

Chapitre III : La mécanique de la rupture – Notions élémentaires

III. 1. Introduction

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) s'applique aux matériaux présentant un comportement élastique linéaire qui obéit à la loi de Hooke. Cette approche théorique suppose une relation proportionnelle entre contrainte et déformation, permettant ainsi une analyse simplifiée des phénomènes de fissuration.

Bien que des corrections aient été développées pour tenir compte de la zone plastifiée qui se forme inévitablement près des concentrations de contraintes (entailles, pointes de fissures), ces modèles restent limités. Les analyses basées sur l'hypothèse d'une plasticité confinée ne conservent leur validité que lorsque le comportement global de la structure demeure essentiellement élastique. Cette restriction constitue une limitation importante de la MLR classique.

À partir des années 1960, la mécanique de la rupture a connu une évolution significative pour intégrer les comportements non linéaires des matériaux. Ces développements incluent la prise en compte de la plasticité étendue, des phénomènes de viscoplasticité et de viscoélasticité, ainsi que des effets dynamiques lors de la propagation rapide des fissures. La majorité de ces avancées conceptuelles s'appuient néanmoins sur les fondements théoriques établis par la MLR, qu'elles étendent et adaptent aux situations complexes.

C'est pourquoi une compréhension approfondie des équations fondamentales de la mécanique linéaire de la rupture demeure essentielle. Elle constitue le socle indispensable pour appréhender les concepts avancés de la mécanique de la rupture non linéaire et pour analyser correctement les phénomènes de rupture dans les matériaux et structures modernes.

III. 2. Approche atomique de la rupture fragile :

La rupture fragile s'accompagne de très peu de déformation plastique. Dans les alliages métalliques, on distingue principalement :

- ✓ Rupture transgranulaire : clivage ou glissement au sein des grains.
- ✓ Rupture intergranulaire : endommagement et séparation le long des joints de grains.

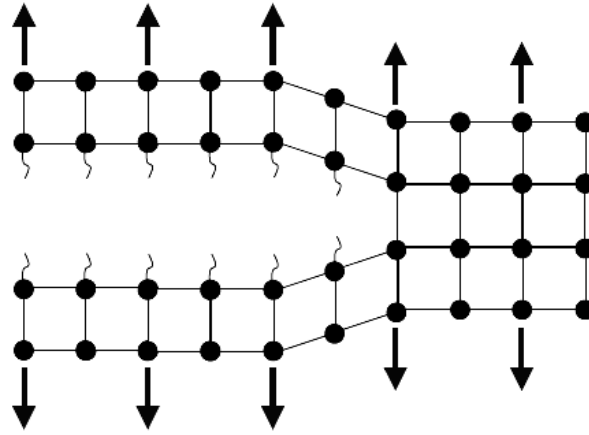


Fig. III. 1. Rupture par clivage

Le clivage opère par rupture des liaisons interatomiques dans une direction perpendiculaire au plan de rupture. La figure III.1 présente schématiquement ce type de rupture fragile, correspondant au mode I de rupture (mode d'ouverture).

Les ruptures par clivage se produisent préférentiellement le long de plans cristallographiques bien définis, dont l'orientation dépend de la structure du matériau. Les cristaux cubiques centrés (CC) clivent facilement selon les plans $\{100\}$, tandis que les cristaux cubiques à faces centrées (CFC) présentent une résistance beaucoup plus élevée au clivage en raison de leur structure plus dense.

L'approche atomique consiste à étudier une rupture par clivage en considérant les forces des liaisons atomiques.

Le calcul de la contrainte de liaison atomique nécessite de connaître la relation entre la force appliquée et le déplacement des atomes autour de leur position d'équilibre. Cette force résulte de la somme d'une composante attractive (variant en $1/r^2$) et d'une composante répulsive (variant en $-1/r^9$), où r représente la distance interatomique. La contrainte de liaison s'exprime donc sous la forme :

$$\sigma = A \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^9 \right] \quad (1)$$

Où r_0 est la distance d'équilibre entre atomes. L'évolution de cette contrainte est illustrée sur la figure III. 2, où la contrainte théorique de clivage σ_C est clairement indiquée.

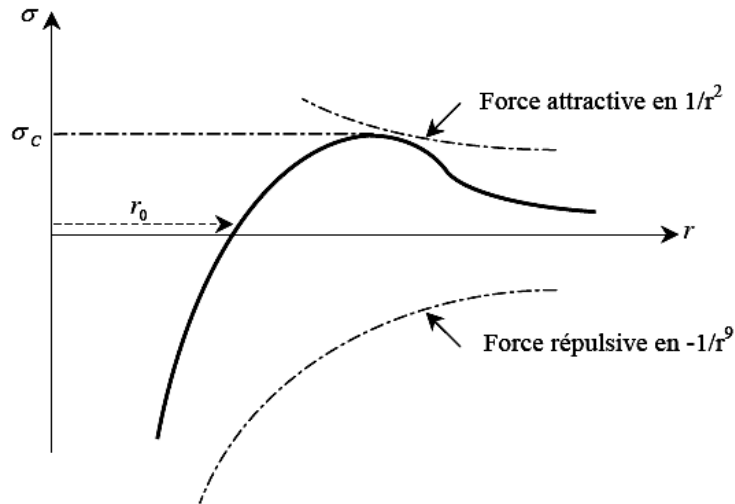


Fig. III. 2. Définition de la contrainte théorique de clivage σ_c .

La déformation étant donnée par $\varepsilon = \log \frac{r}{r_0}$, le module d'Young E s'écrit donc :

$$E = \left. \frac{d\sigma}{dr} \right|_{r=r_0} = r_0 \left. \frac{d\sigma}{dr} \right|_{r=r_0} \quad (2)$$

Soit en utilisant la relation (1) :

$$E = 7A \quad (3)$$

La contrainte théorique de clivage σ_c est définie par la condition $\frac{d\sigma}{dr} = 0$ soit $\frac{r_0}{r} = 0,81$

d'où :

$$\sigma_c \approx \frac{E}{14} \quad (4)$$

On assimile parfois pour faire les calculs, la portion de courbe au delà de la distance d'équilibre r_0 à une sinusoïde (figure III. 3).

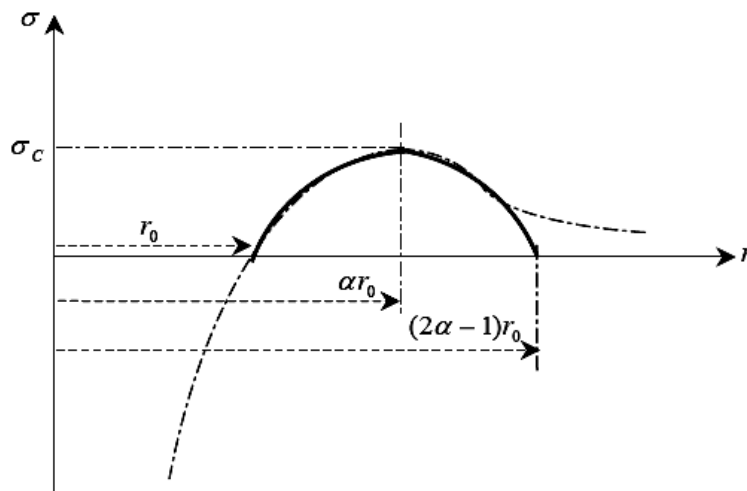


Fig. III. 3. approximation sinusoïdale de la contrainte de liaison σ .

Dans cette hypothèse, la contrainte de liaison pour $r > r_0$ s'écrit :

$$\sigma = \sigma_c \sin \left[\frac{\pi}{2(\alpha-1)} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \right] \quad (5)$$

Dans ces conditions le module d'Young s'exprime par :

$$E = r_0 \left(\frac{d\sigma}{dr} \right)_{r=r_0} = \sigma_c \frac{\pi}{2(\alpha-1)} \quad (6)$$

L'énergie de cohésion par unité de surface que l'on note W est définie par : $W = \int_{r_0}^{(2\alpha-1)r_0} \sigma dr$,

Soit :

$$W = 4 \frac{\alpha-1}{\pi} r_0 \sigma_c \quad (7)$$

Comme $W = 2 \gamma_s$ où γ_s est l'énergie de création de surface (le terme 2 vient du fait que l'on crée deux surfaces lors de la rupture), on a donc :

$$\gamma_s = 2 \frac{\alpha-1}{\pi} r_0 \sigma_c \quad (8)$$

En éliminant α entre (6) et (8), on obtient $\gamma_s = \frac{\sigma_c}{E} r_0 \sigma_c$, soit : $\sigma_c = \sqrt{\frac{E \gamma_s}{r_0}}$ (9)

Or l'énergie de création de surface est de la forme $\gamma_s = \frac{Eb}{k}$ où $b=r_0$ est le vecteur de Burgers et k est une constante comprise entre 16 et 100, ce qui donne :

$$\frac{E}{10} \leq \sigma_c \leq \frac{E}{4} \quad (10)$$

La contrainte théorique de clivage donnée par les relations (4) ou (10) est de 10 à 1000 fois supérieure aux contraintes de rupture par clivage mesurées expérimentalement. Cet écart important s'explique par des mécanismes d'amplification locale de la contrainte liés à la présence dans les matériaux réels de défauts sous forme de fissures ou d'entailles aiguës qui concentrent les contraintes dans leur voisinage immédiat. La contrainte locale σ_L au voisinage d'un défaut est ainsi considérablement plus grande que la contrainte appliquée σ_a ($\sigma_L \gg \sigma_a$), ce qui permet d'atteindre la contrainte théorique de clivage localement, même sous des charges apparemment modérées.

III. 3. Concentration des contraintes près d'un défaut

Si on considère un défaut de forme elliptique de longueur $2a$ et de rayon à fond d'entaille ρ (figure III. 4), la contrainte locale à l'extrémité A est :

$$\sigma_L(A) = \sigma_a \left(1 + \frac{2a}{b} \right) = \sigma_a \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (11)$$

Dans le cas d'une entaille très aiguë, $\rho \ll a$ et on a alors :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (12)$$

Le facteur amplifiant la contrainte est le rapport $K_T = 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$ appelé facteur de concentration de contrainte.

Le facteur de concentration de contrainte K_T peut devenir très grand pour des entailles aiguës telles que des fissures.

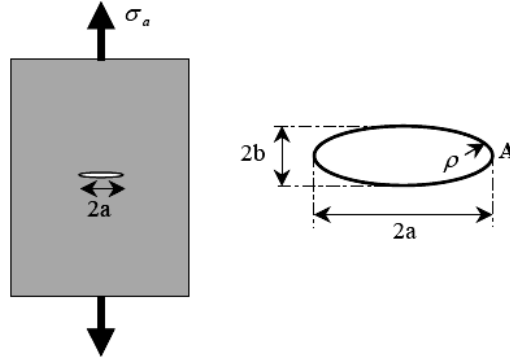


Fig. III. 4. Défaut elliptique dans une plaque infinie.

Si on prend par exemple le rayon à fond d'entaille ρ de l'ordre d'une distance inter atomique, la contrainte locale devient :

$$\sigma_L(A) \approx 2\sigma_a \sqrt{\frac{a}{r_0}} \quad (13)$$

En comparant les relations (9) et (13) ($\sigma_L(A) = \sigma_c$), il apparaît que la contrainte de rupture par clivage σ_a (macroscopique) mesurée expérimentalement est donnée par :

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{E\gamma_s}{4a}} \quad (14)$$

En considérant l'expression de l'énergie de création de surface $\gamma_s \approx \frac{Er_0}{100}$, on a :

$$\sigma_a = \frac{E}{20} \sqrt{\frac{\rho}{a}} \quad (15)$$

Si le rapport $\sqrt{\frac{\rho}{a}}$ est suffisamment petit, on obtient des valeurs de la contrainte de rupture par clivage σ_a comparables aux résultats expérimentaux.

La relation (14) est une estimation de la contrainte de rupture expérimentale par clivage car l'hypothèse de milieu continu n'est plus valable lorsqu'on se place à l'échelle atomique. Des simulations numériques où les liaisons entre atomes sont modélisées par des ressorts non linéaires,

montrent que cette contrainte de rupture par clivage est de la forme : $\sigma_a = \alpha \sqrt{\frac{E\gamma_s}{a}}$ (16)

Où α est une constante, proche de 1, qui dépend de la rigidité des ressorts simulant les liaisons atomiques ($\alpha = 1/2$ dans la relation 14).

III. 4. Energie de GRIFFITH

Soit un matériau contenant une fissure de longueur a (figure III. 5). Une extension Δa de cette fissure s'accompagnera des variations d'énergie suivantes :

$$\Delta W_{\text{ext}} = \Delta W_{\text{elast.}} + \Delta U \quad (17)$$

avec ΔW_{ext} la variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures),

$\Delta W_{\text{elast.}}$ la variation d'énergie élastique (emmagasinée),

ΔU l'énergie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa .

Dans la théorie initiale de Griffith qui s'applique à une rupture fragile, l'énergie ΔU correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau ($\Delta U = \Delta W_{\text{sép}}$ avec $\Delta W_{\text{sép}}$ l'énergie de séparation des surfaces). L'énergie de Griffith G est rapportée à l'unité de surface ; elle est définie à partir de ΔU par :

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\delta U}{\delta A} \quad (18)$$

Où $\Delta A = e \Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e .

Généralement, on considère une épaisseur unité ($e = 1$) et G rapportée à l'unité d'épaisseur est alors donnée par :

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\delta U}{\delta a} \quad (19)$$

Si on considère γ_s l'énergie spécifique de création de surface, on a :

$$G = \frac{\delta U}{\delta A} = 2\gamma_s \quad (20)$$

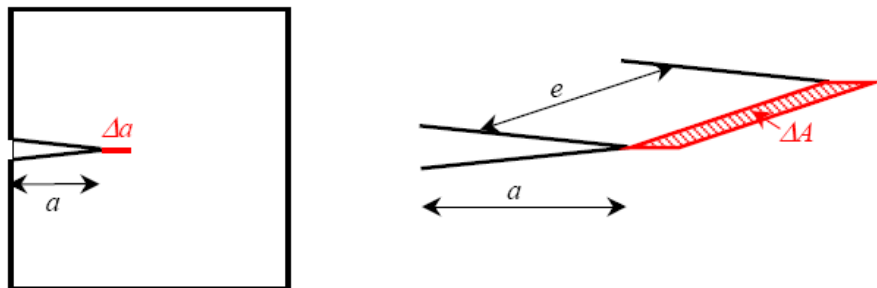


Fig. III. 5. Propagation de la fissure sur une longueur Δa .

Pour bien comprendre la signification de l'énergie de Griffith G ou taux de restitution d'énergie, on va envisager la propagation (dans une éprouvette d'épaisseur unité) dans les 2 cas classiques suivants :

- Propagation à force F imposée (figure III. 6b)
- Propagation à déplacement x imposé (figure III. 6c)

a - Propagation à déplacement imposé

$\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta W_{ext} = 0$; $W_{elast} = \frac{1}{2}Fx$, soit en introduisant la complaisance (c'est à dire l'inverse de la rigidité) $C = \frac{x}{F}$:

$$W_{elast} = \frac{1}{2}CF^2 = \frac{x^2}{2C} \Rightarrow \Delta W_{elast} = -\frac{x^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x \Delta a$$

l'énergie élastique emmagasinée décroît.

Comme $\Delta W_{ext} = 0 = \Delta U + \Delta W_{elast} \Rightarrow \Delta U = -\Delta W_{elast}$ et $G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)$, soit :

$$G = \frac{x^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x \quad \text{II.21}$$

b - Propagation à force imposée

$\Delta F = 0 \Rightarrow \Delta \left(\frac{x}{C} \right) = 0$, soit $\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta C}{C}$

$$\Delta W_{ext} = F \cdot \Delta x = \frac{Fx}{C} \cdot \Delta C \approx F^2 \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a$$

$$W_{elast} = \frac{1}{2}Fx = \frac{F^2}{2}C \text{ d'où } \Delta W_{elast} = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a$$

$\Delta U = \Delta W_{ext} - \Delta W_{elast} = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a$, et l'énergie de Griffith s'écrit alors :

$$G = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F$$

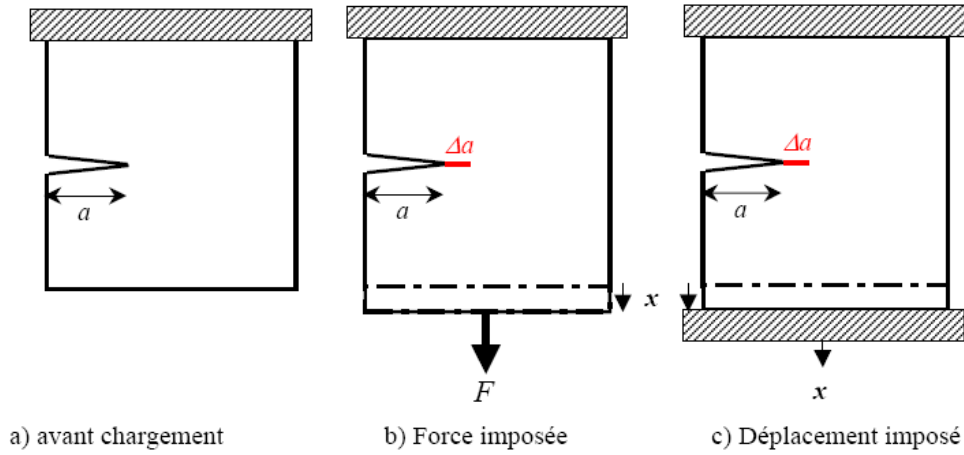


Fig. III. 6. Propagation stable à Force imposée ou à Déplacement imposé

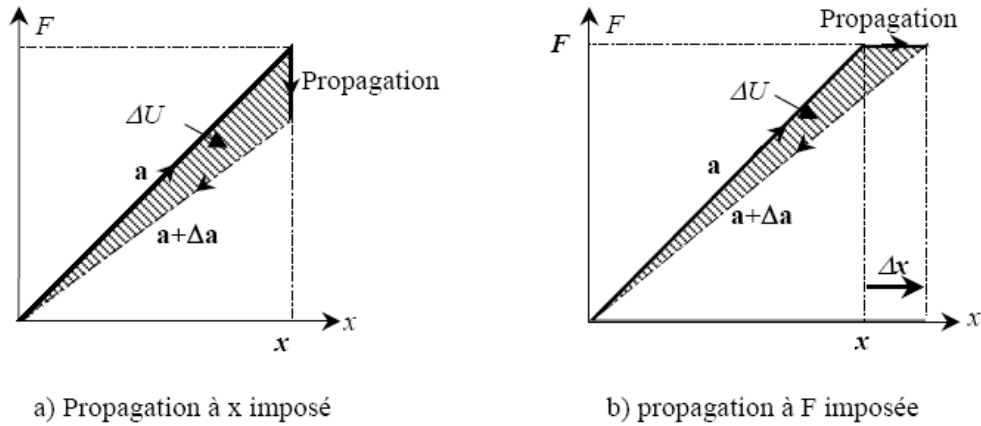


Fig. III. 7. Variation de la force lors d'une propagation de fissure à force imposée ou à déplacement imposé.

III. 5. Description du champ des contraintes à l'extrémité d'une fissure à l'aide du facteur d'intensité des contraintes :

La forme générale du champ des contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau dont le comportement est élastique et linéaire est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta)$$

Les coordonnées (r, θ) sont repérées par rapport à l'extrémité de la fissure (figure III. 8). Les fonctions adimensionnelles f_{ij} et g_{ij} dépendent du mode de sollicitation, et g_{ij} de l'état de contrainte et de la géométrie du corps fissuré aussi.

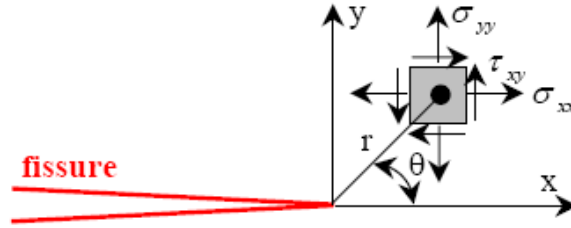


Fig. III. 8. Définition des axes (x, y) et des coordonnées (r, θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

Au voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure, les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$, c'est à dire lorsque $r \rightarrow 0$ elles tendent vers l'infini comme $1/\sqrt{r}$. Les autres termes d'ordre plus élevé de la relation (23) sont alors négligeables. La zone la plus critique est donc le voisinage immédiat de l'extrémité de la fissure et on ne $\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$ alors que les termes en $1/\sqrt{r}$, autrement dit que les champs de contraintes asymptotiques qui sont donc de la forme :

Ces champs asymptotiques peuvent être décrits à l'aide de l'approche de Westergaard. Selon le mode de sollicitation considéré - mode I, II ou III : figure II.9 - ils s'expriment à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes K_I , K_{II} ou K_{III} :

Remarque : Lorsque la structure fissurée est sollicitée dans les 3 modes simultanément, on a en appliquant le principe de superposition en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij}^{(total)} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}$$

Considérons maintenant le mode I seul par exemple. Lorsque $\theta=0$, c'est à dire lorsqu'on se place dans le plan de la fissure, au voisinage immédiat et en aval de l'extrémité de celle-ci, on a d'après les relations (25) :

$$\sigma_{xx}(\theta = 0) = \sigma_{yy}(\theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

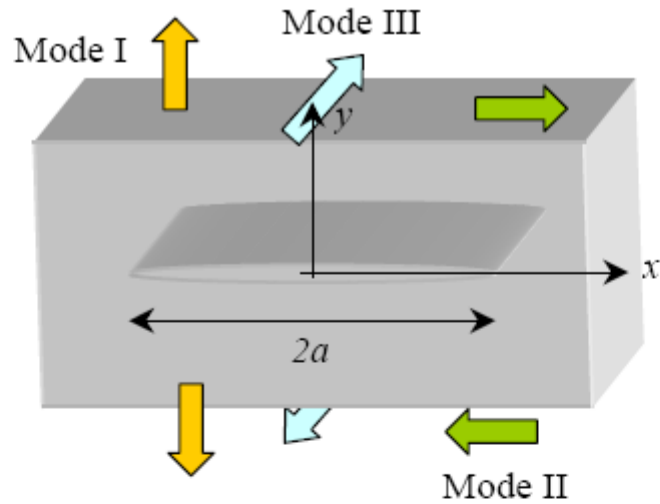


Figure II.9 : Définition des modes de sollicitation

En mode I

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases}$$

En mode II

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases}$$

En mode III

$$\begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

Le plan (x,y) de la fissure est donc principal pour le mode I. La figure III.10 est une représentation schématique de la variation de $\sigma_{yy}(\theta=0)$.

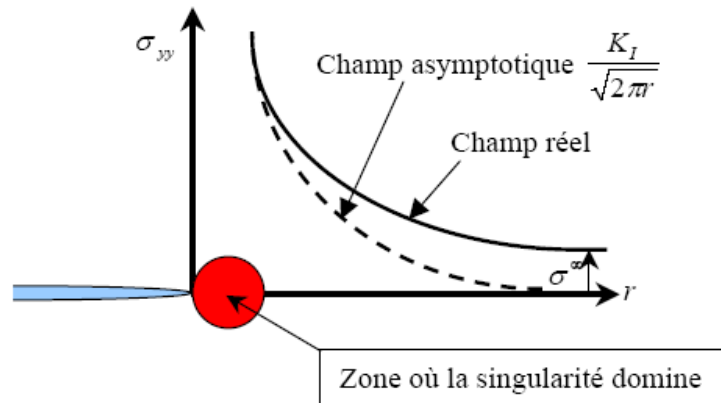


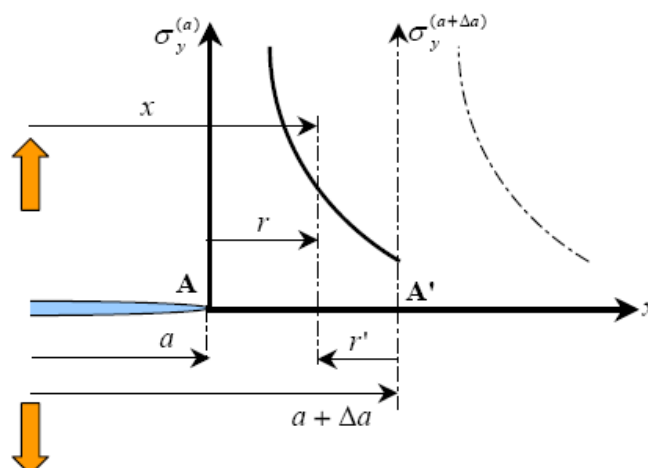
Fig. III. 10. Contrainte $\sigma_{yy}(\theta=0)$ perpendiculaire au plan de fissuration

Cette figure illustre la zone où la singularité domine c'est à dire lorsque la contrainte varie comme $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Au delà de cette zone, on retrouve les conditions limites loin de la zone fissurée et la contrainte σ_{yy} tend alors progressivement vers la contrainte appliquée σ^∞ .

Le facteur d'intensité des contraintes (FIC) K_I définit l'amplitude de la zone de singularité. Les contraintes dans cette zone augmentent proportionnellement à K_I qui caractérise alors complètement les conditions à l'extrémité de la fissure ; si le K_I est connu, on peut déterminer les champs des contraintes, des déformations et des déplacements en fonction des coordonnées (r, θ) . Le FIC est un des concepts les plus importants de la mécanique de la rupture.

III. 6. Relation entre le FIC et l'énergie de GRIFFITH

Pour les calculs, on considère une fissure élastique sollicitée en mode I (figure III.11).



Le déplacement du point d'abscisse x considéré est $u_y(r')$ avec $r' = a + \Delta a - x$ (fig. II.11).

Le travail de régression s'écrit donc :

$$\Delta W' = -\Delta U = 2 \int_{a+\Delta a}^a \frac{\sigma_y(r') u_y(r')}{2} dx = \frac{K_I^2}{\mu} \cdot \frac{1-\nu^*}{\pi} \underbrace{\int_{a+\Delta a}^a \sqrt{\frac{a+\Delta a-x}{x-a}} dx}_{(I)}$$

Pour calculer l'intégrale (I), on effectue le changement de variables suivant :

$$\frac{\Delta a}{x-a} = X \Rightarrow dx = -\frac{dX}{X^2} \Delta a \text{ et } \begin{cases} x = a & \Rightarrow X = \infty \\ x = a + \Delta a & \Rightarrow X = 1 \end{cases}$$

L'intégrale (I) devient alors $I = \Delta a \int_1^\infty \sqrt{X-1} \left(-\frac{dX}{X^2} \right)$ que l'on intègre par parties en posant :

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{X-1} \Rightarrow d\alpha = \frac{dX}{2\sqrt{X-1}} \\ d\beta = -\frac{dX}{X^2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{X} \end{cases} \Rightarrow I = \Delta a \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sqrt{X-1}}{X} \right]_1^\infty}_{=0} - \int_1^\infty \frac{dX}{2X\sqrt{X-1}} \right\}$$

$$\text{Soit } I = \Delta a \left[-\text{Arctg } \sqrt{X-1} \right]_1^\infty = -\frac{\pi}{2} \Delta a \text{ et } \Delta U = -\Delta W' = \frac{K_I^2}{\mu} \frac{(1-\nu^*)}{2} \Delta a$$

d'où finalement :

$$G_I = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} \Rightarrow G_I = \frac{K_I^2}{\mu} \left(\frac{1-\nu^*}{2} \right)$$

$$\text{En déformations planes : } \nu^* = \nu \text{ et } G_I = \frac{K_I^2}{E} (1-\nu^2) \quad \text{II.31}$$

$$\text{En contraintes planes : } \nu^* = \frac{\nu}{1+\nu} \text{ et } G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad \text{II.32}$$

Remarques : Des calculs similaires peuvent être effectués pour les modes II et III, en considérant toujours une fissure de longueur a qui se propage de Δa .

1- mode II :

Les champs des contraintes en aval et des déplacements en amont de l'extrémité de la fissure, s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{xy}(r, \theta = 0) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \\ u_x(r, \theta = \pi) = \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} (1 - \nu^*) \end{cases}$$

Les expressions étant les mêmes que pour le mode I, les mêmes calculs conduisent à :

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{2\mu} (1 - \nu^*) \Rightarrow \begin{cases} G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) & \text{en déformations planes} \\ G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} & \text{en contraintes planes} \end{cases} \quad \text{II.33}$$

2- Mode III :

Les champs des contraintes en aval et des déplacements en amont de l'extrémité de la fissure s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{yz}(r, \theta = 0) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \\ u_3(r, \theta = \pi) = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \end{cases}$$

Après calcul, l'énergie de Griffith en mode III s'exprime :

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \text{II.34}$$

3- Cas général :

Dans le cas général, lorsqu'on a coexistence des trois modes de changement, l'énergie de Griffith s'écrit :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad \text{soit} \quad G = \frac{1}{2\mu} \left[(1 - \nu^*) (K_I^2 + K_{II}^2) + K_{III}^2 \right] \quad \text{II.35a}$$

$$\text{En déformations planes :} \quad G = \frac{1}{E} \left[(1 - \nu^2) (K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu) K_{III}^2 \right] \quad \text{II.35b}$$

$$\text{En contraintes planes :} \quad G = \frac{1}{E} \left[K_I^2 + K_{II}^2 + (1 + \nu) K_{III}^2 \right] \quad \text{II.35c}$$

III. 7. Propagation brutale des fissures – Ténacité des matériaux

Etant donné une fissure et un mode de sollicitation, l'expérience montre que la propagation brutale de la fissure interviendra lorsque l'énergie de Griffith G atteindra une valeur critique notée G_C . Cette valeur critique G_C correspond à une valeur d'intensité des contraintes notée K_C .

K_C est relié à l'énergie critique G_C par les formules établies précédemment (III.31 à III.33).

Dans le cas général, on a :

$$G_C = \frac{K_{Ic}^2 + K_{IIc}^2}{E'} + \frac{K_{IIIc}^2}{2\mu} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E' = E & \text{en contraintes planes} \\ E' = E/(1-\nu^2) & \text{en déformations planes} \end{cases}$$

La valeur critique K_C , appelée **ténacité**, est caractéristique du matériau et du mode de changement ; G_C est aussi une mesure de la ténacité. Le mode I étant le plus endommageant, c'est la valeur critique K_{IC} qui est généralement utilisée pour caractériser les matériaux.

La **ténacité** K_{IC} joue le même rôle en MLR que la limite d'élasticité en mécanique classique. Elle dépend elle aussi d'un certain nombre de paramètres (températures d'essai, vitesse de déformation, épaisseur du matériau...).

Les évolutions caractéristiques de K_{IC} obtenues à partir d'essais normalisés sont représentées schématiquement sur la figure III.12.

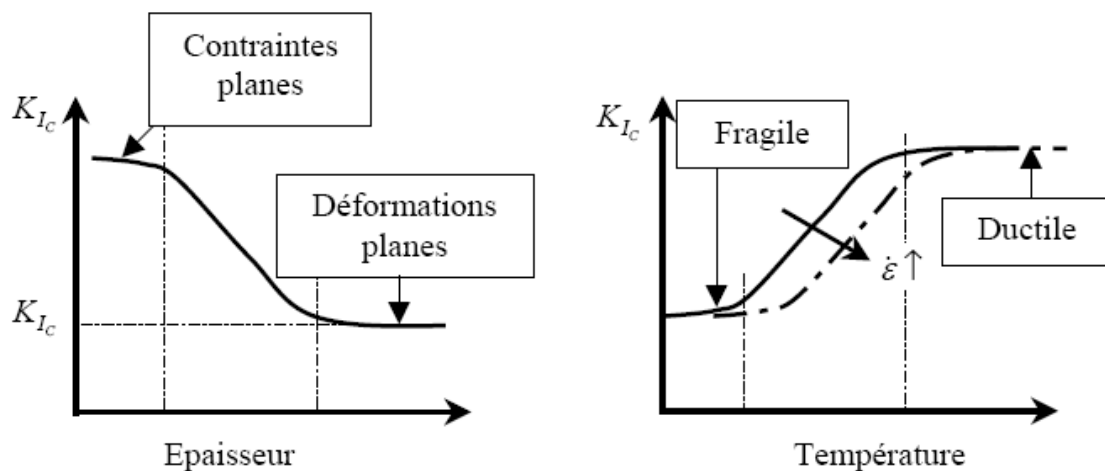


Fig. III. 12. Variations caractéristiques de la ténacité K_{IC} .

L'épaisseur influe sur l'état de contrainte. Dans les éprouvettes d'essais de faible épaisseur (plaques), chargées en mode I dans leur plan, l'état de contraintes planes est prédominant et la valeur critique du FIC en mode I est élevée, notamment dans les matériaux ductiles. Lorsque l'épaisseur augmente, on observe une transition vers un état de déformations planes, le FIC critique diminue et n'évolue plus au-delà d'une certaine épaisseur : c'est cette valeur minimale stabilisée du K_{IC} qui définit la ténacité du matériau.

Les mesures de ténacité sont faites sur des éprouvettes normalisées pré-fissurées en fatigue. Les normes ASTM d'essais imposent, pour une bonne mesure de la valeur stabilisée du K_{IC} :

$$a, e, (L - a) \geq 2,5 \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_E} \right)^2$$

Où a , e , L , σ_E sont respectivement la longueur de fissure, l'épaisseur et la largeur de l'éprouvette, et la limite d'élasticité du matériau.

L'influence de la température se caractérise aussi, dans les alliages métalliques tels que les aciers, par une transition entre un domaine fragile à faible température où la ténacité est faible, et un domaine ductile de forte ténacité aux températures élevées. La zone de transition ductile – fragile se déplace vers les températures plus grandes lorsque la vitesse d'essai $\dot{\epsilon}$ augmente. Ce comportement rend très délicat le dimensionnement des structures lorsqu'il y a des risques d'explosion, qui peut conduire à une augmentation brutale de la vitesse de déformation de la structure (cas notamment des centrales nucléaires).

Le vieillissement des matériaux influe sur la ténacité de la même manière que la vitesse de déformation. A mesure que les matériaux vieillissent, le domaine fragile s'étend aux dépens de domaine ductile avec translation de la zone de transition vers les températures plus grandes.

C'est pour cette raison que certains vieux ponts de structure métallique sont fermés l'hiver quand il gèle ; ils deviennent très fragiles (un peu comme le verre) et peuvent rompre à tout moment.

III. 8. Propagation instable - Courbe R de résistance à la rupture :

La théorie de Griffith prévoit une extension Δa d'une fissure de longueur a traversant

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{e \Delta a} = 2\gamma_s \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta U & \text{l'énergie dépensée lors de l'extension } \Delta a \\ 2\gamma_s & \text{l'énergie spécifique de création de surface} \end{cases}$$

l'épaisseur e de la structure, lorsque :

Ce critère de rupture s'applique aux matériaux fragiles.

L'expression du champ de contraintes à l'extrémité d'une fissure présente une singularité c'est à dire que la MLR prévoit des contraintes infinies. Cette répartition des contraintes est irréaliste dans la mesure où les matériaux ont une limite d'élasticité et qu'au delà on observe une plastification. C'est précisément ce qui se produit à l'extrémité d'une fissure.

Dans les matériaux ductiles, l'énergie dépensée pour plastifier l'extrémité de la fissure peut devenir très importante par rapport à l'énergie de création de surface. Il convient dans ces

conditions, de réécrire le bilan des variations d'énergie qui accompagnent une extension Δa d'une fissure :

$$\Delta W_{ext} = \Delta W_{elast.} + \Delta U$$

avec ΔU la variation d'énergie dépensée lors de l'extension, qui se décompose alors en :

$$\Delta U = \Delta W_{sep} + \Delta W_{plast} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta W_{sep} & \text{l'énergie de séparation des surfaces fissurées} \\ \Delta W_{plast} & \text{l'énergie dissipée dans la plastification} \end{cases}$$

ΔW_{sep} peut devenir négligeable devant ΔW_{plast} dans les matériaux très ductiles.

L'extension Δa de la fissure se produira donc lorsque l'énergie de Griffith atteint la valeur :

$$G = 2(\gamma_s + \gamma_p) \quad \text{avec} \quad 2\gamma_p \text{ l'énergie spécifique de plastification}$$

Cette extension de fissure peut être stable ou instable. Pour étudier la stabilité de la fissuration, on pose pour une épaisseur unité de la structure :

$$\Delta U = R\Delta a$$

R est la force de résistance à l'accroissement de la fissure ; on l'appelle tout simplement la force de résistance à la rupture. R , comme l'énergie de Griffith G , est homogène à une énergie par unité de surface ou à une force par unité d'épaisseur. Le tracé des variations de R avec la longueur de fissure correspond à ce qu'on appelle la courbe R .

Considérons une fissure de longueur initiale $20a$ dans une plaque de grandes dimensions soumise à une contrainte σ^∞ . A σ^∞ fixée, l'énergie de Griffith varie linéairement avec la longueur de fissure :

$$G = \frac{\pi(\sigma^\infty)^2 a}{E}, \quad \text{et} \quad G_c = \frac{\pi\sigma_R^2 a}{E} \quad \text{à la rupture}$$

La figure III. 13 présente schématiquement l'allure de la courbe R dans 2 types de matériaux :

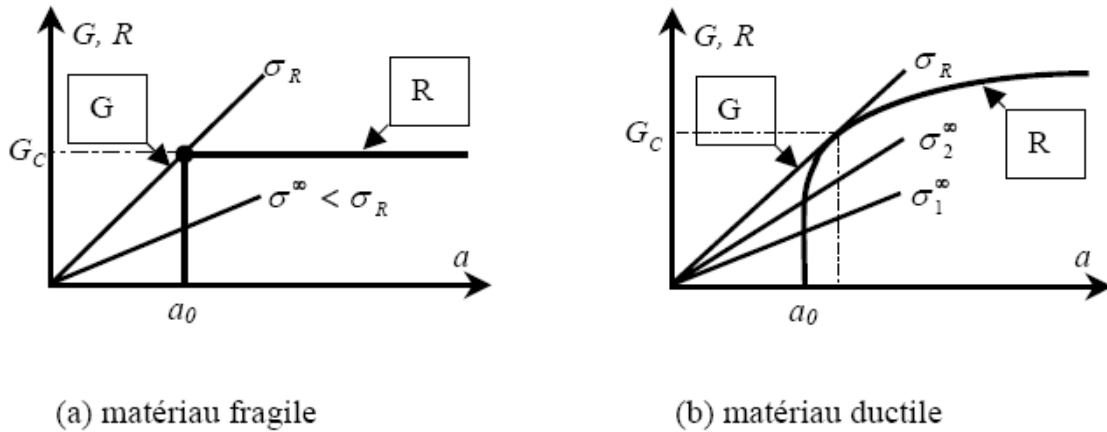


Fig. III. 13. Types de courbes R

La figure III. 13a, est typique de la résistance à la fissuration dans un matériau fragile. A $\sigma^\infty < \sigma_R$ la fissure reste stable ; à $\sigma^\infty = \sigma_R$, elle se propage brutalement. L'instabilité se produit car l'énergie G croît avec la longueur de fissure alors que la résistance à la fissuration du matériau demeure constante. La valeur critique G_C est alors mesurée sans ambiguïté.

La figure III. 13b représente la courbe R dans un matériau ductile. Lorsqu'on charge jusqu'à σ_1^∞ , la longueur de fissure reste constante. Entre σ_2^∞ et σ_R , la fissure se propage de façon stable mais lorsque la charge σ_R est atteinte, l'énergie G vient tangenter la courbe R et la propagation est alors brutale. La détermination de G_C est plus délicate dans ces conditions, car la propagation instable est précédée d'une propagation stable qui correspond à une déchirure ductile à fond de fissure. Au-delà de σ_2^∞ , la résistance à la rupture augmente ; ce comportement s'explique par l'existence d'une zone plastique à l'extrémité de la fissure qui concentre une énergie de résistance devant laquelle l'énergie nécessaire à provoquer les micro ruptures à fond de fissure est bien plus faible.

L'examen de l'allure des courbes R permet d'énoncer la condition de stabilité.

La fissuration est stable tant que :

$$G = R \text{ et } \frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}$$

La propagation instable intervient lorsque :

$$\frac{dG}{da} > \frac{dR}{da}.$$

La ténacité K_{IC} d'un matériau et l'énergie critique de Griffith sont deux grandeurs qui caractérisent la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure. Le lien entre ces

deux grandeurs est bien établi en MLR. Le critère de K_{IC} est également utilisé pour définir une dimension critique de défaut dans les opérations de contrôle.

Les essais expérimentaux montrent que la ténacité dépend de l'épaisseur de la structure (figure III. 12) et augmente lorsque celle-ci diminue. Les calculs et les mesures montrent par ailleurs que l'état de contraintes planes, prédominant dans les plaques minces, conduit à une plastification bien plus importante que l'état de déformations planes qui prévaut dans les structures épaisses ; la courbe R présente alors une allure du type de la figure III. 13b très marquée. Pour prévoir la rupture des plaques minces, on est donc amené à déterminer à la fois la déchirure stable et le critère d'instabilité. Le concept de courbe R qui est aussi utilisé pour relier l'accroissement Δa de la fissure au FIC, permet de prévoir cette déchirure ductile qui précède l'instabilité.