T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

avec $J = \frac{1}{2} m_1 R^2$ et $\vartheta = \frac{x_2 - x_1}{R}$

$$3) \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{3m}{2} & -\frac{m}{2} \\ -\frac{m}{2} & \frac{5m}{2} \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{4k}{7m} & -\frac{3k}{7m} \\ -\frac{2k}{7m} & \frac{5k}{7m} \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \begin{pmatrix} \frac{4k}{7m} - \omega^2 & -\frac{3k}{7m} \\ -\frac{2k}{7m} & \frac{5k}{7m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{7m}} ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$6) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

EXERCICE 62

$$1) \quad T = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2\ell^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2] \\ + \frac{1}{2} m_3 [\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \ell^2 \dot{\vartheta}_3^2 + 2\ell^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3]$$

$$U = m_1 g \ell (1 - \cos \vartheta_1) + m_2 g \ell [2 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2] \\ + m_3 g \ell [2 - \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_3]$$

214

2) Après approximation et en posant $m_1 = 2m$; $m_2 = m_3 = m$
il vient :

$$T \cong 2m\ell^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\vartheta}_2^2 + \frac{1}{2}m\ell^2 \dot{\vartheta}_3^2 + m\ell^2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 + m\ell^2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_3$$

$$U \cong 2mg\ell \vartheta_1^2 + \frac{1}{2}mg\ell \vartheta_2^2 + \frac{1}{2}mg\ell \vartheta_3^2$$

$$3) \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} 4m\ell^2 & m\ell^2 & m\ell^2 \\ m\ell^2 & m\ell^2 & 0 \\ m\ell^2 & 0 & m\ell^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 4mg\ell & 0 & 0 \\ 0 & mg\ell & 0 \\ 0 & 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

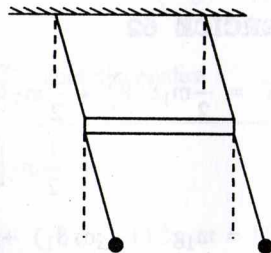
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{2g}{\ell} & -\frac{g}{2\ell} & -\frac{g}{2\ell} \\ -\frac{2g}{\ell} & \frac{3g}{2\ell} & \frac{g}{2\ell} \\ -\frac{2g}{\ell} & \frac{g}{2\ell} & \frac{3g}{2\ell} \end{pmatrix}$$

$$4) \quad \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{\ell}$$

5)

Mode I

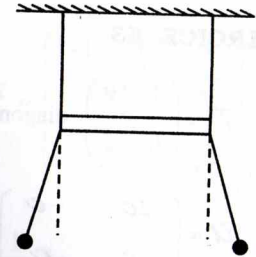
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$



215

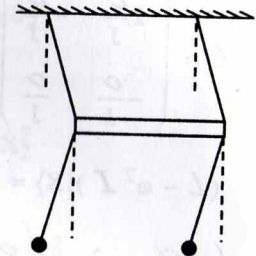
Mode II

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

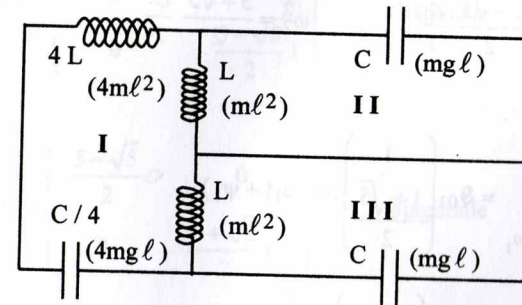


Mode III

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_3} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \psi_3)$$



6)



EXERCICE 63

1) $T = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ diagonale

$U = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$ non diagonale $\rightarrow$ couplage élastique

$L = \begin{pmatrix} 2\frac{c}{J} & -\frac{c}{J} \\ -\frac{c}{J} & \frac{c}{J} \end{pmatrix}$ non diagonale

2) $(L - \omega^2 I)X = 0$ soit :

$$\begin{pmatrix} 2\frac{c}{J} - \omega^2 & -\frac{c}{J} \\ -\frac{c}{J} & \frac{c}{J} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{c}{J}$; $\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{c}{J}$

4)

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}_{\omega_1} = \vartheta_{01} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}_{\omega_2} = \vartheta_{02} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

5) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \vartheta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \vartheta_2 \\ X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \vartheta_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \vartheta_2 \end{cases}$$

6) $T' = \frac{1}{2} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} J \right) \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} J \right) \dot{X}_2^2$

$$U' = \frac{1}{2} \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2} c \right) X_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} c \right) X_2^2$$

7) $T' = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} J & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} J \end{pmatrix}$ diagonale

$$U' = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{5}}{2} c & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{2} c \end{pmatrix}$$
 diagonale

$$L' = T'^{-1} \cdot U' = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{c}{J} & 0 \\ 0 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{c}{J} \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot L \cdot P$$

diagonale

Le couplage n'apparaît plus explicitement, X_1 et X_2 sont des « coordonnées normales » pour le système.

Si, pour un choix donné des coordonnées généralisées, les calculs ne font pas apparaître de couplage dans l'étude d'un système, il faut se garder de conclure qu'il n'existe pas.

EXERCICE 64

1)

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_3) x_1^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_2^2 - \frac{1}{2} (k_2 + k_3) x_3^2 + k_1 x_1 x_2 + k_2 x_2 x_3 + k_3 x_3 x_1$$

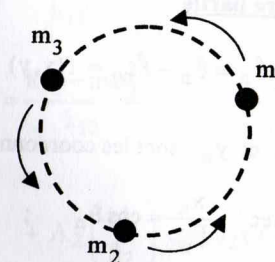
$$2) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3) x_1 - k_1 x_2 - k_3 x_3 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_3 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + (k_2 + k_3) x_3 - k_2 x_2 - k_3 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \omega_1 = 0 \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}} \quad ; \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

4)

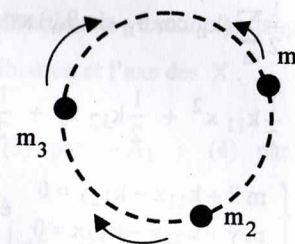
1^{er} Mode

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1'$$



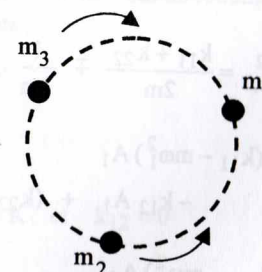
2^{ème} Mode

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$



3^{ème} Mode

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{\omega_3} = C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \psi_3)$$



5) L'expression du mouvement général des masses étant la somme des trois expressions précédentes.

EXERCICE 65**Première partie**

$$1) \quad \Delta \ell_n = \ell_n - \ell_{no} = f(x, y) \equiv - \left(\frac{x_n}{\ell_{no}} x + \frac{y_n}{\ell_{no}} y \right)$$

où x_n et y_n sont les coordonnées de l'extrémité fixe du ressort k_n .

$$2) \quad \text{avec} \quad \frac{x_n}{\ell_{no}} = \cos \vartheta_n \quad ; \quad \frac{y_n}{\ell_{no}} = \sin \vartheta_n \quad \text{et} \quad k_{21} = k_{12}$$

$$\begin{aligned} U &= \sum_{n=1}^3 U_n = \frac{1}{2} \sum_n (k_n \cos^2 \vartheta_n) x^2 + \frac{1}{2} \sum_n (k_n \cos \vartheta_n \sin \vartheta_n) xy \\ &+ \frac{1}{2} \sum_n (k_n \cos \vartheta_n \sin \vartheta_n) xy + \frac{1}{2} \sum_n (k_n \sin^2 \vartheta_n) y^2 \\ &= \frac{1}{2} k_{11} x^2 + \frac{1}{2} k_{12} xy + \frac{1}{2} k_{21} xy + \frac{1}{2} k_{22} y^2 \end{aligned}$$

$$3) \quad \begin{cases} m \ddot{x} + k_{11}x - k_{12}y = 0 \\ m \ddot{y} + k_{22}y - k_{12}x = 0 \end{cases} \quad \text{équations couplées}$$

4) avec l'hypothèse de solutions sinusoïdales :

$$x(t) = A e^{j(\omega t + \psi)} \quad y(t) = B e^{j(\omega t + \psi)}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k_{11} + k_{22}}{2m} \mp \frac{1}{2m} \sqrt{(k_{11} - k_{22})^2 + 4k_{12}^2}$$

$$5) \quad (k_{11} - m\omega_1^2) A_1 - k_{12} B_1 = 0 \quad (1)$$

$$-k_{12} A_1 + (k_{22} - m\omega_1^2) B_1 = 0 \quad (2)$$

$$(k_{11} - m\omega_2^2) A_2 - k_{12} B_2 = 0 \quad (3)$$

$$-k_{12} A_2 + (k_{22} - m\omega_2^2) B_2 = 0 \quad (4)$$

$$6) \quad \text{de (1)} \longrightarrow \beta_1 = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_{11} - m\omega_1^2}{k_{12}}$$

$$\text{de (3)} \longrightarrow \beta_2 = \frac{B_2}{A_2} = \frac{k_{11} - m\omega_2^2}{k_{12}}$$

et

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)}_{\text{mode 1}} + \underbrace{A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)}_{\text{mode 2}}$$

7) Si la masse vibre selon le mode 1, par exemple :

$$\longrightarrow \beta_1 = \frac{y}{x} = \text{pente de la direction de vibration ou tangente de}$$

l'angle formé par cette direction de vibration et l'axe des X .

8) en multipliant l'équation :

(1) par A_2 ; (2) par B_2 ; (3) par $-A_1$; (4) par $-B_1$
et en additionnant, il vient :

$$[A_1 A_2 + B_1 B_2] (\omega_2^2 - \omega_1^2) = 0$$

$$\text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \longrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (\text{ou } 1 + \beta_1 \beta_2 = 0)$$

soit un produit scalaire nul $\longrightarrow$ les directions propres (A_1, B_1) et (A_2, B_2) sont orthogonales.

Deuxième partie

$$9) \quad U(x, y) = K(x^2 + y^2)$$

$$\text{c'est à dire} \quad k_{11} = k_{22} = \frac{3k}{2} = K \quad \text{et} \quad k_{12} = 0$$

$$\longrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} + Kx = 0 \\ m \ddot{y} + Ky = 0 \end{cases} \quad \text{équations découplées}$$

$$\text{et } \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \omega_0$$

Les deux pulsations propres sont identiques (dégénérescence).

On pouvait s'attendre à ce résultat en raison de la symétrie du système.

10) x et y sont les « coordonnées normales » du système

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) & (5) \\ y(t) = B \cos(\omega_0 t + \psi) & (6) \end{cases}$$

On note aussi que le terme de couplage (produit $x y$) a disparu de l'expression de U et des équations du mouvement.

11)

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} ; \quad B = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0} ; \quad \text{tg } \psi = -\frac{\dot{y}_0}{\omega_0 y_0}$$

12) en posant $\gamma = \psi - \varphi$ = déphasage de $y(t)$ par rapport à $x(t)$ et en éliminant le temps entre (5) et (6), on obtient :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \gamma = \sin^2 \gamma \quad \text{qui est l'équation d'une ellipse}$$

13) pour avoir :

a) une droite, il faut que $\gamma = 0$ (ou π) $\longrightarrow y = \pm \frac{B}{A} x$

avec, par exemple, les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = A ; \quad \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) = y_0 = B ; \quad \dot{y}(0) = 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \\ y(t) = y_0 \cos \omega_0 t \end{cases}$$

b) un cercle, il faut que $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ et $A = B$

$x^2 + y^2 = A^2 = B^2 = R^2$ équation d'un cercle de rayon $R = A$ avec, par exemple, les conditions initiales :

$$\begin{aligned} x(0) = A = R ; \quad \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) = 0 ; \quad \dot{y}(0) = \pm \omega_0 R \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = R \cos \omega_0 t \\ y(t) = \pm R \sin \omega_0 t \end{cases}$$

EXERCICE 66.

$$1) \begin{cases} m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx - B \ell i = 0 \\ L \frac{di}{dt} + Ri + B \ell \dot{x} = E(t) \end{cases}$$

$$2) Z = \frac{E(t)}{i(t)} = \underbrace{\frac{R + jL\omega}{Z_e}}_{Z_m} + \frac{\alpha B^2 \ell^2}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2} - j \frac{B^2 \ell^2 \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$$

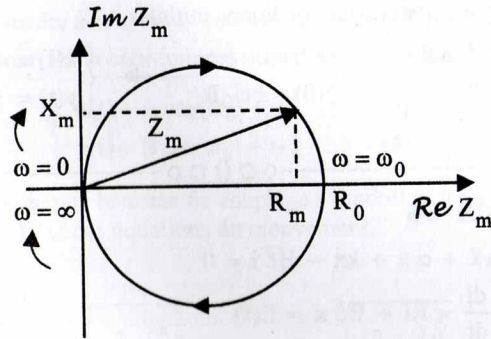
Remarque : On pourrait éventuellement tenir compte, dans les équations et dans Z_e , de la présence d'une capacité C dans le circuit.

$$3) \text{ en posant : } \omega_0^2 = \frac{k}{m} ; \quad \delta = \frac{\alpha}{2m} ; \quad R_0 = \frac{B^2 \ell^2}{\alpha}$$

L'impédance motionnelle peut s'écrire : $Z_m = R_m + j X_m$ avec

$$R_m = \frac{R_0}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right)^2} ; \quad X_m = \frac{R_0 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right)}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\delta\omega}\right)^2}$$

et $R_m^2 + X_m^2 = R_0 R_m \rightarrow$ cercle de KENNELY



EXERCICE 67

1) $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{X_0}$; $V_0 = \frac{Q_0}{C_0}$; $F_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_0 X_0}$

2) $C = \frac{\epsilon_0 S}{X} \cong C_0 \left(1 + \frac{x}{X_0}\right)$; $F \cong F_0 \left(1 + \frac{2q}{Q_0}\right)$

$$V = \frac{Q}{C} \cong V_0 \left(1 - \frac{x}{X_0}\right) + \frac{1}{C_0} q$$

3)
$$\begin{cases} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx - \frac{V_0}{X_0} q = f(t) \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C_0} q - \frac{V_0}{X_0} x = 0 \end{cases}$$

On a un couplage de type élastique

4)
$$Z = \underbrace{\alpha + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)}_{Z_m} + \underbrace{\left(\frac{V_0}{\omega X_0}\right)^2 \frac{R - j\left(L\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_0\omega}\right)^2}}_{Z_e}$$

5) dans les équations de 3) poser que $k = k_1 + k_2$ (deux ressorts en parallèle), $\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$ (deux condensateurs en série)

puis, selon l'analogie Force / Tension, établir la correspondance :

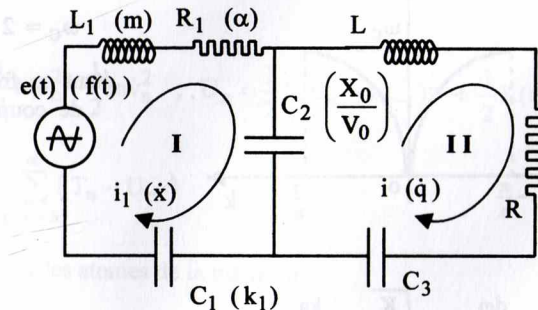
$$x \equiv q_1 ; \dot{x} \equiv i_1 ; m \equiv L_1 ; \alpha \equiv R_1$$

$$k_1 \equiv \frac{1}{C_1} ; k_2 \equiv \frac{1}{C_2} \equiv \frac{V_0}{X_0} ; k_3 \equiv \frac{1}{C_3}$$

pour en déduire les équations différentielles électriques équivalentes :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i) dt = e(t) \\ L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C_3} \int i dt + \frac{1}{C_2} \int (i - i_1) dt = 0 \end{cases}$$

et de là, le schéma :



EXERCICE 68

$$1) \quad L = \frac{1}{2} m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{u}_n^2 - \frac{1}{2} K \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)^2$$

$$2) \quad m \ddot{u}_n + K[2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}] = 0$$

$$3) \quad u_n(x_n, t) = A_n e^{j(\omega t - k x_n)}$$

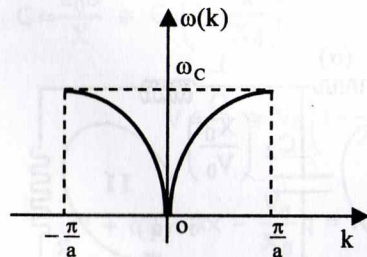
avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et $x_n = n a$

4) S'il n'y a pas d'atténuation d'amplitude : $A_0 = A_1 = \dots = A_n$
et en injectant l'expression de u_n dans l'équation différentielle, il vient :

$$\omega(k) = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin \frac{k a}{2} \right|$$

relation de dispersion de la chaîne monoatomique

5)



$$\omega_c = 2 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

étant sa fréquence de coupure

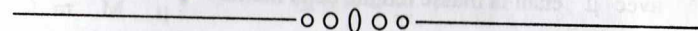
$$6) \quad v_e = \frac{d\omega}{dk} = a \sqrt{\frac{K}{m}} \cos \frac{k a}{2}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = a \sqrt{\frac{K}{m}} \frac{\sin \frac{k a}{2}}{\frac{k a}{2}}$$

$$7) \quad \text{pour } \omega = \omega_c = 2 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{soit } k = \frac{\pi}{a}$$

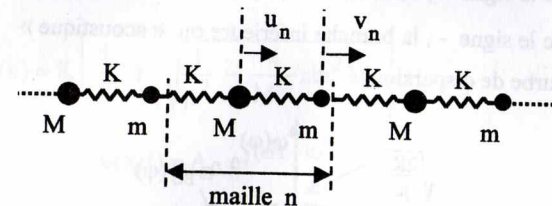
$$\rightarrow v_\varphi = \frac{2a}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{mais } v_e = 0$$

(pas de propagation de l'énergie). On a ainsi un filtre Passe-Bas.



EXERCICE 69

1)



$$2) \quad T_n = \frac{1}{2} M \dot{u}_n^2 + \frac{1}{2} m \dot{v}_n^2 ; \quad U_n = \frac{1}{2} K (u_n - v_{n-1})^2 + \frac{1}{2} K (u_n - v_n)^2$$

$$3) \quad L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (T_n - U_n)$$

d'où pour les atomes de la maille n :

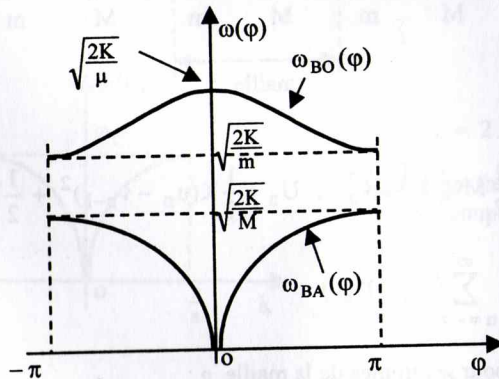
$$\begin{cases} M \ddot{u}_n + K(2u_n - v_n - v_{n-1}) = 0 \\ m \ddot{v}_n + K(2v_n - u_n - u_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{aligned}
 & (2K - M\omega^2) A_n - K(1 + e^{j\varphi}) B_n = 0 \\
 & -K(1 + e^{-j\varphi}) A_n + (2K - m\omega^2) B_n = 0 \quad (II) \\
 & \longrightarrow Mm\omega^4 - 2K(M + m)\omega^2 + 2K^2(1 - \cos\varphi) = 0 \\
 & \longrightarrow \omega^2(\varphi) = K \left[\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \frac{4}{Mm} \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right]
 \end{aligned}$$

relation de dispersion de la chaîne diatomique

avec μ étant la masse réduite de la maille : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{m}$

- 5) pour un φ donné, on a 2 valeurs de ω :
 avec le signe + , la branche supérieure ou « optique » $\omega_{BO}(\varphi)$
 avec le signe - , la branche inférieure ou « acoustique » $\omega_{BA}(\varphi)$
- 6) courbe de dispersion



La chaîne constitue un filtre puisque les vibrations de pulsations :

$$\sqrt{\frac{2K}{M}} < \omega < \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad \text{ou} \quad \omega > \sqrt{\frac{2K}{\mu}}$$

ne peuvent s'y propager.

$$7) \quad a) \quad u_n(x, t) = A_0 e^{j(\omega t - n\varphi)} = A_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{v})}$$

$$\text{avec } x = 2na \longrightarrow \varphi = \omega \frac{2a}{v}$$

b) φ représente donc un déphasage correspondant au temps que met la vibration pour atteindre une maille voisine :

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{2a}{v}$$

c) la fonction exponentielle étant de période 2π , il en découle que :

$$u(x, t_0 + T) = u(x, t_0) \quad \text{et} \quad u(x_0 + \lambda, t) = u(x_0, t)$$

$$8) \quad \omega^2(k) = K \left[\frac{1}{\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \frac{4}{Mm} \sin^2 ka} \right]$$

$$u(x, t) = A_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

Les limites du graphe devenant alors : $k = \pm \frac{\pi}{2a}$

$$9) \quad \text{branche acoustique et } k = 0 \longrightarrow \omega = 0$$

Le système d'équations (II) donne : $B = A$

Les atomes M et m subissent une translation de même amplitude.

$$\text{branche optique et } k = 0 \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{\mu}}$$

$$(II) \text{ donne : } B = -\frac{M}{m} A$$

Les atomes de masses différentes oscillent en opposition de phase et avec un rapport d'amplitude $-\frac{M}{m}$.

230

Dans ce cas, la position du centre de gravité G d'une maille (M, m) est donnée par :

$$X_G = \frac{Mu_n + mv_n}{M+m} = \frac{MA + mB}{M+m} e^{j(\omega t - \varphi)} = 0$$

G est donc immobile.

branche acoustique et $k = \frac{\pi}{2a} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{M}}$

(II) $\longrightarrow B = 0$

Les atomes m restent fixes tandis que les atomes M oscillent à la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2K}{M}}$ et avec une amplitude A déterminée par les conditions initiales du mouvement.

Branche acoustique et $k = \frac{\pi}{2a} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$

(II) $\longrightarrow A = 0$

C'est la configuration inverse de la précédente, les atomes m oscillent avec la pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ et une amplitude B tandis que les atomes M restent immobiles.

o o o o

EXERCICE 70

1) exprimer la longueur du segment ℓ_n en fonction de sa longueur a à l'équilibre et des déplacements u_{n-1} et u_n .

En considérant ensuite que les u_n sont petits, utiliser l'approximation $(1 + \varepsilon)^{1/2} \cong 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ pour en déduire que :

$$\Delta \ell_n = \ell_n - a \cong \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2a}$$

d'où $\Delta \ell = \sum_{n=1}^{N+1} \Delta \ell_n = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(u_n - u_{n-1})^2}{2a}$

2) $L = \frac{1}{2} m \sum_{n=1}^N \dot{u}_n^2 - \frac{T_0}{2a} \sum_{n=1}^{N+1} (u_n - u_{n-1})^2$

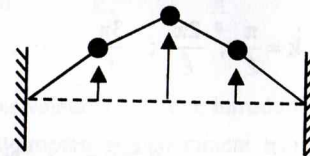
avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ et $\ell = (N+1)a$

3) On en déduit les équations citées avec : $h = \frac{T_0}{ma}$

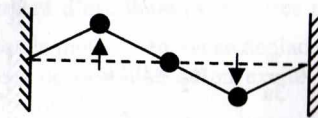
4) $\omega_1 = \sqrt{(2 - \sqrt{2})h}$; $\omega_2 = \sqrt{2h}$; $\omega_3 = \sqrt{(2 + \sqrt{2})h}$

5)

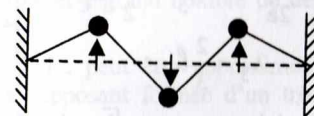
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$



$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\omega_3} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \psi_3)$$



o o o o

EXERCICE 71

$$1) \quad U_n = \frac{1}{2} \frac{T_0}{a} (u_n - u_{n-1})^2 \quad (U_n = \frac{1}{2} \frac{T_0}{a} (u_n^2 - u_n(u_{n+1} + u_{n-1})))$$

$$2) \quad m \ddot{u}_n + \frac{T_0}{a} [2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}] = 0$$

$$3) \quad \left(\frac{m a \omega^2}{T_0} - 2 \right) A_n + A_{n+1} + A_{n-1} = 0$$

$$4) \quad \omega(k) = 2 \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \quad \text{c'est la relation de dispersion de la corde plombée}$$

$$\omega_c = 2 \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \quad \text{étant sa fréquence de coupure}$$

$$5) \quad k = \frac{\pi}{\ell} ; \frac{2\pi}{\ell} ; \frac{3\pi}{\ell} ; \dots ; \frac{N\pi}{\ell}$$

6)

$$k_1 = \frac{\pi}{6a} ; \omega_1 = 0,259 \omega_c$$

$$\lambda_1 = 2\ell$$

$$k_2 = \frac{\pi}{3a} ; \omega_2 = 0,5 \omega_c$$

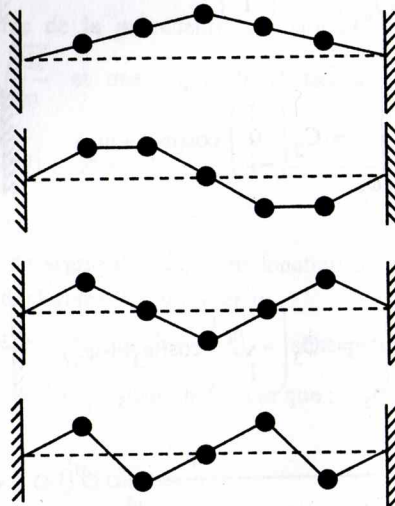
$$\lambda_2 = \ell$$

$$k_3 = \frac{\pi}{2a} ; \omega_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_c$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{3} \ell$$

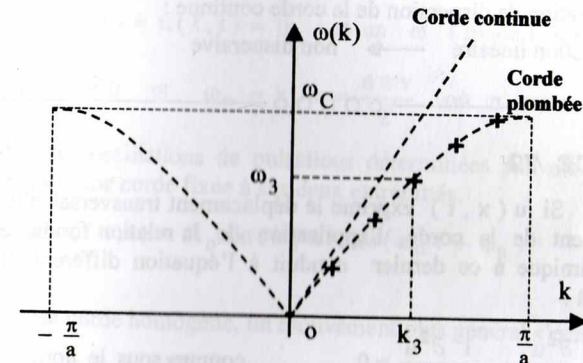
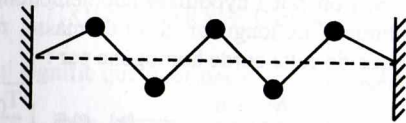
$$k_4 = \frac{2\pi}{3a} ; \omega_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_c$$

$$\lambda_4 = \frac{\ell}{2}$$



$$k_5 = \frac{5\pi}{6a} ; \omega_5 = 0,966 \omega_c$$

$$\lambda_5 = \frac{2\ell}{5}$$



e) poser $N = 3 \rightarrow$ trois valeurs de k qui, introduites dans $\omega(k)$ donnent les trois pulsations propres précédemment trouvées à l'exercice 70.

f) pour $\omega > \omega_c$, le mouvement d'oscillation des autres masses n'est pas possible, elles ne suivent pas le mouvement ou se déplacent très peu, surtout celles qui sont éloignées de la masse qu'on excite, car le mouvement s'atténue très fortement suivant x .

Le système joue le rôle d'un filtre mécanique « passe-bas ».

7) Passage d'un système discret à grand nombre de degrés de liberté à un système continu :

La corde homogène, de masse M , peut être approximée par le modèle de la corde plombée en la supposant formée d'un très grand nombre de segments massifs, très petits et très rapprochés l'un de l'autre : $a \ll \lambda$

$$\rightarrow \frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \text{ très petit } \rightarrow \sin \frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2} \rightarrow \omega \approx \sqrt{\frac{a T_0}{m}} k$$

Si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que les segments sont tous identiques (de longueur a et de masse m), on peut définir la masse linéique de cette corde homogène par :

$$\mu = \frac{M}{\ell} = \frac{m}{a} \longrightarrow \omega \cong \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} k = v_{\phi} k$$

qui est la relation de dispersion de la corde continue :

Relation linéaire $\longrightarrow$ non dispersive

_____ ○ ○ ○ ○ _____

EXERCICE 72

1) Si $u(x, t)$ exprime le déplacement transversal d'un très petit segment de la corde, l'application de la relation fondamentale de la dynamique à ce dernier conduit à l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{connue sous le nom}$$

" d'équation d'ondes "

où $v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ est la vitesse de l'onde

2) Par définition, lors des vibrations stationnaires d'une corde, un point de celle-ci effectuera des oscillations transversales dont l'amplitude maximale est indépendante de celle des autres points voisins et du temps.

Elle ne dépend que de sa position x le long de la corde et des conditions initiales du mouvement : soit $f(x)$ cette amplitude.

Si l'on suppose ces oscillations parfaitement harmoniques dans le temps, on peut écrire pour ce point et, pour un mode ou une pulsation ω donnée :

$$u(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{ondes stationnaires})$$

En injectant cette expression de $u(x, t)$ dans l'équation précédente

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{v^2} f(x) = 0$$

dont la solution sera de la forme : $f(x) = A \sin kx + B \cos kx$

en posant $\frac{\omega}{v} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, ce qui signifie que pour une corde homogène la relation de dispersion est linéaire : $\omega = kv$

3) pour $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$ et un ω (mode) donné :

$$\longrightarrow B = 0 \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n v = \frac{n\pi v}{\ell} \quad \text{où } n \text{ est un entier}$$

Seules des oscillations de pulsations déterminées peuvent prendre naissance dans une corde fixée à ses deux extrémités.

$$\text{et} \quad u_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

4) pour une corde homogène, un mouvement plus général s'écrira :

$$u(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

5) si à $t = 0$ $\dot{u}(x, 0) = 0 \quad \forall x$

$$\longrightarrow u(x, t) = \sum_n A_n \sin(k_n x) \cos \omega_n t$$

6) si de plus, à $t = 0$ $f(x) = a \sin\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right)$

$$\longrightarrow A_n = 0 \quad \forall n \neq 3 \quad \text{et} \quad A_3 = a$$

$$\longrightarrow u(x, t) = a \sin\left(\frac{3\pi}{\ell} x\right) \cos\left(\frac{3\pi v}{\ell} t\right)$$

_____ ○ ○ ○ ○ _____

Pour la plupart des exercices qui suivent, seules les expressions relatives au système mécanique seront fournies de façon explicite dans la partie réponse.

Celles relatives aux circuits électriques analogues pourront être déduites en ayant recours au tableau de correspondance (page 43).

Ainsi, pour l'analogie M / L , l'impédance électrique Z correspondante sera obtenue en effectuant les remplacements :

$$m_i \rightarrow L_i ; \quad k_i \rightarrow \frac{1}{C_i} ; \quad \frac{mg}{\ell} \rightarrow \frac{1}{C'} ; \quad \alpha \rightarrow R$$

tandis que pour l'analogie M / C , on aura l'admittance Y par les permutations :

$$m_i \rightarrow C_i ; \quad k_i \rightarrow \frac{1}{L_i} ; \quad \frac{mg}{\ell} \rightarrow \frac{1}{L'} ; \quad \alpha \rightarrow \frac{1}{R}$$

EXERCICE 73

1) système mécanique :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

2) circuit électrique :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0 \quad \text{avec} \quad i = \dot{q} \rightarrow L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0$$

3) d'où $q \equiv x$; $L \equiv m$; $\frac{1}{C} \equiv k$

et $L = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$

4) (en m) $x(t) = 10^{-2} \cos \sqrt{10} t$ ($\rightarrow T \approx 1,98 \text{ s}$)

(en C) $q(t) = 2.10^{-6} \cos 5.10^3 t$ ($\rightarrow T \approx 1,25 \text{ ms}$)

5) $\omega_{0\text{méca}} \ll \omega_{0\text{élect}}$: En général, les circuits électriques sont le siège d'oscillations beaucoup plus rapides que celles des systèmes mécaniques.

○○○○

EXERCICE 74

SYSTEME 74.1

1) système mécanique : $m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k x = F(t)$

2) circuits électriques :

a) analogie M / L $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E(t)$

en posant $i = \dot{q} \rightarrow L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = E(t)$

b) analogie M / C $C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v dt = I(t)$

en posant $u = \int v dt \rightarrow C \ddot{u} + \frac{1}{R} \dot{u} + \frac{1}{L} u = I(t)$

3) impédance d'entrée vitesse du système mécanique :

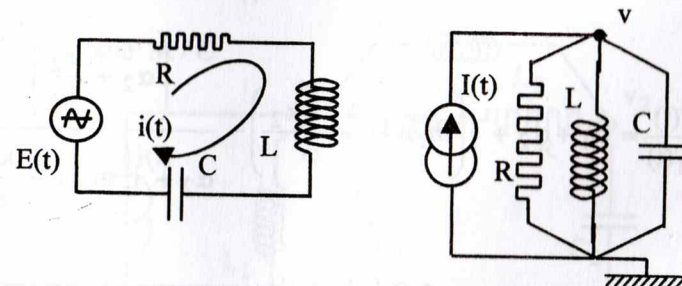
$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}(t)} = \alpha + j \left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)$$

impédance d'entrée du circuit M / L :

$$Z_e = \frac{E(t)}{i(t)} = R + j \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)$$

admittance d'entrée du circuit M / C :

$$Y_e = \frac{I(t)}{v(t)} = \frac{1}{R} + j \left(C \omega - \frac{1}{L \omega} \right)$$



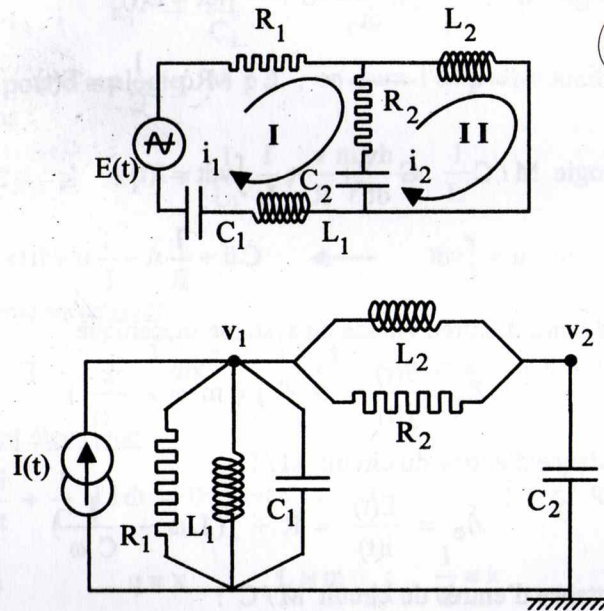
○○○○

SYSTEME 74.2

1) système mécanique :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - \alpha_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - \alpha_2 \dot{y}_1 - k_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

2) circuits électriques analogues (M/L et M/C) :



3) impédance d'entrée vitesse du système mécanique :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \alpha_1 + \alpha_2 + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) - \frac{\left(\alpha_2 + \frac{k_2}{j\omega} \right)^2}{\alpha_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right)}$$

— o o 0 o o —

SYSTEME 74.3

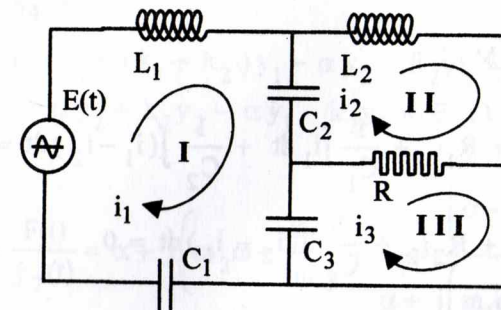
1) système mécanique :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2 + k_3) y_1 - k_2 y_2 - k_3 y_3 = F(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 - \alpha \dot{y}_3 = 0 \\ \alpha \dot{y}_3 + k_3 y_3 - k_3 y_1 - \alpha \dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

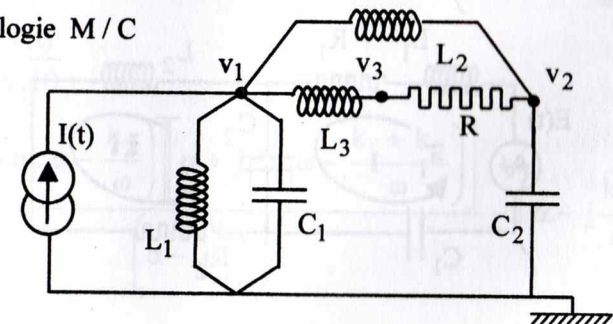
2) circuits électriques :

a) analogie M / L

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt + \frac{1}{C_3} \int (i_1 - i_3) dt = E(t) \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R(i_2 - i_3) + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \\ R(i_3 - i_2) + \frac{1}{C_3} \int (i_3 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$



b) analogie M / C



240

3) impédance d'entrée vitesse du système mécanique :

$$Z = jm_1\omega + \frac{k_1 + k_2 + k_3}{j\omega} + \frac{\left(\frac{k_3}{\omega}\right)^2}{\alpha + \frac{k_3}{j\omega}} - \frac{\left(\frac{\alpha \frac{k_3}{j\omega}}{\alpha + \frac{k_3}{j\omega}} + \frac{k_2}{j\omega}\right)^2}{\alpha + jm_2\omega + \frac{k_2}{j\omega} - \frac{\alpha^2}{\alpha + \frac{k_3}{j\omega}}}$$

— o o 0 o o —

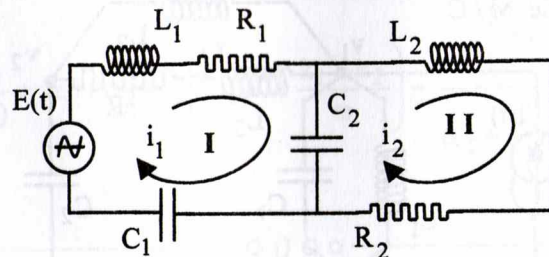
SYSTEME 74.4

$$1) \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha_1\dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2y_2 = F(t) \\ m_2\ddot{y}_2 + \alpha_2\dot{y}_2 + k_2y_2 - k_2y_1 = 0 \end{cases}$$

2)

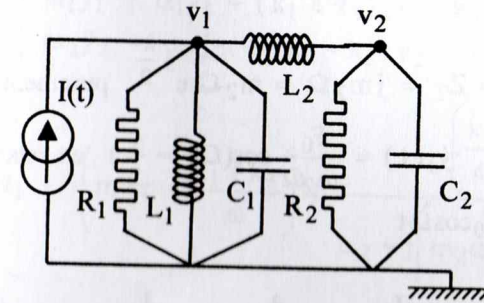
a) analogie M/L :

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \int (i_1 - i_2) dt = E(t) \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$



241

b) analogie M/C :



3) impédance d'entrée vitesse :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \alpha_1 + j \left(m_1\omega - \frac{(k_1 + k_2)}{\omega} \right) + \frac{\left(\frac{k_2}{\omega}\right)^2}{\alpha_2 + j \left(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega} \right)}$$

— o o 0 o o —

SYSTEME 74.5

$$1) \begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - \alpha \dot{y}_2 - k_2y_2 = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + k_2y_2 - \alpha \dot{y}_1 - k_2y_1 = F(t) \end{cases}$$

$$2) Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_2(t)} = \alpha + j \left(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega} \right) - \frac{\left(\alpha - j \frac{k_2}{\omega}\right)^2}{\alpha + j \left(m_1\omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right)}$$

$$3) Z_T = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \frac{\left[\alpha + j \left(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega} \right) \right] \left[\alpha + j \left(m_1\omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) \right]}{\left(\alpha - j \frac{k_2}{\omega} \right)} - \left(\alpha - j \frac{k_2}{\omega} \right)$$

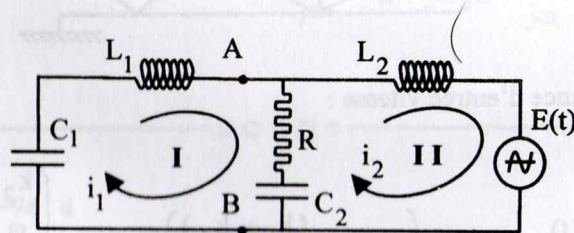
242

4) pour $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$:

→ $Z_e = Z_T = j m_2 \Omega = m_2 \Omega e^{j \frac{\pi}{2}}$ purement inductive

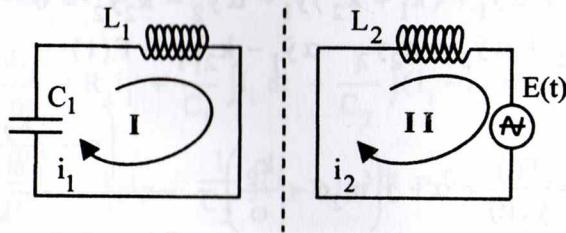
d'où $\dot{y}_1(t) = \frac{F_0}{m_2 \Omega} \cos(\Omega t - \frac{\pi}{2})$ en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la force $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

5)



Pour $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \longleftrightarrow \omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$

l'impédance vue à gauche des points A et B tend vers zéro, R et C₂ sont alors court-circuités et on aura :



la résistance R n'est traversée par aucun courant :

$V_A - V_B = 0 \rightarrow i_R = i_2 - i_1 = 0 \rightarrow i_2 = i_1 \leftrightarrow \dot{y}_2 = \dot{y}_1$

k_2 ainsi que l'amortisseur ne jouent plus aucun rôle → $D = 0$

donc, en théorie, une dissipation d'énergie nulle (*) et les deux masses vibrent en phase avec les mêmes amplitudes.

(*) on a supposé, dès le début, tous les frottements représentés par le seul amortisseur de coefficient α .

243

SYSTEME 74.6

1) et 2)
$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_1 \dot{y}_1 + (k_1 + k_3) y_1 - k_3 y_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_2 \dot{y}_2 + (k_2 + k_3) y_2 - k_3 y_1 = 0 \end{cases}$$

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \alpha_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_3}{\omega} \right) + \frac{\left(\frac{k_3}{\omega} \right)^2}{\alpha_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2 + k_3}{\omega} \right)}$$

3)
$$Z_T = \frac{F(t)}{\dot{y}_2(t)} = j \frac{\left[\alpha_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_3}{\omega} \right) \right] \left[\alpha_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2 + k_3}{\omega} \right) \right]}{\frac{k_3}{\omega}} + j \frac{k_3}{\omega}$$

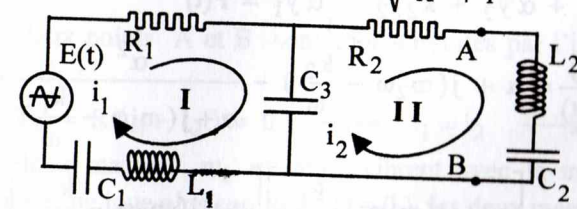
4) pour la pulsation particulière : $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$

$$Z_T = \underbrace{\left[\alpha_1 - \frac{\alpha_2 \Omega}{k_3} \left(m_1 \Omega - \frac{k_1 + k_3}{\Omega} \right) \right]}_X + j \underbrace{\left[\frac{\alpha_1 \alpha_2 \Omega}{k_3} + m_1 \Omega - \frac{k_1}{\Omega} \right]}_Y$$

soit $Z_T = X + j Y = |Z_T| e^{j \varphi}$ avec $|Z_T| = \sqrt{X^2 + Y^2}$

et $\tan \varphi = \frac{Y}{X}$ d'où $\dot{y}_2(t) = \frac{F(t)}{Z_T} = \frac{F_0}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cos(\Omega t - \varphi)$

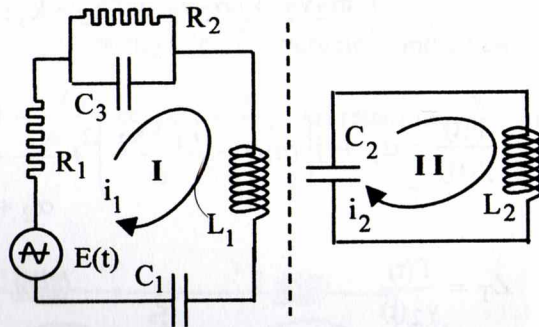
5)



Si $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \longleftrightarrow \omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$ l'impédance à

droite des points A et B est nulle (court-circuit) : $Z_{AB} = Z(L_2, C_2) = 0$

Le schéma devient :



et les équations mécaniques :

$$\ddot{y}_2 + \Omega^2 y_2 = 0 \rightarrow y_2(t) = A \cos(\Omega t + \psi)$$

$\alpha_2 \dot{y}_2 = k_3 (y_1 - y_2)$ ce qui signifie que la force exercée par k_3 sur m_2 est exactement compensée par la force de frottement de l'amortisseur α_2 de sorte que pour m_2 on peut ignorer (à cette pulsation particulière) k_3 et α_2 pour ne considérer que k_2 d'où un mouvement harmonique non amorti de m_2 tandis que pour m_1 on a :

$$m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = F(t) - \alpha_2 \dot{y}_2 = F'(t)$$

c'est à dire un mouvement sinusoïdal amorti forcé par :

$$F'(t) = F(t) - \alpha_2 \dot{y}_2 = F_0 \cos \Omega t + \alpha_2 \Omega A \sin(\Omega t + \psi)$$

SYSTEME 74.7

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + k_1 y_1 - \alpha \dot{y}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + k_2 y_2 - \alpha \dot{y}_1 = F(t) \end{cases}$$

$$2) Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_2(t)} = \alpha + j(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega}) - \frac{\alpha^2}{\alpha + j(m_1 \omega - \frac{k_1}{\omega})}$$

$$3) Z_T = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \frac{\left[\alpha + j(m_1 \omega - \frac{k_1}{\omega}) \right] \left[\alpha + j(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega}) \right]}{\alpha} - \alpha$$

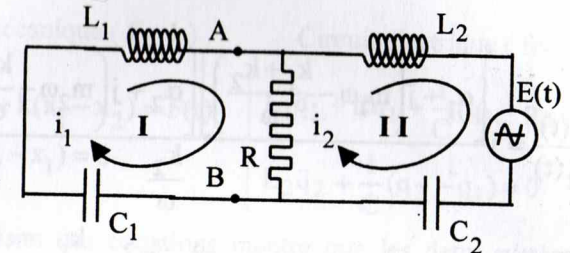
$$4) \text{ pour } \omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

$$\rightarrow Z_T = j(m_2 \Omega - \frac{k_2}{\Omega}) = (m_2 \Omega - \frac{k_2}{\Omega}) e^{j \frac{\pi}{2}}$$

impédance purement inductive $\rightarrow$ pas de dissipation d'énergie

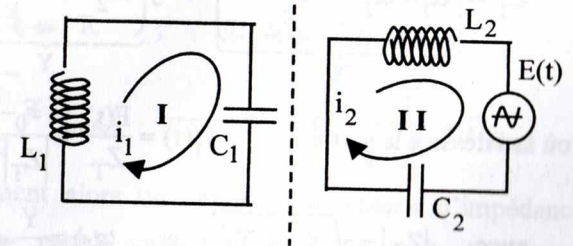
$$\text{d'où } \dot{y}_1(t) = \frac{F(t)}{Z_T} = \frac{F_0}{m_2 \Omega - \frac{k_2}{\Omega}} \cos(\Omega t - \frac{\pi}{2})$$

5)



$$\text{Pour la pulsation particulière } \omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1} \leftrightarrow \omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$$

Ce schéma devient :



les deux points A et B sont court-circuités par l'impédance nulle de L_1 et C_1 :

$$V_A - V_B = R(i_1 - i_2) = 0 \rightarrow i_1 = i_2 \rightarrow \dot{y}_1 = \dot{y}_2$$

les deux masses m_1 et m_2 vibrent avec la même vitesse et l'amortisseur ne joue plus son rôle ($D = 0$), les deux masses sont comme découplées à cette pulsation particulière.

SYSTEME 74.8

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha_1 \dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = F(t) \end{cases}$$

$$2) Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_2(t)} = \alpha_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) + \frac{\left(\frac{k_2}{\omega} \right)^2}{\alpha_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right)}$$

$$3) Z_T = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = j \frac{\left[\alpha_1 + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) \right] \left[\alpha_2 + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) \right] + \left(\frac{k_2}{\omega} \right)^2}{\frac{k_2}{\omega}}$$

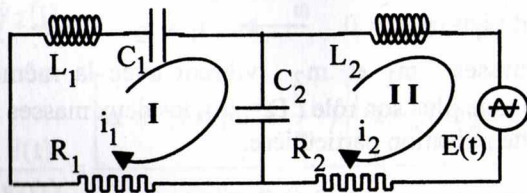
$$4) \text{ pour la pulsation particulière : } \omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

$$Z_T = \underbrace{\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha_1 m_2 \Omega^2}{k_2} \right)}_X + j \underbrace{\left(m_2 \Omega + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \Omega}{k_2} \right)}_Y$$

d'où la vitesse à la sortie : $\dot{y}_1(t) = \frac{F(t)}{Z_T} = \frac{F_0}{|Z_T|} \cos(\Omega t - \phi)$

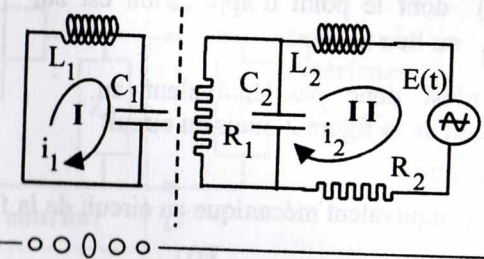
avec $|Z_T| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\text{tg } \phi = \frac{Y}{X}$

5) circuit analogue M/L :



Pour $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ Ce circuit se ramène à :

Et l'on peut tirer des conclusions similaires à celles faites pour le système 6.



EXERCICE 75

1) Système mécanique (fig 1)

Circuit électrique (fig 2)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + R \dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = E(t) \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C}(q_2 - q_1) = 0 \end{cases}$$

2) La comparaison des équations montre que les deux systèmes sont équivalents avec les correspondances :

$$\begin{aligned} x_i &\leftrightarrow q_i & m_i &\leftrightarrow L_i & k &\leftrightarrow \frac{1}{C} \\ \alpha &\leftrightarrow R & F(t) &\leftrightarrow E(t) \end{aligned}$$

$$3) \text{ Si } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \Omega_{\text{méca}} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{1}{L_2 C}} = \Omega_{\text{élect}}$$

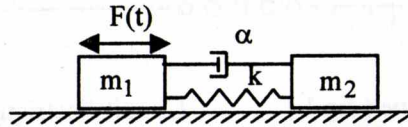
L_2 et C forment alors un circuit « bouchon » d'impédance infinie $\rightarrow i_1 = 0 \rightarrow$ pas de courant dans $L_1 \rightarrow$ pas de dissipation d'énergie par R tandis que la portion de circuit L_2 et C sera le siège d'oscillations électriques sinusoïdales de pulsation $\Omega_{\text{élect}}$.

Par analogie $\rightarrow \dot{x}_1 = 0 \rightarrow m_1$ immobile et pas de dissipation d'énergie par l'amortisseur α tandis que m_2 effectue des oscillations « libres » non amorties de pulsation $\Omega_{\text{méca}}$.

4) Le système mécanique de la figure 3 diffère de celui de la figure 1 par la force $F(t)$ dont le point d'application est sur m_2 au lieu de m_1 .

Il n'est donc pas équivalent au circuit de la figure 2 mais au circuit ci-contre.

5) L'équivalent mécanique au circuit de la figure 4 est :



EXERCICE 76

Première partie

$$1) \quad Z_{AB} = \frac{Z_1 Z_2 + Z (Z_1 + Z_2)}{Z + Z_2} ; \quad i_1(t) = \frac{E(t)}{Z_{AB}}$$

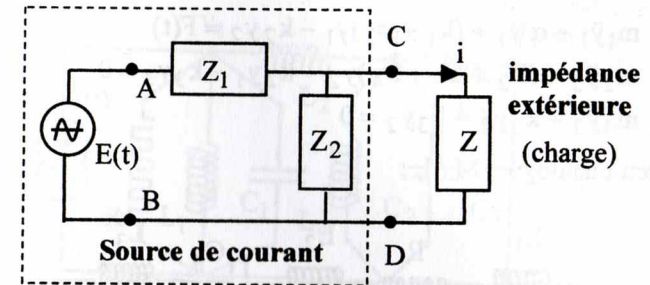
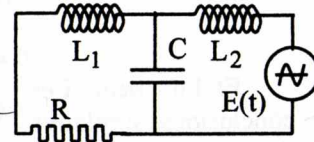
$$i(t) = \frac{Z_2}{Z_1 Z_2 + Z (Z_1 + Z_2)} E(t)$$

2) Si $Z_1 + Z_2 = 0$ c'est à dire Z_1 et Z_2 purement inductives et leurs expressions complexes conjuguées.

$$\longrightarrow i(t) = \frac{E(t)}{Z_1} \quad (\text{indépendant de } Z)$$

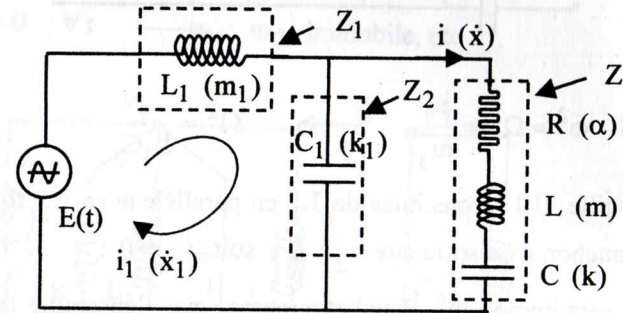
On a donc affaire à une source de courant délivrant un courant i d'intensité invariable par rapport à la charge extérieure Z qu'on pourrait y brancher à ses bornes C et D.

On peut toutefois moduler i en agissant sur la valeur de Z_1 , Z_2 ou $E(t)$.



Deuxième partie

3) circuit analogue Force-Tension :



$$4) \quad a) \quad Z_1 + Z_2 = 0 \longrightarrow \Omega_{\text{élect}}^2 = \frac{1}{L_1 C_1} \longrightarrow \Omega_{\text{méca}}^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

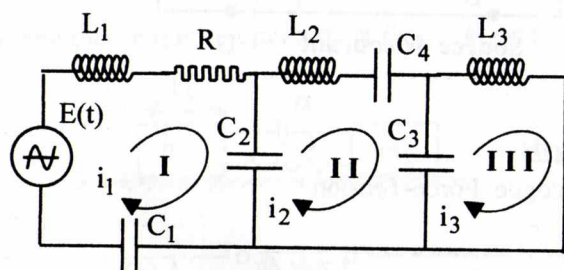
$$b) \quad i(t) = \frac{E(t)}{Z_1} \longrightarrow \dot{x}(t) = \frac{F_0}{m_1 \Omega} \sin \Omega t$$

$$c) \quad \langle P \rangle_{\text{Dissipée}} = \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{F_0}{m_1 \Omega} \right)^2 = \langle P \rangle_{\text{Fournie}}$$

EXERCICE 77

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3 + k_4)y_2 - k_2 y_1 - k_3 y_3 = 0 \\ m_3 \ddot{y}_3 + k_3 y_3 - k_3 y_2 = 0 \end{cases}$$

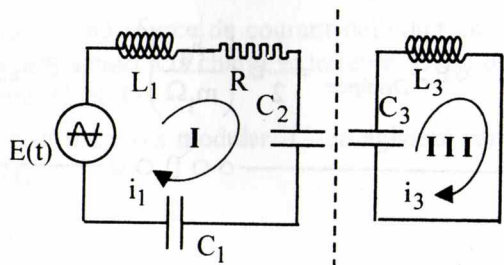
2) circuit analogue M / L :



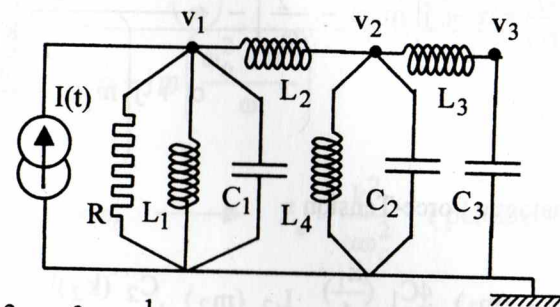
$$3) \text{ Si } \omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_3}{m_3} \longrightarrow \Omega^2 = \frac{1}{L_3 C_3}$$

La maille (III) constituée de L_3 en parallèle avec C_3 formera un circuit « bouchon » de sorte que $i_2 = 0$; soit $\dot{y}_2 = 0$:

- ✓ m_2 sera immobile : Pour cette masse m_2 l'ensemble (m_3, k_3) constitue un « atténuateur de vibrations ».
- ✓ m_3 effectuera des vibrations « libres » non amorties à sa pulsation propre Ω .
- ✓ m_1 effectuera des oscillations amorties forcées à la même pulsation Ω .



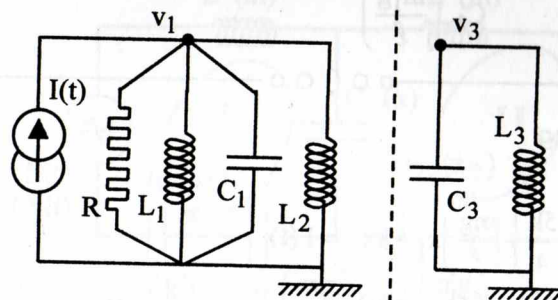
4) circuit analogue M / C :



$$\text{Si } \omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{L_3 C_3} ; L_3 \text{ et } C_3 \text{ constitueront un court-circuit}$$

(impédance nulle) et le nœud 2 sera au potentiel zéro ($v_2 = 0$) soit :

$$\dot{y}_2 = 0 \quad \forall t \longrightarrow m_2 \text{ immobile, etc ...}$$



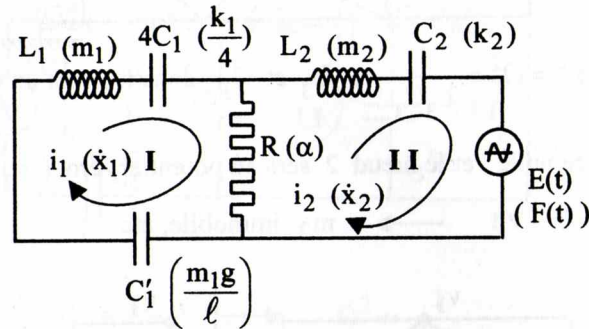
EXERCICE 78

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \left(\frac{k_1}{4} + \frac{m_1 g}{\ell} \right) x_1 - \alpha \dot{x}_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + k_2 x_2 - \alpha \dot{x}_1 = F(t) \end{cases}$$

252

$$2) \quad Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_2(t)} = \alpha + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) - \frac{\alpha^2}{\alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + \frac{m_1 g}{\ell}}{\omega} \right)}$$

3) circuit analogue Force-Tension :



EXERCICE 79

$$1) \quad \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \left(\frac{5k}{4} + \frac{mg}{\ell} \right) x_1 - kx_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \left(\frac{5k}{4} + \frac{mg}{\ell} \right) x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad Z_T = \frac{F(t)}{\dot{x}_2(t)} = \frac{m\alpha}{k} (\omega_0^2 - \omega^2) + j \left[\frac{k}{\omega} - \frac{m^2}{k\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right]$$

partie réelle (dissipative) partie imaginaire (inductive)

$$3) \quad \text{Pour } \omega^2 = \omega_0^2 \longrightarrow Z_T = j \frac{k}{\omega_0} \quad (\text{purement inductive})$$

La vitesse de sortie sera : $\dot{x}_2(t) = \frac{\omega_0 F_0}{k} \sin \omega_0 t$

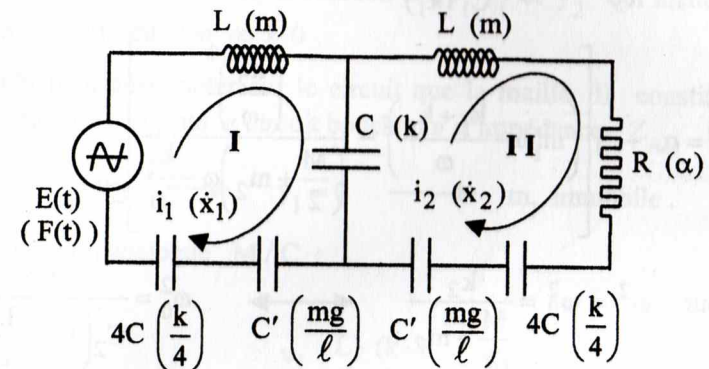
253

$$4) \quad Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{\left(\frac{k}{\omega} \right)^2}{\alpha - j m \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)} - j m \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega} \right)$$

$$5) \quad \text{pour } \omega = \omega_0 \longrightarrow Z_e = \frac{k^2}{\alpha \omega_0^2} \quad (\text{purement dissipative})$$

La vitesse à l'entrée sera : $\dot{x}_1(t) = \frac{\alpha \omega_0^2 F_0}{k^2} \cos \omega_0 t$

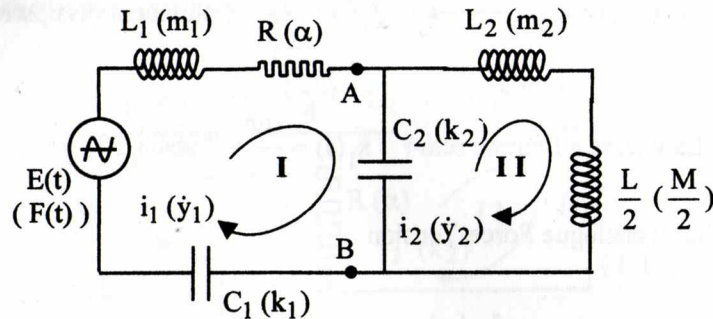
6) circuit analogue Force-Tension



EXERCICE 80

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = F(t) & (1) \\ \left(\frac{M}{2} + m_2\right) \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

2) circuit analogue M/L :



$$3) Z_e = \alpha + j \left[\left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) - \frac{\left(\frac{k_2}{\omega} \right)^2}{\left(\frac{M}{2} + m_2 \right) \omega - \frac{k_2}{\omega}} \right]$$

$$\text{pour } \omega^2 = \omega_0^2 = \frac{k_2}{\frac{M}{2} + m_2} \longleftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{C_2 \left(L_2 + \frac{L}{2} \right)}$$

Le 2^{ème} terme tend vers l' ∞ , le 1^{er} terme devient négligeable devant celui-ci et $Z_e \rightarrow \infty$

$$\text{D'où } \dot{y}_1(t) = \frac{F(t)}{Z_e} \rightarrow 0 \longrightarrow y_1(t) = \frac{\dot{y}_1}{j\omega} \rightarrow 0$$

$\longrightarrow m_1$ immobile.

$$\text{et } (1) \longrightarrow (\text{résultante des forces sur } m_1) = F(t) + k_2 y_2 = 0$$

Quant à la masse m_2 , il faut se reporter à l'équation (2) précédente :

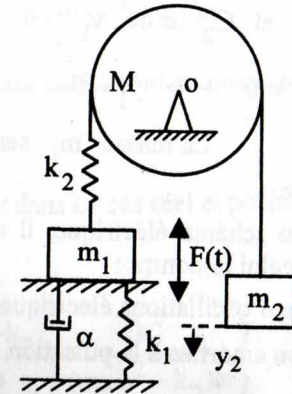
$$\text{avec } y_1 = 0 \longrightarrow \ddot{y}_2 + \omega_0^2 y_2 = 0$$

$$\longrightarrow y_2(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Mouvement harmonique

« libre » pour M et m_2 à la

$$\text{pulsation propre } \omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{\frac{M}{2} + m_2}}$$

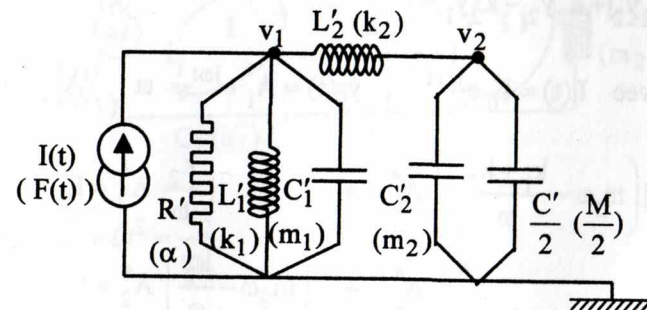


Remarque : ne pas utiliser la relation entre $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$ qui mène à une indétermination du type $\infty \times 0$.

On peut aussi noter sur le circuit que la maille II constituera à cette fréquence ω_0 un « circuit bouchon » d'impédance Z_{AB} infinie

$$i_1 = 0 \longrightarrow \dot{y}_1 = 0 \longrightarrow m_1 \text{ immobile.}$$

4) circuit analogue M/C :



256

A la pulsation ω_0 , le nœud (1) est court-circuité par la branche de

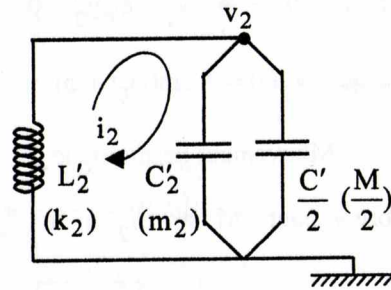
$L'_2, \frac{C'}{2}$ et C'_2 d'où $v_1 \rightarrow 0$

$\rightarrow \dot{y}_1 = 0 \rightarrow y_1 = 0$

La masse m_1 sera

immobile.

Quant au schéma électrique, il se réduit à celui ci-contre :



Siège d'oscillations électriques

libres non amorties à la pulsation ω_0 .

5) Si leur comportement est similaire à la pulsation ω_0 , les deux circuits analogues M / L et M / C sont structurellement différents : pour la réalisation du 1^{er} il faut disposer de 3 bobines et de 2 condensateurs alors que pour le 2^{ème} c'est l'inverse ; de plus la valeur numérique de ω_0 n'est pas forcément la même pour les deux circuits.

EXERCICE 81

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = F(t) & (1) \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 - k_2 y_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

2) avec $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$; $\dot{y}_1(t) = A_1^* e^{j\omega t}$ et $A_1^* = A_{10} e^{j\varphi}$

$$\left[\alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) \right] A_1^* + j \frac{k_2}{\omega} A_2^* = F_0 \quad (3)$$

$$\frac{k_2}{\omega} A_1^* + \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) A_2^* = 0 \quad (4)$$

$$\rightarrow A_2^* = \frac{k_2}{(m_2 \omega^2 - k_2)} A_1^* \quad (5)$$

$$\text{où } A_1^* = \frac{F_0}{\alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} + \frac{k_2^2}{(m_2 \omega^2 - k_2) \omega} \right)}$$

3) de (5) $\rightarrow$ les deux masses oscilleront en phase pour des pulsations $\omega > \sqrt{k_2/m_2}$.

(le rapport d'amplitude étant dans ce cas réel et positif).

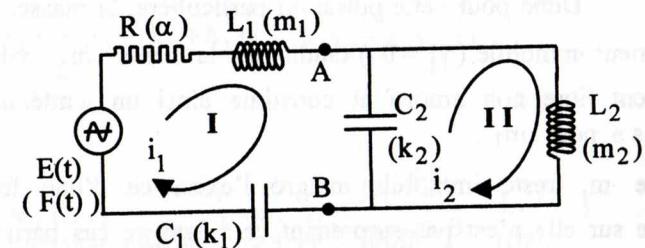
4) impédance d'entrée vitesse :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_1(t)} = \alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} + \frac{k_2^2}{(m_2 \omega^2 - k_2) \omega} \right)$$

impédance de transfert vitesse : $Z_T = \frac{F(t)}{\dot{y}_2(t)} =$

$$= \frac{\alpha \omega}{k_2} \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) + j \left[\frac{k_2}{\omega} - \frac{\omega}{k_2} \left(m_1 \omega - \frac{k_1 + k_2}{\omega} \right) \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) \right]$$

5) circuit analogue M / L :



6) pour $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$:

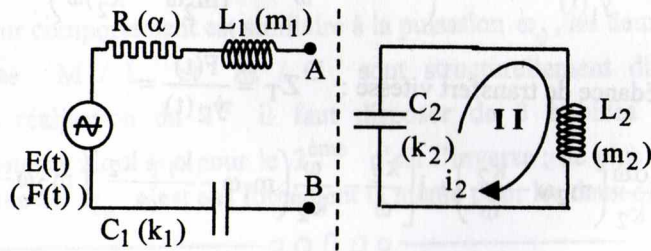
$$Z_e \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad Z_T = j \frac{k_2}{\Omega} = \frac{k_2}{\Omega} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{purement inductive}$$

$$\text{d'où : } \dot{y}_2(t) = \frac{F_0 \Omega}{k_2} \cos(\Omega t - \frac{\pi}{2})$$

donc en retard de $\frac{\pi}{2}$ sur la force $F(t) = F_0 \cos \Omega t$

Pour la pulsation particulière $\omega^2 = \Omega^2 = \frac{k_2}{m_2}$, soit $\Omega^2 = \frac{1}{L_2 C_2}$,

l'impédance du circuit à droite des points A et B tend vers l' ∞ ; on dit que (L_2, C_2) constitue un circuit « bouchon ». Cela revient à un circuit ouvert entre A et B : $Z_e \approx \infty$ et $i_1 \approx 0$; C_2 n'est traversé que par le courant i_2 d'où le nouveau schéma du circuit :



Donc pour cette pulsation particulière, la masse m_1 sera pratiquement immobile ($\dot{y}_1 \approx 0$) tandis que la masse m_2 vibre d'un mouvement libre non amorti et constitue ainsi un « atténuateur de vibrations » pour m_1 .

Que m_1 reste immobile malgré l'existence d'une force $F(t)$ appliquée sur elle n'est pas surprenant car, dans ce cas particulier où $\omega^2 = k_2/m_2$, la résultante des forces s'exerçant sur m_1 n'est pas $F(t)$ mais $F(t) +$ la force du ressort k_2 , et cette somme est nulle puisque les deux forces varient alors avec la même fréquence et en opposition de phase (selon l'équation (1) ou le résultat 6)).

(1^{er} exercice 2^{ème} épreuve MARS 95)

EXERCICE 82

Première partie

1)

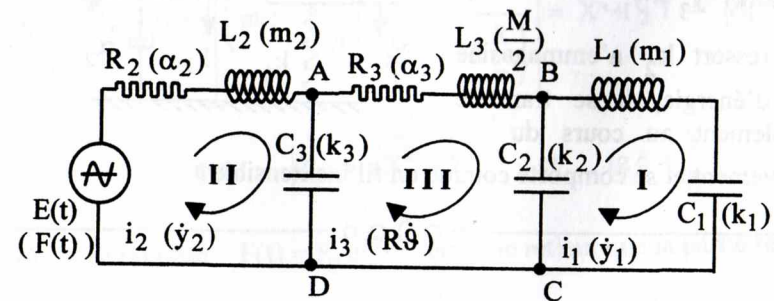
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & -\frac{k_2}{m_1} \\ 0 & \frac{k_3}{m_2} & -\frac{k_3}{m_2} \\ -\frac{2k_2}{M} & -\frac{2k_3}{M} & \frac{2(k_2 + k_3)}{M} \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \omega_1^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{k}{m} ; \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} ; \quad \omega_3^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{k}{m}$$

Deuxième partie

$$3) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_3 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha_2 \dot{y}_2 + k_3 y_2 - k_3 y_3 = F(t) \\ \frac{M}{2} \ddot{y}_3 + \alpha_3 \dot{y}_3 + (k_2 + k_3)y_3 - k_3 y_2 - k_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

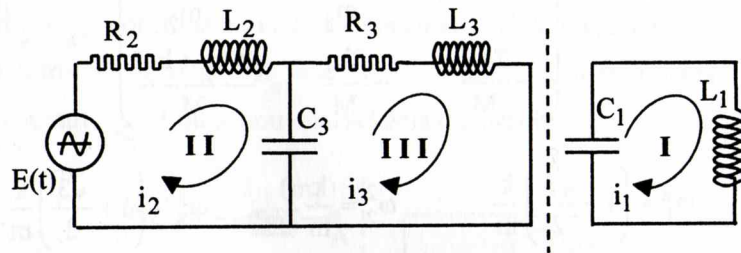
4)



$$5) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad \longleftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}$$

à cette fréquence, la branche (L_1, C_1) parcourue par i_1 constituera un court-circuit ($Z = 0$) entre les points B et C.

Les trois points B, C et D se confondent (même potentiel) et le schéma électrique se simplifie :



C_2 ne sera traversée par aucun courant :

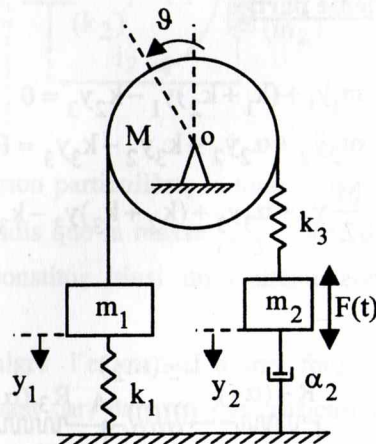
$$i_3 - i_1 = 0 \rightarrow i_3 = i_1$$

L_1 et L_3 seront traversées par des courants identiques.

Conclusion, les masses m_1 et M auront même vitesse (linéaire) $\dot{y}_3 = \dot{y}_1$;

Le ressort k_2 n'emmagasine pas d'énergie, il se translate simplement au cours du

mouvement et se comporte comme un fil inextensible.



EXERCICE 83

1) pulsations propres du système : $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$; $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$

Pour la recherche des modes propres, posons :

$$X_1 = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad X_2 = x_1 - x_2$$

(X_1 et X_2 étant les coordonnées normales du système)

$$\rightarrow X_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \quad \text{et} \quad X_2(t) = C_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{C_1}{2} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \frac{C_2}{2} \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ x_2(t) = \frac{X_1 - X_2}{2} = \underbrace{\frac{C_1}{2} \cos(\omega_1 t + \psi_1)}_{1^{\text{er}} \text{ mode}} - \underbrace{\frac{C_2}{2} \cos(\omega_2 t + \psi_2)}_{2^{\text{ème}} \text{ mode}} \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F(t) & (1) \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$b) \quad Z_e = \alpha + j \left[\left(m\omega - 2\frac{k}{\omega} \right) - \frac{\left(\frac{k}{\omega} \right)^2}{\left(m\omega - 2\frac{k}{\omega} \right)} \right] = X + jY = |Z_e| e^{j\phi}$$

$$\text{avec} \quad |Z_e| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{Y}{X}$$

c) Si on pose $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$ et on ne retient que la partie réelle :

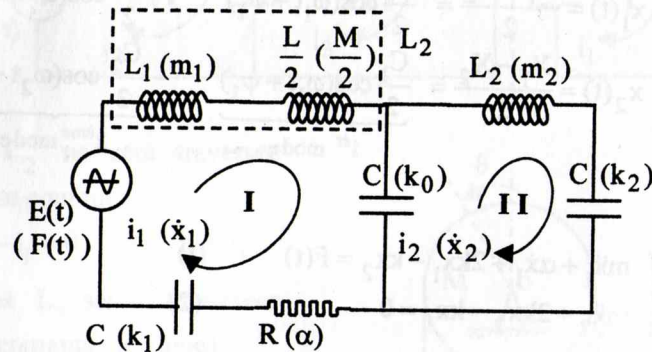
$$\text{de} \quad \dot{x}_1(t) = \frac{F(t)}{Z_e} = \frac{F_0}{|Z_e|} e^{j(\omega t - \phi)} \rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{F_0}{|Z_e|} \cos(\omega t - \phi)$$

ϕ étant le déphasage de la vitesse par rapport à la force .

$$\text{de (2)} \rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{k}{(2k - m\omega^2)} \dot{x}_1(t) \quad (\text{pour } \omega \neq \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}})$$

Leur rapport étant réel , selon le signe de celui-ci , les vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ seront soit en phase (pour $\omega < \sqrt{\frac{2k}{m}}$) soit en opposition de phase (pour $\omega > \sqrt{\frac{2k}{m}}$).

d) circuit analogue M / L :



e) des expressions de $\dot{x}_1(t)$ et de Z_e , on note que si ω prend la valeur $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $|Z_e| \rightarrow \infty \rightarrow \dot{x}_1 \rightarrow 0 \rightarrow (m_1 \text{ immobile})$

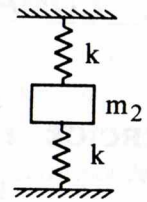
Pour $\dot{x}_2$, l'expression précédente donne une indétermination .

Il faut noter que :

- ✓ si m_1 et la poulie sont immobiles alors m_2 constitue un système à un degré de liberté .
- ✓ $\dot{x}_1 = 0 \rightarrow x_1 = \text{constante}$ qu'on peut prendre égale à zéro et en revenant à l'équation (2) :

$$m \ddot{x}_2 + 2k x_2 = 0 \rightarrow x_2(t) = B \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Pour l'amplitude B de $x_2(t)$, on peut remarquer que si m_1 et la poulie sont immobiles, il y aura une extrémité du ressort k_0 qui sera fixe, sa déformation sera représentée par le déplacement x_2 uniquement . La force transmise à m_1 par le ressort k_0 sera donc $F'(t) = k_0 x_2(t)$



Or, m_1 immobile $\rightarrow$ résultante des forces appliquées nulle, soit : $F(t) + k_0 x_2(t) = 0 \quad \forall t$ (résultat conforme à (1))

$$\rightarrow x_2(t) = -\frac{F_0}{k} \cos \omega_0 t = \frac{F_0}{k} \cos(\omega_0 t + \pi)$$

$$\text{d'où } \dot{x}_2(t) = \frac{F_0 \omega_0}{k} \sin \omega_0 t = \frac{F_0 \omega_0}{k} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})$$

f) pour $\omega \neq \omega_0$, de $\dot{x}_1(t) = \frac{F_0}{|Z_e|} \cos(\omega t - \phi)$, $\dot{x}_1$ serait en phase

avec $F(t) = F_0 \cos \omega t$ si $\phi = 0 \rightarrow \text{tg } \phi = \frac{Y}{X} = 0$

$$\text{d'où : } \omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

g) ce sont les pulsations propres du système libre non amorti .

Or, à chacune de ces pulsations correspond un mode propre de vibration :

- ✓ pour ω_1 , (le ressort k_0 ne jouant pas le rôle d'élément de couplage) $\dot{x}_2$ est en phase avec $\dot{x}_1$ donc avec la force $F(t)$.
- ✓ pour ω_2 , $\dot{x}_2$ est en opposition de phase avec $\dot{x}_1$ donc avec la force également .

On peut vérifier que ces deux pulsations correspondent à un

$|Z_e| = \alpha = |Z_e|_{\text{MIN}}$ (réel) $\rightarrow$ amplitudes d'oscillation maximales (résonance) ; alors que ω_0 correspond à une antirésonance .

— o o 0 o o —

IV . COMPLEMENT D'EXERCICES DIVERS

EXERCICE 84

$$1) \quad a) \quad x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$b) \quad x(t) = \frac{a}{k\omega_0} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$$

$$c) \quad x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 + a^2)} \left[e^{-at} - \cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right]$$

$$d) \quad x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\sin(\omega t + \beta) - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega_0 t + \psi) \right]$$

$$\text{avec} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0}{\omega} \operatorname{tg} \beta$$

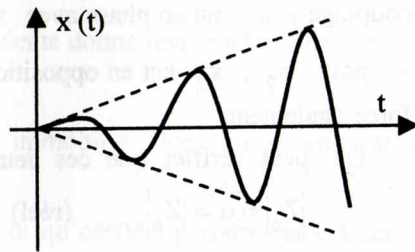
2) Le cas de $F(t) = F_0 \cos \omega t$ peut être déduit du résultat d) en posant

$$\beta = \frac{\pi}{2}: \quad x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \quad \text{pour} \quad \omega \neq \omega_0$$

$$3) \quad m = \frac{F_0}{A \left(\frac{g}{c} - \omega^2 \right)} \approx 20 \text{ kg}$$

4) Pour $\omega = \omega_0$ et les mêmes conditions initiales la solution de l'équation différentielle du mouvement sera :

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$



EXERCICE 85

$$1) \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0 \rightarrow x_1(t) = \frac{mg}{k} \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

où $x_1(t)$ est comptée à partir du niveau N_1 correspondant à la position d'équilibre qu'occuperait la masse M suspendue seule au ressort.

2) On suppose cette fois les deux masses suspendues ensemble au ressort. On écarte alors ce système de X_0 par rapport à sa position d'équilibre N_2 et on le lâche sans vitesse initiale. Il se met à osciller librement et au bout d'un temps t_0 on coupe la tige reliant les deux masses. La masse M poursuit, seule, des oscillations régies par l'équation :

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0 \rightarrow x_2(t) = C_2 \sin \left[\omega_0(t - t_0) + \psi_2 \right]$$

$$\text{avec} \quad C_2^2 = \frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} X_0^2 \sin^2 \Omega_0 t_0 + \left(X_0 \cos \Omega_0 t_0 + \frac{mg}{k} \right)^2$$

$$\operatorname{tg} \psi_2 = - \frac{\cos \Omega_0 t_0 + \frac{mg}{kX_0}}{\frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \Omega_0 t_0} ; \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

$x_2(t)$ et t ayant mêmes origines qu'à la première question.

EXERCICE 86

$$1) \quad q(t) = CE (1 - e^{-t_0/(R+r)C}) \cos \omega_0 t$$

oscillations sinusoïdales non amorties

2) les conditions initiales étant les mêmes dans les deux cas :

$$q(t) = \frac{\omega_0}{\omega_a} CE (1 - e^{-t_0/rC}) e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi)$$

oscillations sinusoïdales amorties

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \delta = \frac{R}{2L} ; \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} ; \operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_a}{\delta}$$

EXERCICE 87

$$1) \quad D \approx 0,62 ; \quad T_a \approx 315 \text{ ms}$$

$$2) \quad x(t) \approx 2 e^{-1,965 t} \cos(19,903 t + 98,3 \cdot 10^{-3})$$

(en cm)

EXERCICE 88

$$D = \frac{\pi \operatorname{Log} n}{t} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 87 \cdot 10^{-3}$$

EXERCICE 89

$$\omega_r \approx \omega_0 \sqrt{\frac{4\pi^2 - D^2}{4\pi^2 + D^2}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$A(\omega_r) = A_{\text{MAX}} \approx \frac{(4\pi^2 + D^2)}{4\pi k D} F_0$$

EXERCICE 90

$$n = \frac{A_{\text{MAX}}}{A(0)} = \frac{\omega_0^2}{2\delta \omega_a} \approx \frac{\pi}{D} \left(1 + \frac{D^2}{4\pi^2}\right) \approx Q \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right) \approx Q \approx 15,7$$

EXERCICE 91

$$C \approx 50 \text{ pF}$$

$$R \approx 158 \Omega$$

EXERCICE 92

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0 - \omega_a}{\omega_0} = \frac{1}{8Q^2} \approx 0,12 \%$$

EXERCICE 93

1) S'il y a résonance de tension à la capacité, elle se produit pour

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 ; \text{ on peut donc écrire :}$$

$$\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \rightarrow \omega_0^2 > 2\delta^2 \quad \text{et avec} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

il vient : $Q > 1/\sqrt{2}$ à ne pas confondre avec la condition pour que des oscillations libres puissent exister ($Q > 1/2$).

2) La résonance de courant se produisant pour $\omega = \omega_0$, on doit avoir : $Q \geq 5$.

EXERCICE 94

$$1) \quad \text{Pour RLC série : } Q_1 = \frac{\omega_0}{2\delta_1} \quad \text{avec} \quad \delta_1 = \frac{R}{2L}$$

$$\rightarrow Q_1 = \frac{L\omega_0}{R} \quad \text{et} \quad \omega_0 \approx 15700 \text{ rd/s}$$

2) La valeur de cette fréquence ne dépend pas du branchement des éléments R, L et C et dans les deux cas : $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$

Par contre, lorsque R, L et C sont en parallèle, on aura :

$$Q_2 = \frac{\omega_0}{2\delta_2} \quad \text{avec} \quad \delta_2 = \frac{1}{2RC}$$

$$\rightarrow Q_2 = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q_1}$$

3) conclusion : La valeur du facteur de qualité Q s'inverse quand on change la façon de brancher les éléments R, L et C.

Le facteur de qualité Q_1 d'un circuit R L C série croît lorsque R décroît, pour améliorer sa sélectivité il faut donc réduire sa résistance R.

EXERCICE 95

$$\dot{x}(t) = -a\omega(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t)$$

$$\rightarrow \dot{x}_{\text{MAX}} \approx 2,73 a\omega \approx 136,5 \text{ m/s}$$

EXERCICE 96

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\omega'^2 + \omega''^2}{2}} \approx 510 \text{ rd/s}$$

EXERCICE 97

a) résonance pour $\dot{x}(t)$ lorsque : $\omega = \omega_0 = \sqrt{\omega' \cdot \omega''}$

b) en supposant $\omega'' > \omega'$: $\delta = \frac{\omega'' - \omega'}{2\sqrt{3}}$ et $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

EXERCICE 98

$$\omega_1 \approx 47,9 \text{ rd/s} ; \quad \omega_2 \approx 52,1 \text{ rd/s}$$

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \approx 1,5 \text{ s}$$

EXERCICE 99

Deux valeurs possibles : $f = 18 \text{ Hz}$ et $f = 26 \text{ Hz}$

EXERCICE 100

$$1) \quad Q = \frac{V_{\text{CMAX}}}{E_0} \approx 20$$

$$2) \quad C \approx 355,5 \text{ pF} \quad \text{et} \quad f_0 \approx 298,5 \text{ kHz}$$

$$3) \quad \Delta f \approx 15 \text{ kHz} ; \quad f_1 \approx 291 \text{ kHz} ; \quad f_2 \approx 306 \text{ kHz}$$

$$4) \quad \text{si } f = f_0 \pm \Delta'f \approx 298,5 \pm 4 \text{ kHz}$$

$$\rightarrow \omega = 2\pi f = \omega_0 \pm \Delta'\omega \rightarrow I = 20 \log \frac{I_0(\omega)}{I_0(\omega_0)} \approx -2,5 \text{ dB}$$

(ne pas confondre ce $\Delta'f$ avec la bande passante Δf à -3 dB)

$$5) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_0^2 \approx 33,7 \text{ mW}$$

EXERCICE 101

$$1) \quad D = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\omega\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \tan \phi}\right)^2 - 1}} \approx 1,45$$

$$2) \quad W_F = \pi \alpha \omega A^2 \approx 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ J} = -W_f$$

où W_f est le travail résistant, sur une période, de la force de frottement $f = -\alpha \dot{x}$

$$3) \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \alpha \omega^2 A^2 \approx 24,3 \text{ mW}$$

conforme au résultat précédent : $\langle P \rangle = \frac{W_F}{T}$

$$4) \quad \text{Il y a résonance de puissance pour } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{et } \langle P \rangle_{\text{MAX}} = \langle P(\omega_0) \rangle = \frac{F_0^2}{4m\delta} \approx 47,5 \text{ mW}$$

EXERCICE 102

a) ressorts en parallèle :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \longrightarrow -kx = -k_1x - k_2x \longrightarrow k = k_1 + k_2$$

b) ressorts en série :

indication : écrire, pour les points d'attache entre les deux ressorts ainsi qu'entre le deuxième ressort et la masse, le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ et utiliser pour le ressort k_2 la formule donnée par l'exercice (103) qui suit.

$$\longrightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

c) en dehors du point d'attache qui diffère, ce cas est identique au premier : $k = k_1 + k_2$.

EXERCICE 103

Ecrire pour chaque cas que : $F = -k \Delta \ell = -k(\ell - \ell_0)$

$$\text{et } U = \frac{1}{2} k (\Delta \ell)^2 = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 \quad (\text{loi de HOOKE})$$

Puis exprimer ℓ en fonction de ℓ_0 , x_A et x_B en comptant algébriquement x_A et x_B . On doit trouver pour les 4 cas de figures possibles : $\Delta \ell = x_B - x_A$

EXERCICE 104

$$1) \quad U(g) = \frac{1}{2} \left[k_2 + \left(1 + \frac{\ell_2 \ell_4}{\ell_1 \ell_3} \right)^2 k_1 \right] R^2 g^2$$

$$2) \quad \omega_0^2 = \frac{2k_2 + 98k_1}{M}$$

EXERCICE 105

Le mouvement de translation du piston est donné par :

$$x(t) = -R \cos \omega t + \sqrt{\ell^2 - R^2} \sin^2 \omega t$$

EXERCICE 106

$$1) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{/O}}{Mga}}$$

2) Calculer, pour chaque cas, la distance $OG = a$ en considérant cette distance comme l'abscisse du centre de gravité G du corps sur un axe porté par la direction OG . Appliquer ensuite la formule ci-dessus en faisant éventuellement appel au théorème de HUYGENS sur les moments d'inertie.

272

EXERCICE 107

$$1) \quad \ell(t) = \ell_e + x_0 \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2) \quad \ell_{\text{MAX}} \leq \ell_0 + \frac{2mg}{k} = 2\ell_e - \ell_0$$

EXERCICE 108

$$g = 4\pi^2 \frac{x_1 - x_2}{T_1^2 - T_2^2}$$

EXERCICE 109

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3\pi R}{8g}}$$

EXERCICE 110

$$1) \quad OG = a = \frac{2R}{\pi}$$

$$2) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{ag}{2R(R-a)}} = \sqrt{\frac{g}{(\pi-2)R}}$$

EXERCICE 111

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(9\pi-16)R}{8g}}$$

273

EXERCICE 112

1) Dans une situation d'équilibre stable, le centre de gravité G du corps occupera une position en dessous de O et sur la verticale passant par OO' .

Le corps étant immobile dans une telle position, associons à celui-ci un repère oxy tel que l'axe oy soit vertical et orienté vers le haut :

$$\longrightarrow G \quad \begin{cases} x_G = 0 & (\text{pour raison de symétrie}) \\ y_G = OG = -b \end{cases}$$

Le corps étant homogène et d'épaisseur constante, on peut définir une masse surfacique λ (en kg/m^2) de sorte que :

$$\lambda = \frac{M}{S} = \frac{M'}{S'} = \frac{m}{s}$$

$$\text{avec} \quad S = S' - s = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

$$M' = \lambda S' = \lambda \pi R^2 = \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} M$$

$$m = \lambda s = \lambda \pi r^2 = \frac{r^2}{(R^2 - r^2)} M$$

M' et S' sont la masse et la surface du disque plein initial
 m et s la masse et surface du petit disque correspondant à la cavité
 Pour le calcul de y_G , on écrira (voir 1. RAPPEL) :

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{\iint_S y \, dm}{\iint_S dm} = \frac{\iint_S y \lambda \, dx \, dy}{M} \\ &= \frac{1}{M} \iint_{S'-s} y \lambda \, dx \, dy = \frac{1}{M} \left[\iint_{S'} y \lambda \, dx \, dy - \iint_s y \lambda \, dx \, dy \right] \\ &= \frac{M'}{M} \left(\frac{1}{M'} \iint_{S'} y \lambda \, dx \, dy \right) - \frac{m}{M} \left(\frac{1}{m} \iint_s y \lambda \, dx \, dy \right) \end{aligned}$$

La première quantité entre parenthèses étant nulle car elle correspond à la position du centre de gravité O du disque plein initial alors que la deuxième est égale à a car elle exprime la position du centre de gravité O' de la masse manquante (trou), d'où :

$$y_G = -b = -\frac{m}{M}a = -\frac{r^2 a}{(R^2 - r^2)}$$

2) Pour le calcul du moment d'inertie nous considérerons successivement plusieurs axes passant par O , O' , G ou P , tous perpendiculaires au plan de la figure. Si $d = d(x, y)$ est la distance de l'élément $dm = \lambda dx dy$ à l'axe considéré, il vient :

$$\begin{aligned} J'_{/O} &= \frac{1}{2} M' R^2 = \iint_{S'} d^2 dm = \iint_{S'} d^2 \lambda dx dy \\ &= \iint_S d^2 \lambda dx dy + \iint_s d^2 \lambda dx dy = J_{/O} + j_{/O} \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème d'HUYGENS :

$$j_{/O} = j_{/O'} + m a^2 = \frac{1}{2} m r^2 + m a^2 = \frac{1}{2} m (r^2 + 2a^2)$$

$$\text{d'où } J_{/O} = J'_{/O} - j_{/O} = \frac{1}{2} \frac{M}{(R^2 - r^2)} [R^4 - r^2(r^2 + 2a^2)]$$

et, encore une fois, selon le théorème d'HUYGENS, on écrit :

$$J_{/O} = J_{/G} + M b^2 \longrightarrow J_{/G} = J_{/O} - M b^2$$

3) Pour le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané de rotation (passant par le point de contact P avec le sol) :

$$J_{/P} = J_{/G} + M(R - b)^2 \quad \text{soit :}$$

$$J_{/P} = \frac{1}{2} \frac{M}{(R^2 - r^2)} [R^4 - r^2(r^2 + 2a^2)] + M R^2 - \frac{2 M a R r^2}{(R^2 - r^2)}$$

Dans le cas particulier où $r = a = \frac{R}{2}$ on a :

$$J_{/P} = \frac{29}{24} M R^2$$

Le concept d'axe instantané de rotation consiste, dans le cas où le déplacement du corps est de très faible amplitude, à assimiler son mouvement combiné (roulement sans glissement = rotation de ϑ autour de G et translation de G) à une simple rotation ϑ autour d'un axe passant par le point P de contact avec le sol.

$$T = \frac{1}{2} J_{/P} \dot{\vartheta}^2 ; \quad U = -M g b \cos \vartheta \approx \frac{1}{12} M g R \vartheta^2$$

$$\longrightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \sqrt{\frac{29R}{g}}$$

EXERCICE 113

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

EXERCICE 114

$$\ddot{\vartheta} + \frac{3g(R-h)}{\ell^2 + 4h^2} \vartheta = 0$$

$$\text{Si } R > h, \text{ on peut écrire : } \ddot{\vartheta} + \omega_0^2 \vartheta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{3g(R-h)}{\ell^2 + 4h^2}$$

C'est l'équation différentielle des petites oscillations autour de la position d'équilibre (stable).

Si $R < h$, l'équilibre est instable, pas d'oscillations.

EXERCICE 115

$$1) \quad \ell_e \neq \ell_0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{\ell} \ll 1$$

$$\longrightarrow \text{mouvement oscillatoire de période : } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m \ell_e}{k(\ell_e - \ell_0)}}$$

2) Si $\ell_e = \ell_0 \longrightarrow$ mouvement non linéaire, car dans le développement de $U(x)$, le terme en x^4 doit être retenu.

EXERCICE 116

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{T\ell}{md(\ell-d)}}$$

o o 0 o o

EXERCICE 117

$$\omega_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{g}{C}}$$

o o 0 o o

EXERCICE 118

$$1) \quad F_{\text{MAX}} = (M+m)g + kc \approx 60 \text{ N}$$

$$F_{\text{MIN}} = (M+m)g - kc \approx 40 \text{ N}$$

$$2) \quad c_{\text{MAX}} \geq \frac{(M+m)g}{k} \approx 8 \text{ cm}$$

o o 0 o o

EXERCICE 119

$$1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \longrightarrow \quad x(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$$

$$C = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}; \quad \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 C^2 = mgh + \frac{m^2 g^2}{2k}$$

2) Avant les oscillations, l'énergie totale du système consistait uniquement en une énergie potentielle de pesanteur.

Cette dernière étant définie à une constante près, dépendant de la référence choisie, il n'y a pas d'anomalie à ce que sa valeur soit différente de celle donnée précédemment si cette référence est mal choisie.

Le principe de conservation de l'énergie totale du système n'est en tout cas pas en défaut.

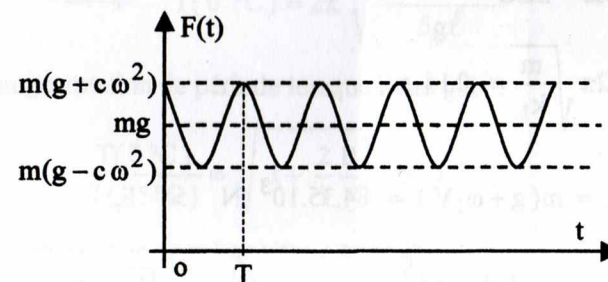
Ainsi, pour que l'énergie totale du système ait même valeur, avant et pendant les oscillations, il suffit de prendre la référence pour l'énergie potentielle de pesanteur à un niveau situé à $\frac{x_0}{2} = \frac{mg}{2k}$ au dessous du niveau initial du plateau.

o o 0 o o

EXERCICE 120

1) Le module de la force de pression du corps sur la planche est :

$$F(t) = m(g + c\omega^2 \cos \omega t)$$



$$2) \quad c_{\text{MIN}} = \frac{g}{\omega^2} \approx 8,1 \text{ cm}$$

$$3) \quad c = \frac{g}{\omega^2} \left[\sqrt{\frac{2\omega^2 h}{g}} - 1 \right] \approx 20,3 \text{ cm}$$

o o 0 o o

EXERCICE 121

$$v = \frac{\ell}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \approx 96,3 \text{ km/h}$$

EXERCICE 122

$$1) \quad L = \frac{1}{2} \left(M + \frac{m}{3} \right) \dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2 \quad \rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}}$$

$$2) \quad \frac{\Delta T_0}{T_0} \approx \frac{m}{6M} \approx \frac{1}{300}$$

EXERCICE 123

$$1) \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \approx 0,14 \text{ s}$$

$$F_{1\text{MAX}} = m(g + \omega_1 V) \approx 84,35 \cdot 10^3 \text{ N} > F_r$$

$$2) \quad \text{avec } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} < k_1 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} < \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

$$F_{2\text{MAX}} = m(g + \omega_2 V) \approx 41480 \text{ N} < F_r < F_{1\text{MAX}}$$

EXERCICE 124

1) à la température ordinaire (25 °C) l'eau est liquide.

Le mouvement est une translation de la masse totale du liquide (fig b).

$$L = \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\vartheta}^2 - Mg\ell(1 - \cos \vartheta) \approx \frac{1}{2} M \ell^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} Mg\ell \vartheta^2$$

$$\rightarrow T(25^\circ\text{C}) = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

2) à une température inférieure à 0 °C, l'eau gèle et devient de la glace solide du récipient. Le mouvement est une translation + une rotation de la masse totale de l'eau (fig c).

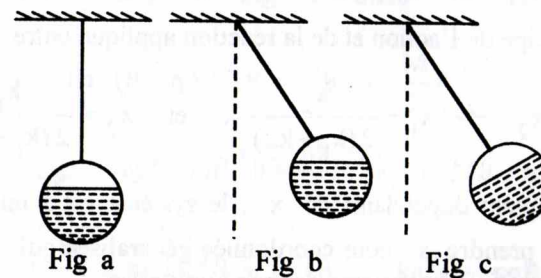
En appliquant le théorème d'HUYGENS, on peut écrire :

$$L \approx \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} MR^2 + M \ell^2 \right) \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} Mg\ell \vartheta^2$$

$$\rightarrow T(0^\circ\text{C}) = 2\pi \sqrt{\frac{2R^2 + 5\ell^2}{5g\ell}}$$

d'où une augmentation de période lorsque l'eau gèle :

$$\frac{T(0^\circ\text{C})}{T(25^\circ\text{C})} = \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5\ell^2}} > 1$$



EXERCICE 125

$$\mu = \frac{4 \pi^2 a}{g T_{\text{MIN}}^2} \approx 0,40$$

EXERCICE 126

Pour l'équation du mouvement de la planche, on trouve :

$$M \ddot{x} + \frac{2 \mu Mg}{(n-1)\ell} x = 0$$

→ oscillations harmoniques de période : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{(n-1)\ell}{2\mu g}}$

EXERCICE 127

1) Appelons A l'axe de la poulie supérieure et B celui de la poulie inférieure et soient x , x_1 et x_2 les déplacements respectifs de m , de A et de B :

✓ on suppose A fixe, B mobile → $x = 2x_2$

✓ on suppose B fixe, A mobile → $x = 2x_1$

Un mouvement général sera la somme de ces mouvements particuliers (principe de superposition) : $x = 2(x_1 + x_2)$

Et, du principe de l'action et de la réaction appliqué entre A et B :

$$\rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \rightarrow x_1 = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)} x \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)} x$$

x_1 et x_2 étant dépendants de x , le système est à un degré de liberté : on peut prendre x pour coordonnée généralisée qui suffit alors à déterminer la position du système de façon univoque.

$$2) \quad L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k_1 k_2}{8(k_1 + k_2)} x^2$$

$$3) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{4m(k_1 + k_2)}}$$

$$4) \quad k = \frac{k_1 k_2}{4(k_1 + k_2)}$$

EXERCICE 128

1) $ka^2 \eta - mgR = 0$ où η est l'angle représentant l'allongement du ressort à l'équilibre statique.

$$2) \quad L = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} ka^2 \vartheta^2$$

3) pour $t \leq 5 T_0$ et avec l'origine à la position d'équilibre du système, verticale passant par 0 :

$$\vartheta(t) = C \cos \omega_0 t \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{ka^2}{\left(\frac{M}{2} + m \right) R^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{5\pi}{180}$$

4) bilan des forces et moments agissant

sur m : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{\gamma} \rightarrow mg - T = mR\ddot{\vartheta} \rightarrow mgR - TR = mR^2\ddot{\vartheta}$

sur M : $-ka^2(\vartheta + \eta) + TR = J\ddot{\vartheta} = \frac{M}{2} R^2 \ddot{\vartheta}$

$$\rightarrow mgR - mR^2\ddot{\vartheta} = \frac{M}{2} R^2 \ddot{\vartheta} + ka^2(\vartheta + \eta)$$

$$\text{ou} \quad \left(\frac{M}{2} + m \right) R^2 \ddot{\vartheta} + ka^2 \vartheta + \underbrace{(ka^2 \eta - mgR)}_0 = 0$$

condition d'équilibre

282

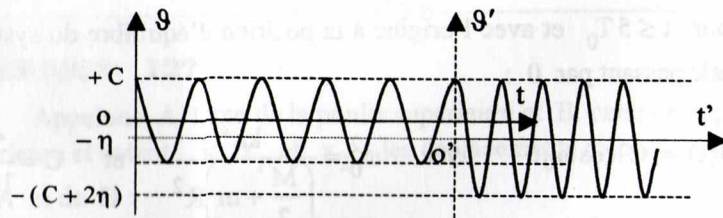
soit $\left(\frac{M}{2} + m\right) R^2 \ddot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = 0$

5) a) pour $t \geq 5T_0 \rightarrow \vartheta(t) = (C + \eta) \cos \omega'_0(t - 5T_0) - \eta$

avec $T'_0 = \frac{2\pi}{\omega'_0} = 2\pi \sqrt{\frac{MR^2}{2ka^2}} < T_0$

b) les nouvelles oscillations du système (cylindre sans la masse m) se font autour de la position de neutralité du ressort correspondant à : $\vartheta = -\eta$.

c)



EXERCICE 129

1) $L = ma^2(1 - \cos \vartheta) \dot{\vartheta}^2 + mga(1 - \cos \vartheta)$
 $\rightarrow (1 - \cos \vartheta) \ddot{\vartheta} + \frac{\sin \vartheta}{2} \dot{\vartheta}^2 - \frac{g}{2a} \sin \vartheta = 0$

2) $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \rightarrow u(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$

avec $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$

3) $C = 1 ; \psi = \frac{\pi}{2} \rightarrow u(t) = \cos \omega_0 t$

283

Selon cette coordonnée généralisée u , le mouvement de m est harmonique.

Pour $0 \leq \vartheta \leq 2\pi : u(t) = \cos \omega_0 t = \cos \frac{\vartheta}{2} \rightarrow \vartheta(t) = \sqrt{\frac{g}{a}} t$

4) $s(t) = 4a(1 - u) = 4a(1 - \cos \omega_0 t)$

s étant la coordonnée généralisée exprimant la longueur de l'arc de cycloïde comptée à partir de l'origine ($x = 0$).

Si l'origine des $s(t)$ est prise au point le plus bas de la trajectoire, position d'équilibre statique :

L'équation du mouvement devient $s(t) = 4a \cos(\omega_0 t + \pi)$

Le mouvement de m est également harmonique pour la coordonnée généralisée s .

EXERCICE 130

1) $L = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \int_0^\ell \frac{dX}{s(X)} - \frac{1}{2} \rho g \left(\frac{1}{s(0)} + \frac{1}{s(\ell)} \right) u^2$

La coordonnée généralisée $u(t)$ a la dimension d'un volume ; ce qui implique que la force généralisée $Q(t)$ qui s'appliquerait au système en régime forcé aurait la dimension d'une pression.

2) $\left(\rho \int_0^\ell \frac{dX}{s(X)} \right) \ddot{u} + \rho g \left(\frac{1}{s(0)} + \frac{1}{s(\ell)} \right) u = 0$

$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{g \left(\frac{1}{s(0)} + \frac{1}{s(\ell)} \right)}{\int_0^\ell \frac{dX}{s(X)}}$

3) oui, en posant $s(X) = \text{constante}$.

EXERCICE 131

1) Soient (x, y) et (X, Y) les déplacements horizontaux et verticaux, respectivement de 0_2 et de M , dans un plan perpendiculaire à celui de la figure.

On peut montrer que : $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{\ell}{a}$ et $Y \approx \frac{a}{2h\ell} X^2$; $y \approx \frac{x^2}{2h}$

Donc qu'une seule coordonnée généralisée suffit pour étudier ce système : par exemple X .

2) Après approximations : $T_0 \approx 2\pi \sqrt{\frac{h\ell}{ag}}$

EXERCICE 132

1)

$$\checkmark kx_{10} - (m_1 + m_2 + m_3)g = 0 \quad (\text{équilibre stable})$$

avec x_{10} un allongement préalable du ressort k_1 .

$$\checkmark m_3gR - m_2gr = 0 \quad (\text{équilibre indifférent})$$

cette deuxième relation entraîne, dans notre cas $m_2 = 2m_3$.

$$2) \quad \vartheta = \frac{x_1 - x_2}{r} = \frac{x_4 - x_1}{R} \rightarrow x_4 = 3x_1 - 2x_2$$

$$3) \quad L = \frac{3}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m_1 + m_2)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 - 2m_1\dot{x}_1\dot{x}_2 \\ - \frac{1}{2}(k_1 + 9k_2)x_1^2 - 2k_2x_2^2 - \frac{1}{2}k_2x_3^2 \\ + 6k_2x_1x_2 + 3k_2x_1x_3 - 2k_2x_2x_3$$

$$4) \quad \begin{cases} 3m_1\ddot{x}_1 - 2m_1\ddot{x}_2 + (k_1 + 9k_2)x_1 - 6k_2x_2 - 3k_2x_3 = 0 \\ (2m_1 + m_2)\ddot{x}_2 - 2m_1\ddot{x}_1 + 4k_2x_2 - 6k_2x_1 + 2k_2x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + k_2x_3 - 3k_2x_1 + 2k_2x_2 = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 133

1) L'accélération du wagon étant $\ddot{X} = -\omega^2 X$

sa valeur maximale est $\omega^2 X_0 = a(\omega_0^2 - \omega^2) \approx 0,28 \text{ m/s}^2$

et l'amplitude maximale de ses vibrations :

$$X_0 = \frac{a(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega^2} \approx 3 \text{ mm}$$

2) avec $x_r = x - X \rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_r - \dot{X})^2 - \frac{1}{2}kx_r^2$

$$\text{d'où : } \ddot{x}_r + \omega_0^2 x_r = \omega^2 X_0 \cos \omega t$$

$$\text{et en posant } x_r(t) = a^* e^{j\omega t} = a e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\text{on retrouve le résultat } \varphi = 0 \quad \text{et} \quad a^* = a = \frac{\omega^2 X_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

EXERCICE 134

1) coordonnées généralisées $\equiv$ coordonnées polaires

$$q_1 \equiv r \quad (\text{distance}) ; \quad q_2 \equiv \vartheta \quad (\text{angle})$$

$$\text{de } dw = F_x dx + F_y dy = Q_r dr + Q_\vartheta d\vartheta$$

On en déduit les composantes de la force généralisée Q :

$$\begin{cases} Q_1 = Q_r = F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta & (\text{dimension d'une force}) \\ Q_2 = Q_\vartheta = F_y r \cos \vartheta - F_x r \sin \vartheta & (\text{dimension d'un moment}) \end{cases}$$

On notera que si Q_i n'a pas la dimension d'une force ; le produit $Q_i q_i$ a toujours la dimension d'une énergie ($\forall i$).

$$2) \quad \text{de la relation donnant la force généralisée } Q : \quad Q_i = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

$$\rightarrow \begin{cases} Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = F_x \cos \vartheta + F_y \sin \vartheta \\ Q_\vartheta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = F_y r \cos \vartheta - F_x r \sin \vartheta \end{cases}$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{r} \sin \vartheta + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta)^2$$

$$3) \quad = \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_{ij} (q_i) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{forme quadratique des vitesses généralisées } \dot{q}_i$$

$$\alpha_{11} = \alpha \sin^2 \vartheta ; \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha r \sin 2\vartheta ; \quad \alpha_{22} = \alpha r^2 \cos^2 \vartheta$$

$$4) \quad D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2) \quad \text{qui a la dimension d'une puissance}$$

$$\text{d'où : } f_r = - \frac{\partial D}{\partial r} = - \alpha \dot{\vartheta}$$

$$f_\vartheta = \frac{1}{r} \left(- \frac{\partial D}{\partial \vartheta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial r \dot{\vartheta}} = - \alpha r \dot{\vartheta}$$

o o o o

EXERCICE 135

$$1) \quad L = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} k z^2 - \frac{1}{2} c \vartheta^2 - c_{12} z \vartheta$$

$$\rightarrow \begin{cases} m \ddot{z} + k z + c_{12} \vartheta = 0 \\ J \ddot{\vartheta} + c \vartheta + c_{12} z = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 (1 - \Gamma^2) = 0$$

$$3) \quad \omega_1^2 = \omega_2^2 = \Omega^2 \quad \rightarrow \quad \frac{c}{k} = \frac{J}{m} = \frac{r^2}{2}$$

$$4) \quad \text{Dans le cas où } \omega_1^2 = \omega_2^2 = \Omega^2$$

Les pulsations propres du système seront : $\Omega_{1,2}^2 = (1 \mp \Gamma) \Omega^2$

$$\text{et on a } \frac{B_1}{A_1} = - \sqrt{\frac{k}{c}} \quad \text{pour le premier mode propre :}$$

$$\begin{cases} z(t) = A_1 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \\ \vartheta(t) = - \sqrt{\frac{k}{c}} A_1 \sin(\Omega_1 t + \psi_1) \end{cases}$$

$$\text{et } \frac{B_2}{A_2} = \sqrt{\frac{k}{c}} \quad \text{pour le deuxième mode propre :}$$

$$\begin{cases} z(t) = A_2 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \\ \vartheta(t) = \sqrt{\frac{k}{c}} A_2 \sin(\Omega_2 t + \psi_2) \end{cases}$$

L'énergie totale $E = T + U$ du système s'écrit :

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k z^2}_{E_{\text{translation}}} + \underbrace{\frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} c \vartheta^2}_{E_{\text{rotation}}} + \underbrace{c_{12} z \vartheta}_{E_{\text{d'échange}}}$$

$$\text{et } \langle E \rangle = \langle E_t \rangle + \langle E_r \rangle + \langle E_\epsilon \rangle$$

en supposant que le système oscille selon un mode propre donné, d'amplitudes maximales de vibration A et B :

$$\langle E_t \rangle = \frac{1}{2} k A^2 ; \quad \langle E_r \rangle = \frac{1}{2} c B^2 ; \quad \langle E_\epsilon \rangle = \frac{1}{2} c_{12} A B$$

d'où le rapport :

$$\Gamma^2 = \frac{\langle E_\epsilon \rangle^2}{\langle E_t \rangle \langle E_r \rangle} = \frac{c_{12}^2}{k c}$$

relation de définition du coefficient de couplage .

o o o o

EXERCICE 136

- 1) $k_x = k_1 \cos^2 \vartheta_1 + k_2 \cos^2 \vartheta_2 + k_3 \cos^2 \vartheta_3$
 2) $k_y = k_1 \sin^2 \vartheta_1 + k_2 \sin^2 \vartheta_2 + k_3 \sin^2 \vartheta_3$
 3) il suffit de remarquer que chaque situation est un cas particulier du précédent avec :

soit $x \neq 0, y = 0 \quad \forall t$ $\longrightarrow k_{xx} \text{ ou } k_x = k_{11}$ $k_{xy} = k_{yx} = k_{yy} = 0$	soit $x = 0, y \neq 0 \quad \forall t$ $\longrightarrow k_{yy} \text{ ou } k_y = k_{22}$ $k_{xy} = k_{yx} = k_{xx} = 0$
---	---

EXERCICE 137

Puisque le but est de rechercher deux équations électriques régissant un certain circuit, comme première coordonnée généralisée, nous porterons notre choix sur le courant i et garderons l'équation (2) qui, de toute évidence, exprime la loi de KIRCHOFF pour une maille comportant les quatre éléments E, R, L et C en série (nous penserons pour elle à une analogie Force / Tension). Reste le terme $B \ell \dot{x}$ qui, comme les autres, doit être homogène à une tension.

Convenons de le noter $v = B \ell \dot{x}$ (comme d d p à un certain nœud) et choisissons le comme deuxième coordonnée généralisée pour le système :

$$L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i dt + v = E(t) \quad (3)$$

Comme c'est l'équation (1) qui doit régir les variations de ce paramètre, arrangeons nous pour l'y faire apparaître tout en remédiant au manque de symétrie entre les deux équations .

Multiplions (1) par $\frac{B \ell}{B \ell} = 1$ pour diviser ensuite le tout par $B \ell$:

$$\left(\frac{m}{B^2 \ell^2} \right) \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\alpha}{B^2 \ell^2} \right) v + \left(\frac{k}{B^2 \ell^2} \right) \int v dt = i \quad (4)$$

En identifiant avec une équation qui exprime la loi des nœuds de KIRCHOFF et en pensant au cas d'une analogie Force / Courant, on peut écrire :

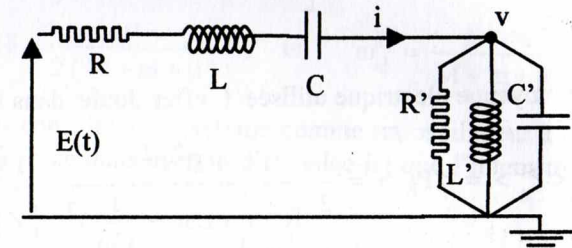
$$C' \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R'} v + \frac{1}{L'} \int v dt = i$$

avec les correspondances :

$$v = B \ell \dot{x} ; C' \equiv \frac{m}{B^2 \ell^2} ; R' \equiv \frac{B^2 \ell^2}{\alpha} ; L' \equiv \frac{B^2 \ell^2}{k}$$

différant de celles du tableau par le facteur $B^2 \ell^2$.

En faisant la synthèse des équations (3) et (4) on déduit le schéma électrique équivalent au système :

**EXERCICE 138**

- 1)
 a) $B = 0 ; F = 0$ pas de flux variable $\longrightarrow$ pas de courant
 b) $B = 0 ; F \neq 0$ idem
 c) $B \neq 0 ; F = 0$ pas de courant i
 (à moins que la bobine soit en mouvement de vibration libre)
 d) $B \neq 0 ; F \neq 0$ il y a un courant i car il y a variation du flux de $\vec{B}$.

$$2) \begin{cases} m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k x - i B \ell = F(t) \\ L \frac{di}{dt} + R i + \frac{1}{C} \int i dt + B \ell \dot{x} = 0 \end{cases}$$

$$Z = \frac{F(t)}{\dot{x}(t)} = \alpha + \frac{R B^2 \ell^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} + j \left[\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) - \frac{B^2 \ell^2 \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \right]$$

3)

puissance moyenne électrique utilisée (effet Joule dans R) :

$$\langle P_u \rangle = \langle P_R \rangle = \frac{1}{2} \frac{R B^2 \ell^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \frac{F_0^2}{|Z|^2}$$

puissance moyenne dissipée par frottement visqueux (air) :

$$\langle P_f \rangle = \frac{1}{2} \alpha \frac{F_0^2}{|Z|^2}$$

puissance moyenne mécanique fournie par la force excitatrice $F(t)$:

$$\langle P_F \rangle = \langle P_R \rangle + \langle P_f \rangle$$

d'où pour le rendement du système $r = \frac{\langle P_u \rangle}{\langle P_F \rangle}$

4) si la pulsation de la force $F(t)$ prend la valeur $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, on aura un rendement théorique maximal égal à :

$$r_{\text{MAX}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha R}{B^2 \ell^2}} < 1$$

EXERCICE 139

$$1) \quad L = \frac{1}{2} (M + m + \mu) \dot{Y}^2 + m R \omega \dot{Y} \sin \omega t - \frac{1}{2} k Y^2 + m R g \cos \omega t + \frac{1}{2} (m + \mu) R^2 \omega^2$$

L dépend explicitement du temps t .

$$2) \quad \ddot{Y} + 2\delta \dot{Y} + \omega_0^2 Y = - \frac{m R \omega^2}{M + m + \mu} \cos \omega t$$

$$\text{avec } \delta = \frac{\alpha}{2(M + m + \mu)} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M + m + \mu}$$

On peut considérer le système comme un oscillateur à un degré de liberté amorti forcé mais avec la différence ici que l'intensité de la force est fonction de ω :

$$F_0 = m R \omega^2 = F_0(\omega)$$

$$3) \quad \text{Ainsi, de } \ddot{Y} + 2\delta \dot{Y} + \omega_0^2 Y = \frac{F_0}{M + m + \mu} \cos(\omega t + \pi)$$

$$\longrightarrow Y(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \pi + \varphi)$$

$$\text{avec } A(\omega) = \frac{m R \omega^2}{(M + m + \mu) \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2 \right]^{1/2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad ; \quad \omega_r = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} \quad (\omega_r > \omega_0)$$

$$\text{et } A_{\text{MAX}} = A(\omega_r) = \frac{m R \omega_0^2}{2(M + m + \mu) \delta \omega_a}$$

EXERCICE 140**Première partie** ($\dot{\vartheta} = \Omega = 0$)

$$1) \quad U(s) = U_k + U_m = \frac{1}{2} k (s' - s)^2 - m g (s' - s) \cos \beta$$

condition d'équilibre statique :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial s} \right|_{s=0} = 0 \longrightarrow k s' - m g \cos \beta = 0 \quad \text{d'où} \quad U(s) = \frac{1}{2} k s^2$$

s' étant la déformation du ressort à l'équilibre statique, sous l'effet du seul poids de la masse m .

Deuxième partie ($\dot{\vartheta} = \Omega \neq 0$)2) Coordonnées sphériques de m dans le repère Galiléen $OXYZ$:

$$r, \vartheta \text{ et } \beta \quad \begin{cases} x = r \sin \beta \cos \vartheta \\ y = r \sin \beta \sin \vartheta \\ z = r \cos \beta \end{cases} \quad \text{telles que} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = r_0 + s \\ \beta = \text{constante} \\ \dot{\vartheta} = \Omega = \text{constante} \end{cases}$$

son énergie cinétique est : $T = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 + (r_0 + s)^2 \Omega^2 \sin^2 \beta \right]$

$$\longrightarrow L = \frac{1}{2} m \left[\dot{s}^2 + (r_0 + s)^2 \Omega^2 \sin^2 \beta \right] - \frac{1}{2} k s^2$$

$$\text{et} \quad m \ddot{s} + (k - m \Omega^2 \sin^2 \beta) s = m \Omega^2 r_0 \sin^2 \beta$$

$$\text{avec} \quad K = k - m \Omega^2 \sin^2 \beta \quad ; \quad K' = m \Omega^2 \sin^2 \beta$$

$$\text{et} \quad F_C = K' r_0 = \text{constante} \quad (\text{composante force centrifuge})$$

$$\text{cette équation s'écrit :} \quad m \ddot{s} + K s = F_C$$

$$\text{si} \quad K > 0 \quad \text{ou} \quad \Omega < \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{condition d'oscillations})$$

le mouvement de m sera celui d'un oscillateur de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

3) telle qu'obtenue, l'expression du Lagrangien permet de penser qu'on peut faire l'hypothèse qu'en plus des deux potentiels U_m (pesanteur) et U_k (élasticité), le système est placé dans un potentiel supplémentaire dit « centrifuge » (dû à la rotation) :

$$U_c(s) = -\frac{1}{2} K' r^2 = -\frac{1}{2} K' (r_0 + s)^2$$

de sorte que son énergie potentielle totale dans le référentiel non inertiel $0A$ s'écrit :

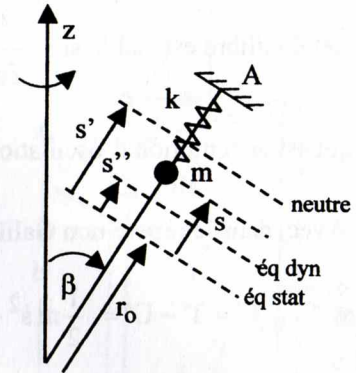
$$\begin{aligned} U'(s) &= U_k + U_c + U_m \\ &= \frac{1}{2} k (s' - s)^2 - \frac{1}{2} K' (r_0 + s)^2 - m g (s' - s) \cos \beta \\ &= \frac{1}{2} (k - K') s^2 - K' r_0 s + \text{constante} \end{aligned}$$

4) En absence d'oscillations de m le long de la tige $0A$ (mais avec une rotation uniforme de cette dernière), il s'établit un « équilibre dynamique » c'est à dire que la masse occupe une nouvelle position s'' telle que :

$$\left. \frac{\partial U'}{\partial s} \right|_{s=s''} = 0 \quad \text{condition d'équilibre dynamique}$$

$$\longrightarrow (k - K') s'' - K' r_0 = 0$$

$$\text{ou} \quad s'' = \frac{F_C}{K} = \frac{K'}{K} r_0 = \frac{K'}{k - K'} r_0$$



- 5) cet équilibre est stable si : $\left. \frac{\partial^2 U'}{\partial s^2} \right|_{s=s''} > 0 \rightarrow k - K' > 0$

qui est la condition d'oscillations précédemment établie.

- 6) Avec, dans le repère non Galiléen 0A : $T' = \frac{1}{2} m \dot{s}^2$
et $L' = T' - U' = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} (k - K') s^2 + K' r_0 s$

on retrouve la même équation différentielle et, de là :

$$s(t) = s'' (1 - \cos \omega_0 t)$$

- 7) les oscillations se font autour de cette position d'équilibre dynamique $s = s''$ avec une amplitude maximale égale à s'' .

- 8) si un frottement de type visqueux existe tel que supposé :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{s}^2 \quad \text{et} \quad \ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \omega_0^2 s = \frac{F_C}{m} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

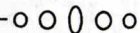
$$\rightarrow s(t) = s'' \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \psi) \right]$$

$$\text{tg } \psi = \frac{\omega_a}{\delta} \quad \text{et} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

- 9) Pour $t \gg T_a$: $s(t) \rightarrow s'' = \frac{F_C}{K}$

En absence d'une perturbation d'une autre nature, la masse m finit par s'immobiliser à la position d'équilibre dynamique s'' .

N.B : dans un repère non Galiléen quelconque (autre que rotation uniforme) le problème serait moins simple [1].



EXERCICE 141

- 1) si i_t est le courant total traversant le cadre en présence de $\vec{B}$, la loi de LAPLACE (ou le théorème de MAXWELL) donne :

$$M_e = n B a b i_t = \varphi i_t$$

avec $\varphi = n B a b = \text{constante}$

(ayant la dimension d'un flux)

lorsque le cadre est en mouvement, en plus du courant imposé i_0 , il se crée une f.e.m :

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = - n B a b \dot{\vartheta} = - \varphi \dot{\vartheta} \quad (\text{loi de LENZ})$$

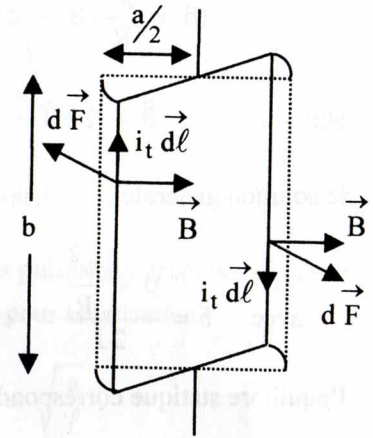
- 2) De ce fait, le cadre sera également traversé par un courant induit $\frac{e}{R} = - \frac{\varphi}{R} \dot{\vartheta}$ tendant à freiner le mouvement qui lui a donné naissance

$$\text{et : } i_t = i_0 + \frac{e}{R} = i_0 - \frac{\varphi}{R} \dot{\vartheta}$$

$$\rightarrow \text{couple électromagnétique} \quad M_e = \varphi i_t = \varphi \left(i_0 - \frac{\varphi}{R} \dot{\vartheta} \right)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} M_{em} = \varphi i_0 & (\text{couple élect moteur}) \\ M_{ef} = - \frac{\varphi^2}{R} \dot{\vartheta} & (\text{couple élect de freinage}) \end{cases}$$

- 3) à ces couples il faudra ajouter, pour obtenir le moment résultant, le couple de rappel du fil de torsion $M_r = - c \vartheta$ ainsi que le couple de frottement visqueux de l'air $M_f = - \beta \dot{\vartheta}$ d'où, par application de la relation fondamentale de la dynamique :



$$-(\beta + \frac{\varphi^2}{R})\dot{\vartheta} - c\vartheta + \varphi i_0 = J\ddot{\vartheta}$$

soit $\ddot{\vartheta} + 2\delta\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = \frac{\varphi}{J}i_0$

de solution générale : $\vartheta(t) = \vartheta_h(t) + \vartheta_p(t)$

avec $\delta = \frac{\beta + \frac{\varphi^2}{R}}{2J}$ et $\omega_0^2 = \frac{c}{J}$

4) l'équilibre statique correspond à : $\dot{\vartheta} = 0$ et $\vartheta = \vartheta_0 = \text{constante}$

$$\varphi i_0 - c\vartheta_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \vartheta_0 = \frac{\varphi}{c} i_0$$

5) La solution particulière s'identifie à la position d'équilibre :

$$\vartheta_p(t) = \vartheta_0 = \text{constante}$$

après d'éventuelles oscillations, le cadre s'immobilisera à cette position ϑ_0 d'où la valeur i_0 .

6) Le type de mouvement du cadre dépendra de l'importance relative du facteur d'amortissement δ (voir rappel de cours) donc essentiellement de la valeur de R que l'on ajustera pour obtenir le mouvement désiré (on choisit, en pratique, un mouvement pseudo-périodique à la limite du régime critique $\delta \approx \omega_0$), les autres paramètres étant difficilement modifiables une fois l'appareil construit.

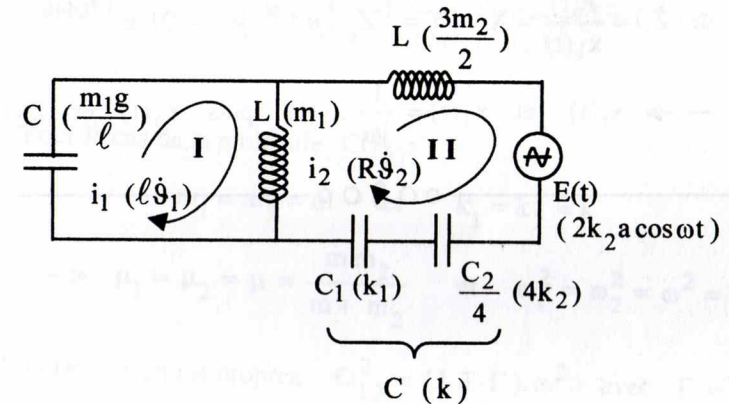
EXERCICE 142

$$1) \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m_1} \approx 0,381 \frac{k}{m_1} \\ \omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \frac{k}{m_1} \approx 2,61 \frac{k}{m_1} \end{cases}$$

2) La résonance se produit pour les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système ; l'anti-résonance se produira pour la pulsation :

$$\omega_{ar} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

3)



On peut retrouver les pulsations propres du système à partir du schéma du circuit électrique équivalent en considérant qu'elles correspondent à la résonance (i_2 très élevé) donc à des impédances à gauche du générateur tendant vers zéro (court-circuit).

De même, la pulsation d'anti-résonance correspond à la situation où la maille I constitue un « circuit bouchon » ($i_2 \rightarrow 0$) pour le générateur.

4) Si le bâti subit des vibrations parasites de pulsation ω_0 donnée, on pourrait en atténuer les conséquences sur le cylindre en associant à celui-ci un pendule simple de pulsation propre $\omega_0 = \omega_{ar} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

EXERCICE 143

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + k_2 x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1(t) \approx 0,133 \cos(10t - 2,018) \\ x_2(t) \approx 0,47 \cos(10t + 0,335) \end{cases}$$

$$3) \text{ de } Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)} = X + jY = |Z_e| e^{j\phi} \approx 74,91 e^{j0,448}$$

$$\longrightarrow \dot{x}_1(t) \text{ et } x_1(t) = \frac{1}{j\omega} \dot{x}_1(t) \text{ puis } \dot{x}_2(t) \text{ et } x_2(t)$$

EXERCICE 144

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_2 - k_1 x_1 - k_2 x_3 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_2 x_3 - k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

$$2) \omega_1^2 = \frac{k_1}{\mu_1} ; \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{\mu_2}$$

$$\text{avec } \mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$$

$$3) \Omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\Omega^2 + (1 - \Gamma^2)\omega_1^2\omega_2^2 = 0$$

$$4) \Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2} (1 - \Gamma^2)} \right]$$

5)

a) Pour le cas de la molécule CO_2 :

$$m_1 = m_3 = m \quad \text{et} \quad k_1 = k_2 = k$$

$$\longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{m m_2}{m + m_2} \quad \text{et} \quad \omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2 = \frac{k}{\mu}$$

$$\text{d'où les pulsations propres } \Omega_{1,2}^2 = (1 \mp \Gamma) \omega^2 \quad \text{avec } \Gamma = \frac{\mu}{m_2}$$

$$b) \Omega_1^2 \approx \omega^2 \left[1 - \frac{\Gamma^2 \omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right] \quad \Omega_2^2 \approx \omega^2 \left[1 + \frac{\Gamma^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right]$$

$$6) \text{ sachant que } m_i = \frac{M_i}{N}$$

où M_i est la masse atomique de l'élément considéré et $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ le nombre d'AVOGADRO : $\Gamma \approx 0,203$

300

7)

$$\begin{cases} k_1 \approx 580 \text{ N/m} \\ k_2 \approx 1800 \text{ N/m} \end{cases} \quad \text{pour la molécule HCN}$$

et $k \approx 36 \text{ N/m}$ ou 46 N/m pour la molécule CO_2

selon la valeur Ω_i !

8) Les valeurs numériques de Ω_1 et Ω_2 ne fournissent pas un résultat unique pour les valeurs de ω et de k .

Si l'expérience des mesures de Ω_1 et Ω_2 ne peut être mise en doute [6], [8], il reste que le modèle choisi pour CO_2 , par exemple, doit comporter des hypothèses erronées.

Nous avons supposé au début que les atomes d'oxygène n'interagissent pas entre eux et que la liaison (raideur k) était de même intensité dans CO que dans la molécule CO_2 , ce qui est incorrect.

D'une façon générale, lorsqu'il s'agit de molécules ou d'atomes, une analyse plus fine ne peut se faire par une modélisation classique du système, l'intervention de la mécanique quantique est nécessaire, le problème dépasse alors le cadre de cet ouvrage.

o o o o

EXERCICE 145

$$1) \begin{cases} m\ell^2 \ddot{\vartheta}_1 + (K\ell^2 + mg\ell) \vartheta_1 - K\ell^2 \vartheta_2 = 0 \\ m\ell^2 \ddot{\vartheta}_2 + (K\ell^2 + mg\ell) \vartheta_2 - K\ell^2 \vartheta_1 = 0 \end{cases}$$

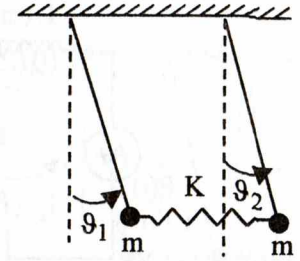
$$2) \text{ on pose : } \beta_1 = \vartheta_1 + \vartheta_2 \quad \text{et} \quad \beta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_1$$

$$\rightarrow \omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2K}{m}$$

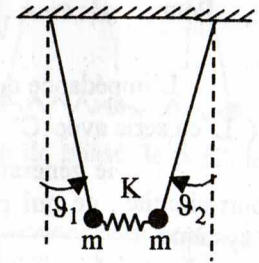
301

3)

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$



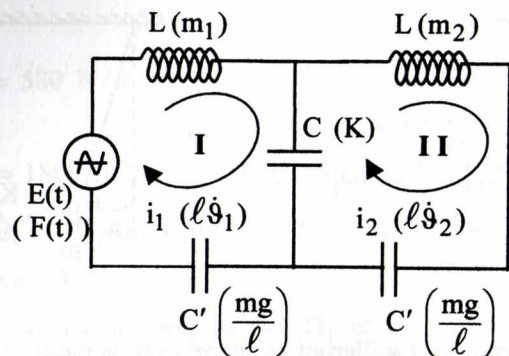
Les deux pendules oscilleront en phase avec la même amplitude C_1 et la même pulsation ω_1 : le ressort ne joue aucun rôle dans ce mouvement.



Les deux pendules oscilleront en opposition de phase à la même amplitude maximale C_2 et pulsation ω_2 .

$$4) \begin{cases} m \frac{d}{dt}(\ell \dot{\vartheta}_1) + \frac{mg}{\ell} \int \ell \dot{\vartheta}_1 dt + K \int (\ell \dot{\vartheta}_1 - \ell \dot{\vartheta}_2) dt = F(t) \\ m \frac{d}{dt}(\ell \dot{\vartheta}_2) + \frac{mg}{\ell} \int \ell \dot{\vartheta}_2 dt + K \int (\ell \dot{\vartheta}_2 - \ell \dot{\vartheta}_1) dt = 0 \end{cases}$$

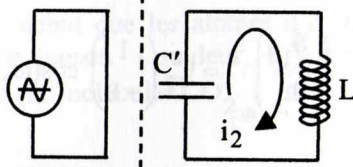
$$\rightarrow \begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C'} \int i_1 dt + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = E(t) \\ L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C'} \int i_2 dt + \frac{1}{C} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$



Pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \iff \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC'}}$

L'impédance de l'ensemble
(L en série avec C') s'annule.

le générateur est ainsi
court-circuité ; ce qui peut détruire
le système.



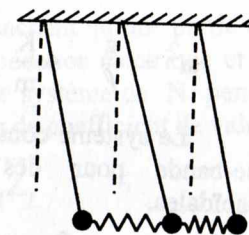
$$5) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{K}{m} + \frac{g}{\ell} & -\frac{K}{m} & 0 \\ -\frac{K}{m} & \frac{2K}{m} + \frac{g}{\ell} & -\frac{K}{m} \\ 0 & -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} + \frac{g}{\ell} \end{pmatrix}$$

$$6) \quad \omega_1^2 = \frac{g}{\ell} \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{K}{m} \quad ; \quad \omega_3^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{3K}{m}$$

7) et 8)

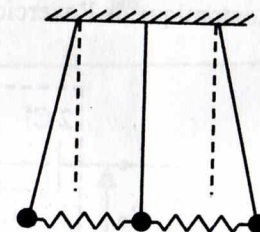
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_1} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \psi_1)$$

les 3 pendules oscillent en phase



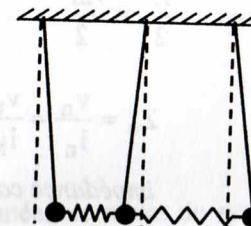
$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

les pendules P_1 et P_3 oscillent en opposition de phase, le pendule central P_2 ne bougeant pas.



$$\begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \end{pmatrix}_{\omega_3} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \psi_3)$$

P_1 et P_3 oscillent en phase pendant que P_2 oscille en opposition de phase par rapport à eux avec une amplitude double.



9) pour $n = 0$

$$m \ell^2 \ddot{\vartheta}_0 + (K \ell^2 + m g \ell) \vartheta_0 - K \ell^2 \vartheta_1 = \ell F(t)$$

et pour $n \neq 0$

$$m \ell^2 \ddot{\vartheta}_n + (2K \ell^2 + m g \ell) \vartheta_n - K \ell^2 \vartheta_{n-1} - K \ell^2 \vartheta_{n+1} = 0$$

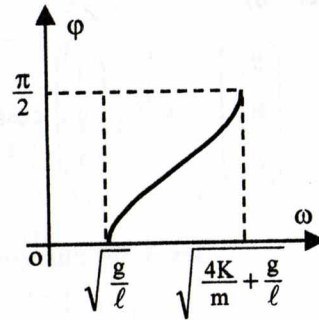
304

10) relation de dispersion

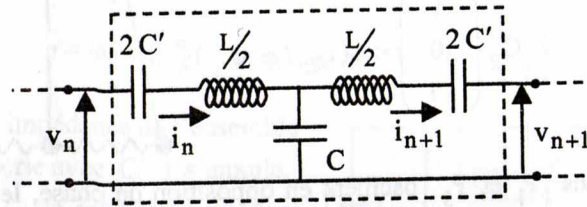
$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + 4 \frac{K}{m} \sin^2 \varphi$$

Le système constitue un filtre passe-bande pour des oscillations sinusoïdales.

(pour $g = 0$, on retrouve la relation de dispersion de la chaîne monoatomique de l'exercice 68)



12)



avec $\frac{L}{2} \equiv \frac{m}{2}$; $2C' \equiv \frac{mg}{2\ell}$; $C \equiv K$

13)

$$Z_c = \frac{v_n}{i_n} = \frac{v_{n+1}}{i_{n+1}} = \sqrt{Z_1^2 + 2 Z_1 Z_2}$$

impédance caractéristique (ou itérative)

où $Z_1 = j \left(\frac{L\omega}{2} - \frac{1}{2C'\omega} \right)$ et $Z_2 = \frac{1}{jC\omega}$

Z_1 et Z_2 étant imaginaires, une étude du signe de Z_c^2 permet de constater que, dans l'intervalle de la bande passante, Z_c est réelle donc purement dissipative de l'énergie qui la traverse.

On peut dire qu'un ensemble fini fermé sur cette impédance caractéristique Z_c se comportera comme s'il était infini, puisqu'on sera en présence d'une onde progressive seule. Et, sachant qu'une partie réelle est équivalente à une résistance pour une impédance électrique et à un amortisseur pour une impédance mécanique, le système de N pendules identiques devra se terminer sur un amortisseur de coefficient de valeur

$$\alpha = Z_c = \sqrt{Z_1^2 + 2 Z_1 Z_2}$$

avec $Z_1 = j \left(\frac{m\omega}{2} - \frac{mg}{2\ell\omega} \right)$ et $Z_2 = \frac{K}{j\omega}$

EXERCICE 146

$$1) \begin{cases} \ddot{\vartheta}_1 + \left(\frac{K}{m_1} + \frac{g}{\ell} \right) \vartheta_1 - \frac{K}{m_1} \vartheta_2 = 0 \\ \ddot{\vartheta}_2 + \left(\frac{K}{m_2} + \frac{g}{\ell} \right) \vartheta_2 - \frac{K}{m_2} \vartheta_1 = 0 \end{cases}$$

2) a) β_1 et β_2 sont les coordonnées normales du système car on obtient , avec elles, des équations différentielles découplées :

$$\begin{cases} \ddot{\beta}_1 + \frac{g}{\ell} \beta_1 = 0 \\ \ddot{\beta}_2 + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{K}{\mu} \right) \beta_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta_1(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \beta_2(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

b) $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{K}{\mu}}$

$$\begin{pmatrix} \vartheta_1(t) \\ \vartheta_2(t) \end{pmatrix} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vartheta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \omega_1 t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vartheta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m_1}{m_2} \end{pmatrix} \cos \omega_2 t$$

c) Les expressions de $\vartheta_1(t)$ et $\vartheta_2(t)$ peuvent se réécrire :

$$\vartheta_1(t) = \vartheta_0 \left[\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right]$$

$$\vartheta_2(t) = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vartheta_0 \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

C'est un phénomène de battements de période :

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{4\pi}{\Gamma} \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$3) \quad \langle E_1 \rangle = \frac{E_0}{(m_1 + m_2)^2} \left[m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) t \right]$$

$$\langle E_2 \rangle = \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_0 \left[1 - \cos(\omega_2 - \omega_1) t \right]$$

$$\text{avec } E_{\text{totale}} = E_0 \approx \frac{1}{2} m_1 g \ell \vartheta_0^2 = \text{constante}$$

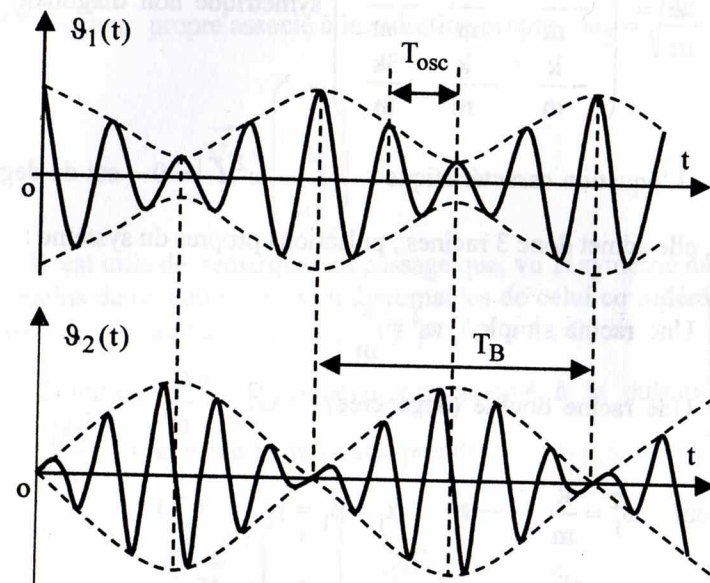
Ces expressions traduisent les variations de l'énergie sur une période de battements. La moyenne est calculée sur une période d'oscillations

$$T_{\text{osc}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \text{ en faisant l'approximation que le terme } \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

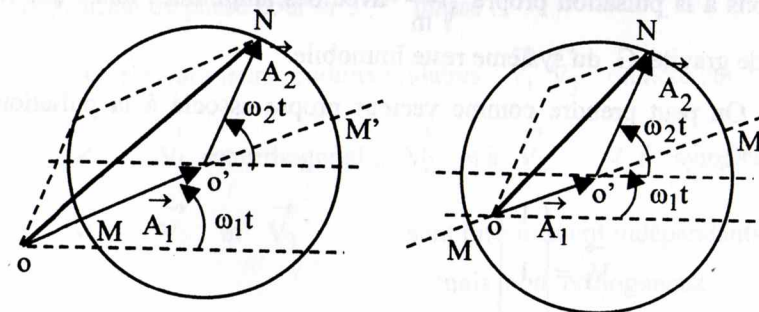
varie peu et en négligeant l'énergie stockée par le ressort car le couplage est faible.

On note que $m_1 \neq m_2 \rightarrow \langle E_1 \rangle \neq 0 \quad \forall t$

(Minima non nuls)



4) Le diagramme de FRESNEL permet de visualiser la superposition des deux modes, de pulsation ω_1 et ω_2 respectivement.



EXERCICE 147

$$1) \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{3k}{m} & -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{3k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{3k}{m} \end{pmatrix} \text{ symétrique non diagonale}$$

2) L'équation caractéristique $|\mathcal{L} - \omega^2 \mathcal{I}| = 0$ est de degré 3 en ω^2 , elle admet donc 3 racines, pulsations propres du système :

$$\begin{cases} \text{Une racine simple} & \omega_1^2 = \frac{k}{m} \\ \text{Une racine double (dégénérée)} & \omega_{2,3}^2 = \frac{4k}{m} \end{cases}$$

$$3) \quad \text{pour } \omega_1^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 \quad (1)$$

$$\text{pour } \omega_{2,3}^2 = \frac{4k}{m} \rightarrow \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 0 \quad (2) \quad i = 2 \text{ ou } 3$$

Les deux relations ayant une infinité de solutions possibles.

Les modes vérifiant la 2^{ème} relation correspondent à des vibrations à la pulsation propre $\sqrt{\frac{4k}{m}}$ avec des amplitudes telles que le centre de gravité G du système reste immobile.

4) On peut prendre comme vecteur propre associé à la pulsation propre ω_1 :

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tout autre choix vérifiant aussi la relation (1) donnerait un vecteur propre également associé à ω_1 et colinéaire à $\vec{V}_1$.

Quant à la relation (2), on peut, par exemple, choisir comme 2^{ème} vecteur propre associé à la pulsation propre $\omega_2 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$:

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il est utile de remarquer au passage que, vu la symétrie du système, au moins deux autres choix indiscernables de celui considéré ici, sont possibles ; il s'agit de (0, 1, -1) et (1, -1, 0).

Comme 3^{ème} vecteur propre associé à la pulsation propre $\omega_3 = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ (la même), on pourra prendre :

$$\vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ce dernier mode représente des oscillations qui se font en phase et à la même amplitude pour 2 masses mais avec une amplitude double et en opposition de phase pour la 3^{ème} masse.

en écrivant leurs produits scalaires $\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j$ on note que :

- ✓ $\vec{V}_1$ est orthogonal à $\vec{V}_2$ et à $\vec{V}_3$ ($\mathcal{L}$ symétrique)
- ✓ $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont linéairement indépendants mais non orthogonaux

5) On peut refaire le choix de sorte que : $\vec{U}_3 = \vec{V}_2 + a \vec{V}_3$

avec $\vec{U}_3$ orthogonal à $\vec{U}_2$; on trouve alors $a = -\frac{2}{3}$ et :

$$\vec{U}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6) On peut vérifier que $\vec{U}_1 = \vec{V}_1$, $\vec{U}_2 = \vec{V}_2$ et $\vec{U}_3$ sont mutuellement orthogonaux et vecteurs propres de $\mathcal{L}$ mais qu'ils ne sont pas unitaires, pour qu'ils le soient ($|\vec{U}_i| = 1$) il suffit de prendre pour vecteur respectif $\vec{u}_i = \vec{U}_i / |\vec{U}_i|$ pour obtenir :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ces trois nouveaux vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ constituent alors une base orthonormée (de vecteurs propres de $\mathcal{L}$) qui peut servir pour exprimer tout autre vecteur (mode propre) ou solution générale $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \vec{X}_3 = C_1(t) \vec{u}_1 + C_2(t) \vec{u}_2 + C_3(t) \vec{u}_3$$

avec $C_i(t)$ composante de $\vec{S}$ dans la base des vecteurs propres ou « coordonnée normale » du système.

7)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

EXERCICE 148

Première partie

$$1) \quad \omega_{01}^2 = \frac{k_1}{M_1}$$

$$2) \quad \omega_{02}^2 = \frac{k_1 + k_2}{M_2}$$

$$3) \quad L = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_2^2 + k_1 x_1 x_2$$

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \\ M_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

$$4) \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2}{2} \right)^2 - \omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \rho^2 \omega_{01}^2)}$$

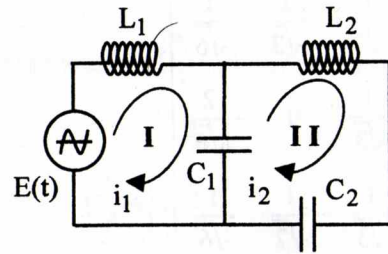
deuxième partie

$$5) \quad \begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 = F(t) \\ M_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 - k_1 x_1 = 0 \end{cases}$$

où $F(t)$ est la composante, suivant x , de la force centrifuge.

312

6)



7) Si m est une partie de M_1 , excentrée à une distance R de l'axe de rotation, on a $F(t) = -m R \omega^2 \cos \omega t = -F_0 \cos \omega t$ et :

$$x_1(t) = A_1(\omega) \cos \omega t = \frac{m R \omega^2 (\omega_{02}^2 - \omega^2)}{M_1 \left[\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \omega^2 + \omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \rho^2 \omega_{01}^2) \right]} \cos \omega t$$

$$x_2(t) = A_2(\omega) \cos \omega t = \frac{m R \omega^2 \omega_{01}^2}{M_2 \left[\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \omega^2 + \omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \rho^2 \omega_{01}^2) \right]} \cos \omega t$$

8) Les amplitudes de vibration A_1 et A_2 augmentent dangereusement pour le système non amorti à ses pulsations propres ω_1 et ω_2 .

9) Il y a antirésonance pour A_1 lorsque : $\omega = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M_2}}$

dans ce cas $A_1(\omega_{02}) = A_{1\text{MIN}} = 0$

$$\text{et } A_2(\omega_{02}) = -\frac{F_0}{k_1} = -\frac{m R}{M_2} \left(1 + \frac{k_2}{k_1} \right)$$

313

De cette expression de A_2 on peut conclure que, pour R donné, on doit minimiser m (bon usinage du volant et centrage de son axe) et doter le système de $k_1 > k_2$ (suspension adéquate) avec $M_2 > M_1$ (châssis massif) .

10) L'antirésonance de A_2 se produit à la vitesse ω_{ar} telle que :

$$\omega_{\text{ar}}^2 = \sqrt{\omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \rho^2 \omega_{01}^2)} = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{M_1 M_2}}$$

$$\text{dans ce cas } A_{2\text{MIN}} = A_2(\omega_{\text{ar}}) = \frac{m R \omega_{01}^2}{M_2 \left[2\omega_{\text{ar}}^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \right]}$$

11) On aura antirésonance simultanée pour A_1 et A_2 si $\omega_{\text{ar}} = \omega_{02}$

$$\rightarrow \rho^2 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \rightarrow \rho^2 \leq \frac{1}{4}$$

12) la réalisation de la condition précédente implique deux valeurs possibles pour k_1 :

$$k_1 = \frac{(1 - 2\rho^2) \pm \sqrt{1 - 4\rho^2}}{2\rho^2} k_2$$

avec $\rho^2 = \frac{125}{750} = \frac{1}{6}$ et pour avoir la plus petite valeur de $A_{2\text{MIN}}$, il faudra choisir $k_1 \approx 3,732$ $k_2 \approx 298,5$ kN/m .

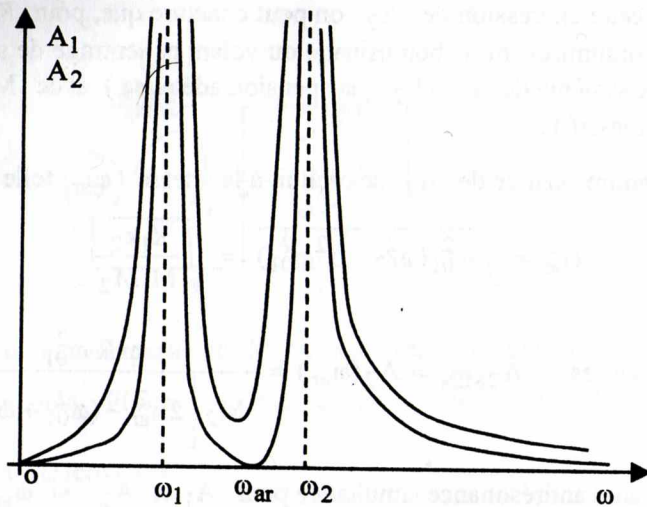
13)

$$\omega_{01} \approx 48,86 \text{ rd/s (467 tr/mn)}$$

$$\omega_{\text{ar}} = \omega_{02} \approx 22,46 \text{ rd/s (215 tr/mn)}$$

$$\omega_1 \approx 9,53 \text{ rd/s } \omega_2 \approx 52,93 \text{ rd/s}$$

$$A_{2\text{MIN}} \approx 12,6 \cdot 10^{-6} \text{ m (négligeable)}$$



o o o o o

EXERCICE 149

2) $0 \leq \Gamma \leq 1$

a) $\Gamma \approx 0$ couplage très faible ($C_0 \gg C$)

→ équivalent à un court-circuit entre A et B ($v_A - v_B = 0$)

→ 2 mailles RLC indépendantes.

b) $\Gamma \approx 1$ couplage très fort ($C_0 \approx 0$)

→ équivalent à un circuit « ouvert » entre A et B

→ une seule maille ($2R, 2L, \frac{C}{2}$) ; il faut ramener l'étude du problème à son début.

3)
$$\begin{cases} \ddot{V}_1 + 2\delta \dot{V}_1 + \omega_1^2 V_1 = 0 \\ \ddot{V}_2 + 2\delta \dot{V}_2 + \omega_2^2 V_2 = 0 \end{cases}$$

On note que ces deux nouvelles équations différentielles sont découplées.

ω_1 et ω_2 étant les pulsations propres du circuit.

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad ; \quad \omega_2^2 = \left(1 + 2 \frac{C}{C_0}\right) \omega_0^2 = \left(\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}\right) \omega_0^2$$

En supposant l'amortissement faible :

$$\begin{cases} V_1(t) = A_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_{a1} t + \psi_1) \\ V_2(t) = A_2 e^{-\delta t} \cos(\omega_{a2} t + \psi_2) \end{cases}$$

A_1, A_2, ψ_1 et ψ_2 étant des constantes d'intégration

et $\omega_{a1} = \sqrt{\omega_1^2 - \delta^2}$ les pseudo-pulsations

$$\omega_{a2} = \sqrt{\omega_2^2 - \delta^2}$$

Si le point D est à la masse (potentiel zéro)

$$V_1 = v_1 + v_2 = \frac{1}{C} q_1 + \frac{1}{C} q_2$$

représentera le potentiel au point E : $V_1 = v_E$

Si c'est le point B qui est à la masse, on aura :

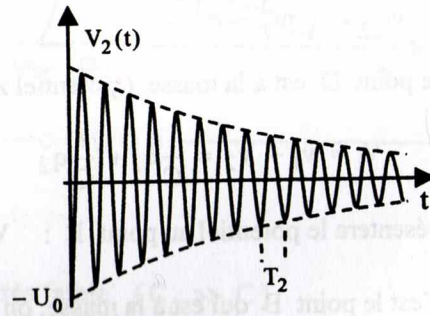
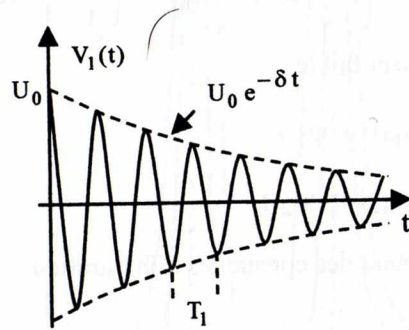
$$\begin{aligned} V_2 &= v_2 - v_1 = \frac{1}{C} q_2 - \frac{1}{C} q_1 = \frac{C_0}{C} \left(\frac{1}{C_0} q_2 - \frac{1}{C_0} q_1 \right) \\ &= \frac{C_0}{C} \left(\frac{1}{C_0} \int (i_2 - i_1) dt \right) = \frac{C_0}{C} v_0 = \frac{C_0}{C} (v_A - v_B) = \frac{C_0}{C} v_A \end{aligned}$$

V_2 est donc égal, au facteur $\frac{C_0}{C} = \frac{1-\Gamma}{\Gamma}$ près, au potentiel du point A

4) Avec les conditions initiales citées et dans la mesure où :

$$\delta \ll \omega_1 \quad \text{et} \quad \delta \ll \omega_2$$

$$\begin{cases} V_1(t) \approx U_0 e^{-\delta t} \cos \omega_1 t & (\text{mode 1}) \\ V_2(t) \approx -U_0 e^{-\delta t} \cos \omega_2 t & (\text{mode 2}) \end{cases}$$



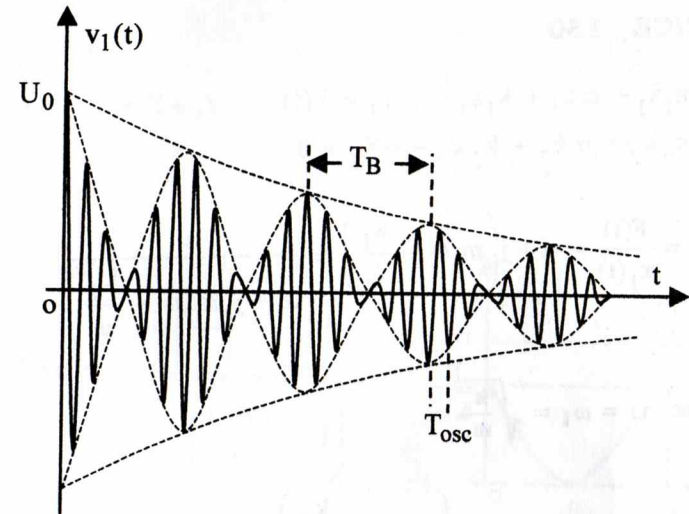
$$5) \quad v_1(t) = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{U_0}{2} e^{-\delta t} [\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t]$$

$$v_2(t) = \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{U_0}{2} e^{-\delta t} [\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t]$$

$$\text{soit} \quad v_1(t) = \left[U_0 e^{-\delta t} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right] \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

$$v_2(t) = \left[U_0 e^{-\delta t} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right] \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t$$

ce qui exprime un phénomène de battements amortis.



$$\text{Si } \Gamma \ll 1 \longrightarrow \omega_1 = \omega_0 \text{ et } \omega_2 \approx (1 + \Gamma) \omega_0$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} v_1(t) \approx \left(U_0 e^{-\delta t} \cos \frac{\Gamma}{2} \omega_0 t \right) \cos \left(1 + \frac{\Gamma}{2} \right) \omega_0 t \\ v_2(t) \approx \left(U_0 e^{-\delta t} \sin \frac{\Gamma}{2} \omega_0 t \right) \sin \left(1 + \frac{\Gamma}{2} \right) \omega_0 t \end{cases}$$

6) Leur période d'oscillation est :

$$T_{\text{osc}} = \frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2} \approx \frac{1}{1 + \frac{\Gamma}{2}} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma}{2}} T_0$$

et la période de battements :

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{1}{\Gamma} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\Gamma} T_0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T_B} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$$

$$\longrightarrow \Gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \frac{4T_B T_{\text{osc}}}{4T_B^2 + T_{\text{osc}}^2} \approx \frac{2T_{\text{osc}}}{2T_B - T_{\text{osc}}}$$

EXERCICE 150

$$1) \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + k_1 x_1 - \alpha \dot{x}_2 = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + k_2 x_2 - \alpha \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

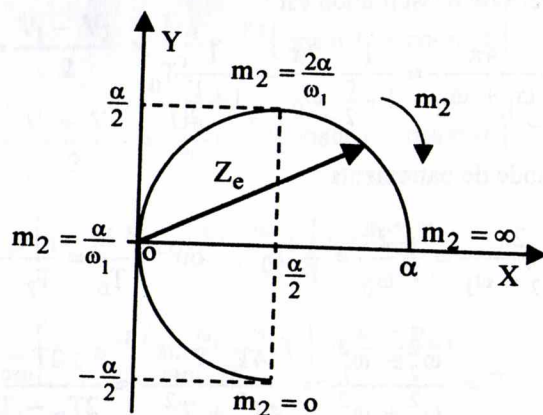
$$2) Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)} = \alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1}{\omega} \right) - \frac{\alpha^2}{\alpha + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right)}$$

$$3) \text{ avec } \omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

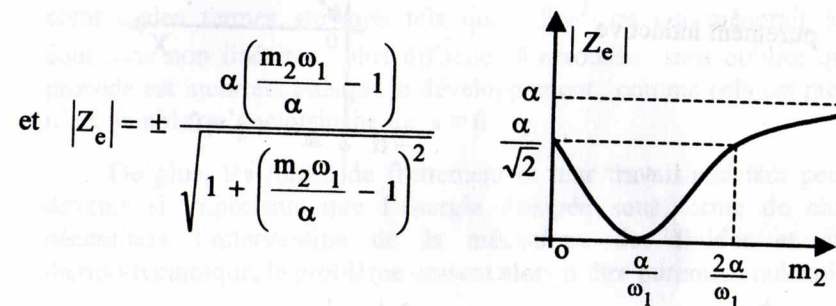
$$\text{et en posant } W = \frac{\alpha + j \left(m_2 \omega_1 - \frac{k_2}{\omega_1} \right)}{\alpha} \rightarrow Z_e = \alpha \left(1 - \frac{1}{W} \right)$$

$$4) \text{ en particulierisant le problème au cas } \frac{k_2}{\alpha \omega_1} = 1 \text{ (unités SI)}$$

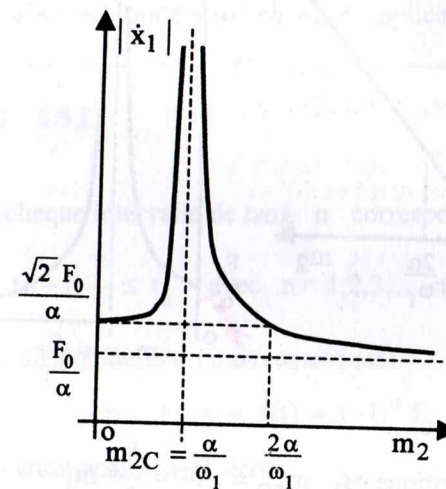
et après avoir tracé les graphes demandés, il vient :



$$\text{avec } Z_e = X + jY = \frac{\alpha \left(\frac{m_2 \omega_1}{\alpha} - 1 \right)^2}{1 + \left(\frac{m_2 \omega_1}{\alpha} - 1 \right)^2} + j \frac{\alpha \left(\frac{m_2 \omega_1}{\alpha} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{m_2 \omega_1}{\alpha} - 1 \right)^2}$$



5)



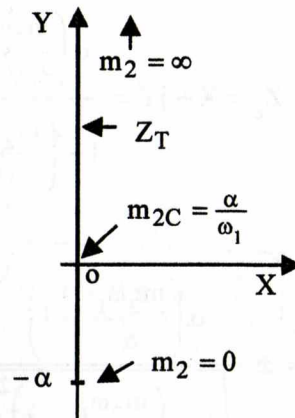
6) et 7)

$$Z_T = \frac{\left[\alpha + j \left(m_1 \omega - \frac{k_1}{\omega} \right) \right] \left[\alpha + j \left(m_2 \omega - \frac{k_2}{\omega} \right) \right]}{\alpha} - \alpha$$

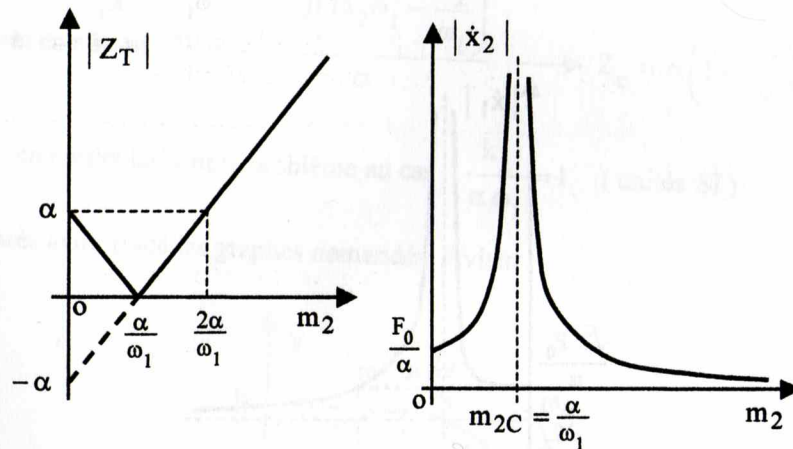
et pour $\omega = \omega_1$:

$$Z_T = j(m_2 \omega_1 - \alpha)$$

purement inductive



8)



9) La masse critique est $m_{2C} = \frac{\alpha}{\omega_1} = \frac{k_2}{k_1} m_1$

10) pour cette valeur de m_2 , on aurait une vitesse infinie, ce qui est impossible.

Le modèle théorique choisi suppose notamment que la force de frottement de type visqueux est proportionnelle à la vitesse, ce qui n'est en réalité valable que pour les faibles vitesses.

La force de frottement visqueux peut être considérée comme une certaine fonction de la vitesse, de développement au voisinage de zéro :

$$f(v) \approx -\alpha v + \beta v^2 + \gamma v^3 + \dots$$

Pour les petites vitesses, les termes d'ordre ≥ 2 sont négligés, c'est ce qui a été fait implicitement dans le calcul qui a précédé.

Aux vitesses plus élevées, on pourrait tenter un calcul tenant compte des termes suivants tels que βv^2 ce qui mènerait à des équations non linéaires plus difficiles à résoudre sans oublier que le procédé est incorrect puisque le développement, comme cela est précisé, n'est valable qu'au voisinage de $v = 0$.

De plus, les forces de frottement et leur travail résistant peuvent devenir si importants que l'énergie dissipée sous forme de chaleur nécessitera l'intervention de la mécanique des fluides et de la thermodynamique, le problème cessant alors d'être purement mécanique.

En conclusion, lorsqu'on utilise un modèle de calcul, il faut garder en vue que celui-ci est limité à son champ d'applicabilité.

EXERCICE 151

1)

a) pour chaque intervalle de rang n correspondant à :

$$n \frac{T}{2} \leq t \leq (n+1) \frac{T}{2} \leq t_a \quad \text{avec } n = 1, 2, 3, \dots \text{ et } t_a \text{ le temps d'arrêt}$$

l'équation différentielle du mouvement est :

$$m \ddot{x} + kx = f(t) = (-1)^n f_0$$

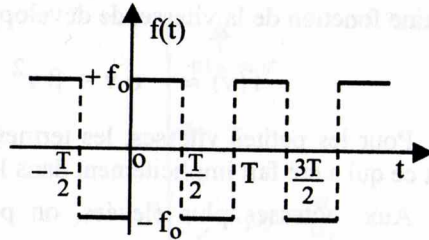
dont la solution respective s'écrit :

$$x(t) = (-1)^n \gamma + [X_0 - (2n+1)\gamma] \cos \omega_0 t$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{f_0}{k} = \frac{\mu_g mg}{k} > 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) si l'on considère

$$f(t) = \begin{cases} +f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -f_0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$



comme une force périodique appliquée à la masse m , son développement en série de FOURIER donne :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4f_0}{(2p+1)\pi} \sin(2p+1)\omega_0 t \quad (\text{voir rappel Maths})$$

d'où la solution de l'équation différentielle du mouvement qui s'exprime pour $0 \leq t \leq t_a$ comme :

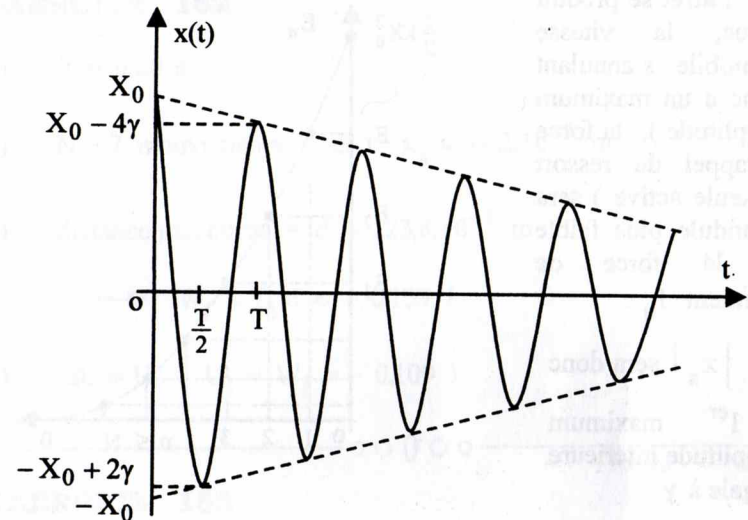
$$x(t) = \sqrt{X_0^2 + \left(\frac{3\gamma}{\pi}\right)^2} \sin(\omega_0 t + \psi) - \frac{2\omega_0 \gamma}{\pi} t \cos \omega_0 t + \frac{\gamma}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)\omega_0 t}{p(p+1)(2p+1)} \quad \text{avec} \quad \text{tg } \psi = \frac{\pi X_0}{3\gamma}$$

2) Lieux des amplitudes maximales d'oscillation (2 droites) :

pour $t = 2n\frac{T}{2}$: $X_1(t) = -\frac{4\gamma}{T}t + X_0$ enveloppe supérieure

pour $t = (2n+1)\frac{T}{2}$: $X_2(t) = \frac{4\gamma}{T}t - X_0$ enveloppe inférieure

$$\longrightarrow \Delta x = x\left[(n+1)\frac{T}{2}\right] - x\left(n\frac{T}{2}\right) = -2\gamma = \text{constante}$$



3) si l'on considère les positions d'amplitude maximale correspondant à des instants multiples entiers de la demie période ($t = n\frac{T}{2}$) :

$$x\left(n\frac{T}{2}\right) = x_n = x_{\text{MAX}} \quad \text{et} \quad \dot{x}\left(n\frac{T}{2}\right) = 0$$

$$\longrightarrow E\left(n\frac{T}{2}\right) = E_n = U_n = \frac{1}{2}k x_n^2 = \frac{1}{2}k (X_0 - 2n\gamma)^2$$

$$= 2k\gamma^2 n^2 - 2k\gamma X_0 n + \frac{1}{2}k X_0^2 \quad (\text{parabole})$$

$$\text{et} \quad \Delta E_n = E_{n+1} - E_n = 4k\gamma^2 n + 2k\gamma^2 - 2k\gamma X_0 \quad (\text{droite})$$

C'est l'énergie que va perdre l'oscillateur dans la demie période qui suit l'instant $t = n\frac{T}{2}$ considéré.

Ces ΔE_n sont négatifs (perte) et de valeur absolue décroissante puisqu'ils représentent le travail d'une force f_0 constante sur des déplacements décroissant linéairement : $\Delta E = W_f$

4) pour $t = \frac{T}{4} \longrightarrow x\left(\frac{T}{4}\right) = \gamma \neq 0$

5) l'arrêt se produit lorsque, la vitesse du mobile s'annulant (donc à un maximum d'amplitude), la force de rappel du ressort (la seule active) sera en module plus faible que la force de frottement f_0 .

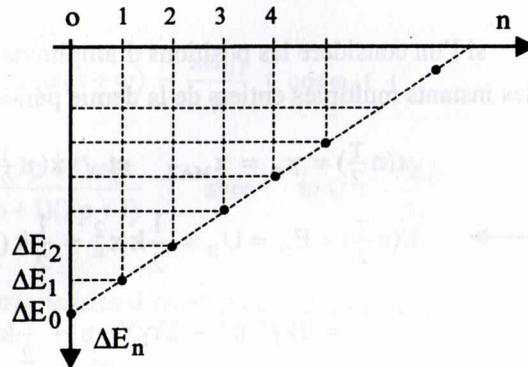
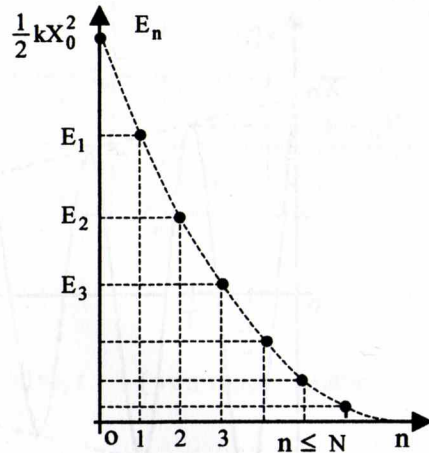
$|x_a|$ sera donc le 1^{er} maximum d'amplitude inférieure ou égale à γ

$$|x_a| \leq \gamma = \frac{f_0}{k}$$

sachant qu'à chaque demie période l'amplitude maximale diminue de 2γ et soit N le nombre de demies périodes complètes du début du mouvement jusqu'à son arrêt :

$$x\left(N\frac{T}{2}\right) = (X_0 - 2N\gamma) \leq |x_a| \leq \gamma \quad \text{avec} \quad N \leq \frac{t_a}{\frac{T}{2}}$$

$$\rightarrow t_a \geq \left(\frac{X_0 - \gamma}{\gamma}\right) \frac{T}{4}$$



EXERCICE 152

- 1) $T \approx 0,28 \text{ s}$
- 2) $N = 7$ mouvements et $x_a \approx -2.10^{-3} \text{ m}$
- 3) distance parcourue = $d \approx 223,8.10^{-3} \text{ m}$
 $\rightarrow W_f = f_0 \cdot d \approx -0,109 \text{ J}$
- 4) $\Delta U = U_f - U_i = W_f \approx -0,109 \text{ J}$

EXERCICE 153

- 1) intervalle d'équilibre statique possible :
 $-4,7 \text{ mm} \leq x \leq +4,7 \text{ mm}$
- 2) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0,28 \text{ s}$
- 3) $t_0 \approx 67 \text{ ms}$; $X_0 = x(t_0) \approx 52 \text{ mm}$
- 4) $t_a \approx 0,9 \text{ s}$; $x_a = +4 \text{ mm}$

$N = 6$ mouvements de $\frac{T}{2}$ après le 1^{er} élan jusqu'à X_0 :

52 mm ; 44 mm ; 36 mm ; 28 mm ; 20 mm ; 12 mm ; 4 mm

Remarque : On ne peut décomposer le problème en étapes de durée $\frac{T}{2}$ à partir de $t=0$ car entre 0 et $\frac{T}{2}$ la force $f(t)$ change de sens.

La situation peut être considérée comme identique à celle des précédents exercices uniquement à partir de $t \geq t_0$.

BIBLIOGRAPHIE

- ⇒ [1] LANDAU et LIFCHITZ volume 1 Mécanique
Editions MIR MOSCOU 1969
- ⇒ [2] Y. ROCARD dynamique générale des vibrations
MASSON
- ⇒ [3] R. GABILLARD Vibrations et phénomènes de propagation
DUNOD
- ⇒ [4] M. BENDAOUD vibrations et ondes
Office des Publications Universitaires ALGER
- ⇒ [5] Cours de Physique de BERKELEY Volume 3 : ONDES
ARMAND COLIN PARIS
- ⇒ [6] M. ALONSO et E. J. FINN Tome 1 Mécanique
Inter éditions PARIS 1977
- ⇒ [7] M. SOUTIF Vibrations, Propagation, Diffusion
DUNOD Université 1970
- ⇒ [8] J. P. MATHIEU Vibrations et Phénomènes de Propagation
MASSON
- ⇒ [9] W. W. SETO Mechanical Vibrations
Série SCHAUM Mc GRAW HILL
- ⇒ [10] M. R. SPIEGEL Mécanique générale
Série SCHAUM Mc GRAW HILL



Bibliothèque
scientifique

www.biblio-scientifique.com

Aziz Aouzal

FORMULAIRE

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$	$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ $\cos a = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$ $\sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$ $\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$
--	---

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad ; \quad e^{ja} = \cos a + j \sin a$$

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$ $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$\cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$ $\sin a = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$ $\cos n\pi = (-1)^n$ $\sin n\pi = 0$
---	--

Pour ϑ petit $\cos \vartheta \approx 1 - \frac{\vartheta^2}{2}$ et $\operatorname{tg} \vartheta \approx \sin \vartheta \approx \vartheta$ (en radians)

Pour ε petit devant 1 : $(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon$

et $\varepsilon^4 \ll \varepsilon^3 \ll \varepsilon^2 < \varepsilon$ (les termes en ε de degré supérieur à 2 seront considérés comme négligeables et ignorés pour simplification).

Pour le calcul des valeurs moyennes, il est utile de se rappeler que :

$$\langle \cos \rangle = \langle \sin \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$$