

Chapitre V Equation générales des milieux continus

V.1- Relation entre contraintes et déformations :

Il est évident que la relation entre contrainte et déformation est linéaire pour des petites déformations. Cette relation est traduite par l'expression connue sous le nom de la loi de **HOOCK**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Avec σ : La contrainte.

E : Module d'élasticité.

ε : La déformation.

Remarque :

1. Il est à noter que cette relation n'est valable que dans le domaine élastique des matériaux
2. Comme la déformation est définie comme étant la longueur sur la longueur initiale $\varepsilon = l/l_{initiale}$ (Il est donc sans dimension. Il est clair d'après la relation que E a la même dimension qu'une contrainte dans le cas d'un élément à trois dimensions soumis à une contrainte uni-axial suivant ox :

La loi de HOOCK sera donnée par l'expression $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$

Suivant oy : $\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y$

Suivant oz : $\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$

On réalise la déformation ε_x dans le cas d'un élément tridimensionnel est toujours accompagné des déformations latérales ε_y et ε_z qui sont proportionnelles à ε_x , mais de signe opposé. Ils sont données sous l'action de σ_x par :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \varepsilon_x$$

ν : est appelé coefficient de POISSON du matériau

Remarque :

On considère généralement que E et ν ont les mêmes valeurs dans le cas d'une traction ou d'une compression.

V.2- loi de HOOCK généralisée :

Supposant que l'élément est soumis à un état de contraintes tridimensionnelles.

Si la longueur BB' est égale à l'unité et que σ_x est appliqué au premier lien on aura une variation $\Delta BB'$ qui sera ε_x .

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta BB'}{BB'} = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{Et comme } BB' \text{ est égale à l'unité} \Rightarrow \Delta BB' = \frac{\sigma_x}{E}$$

Sous l'effet de σ_x seule $\Rightarrow \Delta BB' = \frac{\sigma_x}{E}$

$$\sigma_y = E \cdot \varepsilon_y \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\frac{\Delta BB'}{BB'} = -\nu \frac{\sigma_y}{E} \Rightarrow \Delta BB' = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Sous l'effet de σ_y seule

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\frac{\Delta BB'}{BB'} = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \Rightarrow \Delta BB' = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

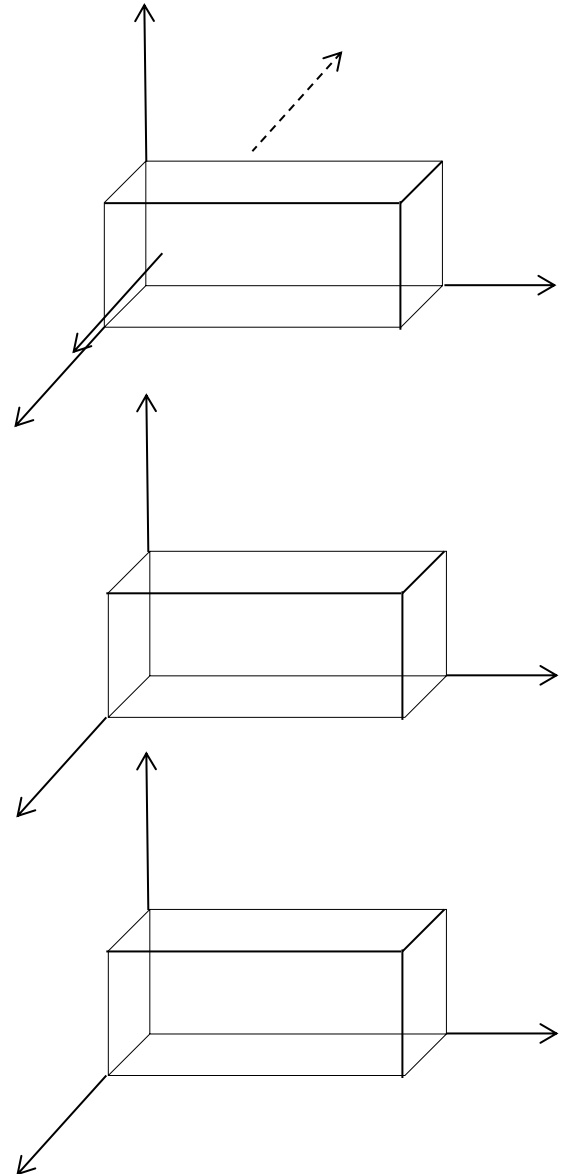
Sous l'effet des trois contraintes σ_x , σ_y et σ_z simultanément la fibre BB' va varier de $\left(+\frac{\sigma_x}{E}\right)$, $\left(-\nu \frac{\sigma_y}{E}\right)$ et $\left(-\nu \frac{\sigma_z}{E}\right)$

$$\Delta BB' = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta BB'}{BB'} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \quad \text{D'où } \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z)$$

Enfin

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad \text{La loi de HOOCK généralisée}$$



V.3- Déformations en fonction des contraintes :

Il est à noter que les contraintes normales produisent seulement des déformations normales mais aucune déformation de cisaillement.

Dans le cas général si un élément est soumis simultanément aux contraintes normales ou contraintes de cisaillement. Les déformations normales sont toujours provoquées par les contraintes normales par contre les déformations de cisaillement sont données par les relations empirique suivantes :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Où la constante G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi module rigidité.

Les constantes E , G et ν sont reliées par l'équation : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

Représentation matricielle : les six équations donnant ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} et γ_{zx} peuvent être réduite à une seule équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

Avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ on aura :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

V.4- Contraintes en fonction des déformations :

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_x + \lambda\tau \\ \sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_y + \lambda\tau \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 2G\varepsilon_z + \lambda\tau \\ \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \tau = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \end{cases}$$

Ces six équations sont appelées équations de LAME

λ et G sont appelés constantes de LAME

τ : représente la dilatation cubique ou bien l'invariant des déformations

Formulation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2G + \lambda) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (2G + \lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (2G + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

La formulation matricielle peut aussi être représentée en fonction de E et ν

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

V.5- Contraintes et déformations planes**1. Déformation plane :**

Définition : on dit qu'un élément en présence d'une déformation plane quand un corps soumis aux différentes contraintes possède une dimension très grande par rapport aux autres

$$\varepsilon_x = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \quad \begin{cases} z \gg x \\ z \gg y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_z \neq 0 \\ \varepsilon_z = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)) \end{aligned} \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_x)$$

Remarque :

Dans le cas d'une déformation plane σ_z n'est pas nul, mais il sera donné par $\sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_x)$

2. Contrainte plane :

On dit que qu'un élément est en présence des contraintes planes lorsque $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ et les seules contraintes non nulles seront σ_x , σ_y et τ_{xy}

Le meilleur exemple qu'on peut citer c'est le cas d'une feuille d'un cahier

- Contraintes en fonctions des déformations :

-

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

- Déformations en fonctions des contraintes

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x) \right) \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_x)$$

V.6- Résolution des problèmes d'élasticité :

1) Principe de superposition :

Soit un élément élastique de forme et dimension quelconque soumis un système de force F_1 constitue par des forces volumiques X_1, Y_1 et Z_1 par unité de volume et les forces surfaciques $\vec{X}_1, \vec{Y}_1$ et $\vec{Z}_1$ par unité de surface. Ce système de forces provoque des contraintes $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{z_1}, \tau_{xy_1}, \tau_{yz_1}, \tau_{zx_1}$ qui peuvent varier d'un élément à un autre.

Si on considère un autre système de de force F_2 constitue par des forces volumiques X_2, Y_2 et Z_2 par unité de volume et les forces surfaciques $\vec{X}_2, \vec{Y}_2$ et $\vec{Z}_2$ par unité de surface. Ce système de forces provoque des contraintes $\sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}, \sigma_{z_2}, \tau_{xy_2}, \tau_{yz_2}, \tau_{zx_2}$.