

Chapitre IV Spécification des déformations autour d'un point

VI.1- Déformation en fonction du déplacement :

Soit un corps solide déformable élastique contenant deux points p et q , si on désigne les coordonnées de p et q dans un système d'axe $oxyz$ avant déformation par : $p(x_p, y_p, z_p)$, $q(x_q, y_q, z_q)$. Après la déformation p subit des déplacements parallèles à (ox) , (oy) et (oz) désignées respectivement par u_p, v_p et w_p .

Idem le point q aura les composantes du déplacement u_q, v_q et w_q .

$$\left. \begin{matrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_p + u_p, y_p + v_p, z_p + w_p) \text{ Après déformation}$$

$$\left. \begin{matrix} u_q \\ v_q \\ w_q \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_q + u_q, y_q + v_q, z_q + w_q) \text{ Après déformation}$$

Déformation : variation de la longueur sur la longueur initiale.

Déplacement : variation de la position.

Extension $\neq$ raccourcissement.

Autrement dit : p et q aura une extension où un raccourcissement.

Δ tel que $L + \Delta = L'$ après déformation.

$$\left. \begin{matrix} \Delta > 0 & \text{extention} \\ \Delta < 0 & \text{reccourcissement} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Delta \text{ est une variation de longueur} \Rightarrow \text{déformation } \varepsilon = \frac{\Delta}{L}$$

$$L^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2$$

Après déformation :

$$L'^2 = (x_q + u_q - x_p - u_p)^2 + (y_q + v_q - y_p - v_p)^2 + (z_q + w_q - z_p - w_p)^2 \quad (1)$$

$$\text{On a: } L + \Delta = L' \Rightarrow L^2 + 2L\Delta + \Delta^2 = L'^2 \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow L'^2 = (x_q + u_q - x_p - u_p)^2 + (y_q + v_q - y_p - v_p)^2 + (z_q + w_q - z_p - w_p)^2$$

$$= L^2 + 2L\Delta + \Delta^2$$

$$L'^2 = \underbrace{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2}_{L^2} + 2[(x_q - x_p)(u_q - u_p) + (y_q - y_p)(v_q - v_p) + (z_q - z_p)(w_q - w_p)] + \underbrace{(u_q - u_p)^2 + (v_q - v_p)^2 + (w_q - w_p)^2}_{\text{négligeable}} = L^2 + 2L\Delta + \Delta^2$$

D'où : $L\Delta = (x_q - x_p)(u_q - u_p) + (y_q - y_p)(v_q - v_p) + (z_q - z_p)(w_q - w_p) \Leftrightarrow$

$$\Delta = \frac{(x_q - x_p)(u_q - u_p) + (y_q - y_p)(v_q - v_p) + (z_q - z_p)(w_q - w_p)}{L}$$

En fin

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L} = \frac{(x_q - x_p)(u_q - u_p) + (y_q - y_p)(v_q - v_p) + (z_q - z_p)(w_q - w_p)}{L^2}$$

Si on prend : $l = \frac{(x_q - x_p)}{L}$, $m = \frac{(y_q - y_p)}{L}$ et $n = \frac{(z_q - z_p)}{L}$

Alors $\varepsilon = \frac{l}{L}(u_q - u_p) + \frac{m}{L}(v_q - v_p) + \frac{n}{L}(w_q - w_p)$

Si on fait appel aux séries de TAYLOR :

$$u_q = x_q \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + y_q \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + z_q \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$u_p = x_p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + y_p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + z_p \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\Leftrightarrow (u_q - u_p) = (x_q - x_p) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + (y_q - y_p) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + (z_q - z_p) \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\Leftrightarrow (u_q - u_p) = lL \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Avec le même raisonnement on aura :

$$(v_q - v_p) = lL \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$(w_q - w_p) = lL \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{l}{L} \left[lL \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{m}{L} \left[lL \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{n}{L} \left[lL \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + mL \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + nL \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \varepsilon = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + ml \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + nl \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + lm \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + m^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + mn \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + nL \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + mn \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + n^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + ml \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + nl \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + mn \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right]$$

Si p et q sont orientés suivant l'axe OX :

$$\varepsilon_X = l_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_1^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + l_1 m_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + m_1 n_1 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + n_1 l_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Si p et q sont orientés suivant l'axe OY :

$$\varepsilon_Y = l_2^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_2^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_2^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + l_2 m_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + m_2 n_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + n_2 l_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Si p et q sont orientés suivant l'axe OZ :

$$\varepsilon_Z = l_3^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + m_3^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_3^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + l_3 m_3 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + m_3 n_3 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + n_3 l_3 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Remarque :

- OX coïncide avec ox $\begin{cases} l_1 = 1 \\ m_1 = n_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$
- OX coïncide avec oy $\begin{cases} l_2 = n_2 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$
- OX coïncide avec oz $\begin{cases} l_3 = m_3 = 0 \\ n_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

IV.2- Loi de transformation du tenseur de déformation :

$$\text{Sachant que : } \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$Et \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right), \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_X = l_1^2 \varepsilon_x + m_1^2 \varepsilon_y + n_1^2 \varepsilon_z + 2l_1 m_1 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + 2m_1 n_1 \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + 2n_1 l_1 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

$$\varepsilon_Y = l_2^2 \varepsilon_x + m_2^2 \varepsilon_y + n_2^2 \varepsilon_z + 2l_2 m_2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + 2m_2 n_2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + 2n_2 l_2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

$$\varepsilon_Z = l_3^2 \varepsilon_x + m_3^2 \varepsilon_y + n_3^2 \varepsilon_z + 2l_3 m_3 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + 2m_3 n_3 \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + 2n_3 l_3 \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

On peut aussi démontrer que :

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_{XY} \right) = l_1 l_2 \varepsilon_x + m_1 m_2 \varepsilon_y + n_1 n_2 \varepsilon_z + (l_1 m_2 + l_2 m_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + (m_1 n_2 + m_2 n_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + (l_1 n_2 + l_2 n_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_{XZ} \right) = l_1 l_3 \varepsilon_x + m_1 m_3 \varepsilon_y + n_1 n_3 \varepsilon_z + (l_1 m_3 + l_3 m_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + (m_1 n_3 + m_3 n_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + (l_1 n_3 + l_3 n_1) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2} \gamma_{YZ} \right) = l_2 l_3 \varepsilon_x + m_2 m_3 \varepsilon_y + n_2 n_3 \varepsilon_z + (l_2 m_3 + l_3 m_2) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} \right) + (m_2 n_3 + m_3 n_2) \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} \right) + (l_2 n_3 + l_3 n_2) \left(\frac{1}{2} \gamma_{xz} \right)$$

Les six (06) matrices peuvent être mises sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X & \frac{1}{2} \gamma_{XY} & \frac{1}{2} \gamma_{XZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \gamma_{YX} & \varepsilon_Y & \frac{1}{2} \gamma_{YZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2 & m_2 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}^t$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \gamma_{ZX} & \frac{1}{2} \gamma_{ZY} & \varepsilon_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}^t$$

Les trois (03) équations matricielles peuvent être à leur tour se regroupées en une seule équation matricielle.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X & \frac{1}{2}\gamma_{XY} & \frac{1}{2}\gamma_{XZ} \\ \frac{1}{2}\gamma_{YX} & \varepsilon_Y & \frac{1}{2}\gamma_{YZ} \\ \frac{1}{2}\gamma_{ZX} & \frac{1}{2}\gamma_{ZY} & \varepsilon_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}^t$$

D'où l'écriture :

$$\varepsilon_{OXYZ} = T \cdot \varepsilon_{oxyz} \cdot T^t$$

Remarque 1 : La matrice ε est transformée conformément à la loi de transformation de tenseur donc elle représente un tenseur de déformation.

Remarque 2 : Il est à noter que les éléments non diagonaux de la matrice ε_{OXYZ} sont affectés d'un coefficient $\left(\frac{1}{2}\right)$ dans le cas contraire ε ne peut être un tenseur de déformation.

Remarque 3 : En n'importe quel point O d'un élément élastique déformable, les tenseurs de déformation par rapport aux systèmes d'axe orthogonaux $oxyz$ et $OXYZ$ sont reliées par l'équation ci-dessus.

VI.3- déformation et direction principale :

Comme pour les contraintes principales, les déformations principales sont déterminées à partir de l'équation :

$$\left| \varepsilon_{oxyz} - \varepsilon_{p_i} \cdot I \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{p_i} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{p_i} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{p_i} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{p_i}^3 + \dots + \varepsilon_{p_i}^2 + \dots = 0$$

Si on développe ce déterminant, on obtient une équation polynomiale de 3^{ème} degré, on aura donc 3 solutions ε_{p_1} , ε_{p_2} , ε_{p_3} qui représentent les trois déformations principales, de chacune de

ces déformations, on résout l'équation : $(\varepsilon_{oxyz} - \varepsilon_{p_i} \cdot I) \begin{bmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{bmatrix} = 0$ avec $(i = 1,2,3)$

VI.4- Condition de compatibilité :

On a vu que les six (06) composantes de déformation $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zy}$ sont complètement défini par les trois (03) composantes de déplacement u, v, w . Donc les composantes de déformation ne sont pas des fonctions indépendantes. Pour chercher les relations de compatibilité de déformation, il faut noter que dans un élément élastique et déformable, les déformations et les déplacements, ainsi que leurs dérivées doivent être des fonctions continues.

1- Déformation de cisaillement $ox\ oy$:

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{xy}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\gamma_{xy}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_x \quad 1^{ère} \text{ équation de compatibilité}$$

2- Déformation de cisaillement $oy\ oz$:

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{yz}) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\gamma_{yz}) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\gamma_{yz}) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varepsilon_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_y \quad 2^{ième} \text{ équation de compatibilité}$$

3- Déformation de cisaillement $ox\ oz$:

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{xz}) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\gamma_{xz}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\gamma_{xz}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varepsilon_z \quad 3^{\text{ième}} \text{ équation de compatibilité}$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\varepsilon_x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xz}) \right] \quad 4^{\text{ième}} \text{ équation de compatibilité}$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\varepsilon_y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{yz}) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xz}) \right] \quad 5^{\text{ième}} \text{ équation de compatibilité}$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varepsilon_z) = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xz}) \right] \quad 6^{\text{ième}} \text{ équation de compatibilité}$$

Remarque :

- ✓ Les déformations dans n'importe quel problème d'élasticité doivent obligatoirement satisfaire ces six (06) équations de compatibilité.
- ✓ Les équations de compatibilité sont satisfaisantes pour garantir l'existence des composantes de déplacement u , v et w .

APPLICATION :

Démontrer les trois (03) équations de compatibilité suivantes :

$$2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\varepsilon_x) \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xz}) \right]}_I$$

Alors :

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} (\gamma_{xy}) - \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{yz}) + \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{xz}) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}}_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}_2 - \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}}_1 + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}}_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right] \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} [\varepsilon_x] \end{aligned}$$

De la même manière on peut montrer les deux autres équations.