

Série N° 1

Exo 1 : Evaluer les quantités suivantes

$$A_{ii} , B_{ijj} , B_{ij} , A_i T_{ij} \quad \text{avec } i, j = 1-3$$

Exo 2 : CALCULER LES EXPRESSIONS SUIVANTES

$$\delta_{ii} , \delta_{ij} \delta_{ij} , a_i \delta_{ij} , \varepsilon_{ijk} \cdot \varepsilon_{ijk} \quad \text{avec } i, j = 1-3$$

Exo 3 : prouver QUE

- $A_{ij} \cdot B_{jk} = C_{ik}$
- $X_i = a_{ij} Y_j$ et $Y_i = B_{ij} Z_j$. Déterminer $X_i = f(Z_k)$
- Réduire l'expression suivante : $R_{ik}(\delta_{jk} + U_{jk})\delta_{ji}$ (δ_{jk} delta de Kronecker)

Exo 4 : Ecrire chacune des égalités suivantes en utilisant la convention d'Einstein

$$\begin{aligned} a) \quad S &= B_{i1}A_{1j} + B_{i2}A_{2j} + \dots + B_{in}A_{nj} \\ b) \quad S &= (X_1)^2 + (X_2)^2 + \dots + (X_n)^2 \\ c) \quad S &= A_{11}^{1i1} + A_{12}^{1i2} + A_{21}^{2i1} + A_{22}^{2i2} \end{aligned}$$

Exo 5 :

Ecrire sous forme matricielle les expressions suivantes :

1- αu_i

2- $u_i v_i$

3- $a_{ij} n_j$

4- $\sigma_{ji} n_j$

5- $a_{ij} b_{jk}$

6- $a_{ik} b_{jl} c_{lk}$

7- $a_{ik} a_{jl} T_{kl}$

Exo 6 : Indiquer si les expressions suivantes sont correctes :

1. $a_i + \alpha b_i = c_i$

2. $\alpha + b_i c_i$

3. $T_{ij} + a_i b_i$

4. $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = C_{ik} b_j$

5. $T_{ijk} + a_i b_j - c_k$

6. $T_{jji} + \alpha a_i$

Serie N° 2

Exo 1 :

- *Ecrire la divergence du vecteur $\vec{V}$ en notation indicielle*

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

- *Calculer $\frac{\partial f_{ij}}{\partial n_j}$*

Exo 2 : *Exprimer chacune des opérations suivantes par des indices sur les composantes (α étant un scalaire ; u et v des vecteurs) T et S des tenseurs d'ordre 2)*

1. v

2. αv

3. $u + v$

4. $u \cdot v$

5. $u \times v$

6. $T \cdot u$

7. $T : S$

Exo 3 :

- 1- *Montrer qu'un tenseur T_{ij} quelconque se décompose de manière unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique.*
- 2- *Soit S_{ij} un tenseur d'ordre deux symétrique, A_{ij} un tenseur d'ordre deux antisymétrique. Prouver que $A_{ij}S_{ij} = 0$.*

Exo 4

En utilisant :

$$\epsilon_{pqs}\epsilon_{mnr} = \det \begin{bmatrix} \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{ms} \\ \delta_{np} & \delta_{nq} & \delta_{ns} \\ \delta_{rp} & \delta_{rq} & \delta_{rs} \end{bmatrix}$$

Prouver les identités suivantes :

a) $\epsilon_{pqs}\epsilon_{snr} = \delta_{pn}\delta_{qr} - \delta_{pr}\delta_{qn}$

b) $\epsilon_{pqs}\epsilon_{sqr} = -2\delta_{pr}$

Exo 5 : *supposons que le système de coordonnées X'_i soit déduit du système X_i par une rotation d'amplitude infinitésimale $d\epsilon$ autour de l'axe X_z . Si le sens rotation correspond à celui de la rotation qui amène la direction positive X_1 à la direction positive de X_2 par la plus petite rotation.*

Déterminer les coefficients C_{ij} de la transformation $X'_j = C_{ij} X_i$.

