

Série N° 3

Exo1 : soit le tenseur de contraintes

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0,7\alpha & 3,6\alpha & 0 \\ 3,6\alpha & 2,8\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 7,6 \end{pmatrix} daN$$

1) Trouver le vecteur de contrainte dans chaque direction.

2) si $\alpha = 0$ quel est l'état des contraintes

Exo 3 : (3Pts)

Le tenseur de contraintes en un point A est donné par :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -4 \\ 0 & 10 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

1) On demande de trouver le vecteur contrainte sur un plan passant par A défini par sa normale :

$$\vec{n} = \frac{3}{7}\vec{e}_1 + \frac{6}{7}\vec{e}_2 + \frac{2}{7}\vec{e}_3$$

2) La contrainte normale et tangentielle sur la facette de direction $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exo 1 : Soit l'état de contraintes

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer :

a) Les invariants I_{1r} , I_{2r} , et I_{3r} du tenseur

b) ses principales contraintes $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ et $\sigma^{(3)}$

c) Et ses principales directions

d) Déterminer la matrice de rotation

Solution :

a) les invariants :

$$I_{1r} = \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 9$$

$$I_{2r} = \frac{1}{2}(\tau_{ii}\tau_{ij} - \tau_{ij}\tau_{ij}) = 20$$

$$I_{3r} = \det(\tau_{ij}) = 12$$

b) Principales directions :

Les solutions de l'équation caractéristique

$$-\sigma^3 + I_{1r}\sigma^2 - I_{2r}\sigma + I_{3r} = 0$$

Qui est

$$-\sigma^3 + 9\sigma^2 - 20\sigma + 12 = 0$$

Sont les contraintes principales requises : $\sigma^{(1)} = 1$, $\sigma^{(2)} = 2$, $\sigma^{(3)} = 6$

c) Directions principales :

Le système d'équations homogène :

$$(\tau_{ij} - \sigma^{(k)}\delta_{ij})n_j^{(k)} = 0$$

A les solutions :

$$\text{Pour } k = 1 : \quad n_1^{(1)} = 0, \quad n_2^{(1)} = 0, \quad n_3^{(1)} = \pm 1$$

$$\text{Pour } k = 2 : \quad n_1^{(2)} = \pm \frac{1}{2}, \quad n_2^{(2)} = \mp \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad n_3^{(2)} = 0$$

$$\text{Pour } k = 3 : \quad n_1^{(3)} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad n_2^{(3)} = \pm \frac{1}{2}, \quad n_3^{(3)} = 0$$

Les vecteurs solution $n_j^{(k)}$ sont déjà normalisées et sont donc des vecteurs unitaires. Leur direction est fixe sauf le signe. Le signe de deux vecteurs peut être choisi arbitrairement, que $\vec{n}^{(k)}$ constitue un système de coordonnées droitier.

Ainsi, la condition suivante doit être remplie :

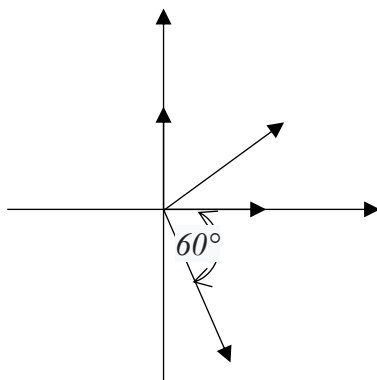
$$\vec{n}^{(1)} \times \vec{n}^{(2)} \stackrel{!}{=} \vec{n}^{(3)}$$

On Choisit $\vec{n}^{(1)} = \vec{e}_3, \quad \vec{n}^{(2)} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_2$

On trouve : $\vec{n}^{(3)} = \sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$

d) Transformation de l'axe principal :

$\vec{n}^{(1)}$ Coïncide avec $\vec{e}_3$, $\vec{n}^{(2)}$ et $\vec{n}^{(3)}$ sont dans le plan X_1X_2 .



Le système d'axes principal pivote par rapport au système de coordonnées d'origine. La matrice de rotation est calculée à partir de $a_{ij} = \cos(Lx_i, x'_j)$ et est présentée dans la matrice à partir de :

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de la matrice de transformation sont les composants des vecteurs propres $\vec{n}^{(k)}$ (appelés matrice modale). La transformation donne par :

$$\tau'_{kl} = a_{ik}a_{jl}\tau_{ij}$$

Les valeurs :

$$\tau'_{11} = 1, \quad \tau'_{22} = 2, \quad \tau'_{33} = 6 \text{ et } \tau'_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

de telle sorte que le tenseur prend la forme matricielle suivante :

$$\tau'_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \sigma^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{(3)} \end{pmatrix}$$

Le tenseur de contrainte dans les axes principaux est une matrice diagonale avec la contrainte principale sur la diagonale