

III.1- Condition d'équilibre différentielle

1) Condition d'équilibre : soit à l'intérieur d'un milieu continu une surface fermée « S » isolant son intérieur un volume V. la partie ainsi limitée est en équilibre sous l'action des différentes forces qui lui sont appliquées si et seulement si le système de toutes ces forces est équivalent à zéro (c.à.d.) la somme des forces est nulle et un moment résultant également nul. Ces forces sont de deux types différents. Se sont d'une part les actions de la partie extérieure sur la partie isolée appelées **forces surfaciques** comme exemple on peut citer :

- Pression hydrostatique entre solide et liquide
- Les forces de frottement entre deux éléments solide

Les forces surfaciques s'expriment en force par une unité de surface « N/mm² »

Se sont d'autre part, les forces de volume d'origine extérieure associées à la masse du corps et qui sont réparties sur tout le volume, elles s'expriment en force par unité de volume « N/mm³ ».

On peut citer :

- Les forces de gravitation
- Les forces magnétique et les forces d'inertie.

2) Equations d'équilibre :

Soit un élément quelconque en équilibre sous l'effet des forces surfaciques et volumiques. si on suppose qu'en un point A(x,y,z) de cet élément, les contraintes sont données comme :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz} \\ \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{en écrit ces contraintes} \\ \text{sous forme de matrice} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ le tenseur de contrainte et ces elements}$$

- ❖ Les éléments de la 1^{re} ligne représentent les contraintes qui agissent sur la face normale à l'axe ox
- ❖ Les éléments de la 2^{me} ligne représentent les contraintes qui agissent sur la face normale à l'axe oy
- ❖ Les éléments de la 3^{me} ligne représentent les contraintes qui agissent sur la face normale à l'axe oz

RQ : $\tau_{xz} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zx}$ et $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ On aura ces résultats seulement si l'élément est en équilibre et on dit que c'est un tenseur symétrique.

Puisque cet élément est en équilibre ($\Rightarrow$) $\Rightarrow$ le vecteur force résultant est nul et le vecteur force

résultant $\begin{cases} \text{Forces surféciques} \\ \text{Forces volumiques} \end{cases}$

La somme des forces surfaciques + la somme des volumiques = zéro (suivant les trois axes ox, oy, oz)

* Suivant ox : on calcul d'abord la somme des forces surfaciques (ox)

$$\text{Face } ABCD : -\sigma_{x1} dydz$$

$$\text{Face } A'B'C'D' : +\sigma_{x2} dydz$$

$$\text{Face } BB'CC' : \tau_{yx2} dxdz$$

$$\text{Face } AA'DD' : \tau_{yx1} dxdz$$

$$\text{Face } DCC'D' : \tau_{zx2} dxdy$$

$$\text{Face } ABB'A' : -\tau_{zx1} dxdy$$

La force de surface résultante suivant ox sera :

$$F_{S/ox} : (\sigma_{x2} - \sigma_{x1}) dydz + (\tau_{yx2} - \tau_{yx1}) dxdz + (\tau_{zx2} - \tau_{zx1}) dxdy$$

$$F_{S/ox} : \frac{(\sigma_{x2} - \sigma_{x1})}{dx} dxdydz + \frac{(\tau_{yx2} - \tau_{yx1})}{dy} dxdydz + \frac{(\tau_{zx2} - \tau_{zx1})}{dz} dxdydz$$

$$F_{S/ox} : \left(\frac{(\sigma_{x2} - \sigma_{x1})}{dx} + \frac{(\tau_{yx2} - \tau_{yx1})}{dy} + \frac{(\tau_{zx2} - \tau_{zx1})}{dz} \right) dxdydz$$

$$F_{S/ox} : \left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} \right) dxdydz$$

Mais en plus des forces de surface l'élément est soumis aux forces du volume de X, Y, Z par unité de volume dans les directions ox, oy, oz respectivement

Autrement dit la force du volume totale suivant ox est égale à X_{dxdydz}

Puisque l'élément est en équilibre donc on doit avoir :

Force totale de surface + forces totales de volume suivant (ox) égale à zéro

$$F_{S/ox} + F_{v/ox} = 0$$

$$\left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X \right) \underbrace{dxdydz}_{\neq 0} = 0 \quad (V = dxdydz)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X \right) = 0 \quad (1) \quad (1^{\text{ere}} \text{ équation d'équilibre})$$

* Suivant oy :

$$F_{S/oy} : \left(\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} \right) dxdydz$$

$$F_{v/oy} : Y dxdydz$$

L'élément est en équilibre : $F_{S/oy} + F_{V/oy} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\tau_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y \right) \underbrace{dxdydz}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\tau_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y \right) = 0 \quad (2) \quad (2eme \text{ équation d'équilibre})$$

* Suivant oz :

$$\left(\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\tau_z}{dz} + Z \right) = 0 \quad (3) \quad (3eme \text{ équation d'équilibre})$$

Les équations (1), (2) et (3) sont appelées équations d'équilibres différentielles pour un élément en équilibre au repos où en mouvement uniforme.

Remarque : il peut être vérifié que si l'élément n'est pas en équilibre ou s'il est en mouvement accéléré, les équations (1), (2) et (3) deviendront :

$$F_S + F_V + F_m = 0 \text{ avec } F_m = m\gamma \begin{cases} dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} / ox = -\rho dV \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ dm \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} / oy = -\rho dV \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} / oz = -\rho dV \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\left(\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X \right) dxdydz - \rho dV \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\tau_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \underbrace{dxdydz}_{\neq 0} = 0$$

D'où les équations différentielles en mouvement

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \frac{d\tau_{zx}}{dz} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{d\tau_{xy}}{dx} + \frac{d\sigma_y}{dy} + \frac{d\tau_{zy}}{dz} + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{yz}}{dy} + \frac{d\sigma_z}{dz} + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

III.2- Contraintes sur plan incliné (dans l'espace) :

Considérons le tétraèdre OBCA.

Les faces OAC, OAB et OBC sont orthogonales

La face oblique sera la face ABC. sachant les contraintes

Sur les faces OAC, OAB et OBC.

Le but est de déterminer les contraintes qui résultent sur la face ABC.

Sur l'effet des contraintes qui agissent sur les faces OAC, OAB et OBC : il résulte une contrainte σ_p sur le plan ABC, cette contrainte σ_p à une direction quelconque puisque cet élément-là est en

$$\text{équilibre} \Rightarrow \begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum F = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

* $\sum F_x = 0$ (l'équilibre de cet élément suivant ox)

$$\sigma_{px}(\text{surf ABC}) = \tau_{yx}(\text{surf OAC}) + \sigma_x(\text{surf OBC}) + \tau_{zx}(\text{surf OAB})$$

* $\sum F_y = 0$ (l'équilibre de cet élément suivant oy)

$$\sigma_{py}(\text{surf ABC}) = \sigma_y(\text{surf OAC}) + \tau_{zy}(\text{surf OAB}) + \tau_{xy}(\text{surf OBC})$$

* $\sum F_z = 0$ (l'équilibre de cet élément suivant oz)

$$\sigma_{pz}(\text{surf ABC}) = \sigma_z(\text{surf OAB}) + \tau_{yz}(\text{surf OAC}) + \tau_{xz}(\text{surf OBC})$$

On peut démontrer que :

$$\left. \begin{aligned} \text{surf OBC} &= \text{surf ABC} \cdot \cos(\widehat{Xox}) \\ \text{surf OAC} &= \text{surf ABC} \cdot \cos(\widehat{Xoy}) \\ \text{surf OAB} &= \text{surf ABC} \cdot \cos(\widehat{Xoz}) \end{aligned} \right\} (*) \text{ Avec } oX : \text{ un axe normal à la face ABC}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{Xox}) &= l_1 \\ \cos(\widehat{Xoy}) &= m_1 \\ \cos(\widehat{Xoz}) &= n_1 \end{aligned} \right\} \text{ les cosinus directeurs de } oX$$

$$\text{surf OBC} = l_1 \cdot \text{surf ABC}$$

$$(*) \text{ Devient : } \text{surf OAC} = m_1 \cdot \text{surf ABC}$$

$$\text{surf OAB} = n_1 \cdot \text{surf ABC}$$

On remplace les différentes surfaces par leurs expressions :

$$\sigma_{px}(\text{surf ABC}) = \tau_{yx}(m_1 \cdot \text{surf ABC}) + \sigma_x(l_1 \cdot \text{surf ABC}) + \tau_{zx}(n_1 \cdot \text{surf ABC})$$

$$\sigma_{py}(\text{surf ABC}) = \sigma_y(m_1 \cdot \text{surf ABC}) + \tau_{zy}(n_1 \cdot \text{surf ABC}) + \tau_{xy}(l_1 \cdot \text{surf ABC})$$

$$\sigma_{pz}(\text{surf ABC}) = \sigma_z(n_1 \cdot \text{surf ABC}) + \tau_{yz}(m_1 \cdot \text{surf ABC}) + \tau_{xz}(l_1 \cdot \text{surf ABC})$$

En simplifiant

$$\sigma_{px} = l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{yx} + n_1 \tau_{zx}$$

$$\sigma_{py} = l_1 \tau_{xy} + n_1 \sigma_y + n_1 \tau_{zx}$$

$$\sigma_{pz} = l_1 \tau_{xz} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z$$

Formulation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{=\sigma_{\text{otz}}^t} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} = \sigma_{\text{otz}}^t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

Tapez une équation ici.

III.3- Contraintes normales et tangentielles en plan incliné

Soit un système d'axe $OXYZ$ / OX normal au plan incliné, OY et OZ des axes orthogonaux OX

Les composantes de σ_p suivant :

- $OX \rightarrow$ les contraintes normal au plan incliné
- OX et $OZ \rightarrow$ les contraintes tangentielle au plan incliné

$$OX : \text{est défini par les cosinus} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{Xox}) \\ \cos(\widehat{Xoy}) \\ \cos(\widehat{Xoz}) \end{pmatrix}$$

$$OY : \text{est défini par les cosinus} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{Yox}) \\ \cos(\widehat{Yoy}) \\ \cos(\widehat{Yoz}) \end{pmatrix}$$

$$OZ : \text{est défini par les cosinus} \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{Zox}) \\ \cos(\widehat{Zoy}) \\ \cos(\widehat{Zoz}) \end{pmatrix}$$

Le système d'axes est défini par

$$\begin{pmatrix} \cos(\widehat{Xox}) & \cos(\widehat{Xoy}) & \cos(\widehat{Xoz}) \\ \cos(\widehat{Yox}) & \cos(\widehat{Yoy}) & \cos(\widehat{Yoz}) \\ \cos(\widehat{Zox}) & \cos(\widehat{Zoy}) & \cos(\widehat{Zoz}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

- La composante de σ_p sur OX est égale à la somme de ses projections

σ_{px} , σ_{py} et σ_{pz} sur OX on la note σ_X

$$\sigma_X = \sigma_{px} \cdot \cos(\widehat{XOx}) + \sigma_{py} \cdot \cos(\widehat{XOy}) + \sigma_{pz} \cdot \cos(\widehat{XOz})$$

- La composante de σ_p sur OY est égale à la somme de ses projections

σ_{px} , σ_{py} et σ_{pz} sur OY on la note τ_{XY}

$$\tau_{XY} = \sigma_{px} \cdot \cos(\widehat{YOx}) + \sigma_{py} \cdot \cos(\widehat{YOy}) + \sigma_{pz} \cdot \cos(\widehat{YOz})$$

- La composante de σ_p sur OZ est égale à la somme de ses projections

σ_{px} , σ_{py} et σ_{pz} sur OZ on la note τ_{XZ}

$$\tau_{XZ} = \sigma_{px} \cdot \cos(\widehat{ZOx}) + \sigma_{py} \cdot \cos(\widehat{ZOy}) + \sigma_{pz} \cdot \cos(\widehat{ZOz})$$

$$\sigma_X = l_1 \cdot \sigma_{px} + m_1 \cdot \sigma_{py} + n_1 \cdot \sigma_{pz}$$

$$\tau_{XY} = l_2 \cdot \sigma_{px} + m_2 \cdot \sigma_{py} + n_2 \cdot \sigma_{pz}$$

$$\tau_{XZ} = l_3 \cdot \sigma_{px} + m_3 \cdot \sigma_{py} + n_3 \cdot \sigma_{pz}$$

Représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix}$$

Or on a vu que :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} = \sigma^t_{oxyz} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

Si on remplace la colonne $\begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix}$ par son expression on aura :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}}_{\text{on l'appelle la matrice de transformation } T} \cdot \sigma^t_{oxyz} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X \\ \tau_{XY} \\ \tau_{XZ} \end{pmatrix} = T \cdot \sigma^t_{oxyz} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_X \quad \tau_{XY} \quad \tau_{XZ}) = (l_1 \quad m_1 \quad n_1) T^t \cdot \sigma_{oxyz}$$

Conclusion :

En importe quel point O d'un élément si le tenseur des contraintes par rapport à un système d'axe orthogonal $oxyz$ et donné, alors les contraintes normales et tangentielles sur n'importe quel plan normal à l'axe OX d'un autre système d'axes orthogonal $OXYZ$ sont données par l'équation précédente.

III.4- La loi de transformation des tenseurs :

Sur le pan normal à l'axe OX

$$(\sigma_X \quad \tau_{XY} \quad \tau_{XZ}) = (l_1 \quad m_1 \quad n_1) \cdot T^t \cdot \sigma_{oxyz}$$

Les contraintes qui agissent sur le plan normal à l'axe OY

$$(\tau_{YX} \quad \sigma_Y \quad \tau_{YZ}) = (l_2 \quad m_2 \quad n_2) \cdot T^t \cdot \sigma_{oxyz}$$

Et les contraintes qui agissent sur le plan normal à l'axe OZ

$$(\tau_{ZX} \quad \tau_{ZY} \quad \sigma_Z) = (l_3 \quad m_3 \quad n_3) \cdot T^t \cdot \sigma_{oxyz}$$

Formulation matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_X & \tau_{YX} & \tau_{ZX} \\ \tau_{XY} & \sigma_Y & \tau_{ZY} \\ \tau_{XZ} & \tau_{YZ} & \sigma_Z \end{pmatrix}}_{\text{tenseur de contr en OXYZ}} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}}_{\text{mat de transf}_T} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}}_{\text{tenseur de contr en oxyz}} \underbrace{\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}}_{\text{matrice}_{T^t}}$$

$$\sigma_{oXYZ} = T \cdot \sigma_{oxyz} \cdot T^t$$

Remarque 1 : A n'importe quel point o d'un élément, les tenseurs de contrainte par rapport à deux système d'axes orthogonaux $OXYZ$ et $oxyz$ sont reliés par l'équation :

$$\sigma_{oXYZ} = T \cdot \sigma_{oxyz} \cdot T^t$$

Remarque 2 : la transformation représentée par l'équation ci-dessus est appelée **loi de transformation de tenseur**

Toute matrice pouvant être transformée par cette loi représente est un tenseur.

III.5- Condition aux limites

On avait démontré que si un élément est en équilibre alors en n'importe quel point, en cet élément les contraintes doivent satisfaire les équations d'équilibre différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

Généralement ces contraintes varient d'un point à un autre à travers tout le volume de l'élément et quand on arrive à la surface limite, ces contraintes doivent équilibrer les forces par unité de surface extérieures qui agissent sur la surface de l'élément, pour obtenir les équations d'équilibre en un point de la surface limitée.

On rappelle que les équations suivantes

$$\begin{cases} \sigma_{px} = l_1 \sigma_x + m_1 \tau_{yx} + n_1 \tau_{zx} \\ \sigma_{py} = l_1 \tau_{xy} + n_1 \sigma_y + n_1 \tau_{zx} \\ \sigma_{pz} = l_1 \tau_{xz} + m_1 \tau_{yz} + n_1 \sigma_z \end{cases}$$

Donnant les trois composantes σ_{px} , σ_{py} et σ_{pz} de la contrainte σ_p sur un plan incliné à travers un point de l'élément, donc si ce plan incliné est tangent à la surface limite alors σ_p peut-être considéré comme contrainte externe sur la surface limite et les composantes σ_{px} , σ_{py} et σ_{pz} deviennent des composantes de la contrainte extérieur au point considéré et l , m et n les cosinus directeurs de l'axe normal à la surface limite. Si on note par $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ et $\bar{F}_z$ les composantes de la force de surface dans les directions ox , oy et oz . On aura alors :

$$\begin{cases} l \sigma_x + m \tau_{yx} + n \tau_{zx} = \bar{F}_x \\ l \tau_{xy} + m \sigma_y + n \tau_{zx} = \bar{F}_y \\ l \tau_{xz} + m \tau_{yz} + n \sigma_z = \bar{F}_z \end{cases} \text{ Appelées équations aux limites}$$

Avec $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ et $\bar{F}_z$ exprimées en **Force/Unité de surface**

l , m et n représentant les cosinus directeurs de la normale

En plan tangent à la surface extérieure on agit

III.6-Contraintes principales (cas tridimensionnel)

III.6.1- Définition : Dans ce qui suit on à essayer de démontrer que pour n'importe quel état de contraintes en un point O d'un élément, il existe généralement trois plan orthogonaux (normaux l'un par rapport à l'autre) sur lesquels les contraintes de cisaillement sont nulles.

- Chacun de ces plans est appelé **plan principal**.
- La direction de la normale à chacun de ces plans principaux est appelé **direction principale**.
- La contrainte normale agissent sur chacun de ces plans est appelée **contrainte principale**.

III.6.2- Contraintes et directions principales : on suppose que le plan incliné est un plan principal. Puisque ABC est supposé être un plan principal, donc il existe une seule contrainte qui agit sur ce plan et cette contrainte est normale ABC

(Les contraintes de cisaillement sont nulles)

Si les cosinus directeurs de OX $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$

$$\sigma_{px} = \sigma_p \cdot \cos(\widehat{XOx}) = l_1 \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_{py} = \sigma_p \cdot \cos(\widehat{XOy}) = m_1 \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_{pz} = \sigma_p \cdot \cos(\widehat{XOz}) = n_1 \cdot \sigma_p$$

On peut l'avoir aussi comme suit :

$$\sigma_{px} = l_1 \cdot \sigma_x + m_1 \cdot \tau_{yx} + n_1 \cdot \tau_{zx} = l_1 \cdot \sigma_x = l_1 \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_{py} = l_1 \cdot \tau_{xy} + m_1 \cdot \sigma_y + n_1 \cdot \tau_{zy} = m_1 \cdot \sigma_y = m_1 \cdot \sigma_p$$

$$\sigma_{pz} = l_1 \cdot \tau_{xz} + m_1 \cdot \tau_{zy} + n_1 \cdot \sigma_z = n_1 \cdot \sigma_z = n_1 \cdot \sigma_p$$

Représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} = \sigma_p \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{px} \\ \sigma_{py} \\ \sigma_{pz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_{(xyz)}^t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{(xyz)}^t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \sigma_p \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

Puisque le tenseur de contraintes est symétrique alors $\sigma^t = \sigma$

$$\sigma_{xyz} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \sigma_p \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\sigma_{xyz} - \sigma_p \cdot \mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{«Où } \mathbf{I} \text{ matrice unitaire d'ordre 3 »}$$

Si on développe cette «équation matricielle :

$$\left[\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} - \sigma_p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_p) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_p) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sigma_x - \sigma_p) \cdot l_1 + \tau_{yx} \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_1 + (\sigma_y - \sigma_p) \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_1 + \tau_{yz} \cdot m_1 + (\sigma_z - \sigma_p) \cdot n_1 = 0 \end{cases}$$

On doit résoudre un système d'équation de trois équations à quatre inconnues.

On dit qu'il s'agit d'un problème à résoudre.

On considère que $\det = 0 \Rightarrow$ plusieurs solutions

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_p) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_p) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_p) \end{vmatrix} = 0$$

$$\det = \sigma_p^3 - \sigma_p^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma_p(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yx}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xz}^2) = 0$$

Les solutions $\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}, \sigma_{p_3}$ représentent les trois contraintes principales

Si on reprend l'équation matricielle :

$$(\sigma_{xyz} - \sigma_p \cdot \mathbf{I}) \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0. \text{ On remplace } \sigma_p \text{ par chacune de ces valeurs :}$$

- Pour $\sigma_p = \sigma_{p_1}$ l'équation devient

- $$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_{p_1}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{p_1}) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{p_1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_{p_1}) \cdot l_1 + \tau_{yx} \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_1 + (\sigma_y - \sigma_{p_1}) \cdot m_1 + \tau_{zx} \cdot n_1 = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_1 + \tau_{yz} \cdot m_1 + (\sigma_z - \sigma_{p_1}) \cdot n_1 = 0 \end{cases} \quad \text{on trouve } \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

4^{ième} équation : $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$

l_1, m_1, n_1 Cosinus direct du 1^{er} plan principal sur lequel agit σ_{p_1}

- Pour $\sigma_p = \sigma_{p_2}$ l'équation devient
- $$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_{p_2}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{p_2}) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{p_2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_{p_2}) \cdot l_2 + \tau_{yx} \cdot m_2 + \tau_{zx} \cdot n_2 = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_2 + (\sigma_y - \sigma_{p_2}) \cdot m_2 + \tau_{zx} \cdot n_2 = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_2 + \tau_{yz} \cdot m_2 + (\sigma_z - \sigma_{p_2}) \cdot n_2 = 0 \end{cases} \quad \text{on trouve } \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

4^{ième} équation : $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$

l_2, m_2, n_2 Cosinus direct du 2^{ème} plan principal sur lequel agit

σ_{p_2}

- Pour $\sigma_p = \sigma_{p_3}$ l'équation devient
- $$\begin{pmatrix} (\sigma_x - \sigma_{p_3}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{p_3}) & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{p_3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_{p_3}) \cdot l_3 + \tau_{yx} \cdot m_3 + \tau_{zx} \cdot n_3 = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l_3 + (\sigma_y - \sigma_{p_3}) \cdot m_3 + \tau_{zx} \cdot n_3 = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l_3 + \tau_{yz} \cdot m_3 + (\sigma_z - \sigma_{p_3}) \cdot n_3 = 0 \end{cases} \quad \text{on trouve } \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

4^{ième} équation : $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$

l_3, m_3, n_3 Cosinus direct du 3^{ème} plan principal sur lequel agit

σ_{p_3}

Les quantités entre parenthèse dans l'équation de $\det = 0$ restent invariables et sont en général indépendantes de l'orientation du trièdre de référence.

On dit que le tenseur des contraintes à trois invariants indépendants.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \det(T)$$

Où

I_1 : Invariant linéaire.

I_2 : Invariant quadratique.

I_3 : Invariant cubique.

Avec ces notations l'équation caractéristique du problème propre $\det = 0$ peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$